sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: unità di misura veneziane, problemi sulle torri, volumi di granai, altezze di alberi, cerchi e quadrati inscritti e circoscritti, triangolo equilatero

ZIBALDONE DA CANAL

NOTE

* I pochi disegni contenuti nel manoscritto sono stati rifatti cercando di rispettare i rapporti di scala. Ai vertici delle figure sono state scritte le lettere *maiuscole* (assenti nel manoscritto), seguendo una disposizione quasi sempre *oraria*.
* Nel manoscritto i problemi geometrici non sono sempre accompagnati da schemi esplicativi: in questo articolo sono stati aggiunti per facilitare le soluzioni.
* Sono stati aggiunti dei grafici anche nei problemi che ne erano privi.
* I problemi sono definiti dall'Anonimo autore "Ragioni": "Fa' me questa raxion…". In questo articolo è stato anche usato il termine equivalente "problema". Le soluzioni richiamano il valore approssimato di 22/7 attribuito a π. Alcuni problemi applicano il cosiddetto teorema di Pitagora, senza mai fare ricorso a alcuna dimostrazione. I problemi geometrici contenuti sono ben poca cosa se confrontati con quelli descritti in alcuni coevi trattati toscani.
* La numerazione qui usata segue quella delle pagine del manoscritto: numero pagina/r(ecto) o v(erso) e una lettera maiuscola progressiva: A, B, C… nel caso di più Ragioni contenute o iniziate nella stessa pagina
* I problemi sono risolti pure usando metodi moderni, cercando di non discostarsi troppo dal testo originale.
* Per semplicità, il simbolo della divisione è stato reso con quello della barra: "/".
* I numeri misti, contenenti una parte intera e una frazionaria, sono sempre racchiusi fra parentesi tonde: (3 + 1/7).
* In alcune Ragioni le lunghezze e le superfici non sono espresse in alcuna unità di misura: qui, talvolta si è aggiunta la generica dizione "unità" e "unità quadrate".
* Alcune delle Ragioni contenute nello "Zibaldone da Canal" sono contenute in un altro manoscritto, lo "Zibaldone Riccardiano", anch'esso di area veneziana. Lo "Zibaldone da Canal" è attualmente conservato presso l'Università di Yale (a New Haven nel Connecticut, USA). Esso consta di 69 carte: nelle carte dalla 1 *recto* alla 43 *verso* sono contenuti problemi matematici; alcuni di essi hanno natura geometrica: in questo articolo sono descritti soltanto i problemi geometrici.
* La parte più antica di questo manoscritto risale all'inizio del Trecento: alla carta 26 verso è indicata la data del 20 agosto 1311. La sua stesura sembra essere stata completata entro il Trecento.
* Il manoscritto è stato in possesso nel 1422 di Niccolò da Canal di Bartolomeo, esponente della potente famiglia veneziana dei Canal o "da Canal".
* I problemi sono definiti dall'Anonimo autore "Ragioni": "Fa'-me questa raxion…". In questo articolo è stato anche usato il termine equivalente "problema".

PREMESSA METROLOGICA

Uno degli studi più attendibili sulle unità di misura usate a Venezia dal Medioevo in poi è quello di monsignor *Vittorio Piva*, citato in bibliografia.

Le equivalenze con le unità del sistema metrico decimale devono essere prese con una certa approssimazione stante il tempo, espresso in secoli, trascorso dalla prima introduzione delle unità medievali. Alcune ricalcano le più antiche unità di misura romane.

Dallo studio di Vittorio Piva sono riportate le unità di seguito descritte.

Unità di misura della lunghezza

Il sistema era basato sul piede, più lungo di quello romano (pari a 0,2957 m):

* 1 piede [da fabbrica e da terra] = 12 once = 0,347735 m.

I sottomultipli del piede:

* 1 oncia = 0,028978 m = 12 linee;
* 1 linea = 10 decimi = 2,415 mm;
* 1 decimo = 0,2415 mm.

I multipli del piede:

* 1 pertica piccola o *ghebbo* = (4 + ½) piedi = 1,564807 m;
* 1 passo = 5 piedi = 1,738674 m;
* 1 pertica grande o *cavezzo* = 6 piedi = 2,086409 m;
* 1 miglio veneto = 1000 passi = 1738,674 m.

Le *braccia*:

* 1 braccio da lana = 4 quarte da lana = 0,683366 m;
* 1 quarta da lana = 4 quartini da lana = 0,170841 m;
* 1 quartino da lana = 0,042710 m.

* 1 braccio da seta = 4 quarte da seta = 0,638721 m;
* 1 quarta da seta = 4 quartini da seta = 0,159680 m;
* 1 quartino da seta = 0,03992 m.

Unità di misura di superficie

* 1 campo = 4 quarti = 3656,605680 m^2;
* 1 quarto = 210 tavole = 914,151420 m^2;
* 1 tavola o cavezzo quadrato = 36 $piedi^2$ = 4,353102 m^2;
* 1 piede quadrato = 0,120919 m^2;
* 1000 passi quadrati = 3022,988060 m^2;
* 1000 ghebbi quadrati = 2448,60975 m^2;
* 1 passo quadrato = 25 piedi quadrati = 3,022988 m^2;
* 1 ghebbo quadrato = (20 + ¼) piedi quadrati = 2,44861 m^2.

Unità di misura di volume

* 1 passo cubico = 125 piedi cubici = 5,256 m^3;
* 1 piede cubico = 0,042048 m^3.

Unità di misura dei pesi

Erano usati due sistemi di unità di misura:

* *peso grosso* per i metalli, la lana, il cotone, l'uva passa e l'olio;
* *peso sottile* per i medicinali, il sapone, il caffè, lo zucchero, il riso.

Fra il peso grosso e quello sottile esisteva il rapporto di 12 a 19: 12 libbre grosse valevano 19 libbre sottili.

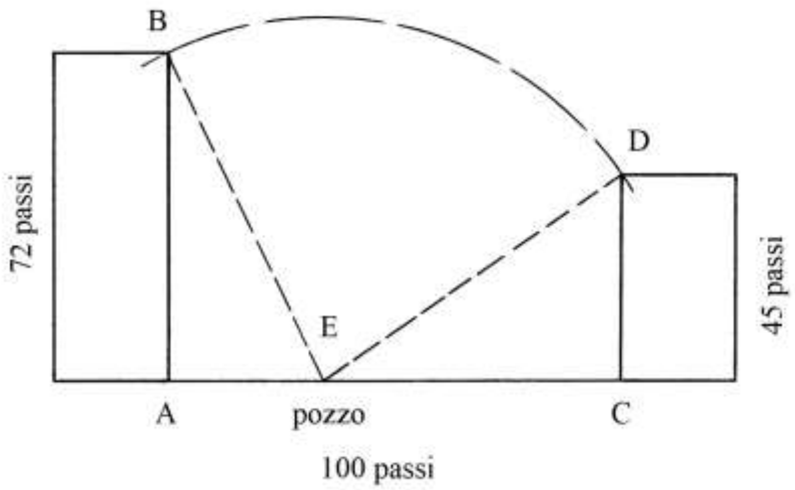
* 1 libbra grossa = 12 once grosse = 0,476999 kg;
* 1 oncia grossa = 0,03975 kg;
* 1 libbra sottile = 12 once sottili = 0,301230 kg;
* 1 oncia sottile = 0,025102 kg.

[c 14 v] Pozzo fra due torri

Due torri sono alte 72 e 45 passi e sono distanziate di 100 passi.

Nel terreno fra le due torri deve essere costruito un pozzo, equidistante dalle cime delle due torri.

La Ragione chiede la distanza del pozzo dal piede della torre più alta, quella da 72 passi (AE nella figura)



La soluzione impiegata dall'Autore è la seguente:

* sommare le altezze delle due torri: 72 + 42 = 117;
* dividere 100 per 117: 100/117 = 100/117 = (99 + 1)/117 = 99/117 + 1/117 = = (11/13 + 1/117) [l'Autore indica il risultato nella forma (11/13 1/117) senza scrivere fra le due frazioni il simbolo dell'addizione "+"];
* moltiplicare per l'altezza della torre più bassa: (11/13 + 1/117) * 45 = (38 + 6/13) passi, lunghezza di AE;
* moltiplicare (11/13 + 1/117) per l'altezza della prima torre: (11/13 + 1/117) * 72 = = (61 + 7/13) passi, lunghezza di EC.

- APPROFONDIMENTO -

Una soluzione semplice e corretta richiede l'uso dell'algebra elementare.

Fissiamo AE = x e EC = AC – AE = 100 – x.

ABE e DCE sono due triangoli rettangoli: le loro ipotenuse hanno uguale lunghezza:

BE = DE.

Le lunghezze delle due ipotenuse sono date dalle seguenti espressioni:

$BE^2 = BA^2 + AE^2 = 72^2 + x^2$
$DE^2 = DC^2 + EC^2 = 45^2 + (100 – x)^2$.

Uguagliando le due espressioni si ha:

$BE^2 = DE^2$
$72^2 + x^2 = 45^2 + (100 – x)^2$
$5184 + x^2 = 2025 + 10000 – 200 * x + x^2$
$200 * x = 6841$ e
$x = 6841/200 = (34 + 41/200)$ passi = AE.

La lunghezza di EC è:

EC = AC – AE = 100 – (34 + 41/200) = (65 + 159/200) passi.

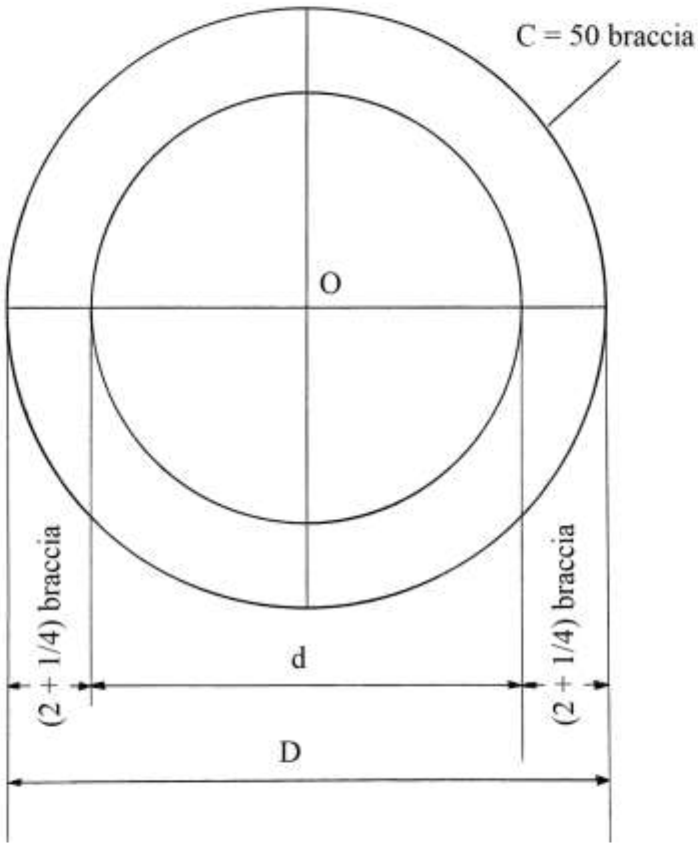
I risultati dell'Anonimo autore dello Zibaldone sono errati e non di poco.

- -

[c 17 v A] <u>Una torre</u>

Una torre ha circonferenza esterna C lunga 50 braccia. Lo spessore del muro è (2 + ¼) braccia.

La Ragione chiede la lunghezza della circonferenza interna.



La soluzione usata dall'Autore è la seguente:

* moltiplicare lo spessore del muro per 4: (2 + ¼) * 4 = 9;
* moltiplicare per 2: 9 * 2 = 18;
* sottrarre dalla lunghezza della circonferenza: 50 – 18 = 32 braccia, lunghezza della circonferenza interna.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione dell'Autore presenta dei dubbi.

D è il diametro del cerchio esterno e *d* di quello interno.

C è la circonferenza esterna e *c* quella interna.

Il diametro D è dato da:

$$D = C/\pi = 50/(22/7) = (50 * 7)/22 = 350/22 = 175/11 \text{ braccia.}$$

Il diametro *d* della circonferenza interna è:

$$d = D - 2 * (2 + ¼) = 350/22 - 2 * 9/4 = 350/22 - 9/2 = (350 - 99)/22 = 251/22 =$$
$$= (11 + 9/22) \text{ braccia.}$$

La circonferenza interna, *c*, è lunga:

$$c = 22/7 * d = 22/7 * 251/22 = 251/7 = (35 + 6/7) \text{ braccia.}$$

Il risultato fornito dall'Anonimo è errato per difetto: egli ha impiegato un metodo che è riassunto nella seguente formula:

$c = C - 4 * (2 + ¼)$, dove $(2 + ¼)$ braccia è lo spessore del muro.

La più corretta formula è:

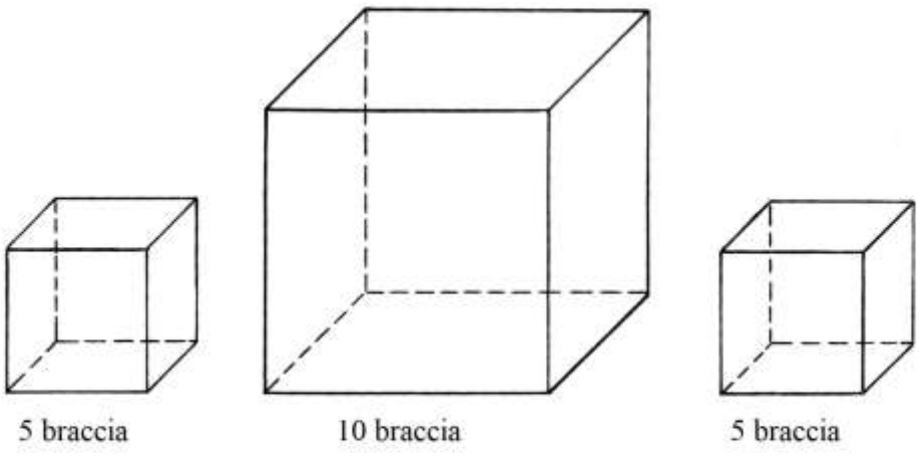
$$c = C - \pi * 2 * (2 + ¼) = C - 22/7 * 2 * 9/4 = 50 - 99/7 = 50 - (14 + 1/7) =$$
$$= (35 + 6/7) \text{ braccia.}$$

Nei fatti, sembra che l'Autore abbia attribuito a "π" il valore approssimato per eccesso di 4, invece di quello largamente usato nel corso del Medioevo: "22/7".

- -

[c 17 v B] Due granai

Un granaio ha la forma di un cubo con spigoli lunghi 10 braccia. Deve essere riempito di frumento, ma senza poter procedere a misurazioni: deve essere utilizzato un secondo granaio che ha anch'esso forma cubica con spigoli lunghi 5 braccia.



La Ragione chiede il numero che rappresenta la proporzione esistente fra i volumi dei due granai.

La soluzione del problema ipotizza la presenza di ben due granai cubici con lati lunghi 5 braccia.

L'Anonimo introduce un'unità di misura della capacità usata per gli aridi: lo *staio,* equivalente al volume di *un braccio cubico* ("quaro", *quadro,* nel manoscritto). Nel Medioevo e oltre vi erano difficoltà a definire *cubica* un'unità di misura del volume e allo scopo era talvolta usata l'unità di superficie, in qualche caso con l'aggiunta di un aggettivo: ad esempio, l'abacista fiorentino Pier Maria Calandri (1457-1508) chiamava il *braccio da panno cubico* con l'espressione "*braccio quadro corporeo*".

Il volume del primo granaio è:

$V_{\text{PRIMO}} = 10^3 = 1000$ braccia^3 = 1000 staia.

Il volume di ciascuno dei granai più piccoli è:

$V_{\text{PICCOLI}} = 5^3 = 125$ braccia^3 = 125 staia.

L'insieme dei due granai piccoli ha volume:

V = 2 * 125 = 250 staia.

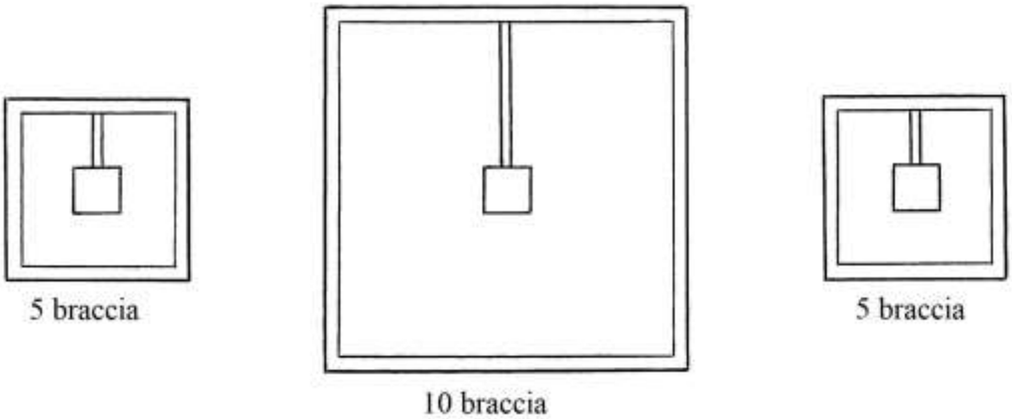
Per riempire il primo granaio occorre usare il frumento contenuto in *4* coppie di edifici piccoli:

$V_{\text{PRIMO}}/V = 1000/250 = 4$.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema presente nella tavola n. 13 allegata al volume contenente questo Zibaldone, curato da Alfredo Stussi (e citato in bibliografia) è piuttosto scadente perché deriva da una fotocopia del manoscritto originale. Qui non è riprodotto.

Pare che nell'originale i tre granai siano rappresentati in pianta. Il grafico che segue tenta un'interpretazione dell'originale:

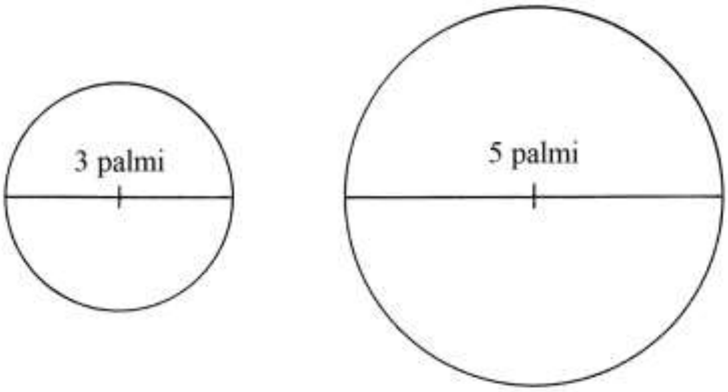


- -

[c 19 r A] <u>Due sfere di cera</u>

Un problema pressoché uguale è contenuto nella carta 50 *recto* del manoscritto noto come "*Zibaldone Riccardiano 2161*".

Un pane di cera di forma sferica ha diametro 3 *palmi* e pesa 5 once. Un secondo pane di cera ha la stessa forma e diametro di 5 palmi. La Ragione chiede il peso della seconda sfera.



Il volume della prima sfera è:

$V_{\text{PRIMA}} = 3^3 = 27$ palmi^3.

Il volume della seconda sfera è:

$V_{\text{SECONDA}} = 5^3 = 125$ palmi^3.

Il peso o massa di un corpo è proporzionale al suo volume e, nel caso di una sfera, al cubo del suo diametro.

La soluzione di questo problema è data da una semplice proporzione:

$V_{\text{PRIMA}} : V_{\text{SECONDA}} = \text{Peso}_{\text{PRIMA}} : \text{Peso}_{\text{SECONDA}}$ da cui

$\text{Peso}_{\text{SECONDA}} = (V_{\text{SECONDA}} * \text{Peso}_{\text{PRIMA}})/V_{\text{PRIMA}} =$

$= (125 * 5)/27 = (23 + 4/7)$ once.

- APPROFONDIMENTO -

Dato che il sistema metrologico veneziano era basato sul piede, avanziamo un'ipotesi.

La tabella che segue presenta i *sottomultipli* del piede romano, sulla base della relazione 1 piede = 29,57 cm:

Nome	Rapporto con il piede	Lunghezza in cm
dito (digitus)	1/16	1,848
oncia (uncia)	1/12	2,464
palmo (palmus)	1/4	7,39
sestante (sextans o dodrans)	3/4	22,1775

Come accennato in precedenza, il piede veneziano era più lungo di quello dell'antica Roma, ma sembra ragionevole pensare che anche il palmo veneziano fosse un sottomultiplo del piede veneziano conservando il rapporto che aveva nel sistema metrologico romano:

1 palmo veneziano = ¼ di piede veneziano = 0,347735/4 metri = 8,693375 cm.

- -

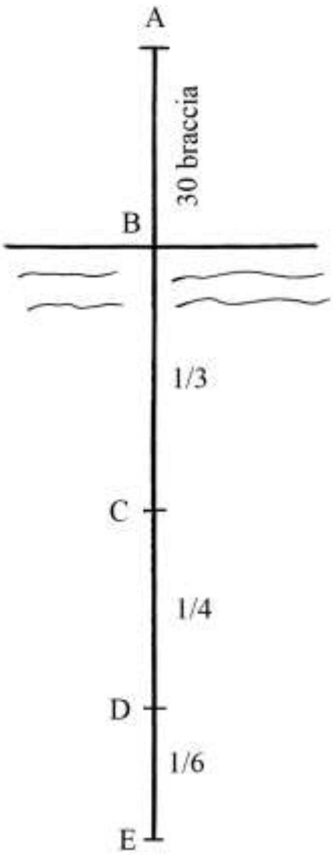
[19 r B] <u>Altezza di un albero</u>

La parte interrata di un albero è (1/3 + ¼ + 1/6) della sua altezza totale.

La parte che emerge dal terreno è lunga 30 braccia.

Il problema chiede la lunghezza dell'intero albero.

Un problema simile è a carta 51 *verso* del citato Zibaldone Riccardiano 2161.



La soluzione contenuta nel manoscritto è la seguente:

- sommare le tre frazioni: (1/3 + ¼ + 1/6) = (4 + 3 + 2)/12 = 9/12;
- dividere 30 per 1/12: 30/(1/12) = 30 * 12 = 360;
- dividere per 3: 360/3 = 120 braccia, altezza dell'intero albero.

- APPROFONDIMENTO -

Possiamo risolvere il problema con l'algebra elementare.

L'altezza totale AE è l'incognita: AE = x.

AB = 30
BC = 1/3 * x
CD = ¼ * x
DE = 1/6 * x
(BC + CD + DE) = (1/3 + ¼ + 1/6) * x = 9/12 * x = BE
AB = AE – BE = x – 9/12 * x = 3/12 * x

Ma AB = 30, quindi:

AB = 30 = 3/12 * x e
x = 30/(3/12) = 30 * 12/3 = 120 braccia.

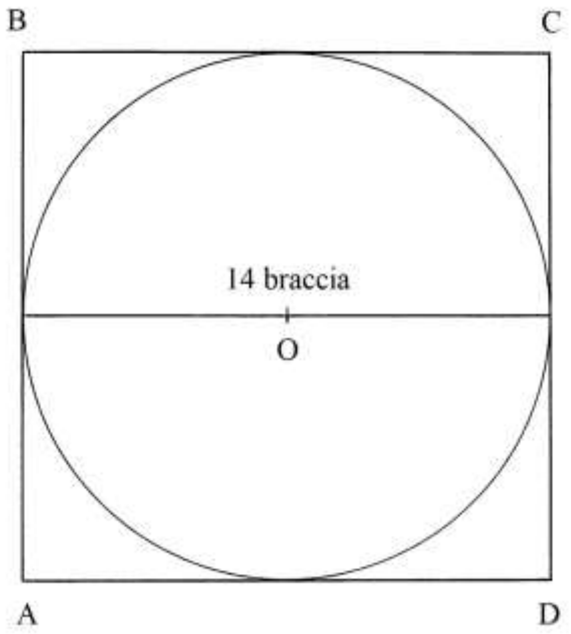
La soluzione dell'Autore è esatta.

- -

[19 r C] <u>Cerchio</u>

Un cerchio sembra avere circonferenza lunga 154 "braccia": in realtà si tratta dell'area che è 154 braccia^2. Riemerge qui la confusione fra unità di misura lineari, superficiali e volumetriche alla quale si è fatto un accenno nella soluzione della Ragione [c 17 v B].

La Ragione chiede la lunghezza del suo diametro, *d*.



L'area di un cerchio di raggio *r* è data da:

$A_{CERCHIO} = \pi * r^2$.

Usando per π l'approssimazione 22/7, la formula diviene:

$A_{CERCHIO}$ $22/7 * r^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2$.

L'Autore ricava la lunghezza del diametro applicando l'ultima formula:

$d^2 = A_{CERCHIO}/(14/11) = 154 * 14/11 = 2156/11 = 196$ e

$d = \sqrt{196} = 14$ braccia.

L'Autore compie poi un ulteriore passo. Il cerchio è inscritto in un quadrato, ABCD, i cui lati sono lunghi quanto il diametro del cerchio.

L'area del cerchio è 11/14 di quella del quadrato: viceversa, l'area del quadrato è 14/11 di quella del cerchio in esso inscritto.

Per passare dall'area del cerchio a quella del quadrato, l'Autore calcola i 3/11 della prima:

$A_{CERCHIO} * 3/11 = 154 * 3/11 = 42$ braccia^2.

Poi addiziona le 42 braccia^2 all'area del cerchio:

$42 + A_{CERCHIO} = 42 + 154 = 196$ braccia^2 $= A_{ABCD}$.

I lati del quadrato sono lunghi:

$AB = \sqrt{(A_{ABCD})} = \sqrt{196} = 14$ braccia.

[c 20 r] Cerchi e quadrato concentrici

Un cerchio ha diametro *AB* = *d*, lungo 14 e la sua circonferenza *c* è 44. L'area è 154 [unità quadrate].

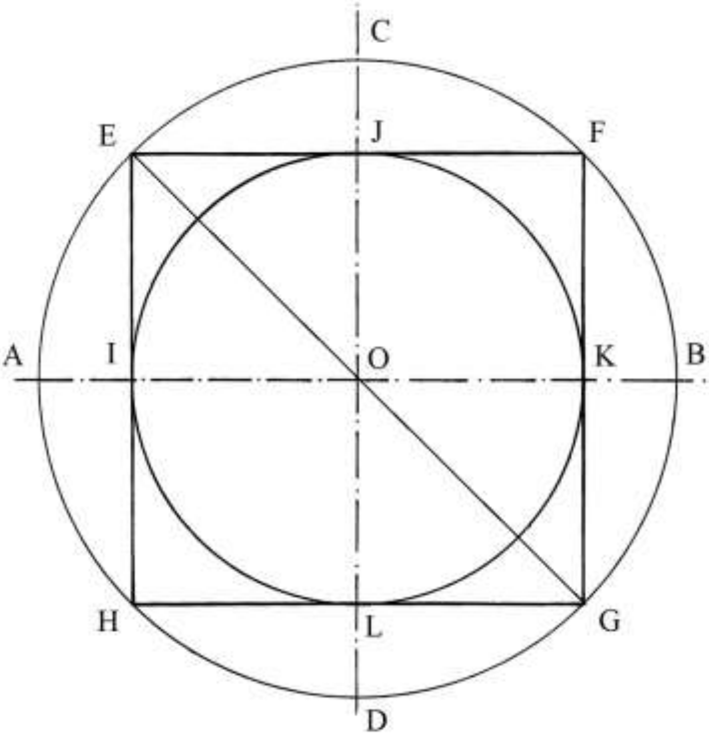
Infatti:

$c = \pi * d = 22/7 * 14 = 44$.

L'area del cerchio esterno di diametro AB è:

$A_{ESTERNO} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 14^2 = 154$ [unità quadrate].

AB e CD sono due diametri perpendicolari.



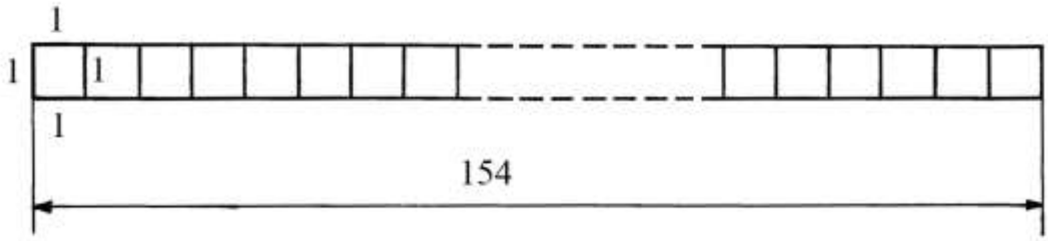
I dati sono uguali a quelli del cerchio della Ragione [19 r C].

L'Autore richiama qui alcune regole geometriche relative alla circonferenza e al cerchio:

* la circonferenza di un cerchio è sempre lunga (3 + 1/7) volte il diametro;
* l'area di un cerchio è data dal prodotto di metà della lunghezza del diametro per metà di quella della circonferenza;
* l'area di un cerchio di diametro 14 e circonferenza lunga 44 è:

$A_{CERCHIO} = (14/2) * (44/2) = 7 * 22 = 154.$

Questa area equivale a quella di un rettangolo lungo 154 e largo 1:



Il quadrato inscritto, EFGH, ha area uguale a 7/11 di quella del cerchio di diametro AB = 14:

$A_{EFGH} = 7/11 * A_{CERCHIO} = 7/11 * 154 = 98.$

All'interno del quadrato è disegnato un secondo cerchio, inscritto, e concentrico rispetto al cerchio esterno: la sua area, $A_{INTERNO}$, è uguale a 11/14 di quella del quadrato EFGH:

$A_{INTERNO} = 11/14 * A_{EFGH} = 11/14 * 98 = 77.$

È evidente che il cerchio esterno ha area doppia di quella del cerchio interno.

- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo la fondatezza di queste ultime ipotesi.

L'area del cerchio esterno è data da:

$A_{ESTERNO} = \pi * OA^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2$,

con OA = AB/2 = d/2.

L'area del quadrato EFGH è:

$A_{EFGH} = EF^2$.

EG è un diametro, *d*, del cerchio esterno e anche una delle due diagonali del quadrato; HEG è un triangolo rettangolo isoscele. I cateti HE e HG hanno uguale lunghezza che è data da:

$EG^2 = HE^2 + HG^2 = 2 * HE^2 = 2 * \ell^2$, con ℓ lunghezza dei lati del quadrato.

$HE^2 = EG^2/2$ e $HE = EG/\sqrt{2} = d/\sqrt{2}$.

L'area del quadrato è:

$A_{EFGH} = HE * HG = d^2/2$.

Il rapporto fra l'area del cerchio esterno e quella del quadrato è:

$A_{ESTERNO}/A_{EFGH} = (11/14 * d^2)/(d^2/2) = (11/14) * 2 = 11/7$.

Il cerchio interno ha area:

$A_{INTERNO} = \pi * OI^2 = 22/7 * (IK/2)^2 = 22/7 * (HE/2)^2 = 22/7 * HE^2/4 =$

$= 22/7 * (EG^2/2 * ¼) = 22/56 * EG^2 = 11/28 * d^2$.

Fra l'area del cerchio interno e quella del quadrato vi è il seguente rapporto:

$A_{INTERNO}/A_{EFGH} = (11/28 * d^2)/(d^2/2) = 11/14$.

Le affermazioni dell'Autore sono confermate.

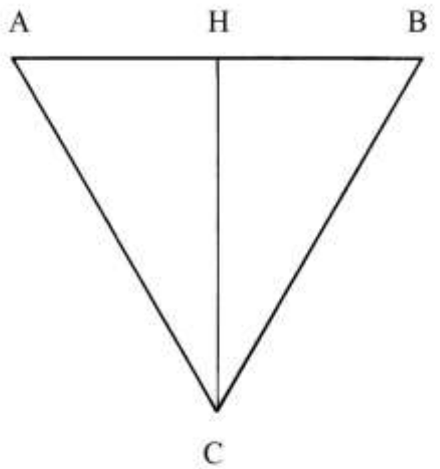
Infine, il rapporto fra le aree dei due cerchi è:

$A_{ESTERNO}/A_{INTERNO} = (11/14 * d^2)/(11/28 * d^2) = 2$.

- -

[c 20 v] <u>Area di un triangolo [equilatero]</u>

Un triangolo, sicuramente *equilatero* (ma il testo non afferma espressamente), ha lati lunghi 9 [unità].

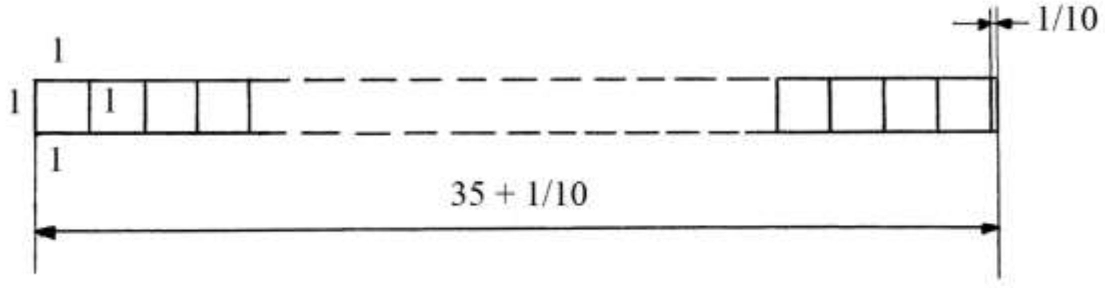


Deve essere calcolata la sua area.

La procedura usata è riassunta nei seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 9 * 9 = 81;
* dividere per 2 la lunghezza di un lato: 9/2 = (4 + ½) [l'Autore scrive "4 ½"];
* moltiplicare per sé stesso: (4 + ½) * (4 + ½) = (20 + ¼);
* sottrarre l'ultimo quadrato dal primo: 81 – (20 + ¼) = (60 + ¾);
* estrarre la radice quadrata: √(60 + ¾) = (7 + 4/5) altezza (CH in figura);
* moltiplicare la lunghezza di AH per quella di CH: (4 + ½) * (7 + 4/5) = (35 + 1/10) area del triangolo equilatero ABC.

L’area di ABC è equivalente a quella di un rettangolo lungo (35 + 1/10) e largo 1:



Bibliografia

1. Bocchi Andrea, “Lo Zibaldone Riccardiano 2161”. Una pratica di mercatura veneziana del primo Trecento, Udine, FORUM, 2021, pp. 299.
2. Ferraro Alfredo, “Dizionario di metrologia generale”, Bologna, Zanichelli, 1959, pp. XVI+270.
3. Istituto Centrale di Statistica, “Misure locali per le superfici agrarie”, Roma, A.B.E.T.E., 1950, seconda edizione, pp. 191.
4. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
5. Ministero di Agricoltura, “Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836”, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. 767.
6. Piva Vittorio, “Manuale di Metrologia delle Tre Venezie e della Lombardia”, Venezia, Tipografia S. Marco, 1935, pp. XVI+200.
7. “Zibaldone da Canal. Manoscritto mercantile del sec. XIV”, Venezia, Comitato per la pubblicazione delle fonti relative alla storia di Venezia, 1967, a cura di Alfredo Stussi, con studi di F. C. Lane, Th. E. Marston, O. Ore, 1967, pp. LXXVI+159, con 21 tavole f.t.
8. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxx.