

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: unità di misura dei Romani; origine dell'unità di misura braccio; Gustavo Uzielli; Diane Finiello Zervas; influenza unità pisane su quelle fiorentine; uomo vitruviano; unità di origine anatomica; le Tavole di Ragguaglio toscane del 1782; braccio da terra; braccio da panno; sistema numerico duodecimale; sistema numerico decimale; stαιο, staiolo, staioro, stioro; staioro a seme; staioro a corda; unità di misura pisane; pertica lineare; oncia, canna, palmo; unità superficiali pisane; linee larghe; panoro; antiche unità di misura di Firenze; antiche unità di misura e superficiali di Siena; unità di misura di Pescia e della Valdinievole; misura delle botti a Siena e a Pescia con il metodo dei punti; unità di misura toscane dopo il 1782

ANTICHE UNITÀ DI MISURA TOSCANE

Note:

* Nel testo dell'articolo sono usate indifferentemente le espressioni "braccio da terra"/ "braccio a terra" e "braccio da panno"/"braccio a panno" perché tutte impiegate nelle diverse fonti consultate.

** Nella determinazione degli equivalenti delle unità di misura lineari sono usati il centimetro e il metro. In alcune occasioni il centimetro è stato preferito per accorciare la serie delle cifre decimali.

*** Per semplificare il testo, sono stati usati gli apici per indicare le unità superficiali e volumetriche, apici *non* usati nei trattati degli Autori qui utilizzati: spesso, invece di "braccia quadre" è stata usata l'espressione "*braccia*²" e invece di "braccia cubiche" è stato scritto "*braccia*³". Anche per altre unità superficiali e volumetriche è stata largamente usata questa convenzione.

Le unità di misura dei Romani

La principale unità di misura lineare era il *pede romano*, lungo 29,57 cm (o 295,7 mm), secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma. Non sempre è stata rispettata questa misura standard.

Una curiosità: la dimensione maggiore del foglio di carta di formato A4 è 29,7 cm (= 297 mm). La misura è *quasi* uguale a quella della lunghezza del piede romano.

Le lunghezze maggiori del piede erano rilevate con misurazioni effettuate con l'impiego della *pertica*, un'asta che poteva assumere due diverse lunghezze:

- 10 piedi (= 295,7 cm) e la pertica era detta *decempeda*,
- 12 piedi (= 354,84 cm).

Il gruppo delle prime unità di misura lineari (*dito*, *onzia*, *palmo*, *pede* e *cubito*) è di derivazione *anatomica* perché esse sono ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

La tabella che segue presenta i *sottomultipli* del piede, sulla base della relazione 1 piede = 29,57 cm:

Nome	Rapporto con il piede	Lunghezza in cm
dito (digitus)	1/16	1,848
uncia (uncia)	1/12	2,464
palm (palmus)	1/4	7,39
sestante (sextans o dodrans)	3/4	22,1775

Nella tabella che segue sono riportate le unità di misura lineari *multiple* del piede:

Nome	Rapporto con il piede	Lunghezza in cm (o in metri, dove indicato)
<i>palmipes</i> (piede + palmo)	1 1/4	36,96
cubito	1 1/2	44,355
passo semplice (gradus) o grado	2 1/2	73,925
passo doppio (passus)	5	147,85
pertica (decempeda)	10	295,70
pertica 12 piedi	12	354,84
actus (atto)	120	35,484 metri
lato maggiore iugero	240	70,968 metri
stadio (stadium) = 125 passi doppi	625	184,81 metri
centuria	2 400	709,68 metri
miglio (miliaris)	5 000 (= 1 000 passi doppi)	1478,5 metri
lega (leuga)	7 500	2217,75 metri
lato saltus	12 000	3548,4 metri
lato ager	60 000 (= 12 miglia)	17 742 metri

Il gruppo delle prime unità di misura (dito, oncia, palmo, piede e cubito) è di derivazione *anatomica* perché esse sono ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

Anche altre antiche civiltà usarono unità di misura di derivazione anatomica: i Sumeri e i Babilonesi e gli Egizi.

Un *secondo* gruppo di unità di misura lineari (grado o passo, passo doppio, miglio) erano legate agli spostamenti dell'uomo; sono unità di natura *dinamica* perché misurano lunghezze percorribili: un *passo semplice* è coperto dal movimento di una sola gamba e il *passo doppio* è rappresentato dal moto successivo e coordinate delle due gambe di un uomo.

Un *terzo* gruppo di unità di misura lineari riguardava l'agricoltura. La base era l'*actus* (atto), equivalente alla lunghezza di 120 piedi. Secondo Plinio, l'atto "...è la distanza che in un solo normale slancio riescono a coprire i buoi con l'aratro ...".

In sintesi, i Romani usavano *dodici* unità di misura lineari che in ordine crescente erano le seguenti:

1. il *dito*;
2. l'*uncia*;
3. il *palmo*;
4. il *sestante*;
5. il **PIEDE**;
6. il *cubito*;
7. il *grado*;

8. il *passo doppio*;
9. la *pertica decempeda*;
10. l'*atto*;
11. lo *stadio*;
12. il *miglio*.

Tutte queste unità erano sottomultipli (dalla n. 1 alla n. 4) o multipli (dalla n. 6 alla n. 12) del *piede*.

L'unità base di misura delle superfici era il piede quadrato, corrispondente all'area di un quadrato con lato lungo 1 piede e cioè *convenzionalmente* 29,57 cm.

Le unità romane erano basate sul *modulo 5* con i suoi multipli e sottomultipli e in secondo luogo sul *modulo 3* con i suoi multipli: $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12$.

Le unità di misura medievali usate in Toscana e nelle altre Regioni italiane derivavano in parte da quelle romane e spesso ne conservarono il nome e la stessa articolazione in multipli e sottomultipli.

L'origine dell'unità di misura "braccio"

Gustavo Uzielli (1839-1911) è stato uno scienziato, uno storico della scienza e della geografia e un patriota garibaldino. Ha approfondito lo studio del contributo dato da Paolo dal Pozzo Toscanelli e da Amerigo Vespucci alle conoscenze geografiche e alla scoperta del continente americano.

Fra i suoi lavori vi è un opuscolo, citato in bibliografia, sull'origine delle unità di misura lineari del Medioevo e in particolare di quelle inizialmente introdotte nella Repubblica marinara di Pisa. Dal suo testo riprendiamo le considerazioni che seguono.

In generale, le misure delle lunghezze, quelle delle superfici e quelle dei volumi sono quasi sempre basate su di una o più unità di lunghezza: per i Romani la base era il *piede* e nei Comuni medievali della Toscana la base era il *braccio*.

Le misure lineari medievali possono essere classificate in funzione del loro scopo:

1. Misure per gli usi commerciali e per piccole lunghezze.
2. Misure itinerarie terrestri.
3. Misure itinerarie marittime.
4. Misure catastali.

Fino ai tempi moderni, le misure più importanti furono quelle indicate ai punti 1, 3 e 4. Le *misure itinerarie terrestri* furono poco considerate perché le distanze venivano calcolate, in modo assai grossolano, in funzione del tempo trascorso per giungere a destinazione.

Le *misure catastali* divennero importanti nel Medioevo soltanto in quei Comuni nei quali venivano calcolati i valori delle proprietà fondiari (terreni agricoli e fabbricati) in funzione delle loro superfici e non soltanto in relazione al reddito annuo che esse producevano. Lo scopo di quelle misure era fiscale. Nei primi tempi i calcoli delle aree dei terreni non erano quasi mai accompagnati da piante o disegni prospettici.

L'unità di misura *braccio* comparve in Italia nel periodo delle Crociate e con il passare del tempo assunse un ruolo predominante fra le unità lineari nelle Repubbliche Marinare e poi nei Comuni italiani interni, sostituendo o affiancando quasi ovunque il *piede* di origine romana.

Le antiche unità di misura basate sul piede romano continuarono a essere impiegate per le misure itinerarie e talvolta per quelle agrarie e si conservarono i nomi antichi, ovviamente adattati ai vari dialetti italiani; per le misure commerciali e edilizie furono utilizzate le nuove unità basate sul braccio.

Secondo Gustavo Uzielli, il braccio ebbe origine in Terra Santa e sarebbe stato portato in Toscana dai mercanti Pisani che operavano nei mercati dei porti del Levante musulmano. Lo stesso Autore avanza l'ipotesi che la lunghezza del braccio sarebbe stata fissata in *un terzo* dell'altezza convenzionale del corpo di Cristo.

La persistenza di questa regola è confermata da una scelta compiuta da Leon Battista Alberti che stabilì in 3 braccia da panno l'altezza della figura umana ideale e 3 braccia da panno fiorentine equivalgono a $3 * 58,3626 \text{ cm} = 175,0878 \text{ cm}$.

Sempre secondo Uzielli il braccio sarebbe poi passato da Pisa a Firenze e in altri Comuni toscani.

Nell'articolo di Diane Finiello Zervas (citato in bibliografia), l'Autrice accoglie entrambe le tesi di Uzielli e sostiene che il *braccio da terra* fiorentino corrisponderebbe a un equivalente braccio di Pisa.

Ecco un estratto dallo studio di Uzielli, riprodotto da p. 14:

§ XVIII. Ho detto che il braccio da terra è originario della Palestina e che fu probabilmente portato in Toscana dai Pisani.

Ecco gli argomenti in appoggio di tali ipotesi:

1.° Nei documenti dei secoli XII e XIII si trova che in Firenze si usava, insieme al *pes Portae*, il *brachium pisanum* e il *brachium* senz'altro (1).

2.° Il braccio della Palestina è = m. 0,5548, quello da terra fiorentino è = m. 0,5512.

3.° Il miglio della Palestina è di 3000 (cubiti) = m. 1664, 4, il miglio fiorentino è di 3000 braccia da terra = m. 1653,6.

Le differenze, che qui si riscontrano, sono, per quei tempi, del tutto trascurabili. Quindi si ha qui una doppia coincidenza, che non può essere fortuita: due braccia eguali e due miglia multipli dello stesso numero di braccia, e quindi uguali fra loro. Questo dimostra che si era voluto abbandonare radicalmente la misura romana di 5000 piedi.

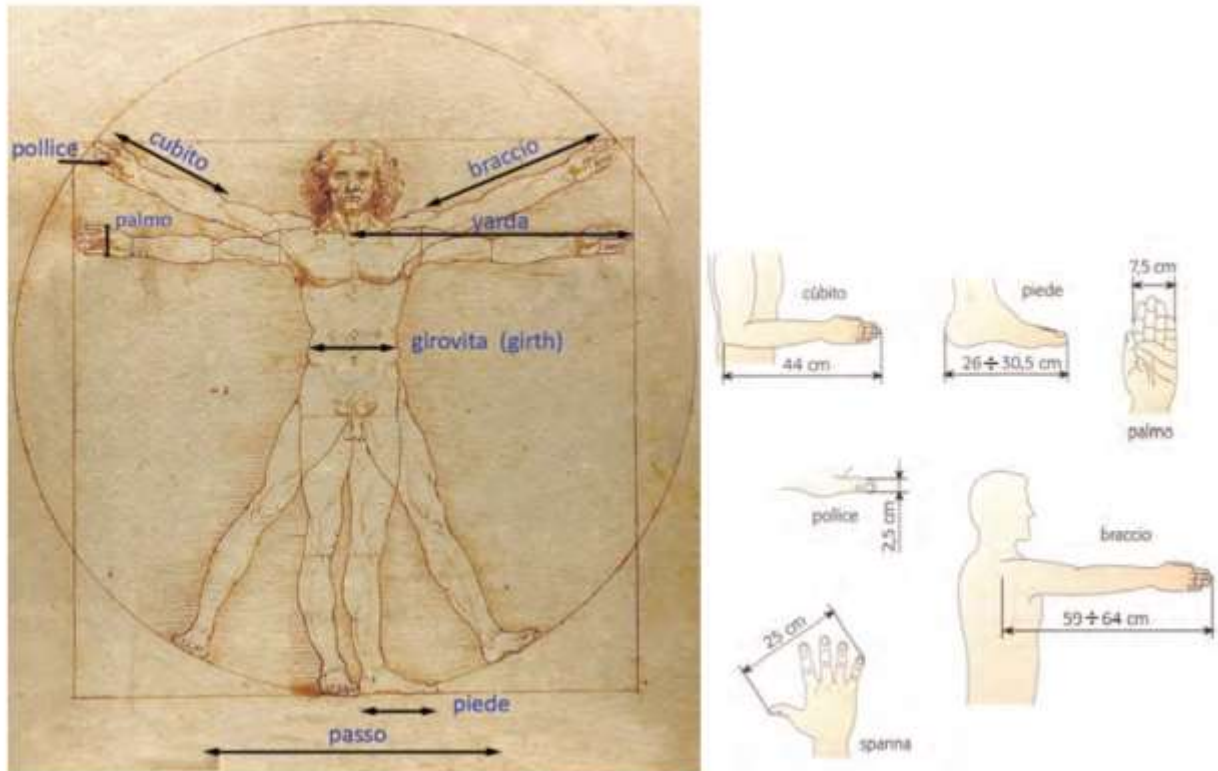
(1) Il *brachium pisanum* è, per esempio, nominato, in relazione a un'opera muraria, in un documento del 16 maggio 1209, pubblicato da Pietro Santini, *Documenti dell'antica Costituzione del Comune di Firenze*, Firenze, 1859. Vedi p. 534. Giova qui ricordare che in antico i Fiorentini usarono monete pisane, e prima monete lucchesi, in relazione al periodo dei Duchi e Conti di Toscana, come risulta anche dall'opera ora citata. Forse l'adozione del braccio di Palestina e di Siria a Firenze, fu facilitata dall'essersi serviti i Fiorentini per il loro commercio in Oriente della marina dei Pisani. Si noti anche che il braccio di questi differiva poco da quello fiorentino.

Nel secolo XII (e così in un documento del 23 novembre 1321 citato dal Manni, *Sigilli ecc.* t. XXI (1770), Giunta IV, p. XXXIX e L) la canna o pertica di quattro braccia e il braccio sono riferiti *ad mensuram Callismalae*. Nello Statuto di Calimala (il cui testo più antico è del 1301 ma che pare possa farsi risalire al 1236) si stabiliscono le regole per la conservazione dei campioni di quelle misure e per gli ufficiali che li avevano in custodia (Filippi G. *L'arte dei Mercanti di Calimala in Firenze ed il suo più antico statuto*. Torino, 1887, pp. 125, 126 e 155). Ora se si ammette probabile col Peruzzi e col Filippi che l'Arte della Lana sia anteriore all'Arte di Calimala, ma non anteriore al 1100, convien credere che il braccio e la canna siano apparsi in Firenze colla costituzione dell'ultima Arte perché da essa, e non dall'Arte della Lana, quelle due misure ebbero nome. Quindi credo che se si trovasse l'atto di costituzione dell'Arte di Calimala, verrebbe determinata anche l'epoca in cui fu adottato il braccio di Calimala, poi detto braccio da panno e che è eguale a metri 0.584.

L'influenza metrologica pisana sulle unità di misura fiorentine può essere in parte spiegata con il fatto che per i loro commerci con il Nord Africa e con il Levante i mercanti fiorentini utilizzavano il porto di Pisa, le navi pisane e si appoggiavano alle colonie pisane create lungo le coste del Mediterraneo.

Il cosiddetto "Uomo vitruviano"

La figura che segue, tratta da Carboni e De Vincenzi, presenta la sovrapposizione di alcune unità di misura lineare per così dire *anatomiche* sul famosissimo disegno di Leonardo da Vinci:



In particolare, sono evidenziate e distinte le lunghezze del *cubito* e del *braccio*.

La *yarda* è un'unità del sistema anglosassone e corrisponde a 0,9144 m.

Due *yarde* formano un *fathom* che vale 1,88288 m. La lunghezza è misurata fra le estremità del dito medio delle due mani.

Talvolta, il *fathom* era erroneamente chiamato braccio, ma più correttamente in alcuni Stati europei era conosciuto come *tesa*, unità medievale di origine francese che si diffuse anche in Piemonte.

Cubito e braccio

Cubito è una parola che deriva dal latino *cubitum* che significa *gomito*: essa indica la lunghezza della distanza fra il gomito e la punta delle dita (o, per essere più precisi, la punta del dito medio).

Come già scritto, all'epoca romana il cubito era lungo l'equivalente di 44,355 cm.

Talvolta le unità di misura cubito e braccio sono state confuse.

A partire dal Medioevo, il cubito quale unità di misura è stato sostituito dal braccio, che ovviamente era più lungo del cubito.

Le Tavole di Raggiuglio del 1782

Con un editto del Granduca Pietro Leopoldo di Toscana (1747-1792) del 13 marzo 1781, a partire dal 1782 le unità di misura toscane furono uniformate a quelle di Firenze.



Con un successivo editto del 2 maggio 1781 fu stabilito l'uso delle unità fiorentine anche nella Comunità di Pisa, ad esclusione di quelle relative al peso per la vendita del *sale*.

Infine, con un editto dell'11 luglio 1782 la riforma metrologica fu estesa a quasi tutto il Granducato, ad eccezione dei territori della Lunigiana, di Barga e di Pietrasanta.

Nello stesso anno, il Governo Granducale pubblicò un volume contenente le *Tavole di Raggiuglio* (citato in bibliografia) di cui l'immagine precedente riproduce il *colophon*.

Nel caso di Pisa le unità fiorentine erano usate fin dal 1406 ma con leggere differenze dovute a imprecisioni nella preparazione dei campioni.

Il Granducato di Toscana comprendeva di fatto due Stati: lo *Stato vecchio*, e cioè il Territorio fiorentino, e lo *Stato nuovo* e cioè il Territorio senese, annesso nel XVI secolo, ma al quale era stata riconosciuta una certa autonomia rispetto al potere fiorentino.

Del Granducato facevano parte all'epoca, fine del XVIII secolo, alcune Comunità oggi inglobate in Emilia Romagna.

La Repubblica di Lucca era indipendente.

Il Territorio fiorentino comprendeva 45 Comunità:

INDICE

DELLE COMUNITÀ

Del Territorio Fiorentino.

<p>Firenze pag. 1.</p> <p>Anghiari 7.</p> <p>Arezzo 19.</p> <p>Badia Tedalda 37.</p> <p>Bagno 47.</p> <p>Borgo S. Sepolcro 63.</p> <p>Castiglion Fiorentino 81.</p> <p>Castel Fiorentino 99.</p> <p>Castel S. Niccolò 103.</p> <p>Castel Franco di sotto 115.</p> <p>Cerreto 125.</p> <p>Chiusi 131.</p> <p>Colle 143.</p> <p>Cortona 159.</p> <p>Empoli 179.</p> <p>Fojano 185.</p> <p>Galeata 197.</p> <p>S. Gimignano 217.</p> <p>Lucignano 225.</p> <p>Marradi 239.</p> <p>S. Miniato 255.</p> <p>Modigliana 261.</p> <p>Monte Carlo 275.</p>	<p>Monte Pulciano 291.</p> <p>Monte Catini 305.</p> <p>Monte S. Savino 313.</p> <p>Monterchi 323.</p> <p>Palazzo 335.</p> <p>Pescia 345.</p> <p>Pieve S. Stefano 359.</p> <p>Pisa 369.</p> <p>Pistoja 387.</p> <p>Poppi 403.</p> <p>Porto Ferrajo 415.</p> <p>Portico 419.</p> <p>Prato 433.</p> <p>Pratovecchio 439.</p> <p>Rassina 451.</p> <p>Rocca S. Casciano 463.</p> <p>Seftino 479.</p> <p>Terra del Sole 489.</p> <p>Uzzano 503.</p> <p>Vellano 519.</p> <p>Verghereto 529.</p> <p>Volterra 537.</p>
--	---

A sua volta, il Territorio senese comprendeva 24 Comunità:

Territorio Senese .

S iena pag. 553.	Groffeto 671.
Afciano 573.	Magliano 675.
Afinalunga 577.	Montalcino 679.
Badia S. Salvatore 581.	Pian Castagnaio 685.
Buonconvento 591.	Pitigliano 699.
Camporfevoli 595.	Radicofani 707.
Castell'Otteri 607.	S. Casciano de' Bagni 713.
Castiglion della Pescaia 615.	Santa Fiora 725.
Celle 621.	Sarteano 733.
Cetona 631.	Scanfano 747.
Chianciano 643.	Sorano 751.
Chiusi 657.	Torrita 759.

I sistemi metrologici toscani anteriori al 1781-1782 erano moltissimi: la stessa unità con uguale nome – ad esempio il *braccio lineare* – poteva assumere valori differenti nelle singole Comunità.

Un esempio della grande eterogeneità è dato dal diverso valore che aveva a Pisa l'unità di misura per gli aridi: lo *stajo*. Erano impiegati ben *cinque* differenti valori di questa unità e cioè quelli:

- * di Pisa.
- * Della Mensa Arcivescovile.
- * Dell'Università de' Cappellani.
- * Del Monastero di S. Matteo.
- * Del Monastero di S. Silvestro.

P I S A

LA Libbra di Pisa è simile alla Libbra di Firenze .

Lo Stajo del Grano di Pisa contiene 3. Quarti, Quartucci .15., e $\frac{15}{100}$ dello Stajo di Firenze.

Lo Stajo della Mensa Arcivescovile contiene uno Stajo, Quartucci 1., e $\frac{90}{100}$.

Lo Stajo dell' Università de' Cappellani contiene Staja 1., Quartucci 1., e $\frac{15}{100}$.

Lo Stajo del Monastero di S. Matteo contiene Staja 1. Quartucci 2., e $\frac{90}{100}$.

Lo Stajo del Monastero di S. Silvestro contiene Staja uno, Quartucci 1., e $\frac{90}{100}$.

Il Barile del Vino si divide in Fiaschi 20., il Fiasco in Quartucci 8., e contiene di Misura di Firenze Fiaschi 18.

Il Barile dell' Olio si divide in Fiaschi 16., il Fiasco in Quartucci 8., e contiene di Misura di Firenze Fiaschi 15., Quartucci 3., e $\frac{60}{100}$.

Il Braccio è simile al Fiorentino.

Lo Storo si divide in Pertiche 66., e la Pertica in Braccia \square 25. Lo Storo di Pisa contiene Quadrati — Tavole 1. Pertiche 6. Deche 5., e Braccia quadre —.

•••

La legge 28 luglio 1861 estese a tutto il Regno d'Italia il *sistema metrico decimale*. Con il R.D. 20 maggio 1877 n. 3836 fu ribadita l'adozione del sistema metrico decimale e per facilitare il passaggio a questo ultimo, il Ministero dell'Agricoltura pubblicò nello stesso anno un volume contenente le "Tavole di Raggiungimento dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale": lo stajo di Pisa fu dichiarato equivalente a 24,3629 litri.

La compilazione del volume con le Tavole di Raggiungimento volute dal Granduca Pietro Leopoldo è certamente stata un'opera di grande portata, sia per la mole dei dati raccolti che le dimensioni del testo a stampa: ben XVII+835 pagine! Le Tavole cristallizzarono la situazione metrologica della Toscana alla fine del XVIII secolo: esse possono fornire pochissime o nulle informazioni sull'evoluzione subita dalle unità di misura nel corso dei precedenti secoli.

Le Tavole possono essere usate per ricavare le equivalenze delle unità di misura di una certa località conoscendo il valore odierno di quella di Firenze.

Facciamo un esempio: il braccio da panno di Firenze vale 0,583626 metri. Vogliamo ricavare la lunghezza del *braccio a terra* di Prato. La pagina 434 del volume con le Tavole di Raggiungimento è intitolata "Tavola di riduzione del Braccio a Terra di Prato al Braccio a Panno di Firenze":

P R A T O

Tavola di riduzione del Braccio a Terra di Prato al Braccio a Panno di Firenze.

		20.	12.	12.
Braccia ... 1.	_____ =	1.	2.	4. —
2.	_____ =	2.	4.	8. —
3.	_____ =	3.	7.	— —
4.	_____ =	4.	9.	4. —
5.	_____ =	5.	11.	8. —
10.	_____ =	11.	3.	4. —
25.	_____ =	27.	18.	4. —
50.	_____ =	55.	16.	8. —
100.	_____ =	111.	13.	4. —
200.	_____ =	223.	6.	8. —
300.	_____ =	335.	—	— —
400.	_____ =	446.	13.	4. —
500.	_____ =	558.	6.	8. —
1000.	_____ =	1116.	13.	4. —
Soldi..... 1.	_____ =	—	1.	1. 5.
2.	_____ =	—	2.	2. 10.
3.	_____ =	—	3.	4. 2.
5.	_____ =	—	5.	7. —
10.	_____ =	—	11.	2. —

La successiva pagina, la 435, è intitolata “Contro Tavola di riduzione del Braccio a Panno di Firenze al Braccio a Terra di Prato” e svolge l’operazione di conversione opposta a quella contenuta nella precedente Tavola:

P R A T O

*Contro Tavola di riduzione del Braccio a Panno di Firenze
al Braccio a Terra di Prato .*

			<u>20.</u>	<u>12.</u>	<u>12.</u>
Braccia... 1.	_____	=	—	17.	10. 11.
2.	_____	=	1.	15.	9. 10.
3.	_____	=	2.	13.	8. 9.
4.	_____	=	3.	11.	7. 8.
5.	_____	=	4.	9.	6. 7.
10.	_____	=	8.	19.	1. 3.
25.	_____	=	22.	7.	9. 1.
50.	_____	=	44	15.	6. 3.
100.	_____	=	89.	11.	— 6.
200.	_____	=	179.	2.	1. 1.
300.	_____	=	268.	13.	1. 7.
400.	_____	=	358.	4.	2. 2.
500.	_____	=	447.	15.	2. 8.
1000.	_____	=	895.	10.	5. 4
Soldi 1.	_____	=	—	—	10. 9.
2.	_____	=	—	1.	9. 6.
3.	_____	=	—	2.	8. 3.
5.	_____	=	—	4.	5. 9.
10.	_____	=	—	8.	11. 5.

È da notare che le unità di misura di Prato erano uguali a quelle di Firenze ad eccezione del *braccio a terra* e dello *Stiuro*.

La tavola di p. 434 è così strutturata:

Braccia a Terra di Prato	Braccia a Panno di Firenze			
	braccia	soldi	denari	punti
1	1	2	4	---
2	2	4	8	---
3	3	7	---	---
4	4	9	4	---
5	5	11	8	---
10	11	3	4	---
25	27	18	4	---
50	55	16	8	---
.....				

Per il braccio da panno di Firenze si hanno i seguenti sottomultipli:

- * 1 braccio = 20 soldi
- * 1 soldo = 12 denari
- * 1 denaro = 12 punti
- * 1 braccio = 20 soldi = 240 denari = 2880 punti.

Al piede della pagina 434 è inserita una seconda tabella per la conversione da *soldi* di braccia a terra di Prato in braccia a panno di Firenze e suoi sottomultipli.

Soldi di Braccia a Terra di Prato	Braccia a Panno di Firenze			
	braccia	soldi	denari	punti
1	---	---	10	9
2	---	1	9	6
3	---	2	8	3
5	---	4	5	9
10	---	8	11	5

Con l'aiuto delle tabelle convertiamo il braccio a terra di Prato, *brtPo*, in braccia da panno di Firenze, *brpFi*:

$$1 \text{ brtPo} = 1 \text{ brpFi} + (2 \text{ soldi} + 4 \text{ denari}) \text{ di brpFi}$$

$$1 \text{ brtPo} = (20 \text{ soldi} + 2 \text{ soldi} + 4 \text{ denari}) \text{ di brpFi}$$

$$1 \text{ brtPo} = (22 \text{ soldi} + 4 \text{ denari}) \text{ di brpFi}$$

$$1 \text{ brtPo} = (264 \text{ denari} + 4 \text{ denari}) \text{ di brpFi}$$

$$1 \text{ brtPo} = 268 \text{ denari di brpFi.}$$

Dato che anche il braccio a terra di Prato possiede i sottomultipli soldo e denaro, possiamo determinare la sua lunghezza in metri con una proporzione:

$$1 \text{ brtPo} : 1 \text{ brpFi} = 268 : 240$$

$$1 \text{ brtPo} : 0,583626 = 268 : 240$$

$$1 \text{ brtPo} = 0,583626 * 256/249 \approx 0,651716 \text{ metri.}$$

Il braccio a terra di Prato è più lungo di quello da panno di Firenze:

$$(0,651716 - 0,583626)/0,583626 \% \approx 11,67\%.$$

A pagina 253 del suo libro citato in bibliografia, lo storico dell'agricoltura Paolo Nanni fornisce i seguenti dati per Prato:

* braccio a terra: 0,64 m;

* braccio a panno: 0,58 m.

Il dato appena calcolato per la lunghezza del braccio a terra pratese è così confermato.

----- APPROFONDIMENTO -----

Il conservatorismo nell'ambito delle unità di misura superficiali

L'Istituto Centrale di Statistica di Roma pubblicò un prontuario per convertire in *are* le numerose unità di misura superficiali non previste dal sistema metrico decimale e ancora in uso in Italia: la seconda edizione è del 1950 e ciò conferma la forza della tradizione.

A titolo di esempio è qui riprodotta la tabella contenente la descrizione della situazione rilevata all'epoca in Provincia di Firenze:

PROVINCIA DI FIRENZE

1	Bagno a Ripoli — S.M.D.	12	Certaldo — Staio = a 20 Sacco = 2 staia.
2	Barberino di Mugello — Staio = a 17,0310 Sacco = 3 staia.	13	Dicomano — Sacco = a 50 Soma = 2 sacchi; Sacco = 3 staia.
3	Barberino Val d'Elsa — Braccio = a 0,003406 Saccata = 9 stiori; Stioro = 66 pertiche; Pertica = 25 braccia.	14	Empoli — S.M.D.
4	Borgo San Lorenzo — Braccio = a 0,003406 Staio = 5000 braccia.	15	Fièsole — Braccio = a 0,003406 Staio = 5000 braccia; Stioro = 1541¼ b
5	Calenzano — Stioro = a 5,08	16	Figline Valdarno — Staio = a 18,18 Staio = 5337 braccia.
6	Campi Bisenzio — Stioro = a 5,25	17	Firenze — Stioro = a 5,250080 Stioro = 1541 braccia.
7	Cantagallo — Sacco = a 50 Sacco = 3 staia.	—	— Staio = a 16,6666 Staio = 4893 braccia.
8	Capràia e Limite — Sacco = a 50	18	Firenzuola — Staio = a 18,1818 Staio = 4 quarti.
9	Carmignano — Stioro = a 7,83 Stioro = 2296 braccia.	19	Fucechio — Staio = a 19,6665 Saccata = 3 Staia; Staio = 33 stiori.
10	Castelfiorentino — Sacco = a 50 Sacco = 3 staia; Staio = 4 quarti.	—	— Coltra = a 39,3330 Coltra = 4 quartieri.
11	Correto Galdai — Saccata = a 58,97 Saccata = 3 staia; Staio = 4 quartucci; Quartuccio = 1443 braccia.		

20	Cambassi — Saccata = a 50 Saccata = 3 staja.	38	San Casciano in Val di Pesa — S.M.D.
21	Creve — Staio = a 17,0310	39	San Godenzo — S.M.D.
22	Impruneta — Braccio = a 0,003406	40	San Piero a Sieve — Stioro = a 5,1578 Sacco = 3 staja.
23	Incisa in Val d'Arno — Staio = a 18,18	41	Scandicci — Stioro = a 5,250080
24	Lastra a Signa — Stioro = a 5,25 Stioro = 1541 braccia.	42	Scarperia — Staio = a 16,6625 Staio = 4893 braccia.
25	Londa — Pertica = a 0,0841 Pertica = 25 braccia.	43	Sesto Fiorentino — Stioro = a 5,1578 Stioro = 1514¼ braccia
26	Marradi — S.M.D.	—	— Staio = a 17,0310 Quadrato = 2 staja; Staio = 5 tavole; Tavola = 10 pertiche; Pertica = 10 decche; Deca = 10 braccia; Braccio = 400 soldi.
27	Montalone — Staiata = a 20 Saccata = 3 stajate.	44	Signa — Stioro = a 5,2561
28	Montelupo Fiorentino — S.M.D.	—	— Quadrato = a 34,0619 Quadrato = 10 tavole; Tavola = 10 pertiche; Pertica = 10 decche; Deca = 10 braccia.
29	Montemurlo — Braccio = a 0,003406 Stioro = 2154 braccia.	45	Tavernole in Val di Pesa — Saccata = a 50 Saccata = 3 staja; Staio = 4 quarti .
30	Montespertoli — S.M.D.	46	Vaglia — Staio = a 16,6666 Moggio = 8 sacchi; Sacco = 3 staja; Staio = 2 mine; Mina = 2 quarti.
31	Palazzuolo — Sacco = a 100 Sacco = 6 staja.	47	Vaiano — Stioro = a 7,34 Stioro = 2154/10 braccia.
32	Pèlago — Staio = a 16,6666 Sacco = 3 staja; Staio = 2 quartine; Quartina = 2 quarti.	48	Vernio — Staio = a 13,3333 Sacco = 3 staja; Staio = 2 mine; Mina = 2 quarti.
33	Pontassieve — S.M.D.	49	Vicchio — Staio = a 16,6666 Sacco = 3 staja; Staio = 2 mine; Mina = 2 quarti; Quarto = 2 ottavi.
34	Prato — Stioro = a 7,34 Stioro = 2154/10 braccia.	50	Vinci — Sacco = a 50 Sacco = 3 staja.
35	Reggello — Staio = a 16,6666 Moggio = 8 saccate; Saccata = 3 staja; Staio = 2 mine; Mina = 2400 braccia.		
36	Rignano sull'Arno — Staio = a 16,66 Staio = 5000 braccia.		
37	Rufina — Staio = a 16,6666 Staio = 4 quarti.		

Alcune precisazioni sono necessarie.

* I Comuni di Cantagallo, Carmignano, Montemurlo, Prato, Vaiano e Vernio non fanno più parte della Provincia di Firenze ma fanno parte della nuova Provincia di Prato (che comprende anche il Comune di Poggio a Caiano), creata nel 1992.

Alcuni Comuni della Provincia (ora Città Metropolitana) di Firenze si sono fusi:

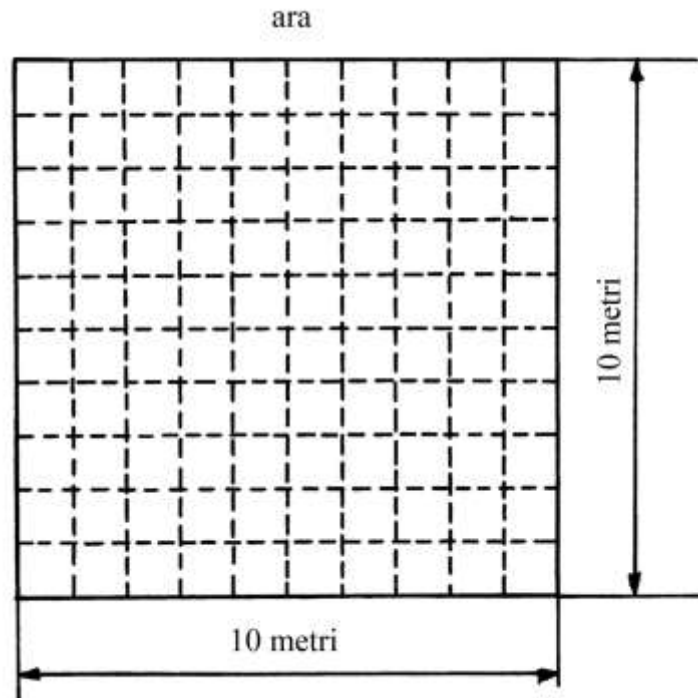
** Barberino Val d'Elsa con Tavarnelle Val di Pesa.

** Figline Valdarno con Incisa Valdarno (oggi Figline e Incisa Valdarno).

** Scarperia con San Piero a Sieve.

* La sigla "S.M.D." sta per Sistema Metrico Decimale.

Tutte le antiche unità agrarie sono state convertite in *are* (simbolo *a*), multiplo del m², unità che vale 100 m²:



Stando alla pubblicazione dell'*Istituto Centrale di Statistica*, nel Comune di Firenze erano ancora in uso due unità di misura della superficie agraria:

* Lo *stioro*, equivalente a 5,25008 are e cioè a 525,008 m². Esso valeva 1541 braccia quadre da panno: torneremo sull'argomento nei successivi paragrafi dedicati alle unità di misura fiorentine.

* Lo *staio*, equivalente a 16,666 are [o 50/3 a] e a 1666,66 m² [o 5000/3 m²], corrispondente a 4893 braccia quadre da panno.

In origine lo *staio* era un'unità di peso che poi è divenuta anche un'unità di misura della superficie agraria: grosso modo, con uno *staio* di grano veniva seminata una porzione di terreno della superficie di 1 *staio*.

Nei diversi Comuni della Provincia di Firenze i valori dello *stioro* e dello *staio* non erano coincidenti con quelli in vigore nel capoluogo.

Nota: il termine *stioro* risale al XIII secolo ed è voce di origine toscana, derivata da *staiolo*, diminutivo di *staio*. *Staioro* è stato poi contratto in *stioro*.

Riguardo alle unità di misura che rientrano in questo gruppo, vi è una notevole confusione: ad esempio lo Zupko, a p. 281 del suo testo afferma testualmente: “lo *stioro* è la quarta parte dello *staio*”.

Un altro esempio della confusione è contenuto nel testo di Luca Pacioli (circa 1445 – 1517 *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità* (pubblicato a Venezia nel 1494) *Tractatus Geometriae*, Distinctio I^a, cap. V, carta 6 verso nella quale afferma:

“.. E per lo contado de Firenze si vende el terreno a staiora, che uno *staioro* è 1728 bracia quadre da terra...”.

Come vedremo in seguito, lo *staioro* ricordato da Pacioli era lo *stioro* usato a Firenze.

In questo articolo sono state accolte le denominazioni e i valori attribuiti nelle pubblicazioni ufficiali e quindi lo *staioro* usato a Firenze diviene lo *stioro fiorentino*.

Cerchiamo di fare un po' di ordine.

%%%%%%%%%

La staiata

In alcuni documenti risalenti al Rinascimento è talvolta usato il termine *staiata*: il vocabolario di Devoto e Oli così definisce questo termine:

“*Staiata*: Quantità corrispondente approssimativamente alla capacità di uno staio...”.

Non sembra che il termine *staiata* compaia in alcun testo geometrico rinascimentale e non è presente neanche nelle Tavole di Ragguaglio pubblicate a Firenze nel 1782 per l’attuazione della riforma metrologica voluta dal Granduca Pietro Leopoldo: forse ha avuto origine nel linguaggio degli agricoltori toscani per indicare una pluralità di staiora, stiora o staia.

Forse in qualche caso *staiata* è stata impiegata per misurare con precisione una proprietà terriera, come nell’esempio composto da numeri interi separati da un simbolo simile al *punto*:

staiata: X.Y.Z./n dove
X esprime le *staia*,
Y indica i sottomultipli dello staio, le *panora*,
Z misura i sottomultipli del panoro, le *pugnora*,
n esprime i sottomultipli del pugnoro, le *braccia quadre*.

Nel volume di Angelo Martini citato in bibliografia sono segnalate tre presenze della *staiata*:

- * a Empoli: 1 *staiata* = 5000 *braccia quadre* = 1703 m²;
- * a Livorno: 1 *staiata* = 3 *stiora* = 1686 m²;
- * a Pisa: come per Livorno.

%%%%%%%%%

L’*ettaro* – simbolo *ha* – è un’unità di misura delle superfici che è accettato dal Sistema internazionale di misura benché non ne faccia parte.

Un ettaro è l’area di un quadrato con lati lunghi 100 metri:

$$1 \text{ ha} = 100^2 = 10.000 \text{ metri quadrati.}$$

I suoi sottomultipli sono:

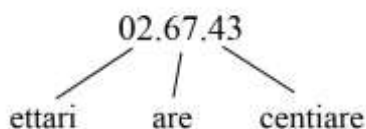
- * l’*ara* – simbolo *a* – che vale un centesimo di un ettaro e corrisponde all’area di un quadrato con lati lunghi 10 metri;
- * la *centiara* – simbolo *ca* – è un centesimo dell’*ara* ed è la superficie di un quadrato con lati lunghi 1 m.

L’*ettaro* e l’*ara* sono usati dall’Agenzia delle Entrate del Ministero dell’Economia per misurare le superfici dei terreni a scopi catastali e fiscali.

Ad esempio, un terreno ha superficie di 2,6743 ettari: essi corrispondono a:

- * 2 ettari;
- * 67 are;
- * 43 centiare.

Spesso 2,6743 è scritto come segue:



I numeri indicanti le tre unità di misura sono separati da un punto.

Questo metodo ricalca forse quello usato nel Rinascimento per misurare le superfici dei terreni esprimendole in staiora e sottomultipli?

Nella grande varietà delle unità di misura superficiali toscane è da notare la relazione fra lo staioro e lo stioro. Erano usati due tipi di staioro, entrambi basati sul *braccio da terra*:

* Lo *staioro a seme*, poi chiamato semplicemente *staioro*.

* Lo *staioro a corda*, poi conosciuto con il termine di *stioro*.

Nelle pubblicazioni anteriori alla riforma leopoldina del 1781-1782 è spesso fornita un'informazione: lo staioro a seme valeva *mediamente* 3 staiora a corda e cioè:

$$1 \text{ staioro} \approx 3 \text{ stiora} \approx 3 * 525,008 \approx 1575,024 \text{ m}^2.$$

Nella documentazione catastale e in altri testi lo staioro e lo stioro erano talvolta confusi perché spesso entrambi abbreviati in “st.” o “sta.”.

Tutte le tavole di conversione, sia quelle Toscane del 1781-1782 che quelle Italiane del 1877, presentano ampi margini di errore per le difficoltà incontrate nel recepimento dei campioni delle precedenti unità di misura.

Le opere di Sfortunati, di Cataneo e di Forestani

Giovanni Sfortunati, un matematico nato a Siena probabilmente nel 1485 e del quale sono ignoti luogo e data di morte, ha scritto un importante trattato matematico, il “*Nuovo Lume*”, più volte stampato. Fra gli altri argomenti, questo Autore ha fornito alcune importanti informazioni sulle unità di misura usate a Siena e sulle tecniche di misurazione del contenuto delle botti.

Pietro Cataneo o Cattaneo (Siena c. 1510 – 1573) è stato un ingegnere militare e un matematico.

Pubblicò due opere: un trattato di architettura (“I primi quattro libri d’architettura”, Venezia, 1567) e un testo di matematica (“Le pratiche delle due prime matematiche”, Venezia 1569).

Il “*Nuovo Lume*” è fra le fonti utilizzate dal francescano Lorenzo Forestani (Pescia, 1585 – 1623) per compilare il suo poderoso trattato “*Pratica d’Arithmetica e Geometria*”: nel Sesto Libro questo Autore fornisce molte informazioni sulle unità di misura usate in alcune località della Toscana: Firenze, Siena, Pisa, Pescia e la Valdinievole.

Forestani ha anche descritto un metodo di misura del contenuto delle botti basato sui *punti*, mentre Sfortunati usava i *ponti*.

LE UNITÀ DI MISURA USATE A PISA

Unità di misura lineari

Prima di procedere alla descrizione dei singoli problemi è necessario presentare le unità di misura pisane.

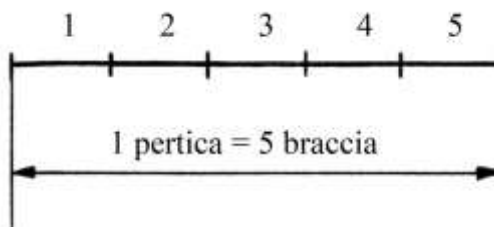
Le fonti principali di informazioni relative alle unità di misura lineari e superficiali usate a Pisa nel Medioevo sono il *De Practica Geometrie* di Leonardo Fibonacci (circa 1170 – dopo il 1240), composto negli anni 1220-1221.

Pochissimi sono gli studi sull'argomento: lo stesso testo di Zupko (citato in bibliografia) fornisce limitate informazioni sulle unità pisane.

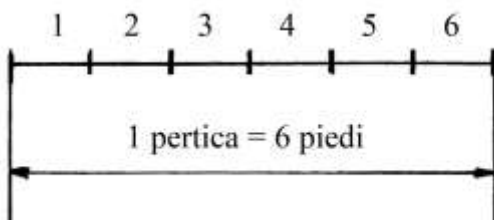
Altre fonti secondarie sono date da studi specialistici su singoli monumenti medievali che furono a suo tempo costruiti impiegando le unità di misura lineari in uso all'epoca: la loro interpretazione metrologica richiede la conoscenza di quelle unità.

La *pertica lineare pisana* era lunga l'equivalente di 2,9175 m. Essa aveva due sottomultipli:

- * il *braccio a terra*, lungo un quinto di una pertica e cioè $2,9175/5 \approx 0,5835$ m, valore arrotondato a 0,5836 m [si noti la sua equivalenza con la lunghezza del *braccio da panno fiorentino* di 0,583626 m, ciò che può confermare un'influenza pisana sulle unità di misura fiorentine]:



- * il *piede lineare*, uguale a 1/6 della pertica lineare e cioè $2,9175/6 \approx 0,48625$ m:



Fra la lunghezza del braccio a terra e quella del piede valeva il rapporto $6/5 = 1,2$.

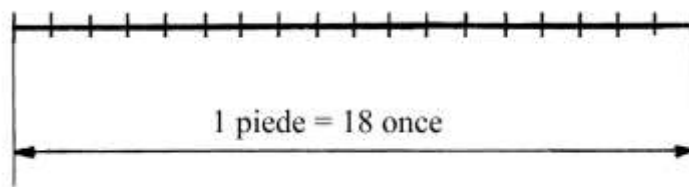
A fianco del *braccio a terra*, a Pisa era usato il *braccio a panno* che era lungo l'equivalente di 0,686 m.

Anche fra le lunghezze dei due bracci sembra potersi individuare un rapporto fisso:

$$\text{braccio a terra/braccio a panno} \approx 0,5836/0,686 \approx 0,8507 \rightarrow 17/20.$$

A sua volta, il piede lineare aveva un sottomultiplo, l'*uncia* o *uncia lineare*:

$$1 \text{ piede} = 18 \text{ oncie} \quad \text{e} \quad 1 \text{ oncia} = 1/18 * \text{piede} \approx 2,7 \text{ cm}.$$



Anche l'uncia lineare aveva un sottomultiplo, il *punto*:

$$1 \text{ oncia} = 18 \text{ punti} \quad \text{e} \quad \text{ciò} \quad 1 \text{ punto} = 1/18 * \text{uncia} \approx 0,15 \text{ cm}.$$

L'uncia era talvolta chiamata *pollice*.

Nota: sia nella traduzione del trattato geometrico di Fibonacci sia nell'articolo (entrambi citati in bibliografia), Barnabas Hughes adotta il rapporto $1 \text{ oncia} = 20 \text{ punti}$.

Il *grano* era un sottomultiplo del punto:

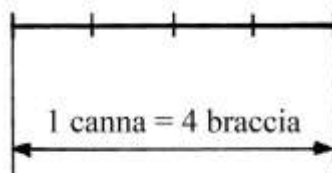
$$1 \text{ punto} = 2 \text{ grani} \quad \text{e} \quad 1 \text{ grano} \approx 0,075 \text{ cm.}$$

La tabella che segue riassume i rapporti fra le unità di misura lineari basate sul *pie* e sulla *pertica*:

	Pertica	Piede	Oncia	Punto	Grano
Grano					1
Punto				1	2
Oncia			1	18	36
Piede		1	18	324	648
Pertica	1	6	108	1944	3888

Un altro multiplo del braccio a terra era la *canna pisana*:

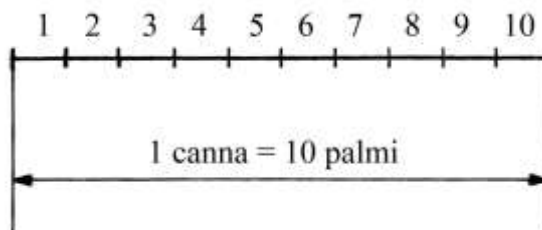
$$1 \text{ canna pisana} = 4 \text{ braccia a terra} \approx 4 * 0,5836 \approx 2,334 \text{ m:}$$



Canna era pure il nome dell'asta rigida lunga 4 braccia a terra.

Il *palmo* era un sottomultiplo della canna:

$$1 \text{ palmo} = 1/10 * \text{canna} \approx 2,334/10 \approx 0,2334 \text{ m:}$$



Queste informazioni sulla canna, sul braccio a terra e sul palmo pisani sono contenute nel *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano (1202 e 1228), al capitolo VIII, parte terza.

La tabella che segue è ricavata dal citato articolo di Barnabas Hughes (p. 624):

Table 4
Linear measurements.

Rod pertica 3 m	Foot piè 50 cm	Inch uncia 2.78 cm	Point punto 1.4 mm	Grain granello .7 mm
			1	1
		1	20	2
		18	360	40
1	6	108	2160	7200
				4320

I valori sono basati sul rapporto 1 oncia = 20 punti, anziché su quello
1 oncia = 18 punti.

La tabella contiene un errore: nell'ultima colonna a destra, "7200" va sostituito con "720".

I dati contenuti nella tabella di Barnabas Hughes sono leggermente arrotondati, per eccesso o per difetto.

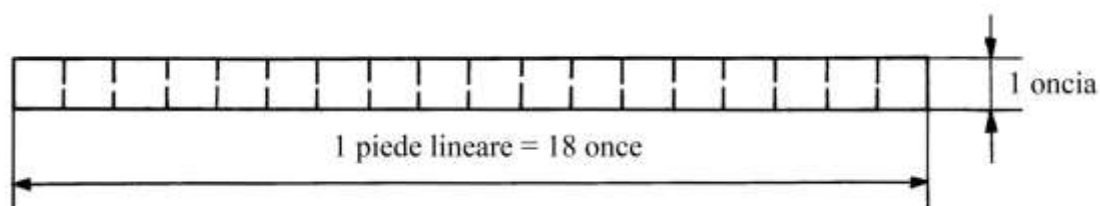
Per chiarezza, nella tabella che segue sono contenute le equivalenze *approssimate* in metri o in centimetri delle unità di misura lineari pisane:

Unità di misura	Metri (m) o centimetri (cm)
1 pertica lineare = 5 braccia a terra = 6 piedi	2,9175 m
1 braccio a terra = 2,9175/5 m	0,5835 m = 58,35 cm
1 piede = 2,9175/6 m	0,48625 m = 48,625 cm
1 braccio a panno = 20/17 * braccio a terra	68,6 cm
1 oncia = 1/18 di piede	2,7 cm
1 punto = 1/18 di oncia	0,15 cm
1 grano = 1/2 punto	0,075 cm

LE UNITÀ DI MISURA SUPERFICIALI DI PISA - Premessa

Alcune unità di misura delle superfici usate a Pisa portavano lo stesso nome di quelle lineari.

L'unità di misura minima di riferimento sulla quale erano basati i multipli era l'*oncia superficiale*. Essa rappresentava l'area di un rettangolo lungo 1 piede lineare e cioè 18 onces lineari e largo 1 oncia:

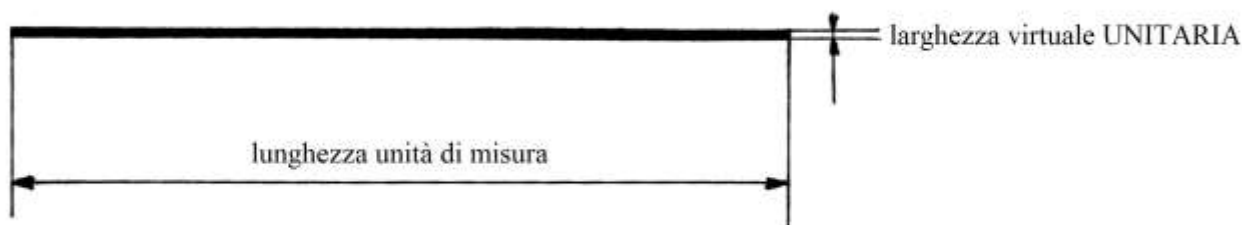


È questo un esempio di applicazione del metodo al quale Jens Høyrup ha efficacemente attribuito l'espressione *linee larghe*.

Le “linee larghe”

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup, fra l'altro profondo conoscitore della matematica medievale italiana – argomento al quale ha dedicati diversi studi fra i quali un volume su Jacopo da Firenze –, ha messo in evidenza un particolare metodo geometrico e aritmetico nella definizione delle unità di superficie, metodo impiegato perfino presso popoli antichi quali i Babilonesi e gli Egizi, che egli ha definito con l'espressione *linee larghe*, da lui tradotta in inglese con *Broad lines*.

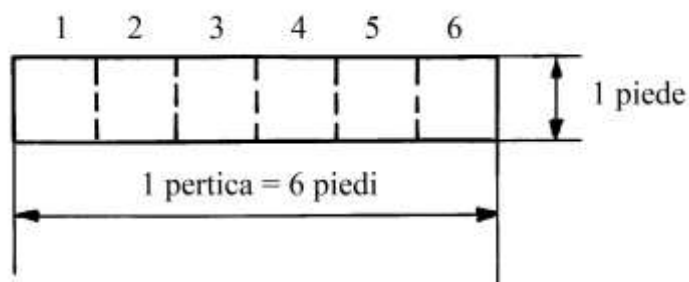
Le *linee larghe* erano delle strisce rettangolari larghe soltanto un'unità di misura e lunghe un multiplo di essa:



Alcune unità di misura di superficie usate nel Medioevo a Pisa seguivano questo metodo.

Nella *Practica geometrie* sono descritte le unità di misura lineari e superficiali usate nel Medioevo a Pisa. In questa Repubblica le unità superficiali erano basate sull'applicazione del metodo delle *linee larghe*, come è il caso dell'esempio che segue.

Una *pertica superficiale* era rappresentata da un rettangolo lungo 1 pertica lineare e largo 1 piede lineare:



Oggi diremmo che quel rettangolo ha un'area di 6 piedi².

----- APPROFONDIMENTO -----

Il commercio delle stoffe

Høyrup fa notare come il metodo delle *linee larghe* sia tuttora usato nel commercio delle stoffe (e lo era nel Medioevo quando le stoffe erano misurate e vendute a *braccia da panno*).

Una *pezza di stoffa* è una striscia di tessuto prodotta da un telaio e priva di orli o finiture: essa viene avvolta intorno a un'anima di robusto cartone o di plastica.

La lunghezza di una pezza è variabile a seconda delle fibre tessili con le quali è stata prodotta e può partire da 30-40 m per le pezze destinate alla vendita al dettaglio.

La larghezza di una pezza è chiamata *altezza*: le misure più usate sono 90, 150 e 240 cm.

Una volta scelta la pezza con una data altezza, l'acquirente compra la lunghezza in metri che gli occorre.

Il metodo delle *linee larghe* non è poi così insensato.

Avere il braccino corto

Il commercio medievale delle stoffe ha originato un'espressione: *avere il braccino corto*.

Ecco come Martina Naccarato ne spiega origine e significato sul "Corriere della Sera" del 31 luglio 2019:

"Oggi all'interno della rubrica *Rispettiamo l'Italiano* vogliamo svelare il significato di una tipica espressione fiorentina, ovvero, *avere il braccino corto*. Quando si utilizza questa frase che più o meno tutti conoscono, si vuol far riferimento ad una persona molto avara, che appunto ha il braccio talmente tanto corto da non riuscire ad arrivare al portafoglio che, generalmente, si trova nella tasca dei pantaloni. In realtà, però, sembra che l'origine di quest'accezione sia attribuibile ai venditori di stoffe, che in passato, quando cucivano vestiti erano soliti accorciare realmente il braccio. Il braccio all'epoca era anche l'unità di misura che usava proprio chi vendeva tessuti, non a caso, dei giovani garzoni, che a causa della loro tenera età, avevano il braccio più corto degli adulti, prendevano le misure, questo perché così facendo i commercianti potevano guadagnare di più grazie a questo "gioco sporco".

I rotoli di nastri e di carta

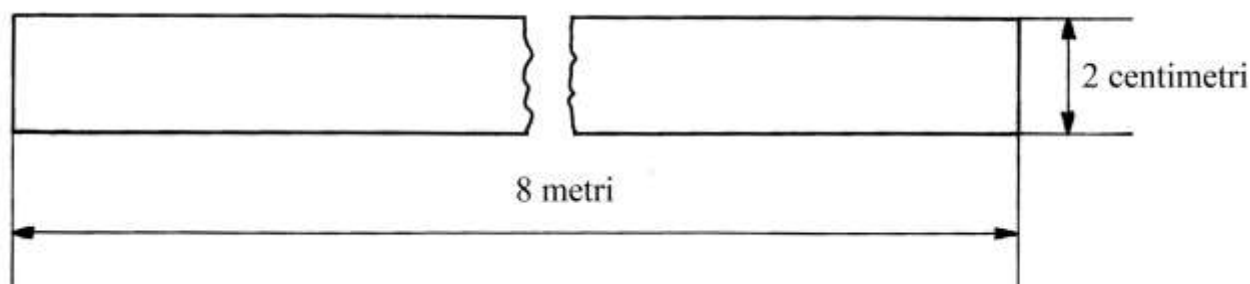
L'applicazione ai nostri giorni del metodo delle *linee larghe* può essere individuata in alcuni prodotti di larghissimo uso, tutti caratterizzati dall'essere *nastri* di spessore sottile, di notevole lunghezza e di ridotta larghezza, usati nelle più varie applicazioni.

Tutti questi prodotti sono avvolti intorno a un'anima a forma di cilindro cavo, di cartone rigido o prevalentemente di materiale plastico.

La lunghezza è sempre indicata in *metri* e la larghezza in *centimetri* o in *millimetri*: non è mai indicata l'area di m² dell'intero rotolo.

Facciamo alcuni esempi:

* nastro adesivo, usato per riparazioni, è lungo 8 metri e largo 2 centimetri:



* nastro adesivo trasparente: 19 mm * 7,5 m;

* nastro adesivo in alluminio: 10 cm * 50 m;

* rotoli carta per plotter: 914 mm * 50 m;

* nastro segnaletico: 48 mm * 33 m;

* cerotto di fissaggio: 5 m * 1,25 cm;

* nastro da imballaggio: 48 mm * 66 m.

A nessuno verrebbe in mente l'idea di esprimere la larghezza del primo nastro soltanto in metri:

$$19 \text{ mm} * 7,5 \text{ metri} = 0,019 \text{ m} * 7,5 \text{ m}.$$

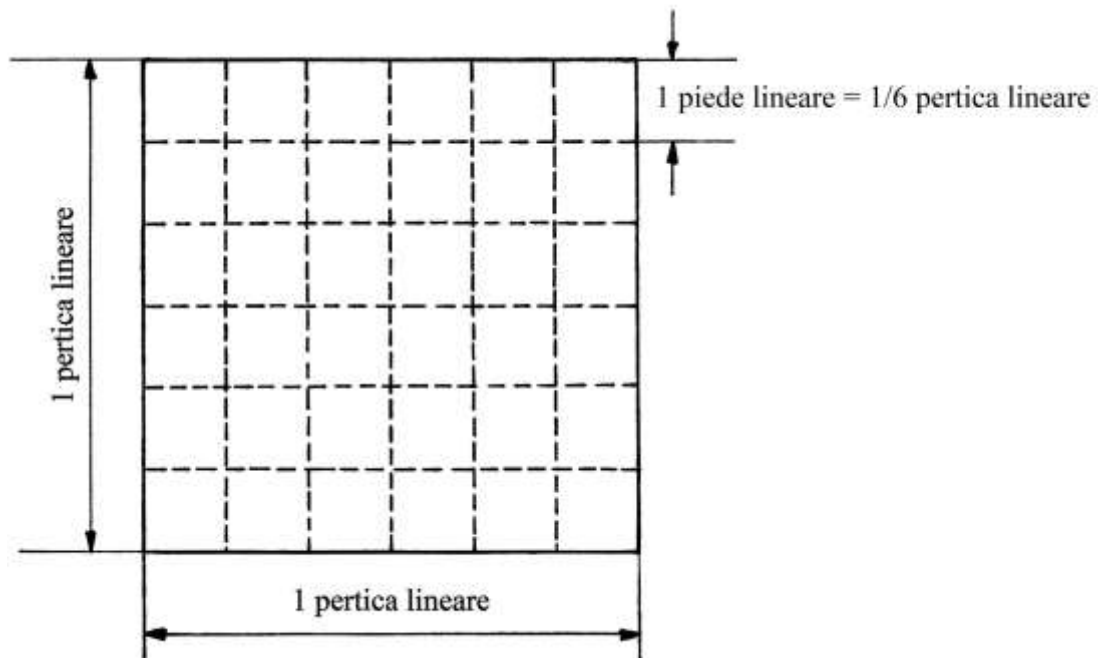
Anche l'uso congiunto del centimetro e del metro creerebbe problemi per la necessità dell'uso della virgola decimale:

$$19 \text{ m} * 7,5 \text{ m} = 1,9 \text{ cm} * 7,5 \text{ m}.$$

La carta assorbente usata in cucina è avvolta intorno a un'anima di cartoncino e viene venduta in rotoli la cui lunghezza è misurata con il numero degli *strappi*.

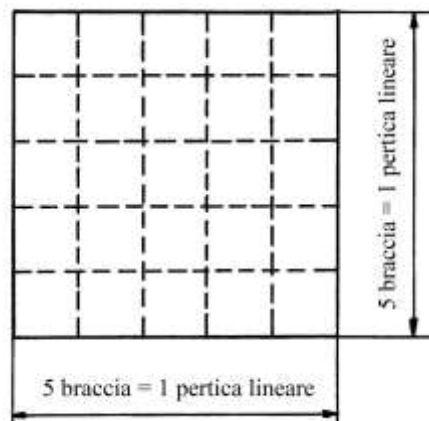
Le unità di misura superficiali di Pisa

Per Fibonacci l'unità superficiale fondamentale del sistema metrologico pisano era la *pertica quadrata* corrispondente all'area di un "rettangolo" lungo 6 pertiche lineari e largo 6 pertiche lineari e cioè un *quadrato*:



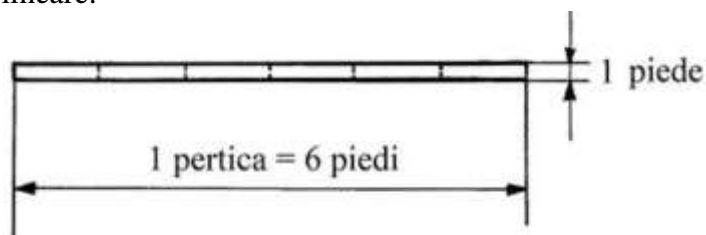
La pertica quadrata possedeva multipli e sottomultipli.

Forse fu usata anche una pertica quadrata basata sul braccio: la sua area era uguale a quella della pertica quadrata costruita su lati lunghi 6 piedi:

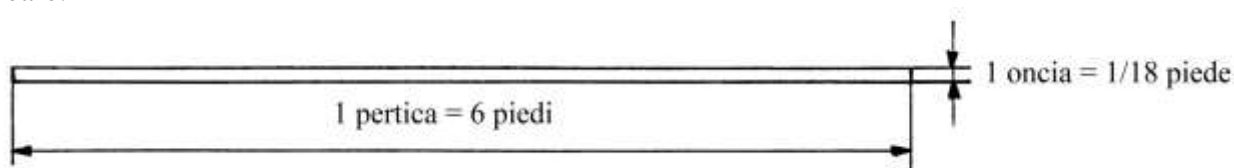


I sottomultipli della pertica quadrata

Il *piede superficiale* era rappresentato da un rettangolo lungo 1 pertica lineare (e cioè 6 piedi lineari) e largo 1 piede lineare:

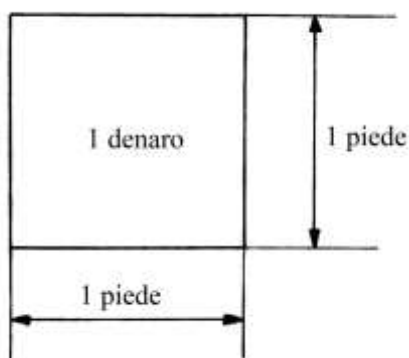


L'*uncia superficiale* era l'area di un rettangolo lungo 1 pertica lineare e largo 1 oncia lineare:



L'*uncia superficiale* valeva $1/18$ di un piede superficiale e $(1/18) \cdot (1/6) = 1/108$ esimo di una pertica quadrata.

La pertica superficiale era scomponibile in 36 quadrati con lati lunghi $1/6$ di pertica lineare e cioè 1 piede lineare:



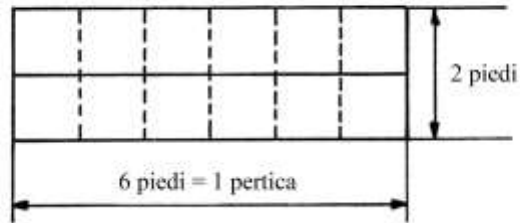
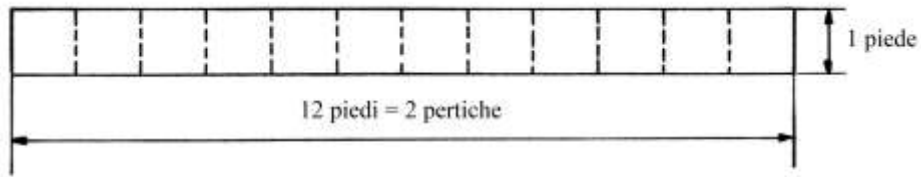
Questa unità era chiamata *denaro* e valeva:

$$1 \text{ denaro} = 1/36 \text{ pertica quadrata} = 3 \text{ once superficiali.}$$

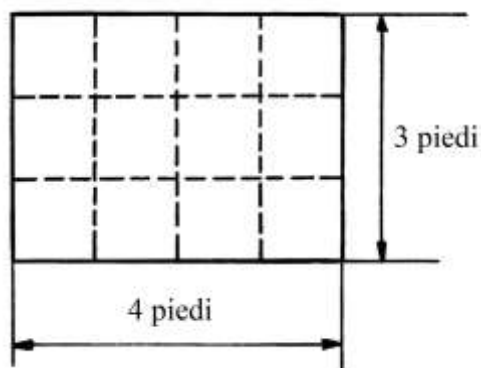
Un altro sottomultiplo della pertica quadrata e multiplo del piede superficiale era il *soldo superficiale* che aveva superficie doppia di questa ultima unità:

$$1 \text{ soldo} = 2 \text{ piedi superficiali.}$$

I due schemi che seguono mostrano due varianti dell'applicazione del metodo delle *linee larghe* al *soldo superficiale*:



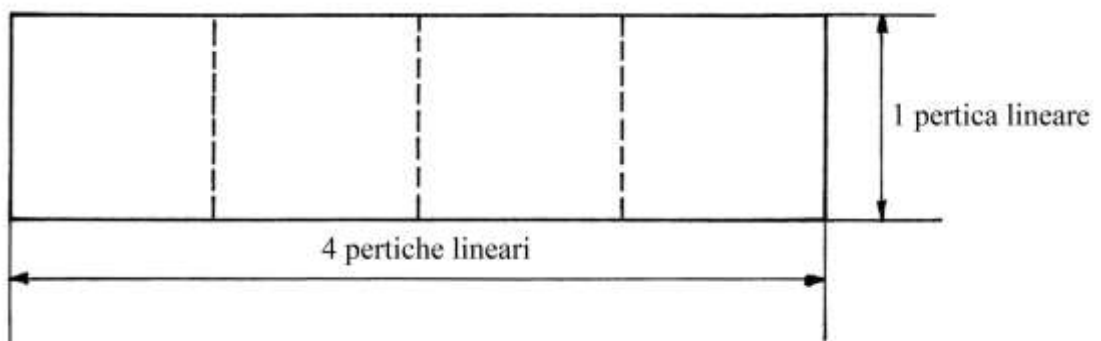
Infine, il *soldo superficiale* poteva essere strutturato sotto forma di una matrice rettangolare di dimensioni 3x4 piedi:



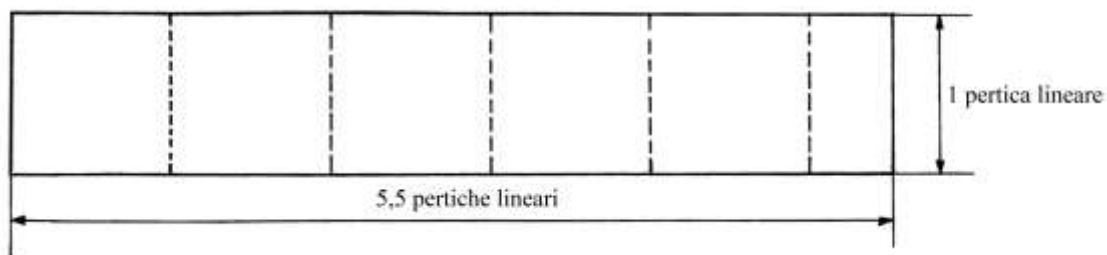
I multipli della pertica quadrata

La *scala* era un multiplo della pertica quadrata:

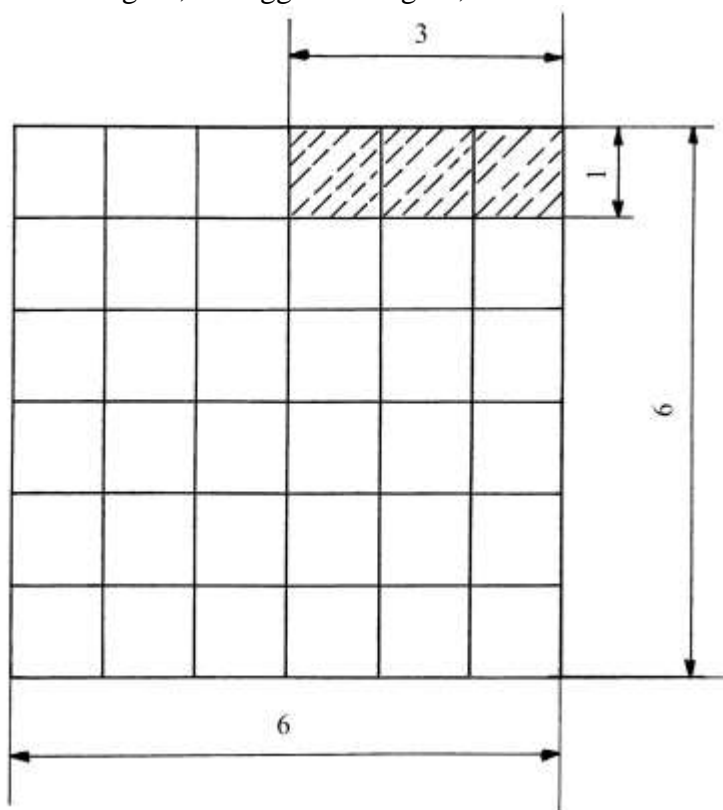
1 scala = 4 pertiche quadrate.

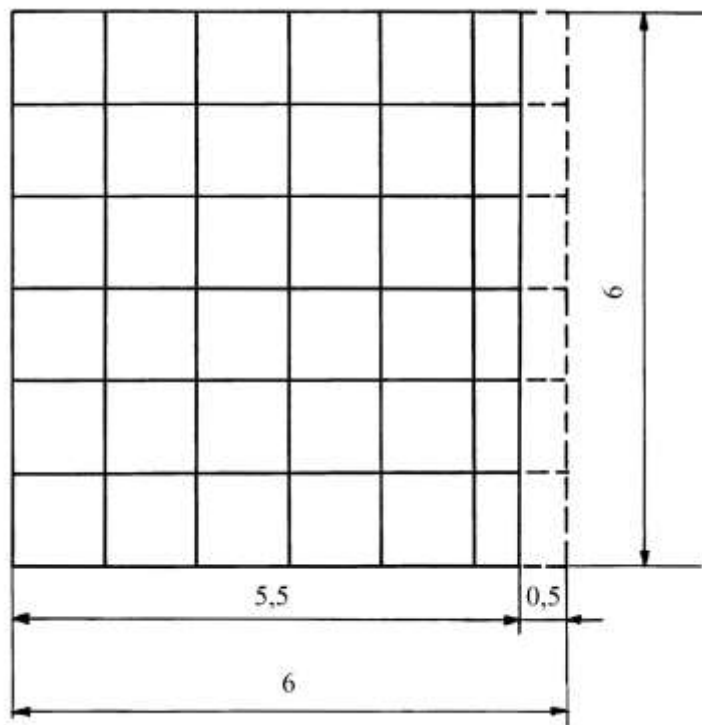


Il *panoro* era un altro multiplo della pertica quadrata:



Esso equivaleva a 5,5 pertiche quadrate: il numero 5,5 può essere spiegato con qualche difficoltà; gli schemi che seguono mostrano un quadrato di lato 6 unità dal quale è stato asportato in due differenti modi un rettangolo, tratteggiato in figura, di dimensioni 3×1 o $6 \times 0,5$ unità:





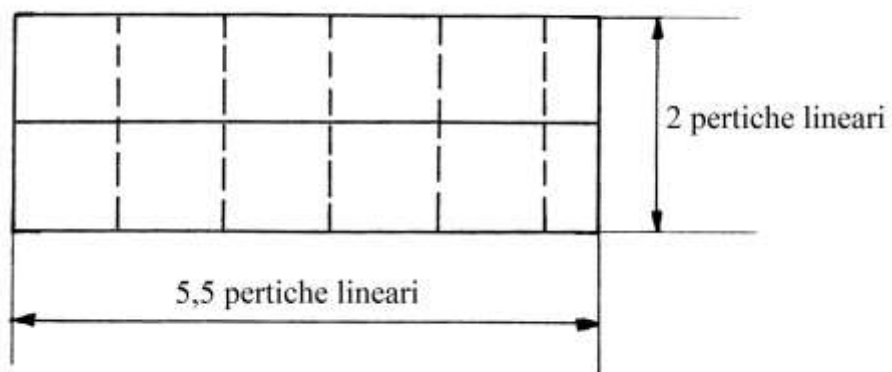
La matrice originale di $6*6 = 36$ è in entrambi i casi ridotta a:

$$6*6 - 3*1 = 33 \text{ unità superficiali};$$

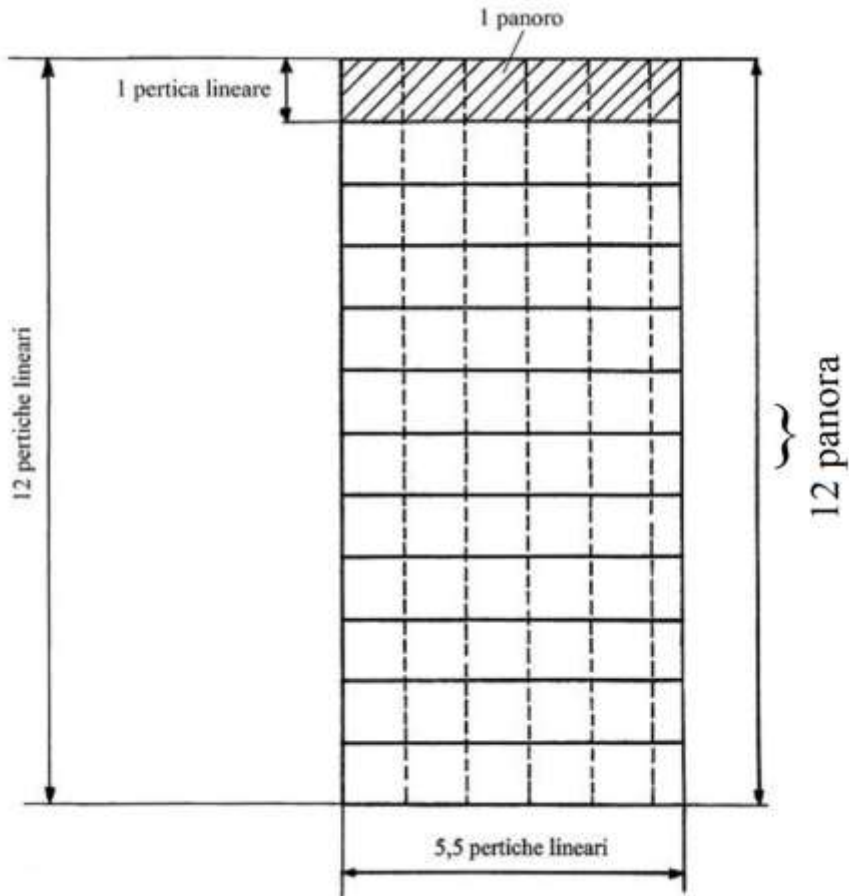
$$6 *6 - 6*0,5 = 33 \text{ unità superficiali.}$$

In entrambi i casi dividendo la superficie convenzionale uguale a 33 per 6 si ottengono $(5 + \frac{1}{2})$ unità superficiali.

Moltiplicando, ad esempio, 1 panoro per 2 pertiche lineari si ottengono $1*2 = 2$ panora:



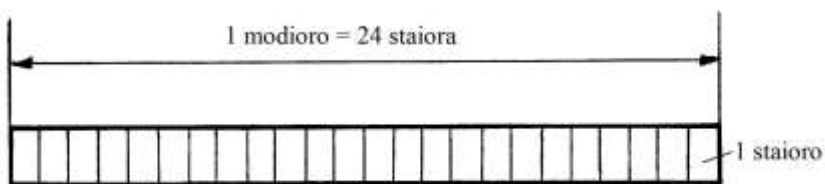
Moltiplicando 1 panoro per 12 si ha lo staioro:



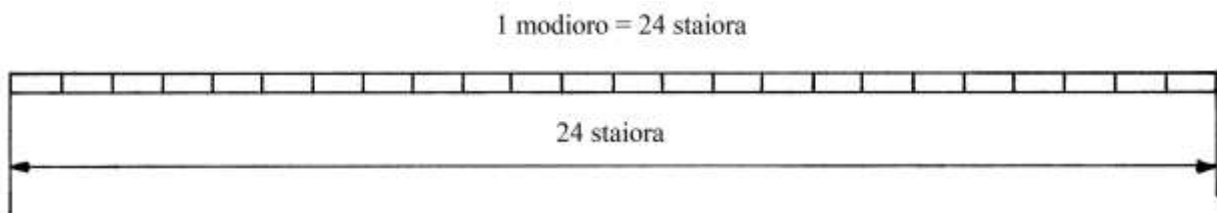
Ne consegue che 1 staioro valeva:

$$1 \text{ staioro} = 12 * 5,5 = 66 \text{ pertiche quadre.}$$

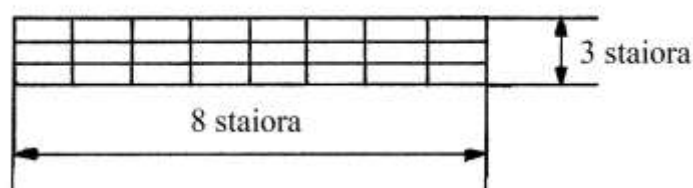
Infine, l'unità ancora più grande era il *modioro* o *moggio* che valeva 24 staiora:



Il *modioro* poteva essere organizzato in altri modi, come spiegano i due esempi che seguono:



1 modioro = 24 staiora



L'utilizzo così attestato a Pisa del metodo delle *linee larghe* nella definizione delle unità di misura superficiali era forse imposto dalle forme prevalentemente allungate dei terreni agricoli di proprietà privata, dovuto alla loro configurazione in ambienti collinari o nelle vallate dei corsi d'acqua?

Nella tabella che segue sono sintetizzate le relazioni fra le unità di misura lineari e superficiali:

Moltiplicandi * Moltiplicatori	Unità superficiali risultanti
1 oncia * 1 oncia	1/18 di 1/18 di denaro = 1/324 di denaro
1 piede * 1 oncia	1/18 di denaro
1 oncia * 1 pertica	1 oncia superficiale
1 piede * 1 piede	1 denaro
1 piede * 1 pertica	1 piede superficiale
1 pertica * 1 pertica	1 pertica superficiale (o pert.super.)
1 pertica * 1 panoro	1 panoro
1 pertica * 1 staioro	1 staioro
1 pertica * 1 modioro	1 modioro

Infine, la tabella che segue presenta i rapporti fra le *nove* unità di misura superficiali usate a Pisa all'epoca di Fibonacci. Nelle colonne le unità sono posizionate in ordine decrescente da sinistra (modioro) verso destra (onzia). Nelle righe le unità sono indicate in ordine crescente dall'alto (onzia) verso il basso (modioro):

	Modioro	Staioro	Panoro	Scala	Pertica	Soldo	Piede	Denaro	Oncia
Oncia superficiale									1
Denaro								1	3
Piede superficiale							1	6	18
Soldo superficiale						1	2	12	36
Pertica quadrata (o superficiale)					1	3	6	36	108
Scala				1	4	12	24	144	432
Panoro			1	1,375	5,5	16,5	33	198	594
Staioro		1	12	16,5	66	198	396	2376	7128
Modioro	1	24	288	396	1584	4752	9504	57024	171072

I rapporti fra i multipli e i sottomultipli delle unità di misura superficiali pisane non sono in base 10, ma in proporzioni espresse da alcuni divisori di 12: 2, 3, 4, 6 e lo stesso intero 12.

Nota

Nella *Practica Geometrie* Fibonacci fece una netta distinzione fra gli usi delle unità di misura superficiali:

- * i terreni e le case erano misurate in *pertiche, piedi e onces*;
- * le aree agricole venivano calcolate in *staiora, panora, soldi e denari*;
- * solo gli ambienti interni delle abitazioni potevano essere misurati in *scale* e nei loro sottomultipli, *soldi e denari*.

Da tutto ciò traspare la limitata importanza dell'unità *scala*.

----- APPROFONDIMENTO -----

Valori indicativi delle unità superficiali di Pisa

La tabella che segue, elaborata a partire da diverse fonti, tenta di offrire una serie di valori *indicativi* in pertiche quadrate e negli equivalenti m² delle principali unità di misura superficiali di Pisa:

Unità	Rapporti con la pertica superficiale	Valori indicativi in m ²
Pertica superficiale	1	≈ 8,5
Scala	4	≈ 34
Panoro	5,5	≈ 47
Staioro	66	≈ 562,5
Modioro	1584	≈ 13500

 - APPROFONDIMENTO -

I nomi di alcune unità di misura

Fra le unità di misura della superficie usate in Toscana sono il *pànororo* e il *pùgnoro*.

Secondo il Devoto – Oli, *pànororo* deriva dal plurale arcaico di *pane*: “(le) panora”.

Sempre secondo il Devoto – Oli, *pùgnoro* che al plurale fa *pùgnora* sarebbe una forma arcaica di *pugno*.

Alcune parole italiane non seguono le comuni regole di formazione del plurale: alcune di esse presentano dei cambi di genere (da maschile a femminile o viceversa), oppure possiedono plurali doppi.

Rientrano in questa categoria dei “plurali irregolari” alcuni nomi di unità di misura.

La tabella che segue riporta i singolari e i plurali di cinque unità di misura della superficie:

Unità di misura al singolare (maschili)	Plurali
Moggio	Moggi (maschile) Moggia (femminile)
Staioro	Stai (maschile) Staia (femminile)
Staioro	Staiori (maschile) Staiora (femminile)
Panoro	Panora (femminile)
Pugnororo	Pugnorora (femminile)

FIRENZE

Le unità di misura lineari

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

- * il *braccio da panno* o *braccio a panno* (“braccio di Calimala”, dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l’equivalente di 58,3626 cm (in seguito conosciuto anche come *braccio fiorentino*);
- * al suo fianco, per le misura dei terreni agricoli e per misure itinerarie era usato il *braccio da terra* o *braccio a terra* (di cui non è del tutto certa la data di introduzione).

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$\begin{aligned} 1 \text{ braccio da terra} &= (17/18) * \text{braccio da panno} \approx \\ &\approx 58,3626 * (17/18) \approx 55,1202 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Il matematico e ingegnere Leonardo Ximenes (1716 – 1786) a p. 2 del suo trattato citato in bibliografia scrive:

“...il Braccio... che volgarmente dicesi *Braccio da terra*, ed è solamente in uso nell’Agrimensoria; il secondo ... è il Braccio, che domandasi *da panno*, e si adopera non solamente per la misura de’ drappi, ma eziandio per tutti gli usi della Città; ed è il solo, che il volgo intenda, e conosca...”. In parole povere, nel Settecento i popolani fiorentini conoscevano e usavano solo il braccio da panno.

Nel suo studio del 2019, citato in bibliografia, Maria Teresa Bartoli afferma che il braccio da panno fu descritto in una delibera dell’Arte di Calimala del 1301 e che questa unità fosse in uso almeno dalla metà del XIII secolo.

Fra i documenti che citano il braccio – da panno – vi è il testo inciso su di una lapide murata sul montante sinistro di Porta alla Croce, nell’odierna Piazza Beccaria a Firenze:

ANNI·DI·MCCCX·IDICTIÖE·VIII·LAVIA·DEL·COMVNE
DENTRO·ALEMVRA·E·XVI·ELEMVRA·GROSSE
[scudo] · III7MEÇÇO·EFOSSI·ANPII·INBOCChA· [scudo]
COLGIETTO· ·XXXV·ELAVIA·DIFVORI·
SVLEFOSSE· ·XIII7MEÇÇO·ELEFOSSETTE
DALAVIA·ALECAMPORA· ·II7MEÇÇO·ECOSI
DEESSERE·INTVTTO· ·LXX·7MEÇÇO

Anni D(omi)ni MCCCX, i<n>dictio(n)e VIII. La via del Comune
dentro ale mura è br(accia) XVI e le mura grosse

br(accia) III (e) meçço, e’ fossi anpii in boccha

col gietto br(accia) XXXV e la via di fuori

su le fosse br(accia) XIII (e) meçço e le fossette

dala via a le campora br(accia) II (e) meçço; e cosi

de’ essere in tutto b(raccia) LXX (e) meçço.

[fonte: 26 aprile 2016 – *Il volgare esposto in Toscana (Firenze).pdf*]

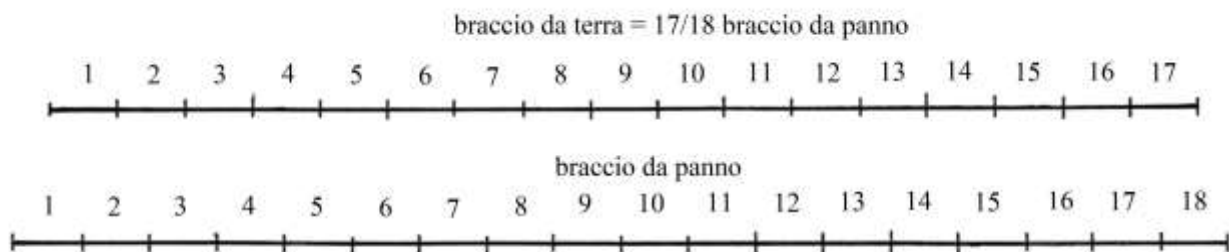
L'iscrizione risale al 1310: la data e le lunghezze in braccia sono espresse in numeri romani. L'unità di misura è omessa, quasi a significare che la sua conoscenza fosse ovvia e implicita.

Sono indicate le seguenti dimensioni, in braccia:

- * riga 2: larghezza della via a ridosso delle mura: 16 (XVI);
- * riga 3: larghezza delle mura: 3,5 (III e mezzo);
- * righe 3 e 4: larghezza del fossato se pieno: 35 (XXXV);
- * riga 5: larghezza della via rialzata esterna alle mura: 13,5 (XIII e mezzo);
- * righe 5 e 6: larghezza del fossato minore (*fossette*): 2,5 (II e mezzo);
- * riga 7: ampiezza totale 70,5 braccia (LXX e mezzo)
[16 + 3,5 + 35 + 13,5 + 2,5 = 70,5].

Molte grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza e fu soppresso con l'editto granducale del 13 marzo 1781. Era stato usato nella misurazione dei terreni agricoli e nella stesura delle relative mappe catastali.



Non è chiara la ragione che portò a fissare il rapporto 17/18 fra le lunghezze delle unità fiorentine del *braccio a terra* e del *braccio a panno*.

Alcune mappe catastali toscane risalenti agli ultimi secoli del Granducato contengono riferimenti a misure di terreni effettuate con una *canna di sei braccia a terra*: era uno strumento di legno, metallico o di corda? Essa aveva lunghezza uguale a:

$$\text{canna di sei braccia a terra} = 6 * (17/18 \text{ di braccio a panno}) = 5 + 2/3 \text{ braccia da panno} \approx 3,307 \text{ metri.}$$

Come avveniva per il *fiorino*, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 *denari*: per le monete e per le unità di misura lineari furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

Pure la *libbra*, unità di peso, aveva sottomultipli in base 12 e $2 * 12 = 24$:

- * 1 libbra = 12 once = 339,542 grammi;
- * 1 oncia = 24 denari = 28,295 grammi;
- * 1 denaro = 24 grani = 1,179 grammi;
- * 1 grano = 0,049 grammi
(fonte: Martini, p. 207).

Questa particolare identica articolazione del fiorino, del braccio da panno e dell'oncia ponderale favoriva grandemente la produzione e gli scambi commerciali.

La tabella che segue elenca i multipli (il *miglio*, la *pertica*, la *canna mercantile*, il *passetto*) e molti sottomultipli del *braccio da panno*:

Unità	Rapporti	Equivalenze in metri o in centimetri
Miglio	2833,33 braccia da panno	1653,607 m (*)
Pertica (canna agrimensoria)	5 braccia	2,918 m
Canna mercantile	4 braccia	2,3345 m
Passetto	2 braccia	1,1673 m
Braccio da panno	20 soldi	58,3626 cm
Palmo	½ braccio	29,1813 cm
Oncia o crazia (**)	1/12 di braccio	4,863 cm
Soldo	12 denari	2,9181 cm
Quattrino	4 denari = 1/60 di braccio	0,9727 cm
Denaro	12 punti	0,2432 cm
Punto		0,0203 cm
1 braccio e 1/4		72,9532 cm
16 soldi		46,69008 cm
¾ di braccio	15 soldi	43,7718 cm
2/3 di braccio		38,9084 cm
3/10 di braccio	18 quattrini	17,50778 cm

(*) Il *miglio* era lungo 3000 *braccia da terra* e quindi:
 $1 \text{ miglio} = 3000 \text{ braccia da terra} = 17/18 * 3000 = 2833,33 \text{ braccia da panno}.$

(**) La *crazia* era in origine una moneta del Granducato di Toscana, coniata in lega di argento e rame, emessa per la prima volta da Cosimo I de' Medici (1519 – 1574).

La *lira toscana* valeva:

$1 \text{ lira} = 12 \text{ crazie} = 20 \text{ soldi} = 60 \text{ quattrini} = 240 \text{ denari}.$

1 crazia equivaleva a 5 quattrini.

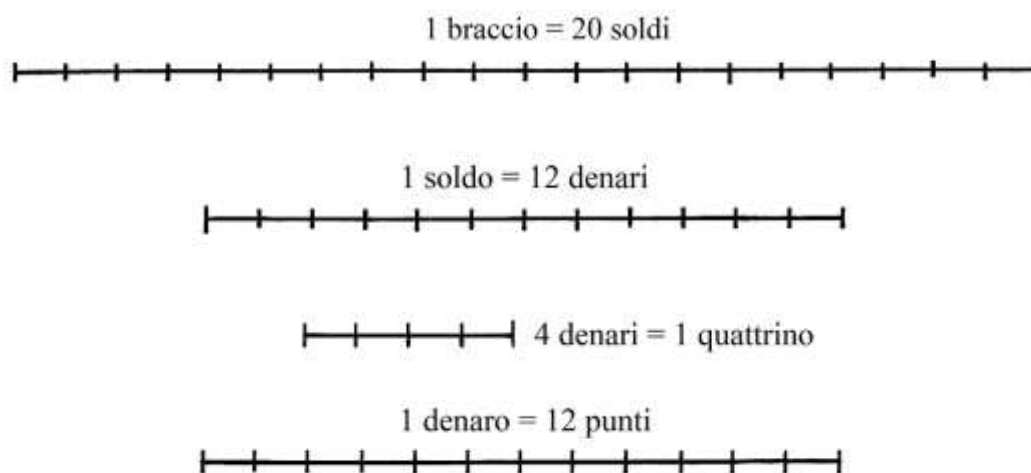
I sottomultipli della lira riproducevano le suddivisioni del braccio da panno.

A p. 185 del volume contenente la “Raccolta provinciale degli usi” pubblicata nel 2005 dalla Camera di Commercio, Industria, Artigianato e Agricoltura di Firenze è contenuta la tabella che segue, nella quale è citata la *crazia* quale lunghezza di *un dodicesimo* di quella del braccio a panno:

Misure di lunghezza

Miglio toscano	= m	1.653,6070	566 e 2/3 canne agrimensorie o 2.833 e 1/3 braccia
Canna agrimensoria	= m	2,9181	= 5 braccia
Canna mercantile	= m	2,3345	= 4 braccia
Passetto per le stoffe	= m	1,1672	= 2 braccia
Braccio fiorentino	= cm	58,36	= 20 soldi
Braccio a panno	= cm	58,36	= 12 crazie
Crazia	= cm	4,863	
Soldo	= cm	2,918	= 12 denari
Quattrino	= mm	9,727	= 4 denari
Denaro	= mm	2,432	= 12 punti
Punto	= mm	0,203	

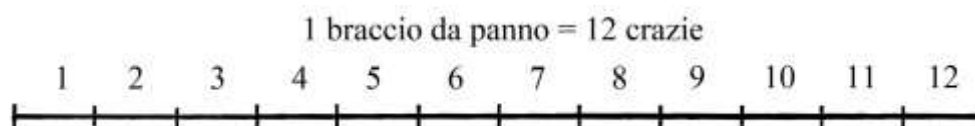
La *canna ferrata*, usata in edilizia, era lunga quanto una canna mercantile e cioè 4 braccia da panno: probabilmente essa recava incise le tacche rappresentative dei sottomultipli della canna e del braccio.



Il braccio da panno prevedeva un doppio sistema di sottomultipli:

* 1 braccio = 20 soldi; 1 soldo = 12 denari; 1 braccio = 240 denari (che è il sistema contenuto nella precedente tabella).

* 1 braccio = 12 oncie o *crazie*; 1 oncia = 20 denari; 1 braccio = 240 denari.



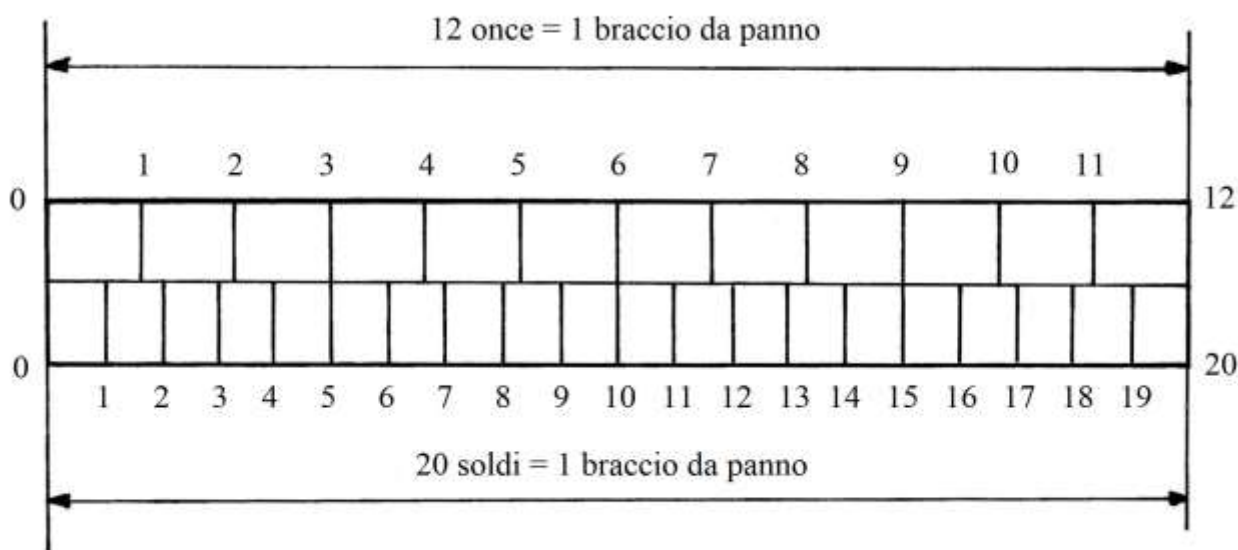
I due metodi condividevano la proporzione 1 braccio da panno = 240 denari.

Il rapporto fra il soldo e l'oncia (o crazia) era:

1 soldo : 1 oncia (o crazia) = 12 denari : 20 denari e quindi

1 soldo : 1 oncia (o crazia) = 3 : 5 .

Lo schema che segue mostra la duplice suddivisione del braccio in *once* e in *soldi*:



Entrambe le scomposizioni del braccio da panno contengono almeno una volta il divisore 12.

Stando alla tradizione la lunghezza del braccio da panno fu ritenuta equivalente a quella di 2 *piedi romani*, lunghi ciascuno 29,57 cm:

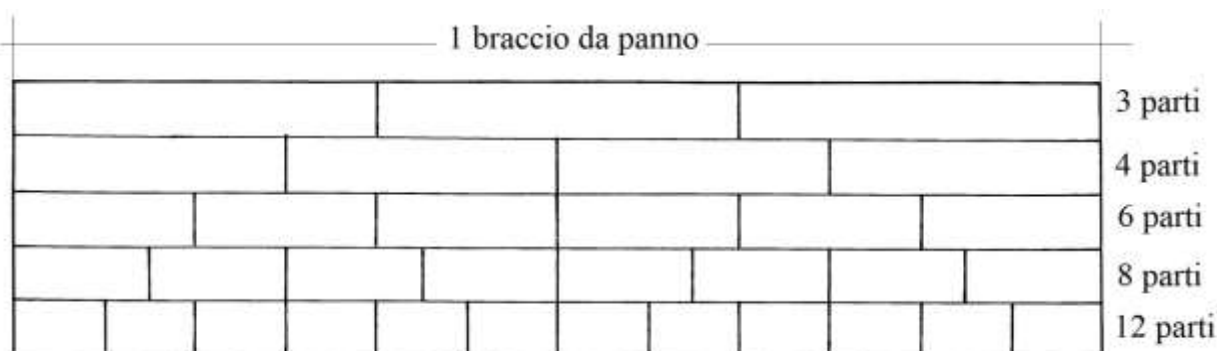
$$1 \text{ braccio} \approx 2 \text{ piedi} \rightarrow 58,3626 \text{ cm} \approx 2 * 29,57 \text{ cm} \rightarrow 58,3626 \text{ cm} \approx 59,14 \text{ cm}.$$

Anche il *panno da terra* si divideva in 20 soldi e ciascun soldo in 12 denari, con lunghezze pari ai 17/18 di quelle dei corrispondenti soldi e denari del braccio da panno.

----- APPROFONDIMENTO -----

Le divisioni del braccio da panno

Nel suo articolo del 1998 (elencato in bibliografia) Maria Teresa Bartoli cita l'architetto fiorentino Filarete (Antonio di Pietro Averlino, 1400-1469) che nel suo trattato "*Libro architettonico*" descriveva le unità di misura usate a Firenze alla metà del XV secolo: il braccio da panno era suddiviso in 3, 4, 6, 8 e 12 parti.



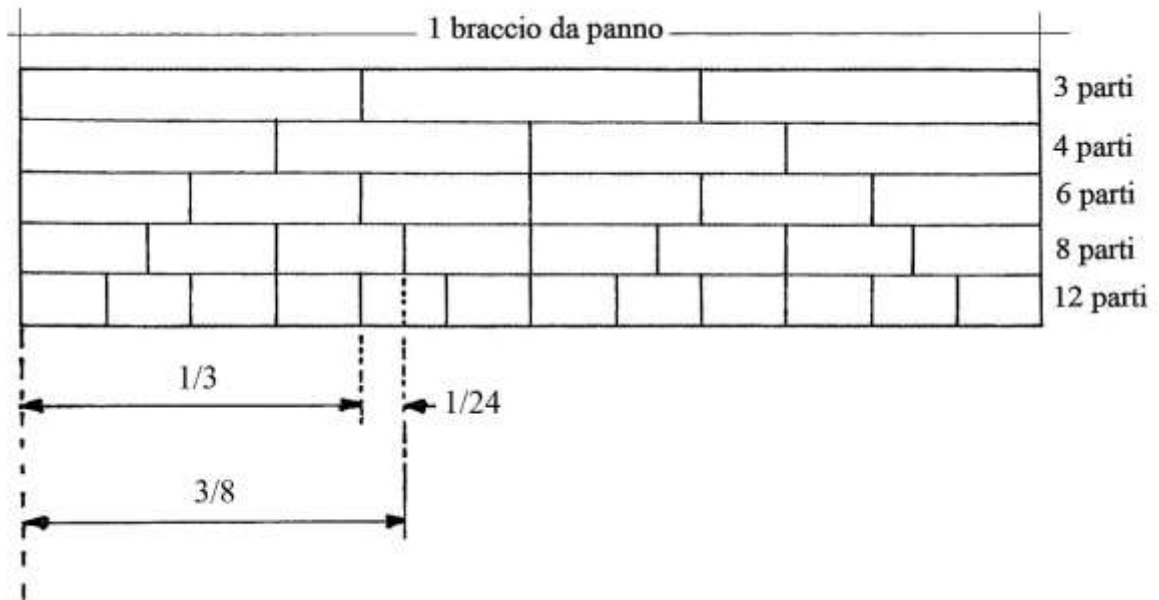
La distanza che separa le tacche corrispondenti a $1/3$ e $3/8$ corrisponde a $1/24$ di braccio; infatti si ha:

$$3/8 - 1/3 = (9 - 8)/24 = 1/24.$$

Anche la distanza fra $1/8$ e $1/12$ vale $1/24$:

$$1/8 - 1/12 = (3 - 2)/24 = 1/24.$$

Era così possibile effettuare misurazioni di lunghezza uguale a $1/24$ del braccio da panno.



Il trattato di Balducci Pegolotti

Francesco Balducci Pegolotti (fine XIII secolo – 1347) fu un mercante fiorentino che operò per conto della *Compagnia dei Bardi* in diverse località europee e del Medio Oriente.

Fra il 1335 e il 1343 raccolse le conoscenze che aveva accumulate nel corso della sua attività e scrisse un trattato: il *Libro di divisamenti di paesi e di misuri di mercatanzie e d'altre cose bisognevoli di sapere a mercatanti*, oggi noto con il titolo di *Pratica della mercatura*.

Il trattato è una notevole raccolta di informazioni sulle unità di misura (lineari, superficiali, volumetriche e ponderali) e sulle monete delle diverse località e dei loro reciproci rapporti.

Fra le altre, Pegolotti fornisce un'informazione interessante per gli scopi di questo articolo: *40 braccia [da panno] di Firenze equivalevano a 34 braccia di Pisa*.

Verifichiamo la validità dell'ipotesi:

$$1 \text{ braccio da panno di Firenze} = 34/40 * \text{braccio da panno di Pisa} \approx$$

$$\approx 34/40 * 0,686 \text{ m} \approx 0,5831 \text{ m, valore vicinissimo a quello noto del braccio da panno di Firenze, lungo } 0,583626 \text{ m.}$$

La frazione $34/40$ può essere semplificata in $17/20$: l'intero 17 fa di nuovo la sua comparsa al numeratore delle frazioni. Da dove derivava?

La presenza dell'intero 17

Riassumiamo i rapporti intercorsi fra le quattro unità di misura “braccio in uso a Pisa e a Firenze.

Nelle formule che seguono sono usate le seguenti quattro sigle:

- * brpP = braccio da panno di Pisa.
- * brtP = braccio da terra di Pisa.
- * brpF = braccio da panno di Firenze.
- * brtF = braccio da terra di Firenze.

$$1 \text{ brtP} = 17/20 * 1 \text{ brpP} \approx 17/20 * 0,686 \approx 0,5835 \text{ m.}$$

$$1 \text{ brpF} \approx 1 \text{ brtP} \approx 0,5835 \rightarrow 0,583626 \text{ m.}$$

$$1 \text{ brtF} = 17/18 * 1 \text{ brpF} \approx (17/18) * (1 \text{ brtP}) \approx (17/18) * (17/20 * \text{brpP}) \approx \\ \approx (17/18 * 17/20) * 0,5835 \approx 289/360 * 0,686 \approx 0,5507055 \text{ m} \rightarrow 0,551202 \text{ m.}$$

Calimala

L'Arte dei Mercatanti o Arte di Calimala era una delle più potenti corporazioni di arti e mestieri di Firenze. Le prime informazioni disponibili su di essa risalgono a circa il 1182.

Gli appartenenti a questa Arte importavano dall'Inghilterra, dalla Francia e dalla Spagna panni di lana grezza che trattavano, tingevano e rifinivano per poi riesportare i prodotti finiti verso l'Europa e il Mediterraneo. A Firenze i panni di lana grezza erano sottoposti a una serie di lavorazioni: cardatura, cimatura, raffinazione e tintura.

Con il tempo, Calimala divenne la più potente fra le Arti e i suoi appartenenti ampliarono i interessi creando le prime Banche fiorentine.

I tessuti erano tagliati con delle forbici o con delle cesoie metalliche sulla base di un'unità di misura, la *canna di Calimala* o *canna ferrata*, equivalente alla lunghezza di 4 braccia da panno corrispondenti a 2,3345 metri.

Lo Statuto di Calimala del 1301, al suo capitolo XXXVIII del Libro III, era intitolato “*De canna ferrata*”:

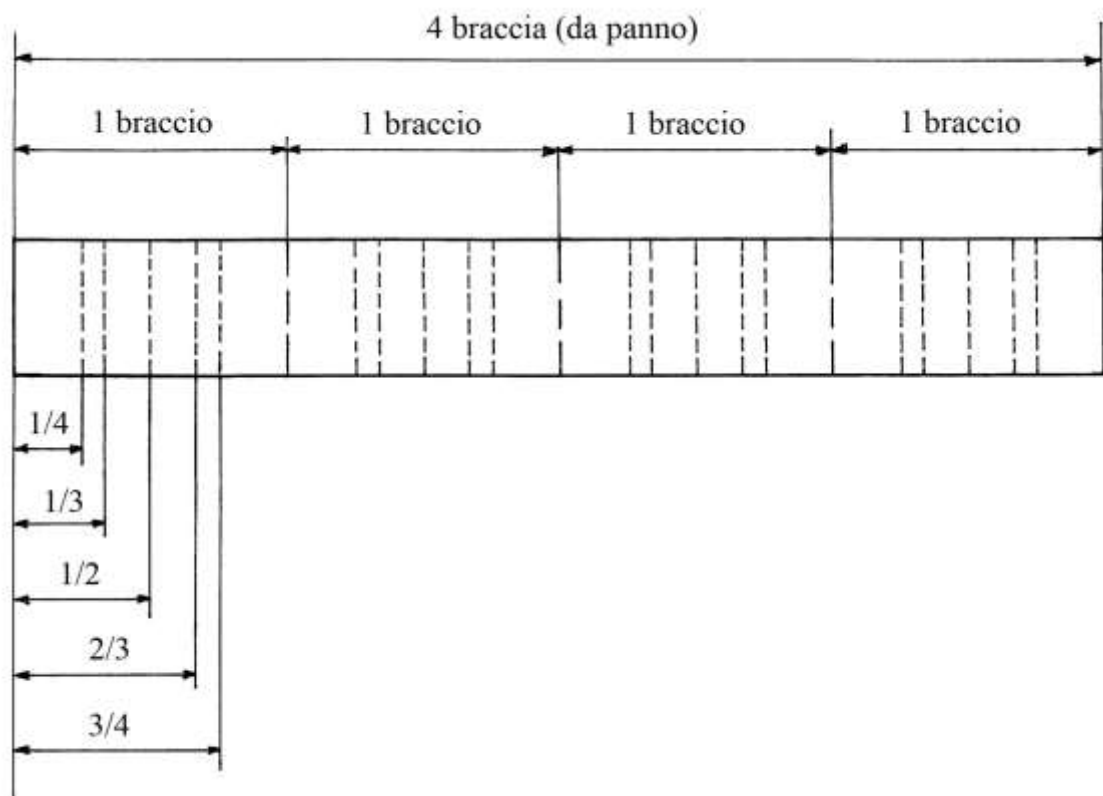
XXXVIII. De canna ferrata.

Teneantur consules per totum mensem januarii ad penam s. xx pro quolibet una cum tribus legalibus mercatoribus videre cannam ferratam que facta fuit actenus pro hac arte et etiam singnari in tribus locis civitatis Florentie vel pluribus ubi viderint fore decens, et ad ipsam cannam teneantur consules de quatuor in quatuor mensibus colligere omnes cannas huius artis et si quam falsam invenerint eam rumpant et ei cuius est tollant nomine pene s. c. et precipiant mercatoribus Kallismale ut vendant et emant ad rectam cannam sicut per consules et tres mercatores fuerit desingnata et sit quatuor brachiorum cum singnis patentibus brachii integri et medii et quarti et tertii ab utraque parte canne et quod sine fraude volvant manum ad quartum et non plus et ad aliam manum non debeant tenere a quartis tribus in antea, et ad eundem rationem faciant sine fraude si mensura venerit plus vel minus, et contrafacientes puniantur arbitrio consulum predictorum: in capite vero cuiuslibet canne et quando manum mutaverit teneatur quilibet mercator mittere brocum pena s. v et cotiens.

Qui di seguito è riprodotta la traduzione dal latino pubblicata da Maria Teresa Bartoli nel suo articolo citato al n. 3 della bibliografia:

“I consoli siano tenuti per tutto il mese di Gennaio pena S. XX a testa, insieme con tre mercanti ufficiali, a vedere che la canna ferrata, che fu fatta proprio per questa arte, sia anche fissata in tre luoghi della città di Firenze, o più, dove vedano che sia opportuno, e a questa canna siano tenuti consoli a confrontare di quattro in quattro mesi tutte le canne di questa arte e se ne trovino alcuna falsa, la rompano e a colui cui appartiene prendano a titolo di punizione S. C. e prescrivano ai mercanti di Calimala di vendere e comprare con canna retta come sia stata fissata dai Consoli e dai tre mercanti e sia di quattro braccia con segni evidenti del braccio intero e della metà e del quarto e del terzo da tutte e due le parti della canna e quando senza frode fanno scorrere la mano fino al quarto, dall'altra mano non debbono giungere oltre i tre quarti e con lo stesso prezzo facciano senza frode, che la misura sia di più o di meno e chi contravviene sia punito ad arbitrio dei predetti consoli: in capo a ciascuna canna anche quando abbia mutato mano sia tenuto ciascun mercante a mettere un segno, pena S. V. ognivolta”.

Lo schema che segue sintetizza le divisioni incise sulle due facce di una canna ferrata:



Fino a tempi recedenti, nei laboratori di sartoria era usata un'asta di legno rigido, lunga almeno 1 metro (o il suo equivalente in braccia da panno) e di forma prismatica: gli estremi erano rinforzati con piccole strisce metalliche (generalmente di ottone). L'asta recava incisi dei segni corrispondenti ai singoli centimetri e alle decine di centimetri (o alle frazioni di braccio). Strumenti del genere sono tuttora reperibili sui siti Internet di vendite per corrispondenza.

In bibliografia sono citati alcuni studi, articoli e volumi, di Maria Teresa Bartoli, già professore presso l'Università degli Studi di Firenze: i suoi contributi alla conoscenza delle unità di misura usate in Toscana nel Medioevo e nel Rinascimento sono molto importanti.

Il potere di Calimala era così grande che essa riuscì a imporre la sua unità di misura *canna di quattro braccia* (*quatuor brachiorum*) a tutta Firenze. È assai probabile che l'uso della canna risalga ad alcuni decenni prima del 1301.

La canna aveva dei sottomultipli:

- * La *mezza canna*, lunga 2 braccia e cioè 1,167 m.
- * Un *quarto di canna* e cioè un braccio da panno o 58,3626 cm.
- * Un *ottavo di canna* e cioè mezzo braccio, equivalente a 29,1813 cm.

Per evitare conflitti con le altre corporazioni, successivamente Calimala si limitò al controllo del commercio estero e l'*Arte della Lana* si occupò del mercato interno e dell'acquisto delle materie prime locali.

Il fiorino

Il *fiorino* era una moneta d'oro puro (a 24 carati) coniata a Firenze nel 1252, con il peso di 3,537 g.

Per l'epoca, il suo notevole valore impose la coniazione di altre monete di valore inferiore, suoi sottomultipli:

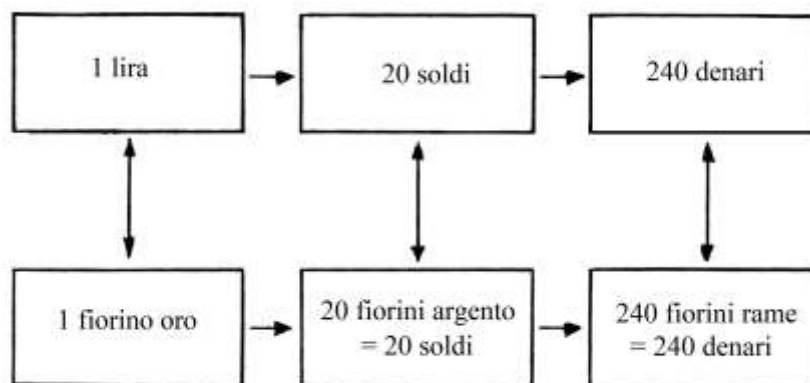
- * il *fiorino d'argento* inizialmente di valore uguale a 1/20 del fiorino d'oro;
- * il *fiorino di rame*, in principio con valore uguale a 1/12 di quello d'argento e a 1/240 di quello d'oro.

Questa ripartizione era ricalcata sul sistema monetario introdotto da Carlo Magno:

$$1 \text{ lira} = 20 \text{ soldi} = 240 \text{ denari.}$$

Nel Medioevo europeo, per secoli fu effettivamente coniato solo il denaro in argento. La *lira* e il *soldo* erano solo *monete di conto*.

Il grafico che segue mostra le relazioni fra il sistema monetario di Carlo Magno e il sistema monetario fiorentino:



----- APPROFONDIMENTO -----

La Famiglia Calandri

Elisabetta Ulivi ha dedicato notevoli studi agli abacisti fiorentini, fra i quali quelli appartenenti alla famiglia Calandri e a Maestro Benedetto.

Calandro Calandri (1419 – 1468 o 1469) fu un importante abacista: il nonno materno fu il Maestro Luca (1356 – 1433-1437), altro importante matematico.

Dopo la sua morte, il lavoro di Calandro fu continuato dal primogenito Pier Maria (1457-1508) al quale si unì l'altro figlio, Filippo Maria (1468-1518).

Il Trattato geometrico di Pietro Maria Calandri

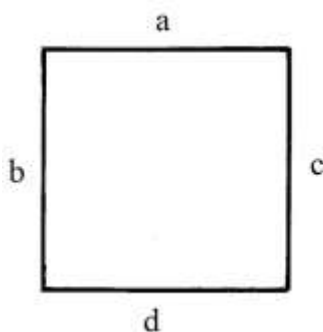
Pietro [o Pier] Maria Calandri scrisse un piccolo trattato geometrico dal titolo “*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*” che fu pubblicato da Giovan Vettorino Soderini (1526 – 1596) nel suo volume di agricoltura: esso è contenuto nelle pagine 291-346 del volume pubblicato nel 1902 e citato in bibliografia. A parte il titolo, il testo geometrico è scritto in italiano.

Il lavoro di Calandri riveste una notevole importanza per la fissazione delle unità di misura fiorentine e per la loro datazione. Esso inizia con un'affermazione:

“Dividesi la geometria in due parti, delle quali l'una è detta teorica e l'altra pratica; ma la teorica lasceremo al presente a' filosofi, e della pratica al numero congiunta, quanto a quello che alla notizia del misurare la terra fa di bisogno, diremo...”.

Le pagine iniziali del trattato di Calandri, dalla 292 alla 294, sono riservate alla descrizione del sistema metrologico in uso a Firenze a cavallo del 1500: la fonte è una delle principali e pochissime fra quelle che abbiamo a disposizione sull'argomento. Di seguito sono riprodotti alcuni stralci da quelle pagine:

“...Riducesi ogni terreno a staiora o vero parti di staioro, secondo la quantità del terreno che si misura. Questo nome staioro in due modi s'intende: l'uno è detto staioro a corda, o vero a misura; l'altro è detto staioro a seme. Staioro a seme è detto quello che tanto spazio di terreno comprende, che in esso uno stairo di grano si sementi. Staioro a corda o vero a misura è quello che in esso la terza parte d'uno stairo di grano si semina in circa. In circa dissi, perchè intra i terreni nel gittare il seme fa qualche cosa differenza, secondo la qualità della terra peggiore o migliore, di piano o montuosa, in modo che uno stairo di grano in piano tre staiora sementa a copia, et in poggio tre e mezzo. Lo staioro a corda immaginariamente è diviso in dodici parti, et ogni parte si chiama panoro: il panoro similmente si divide in dodici parti, ed ogni parte si chiama pugnoro: il pugnoro ancora si divide in dodici parti, et ogni parte si chiama braccio quadro. Il detto braccio non ha divisione, se non in quella parte che facesse divisione di esso braccio, come è a dire mezzo braccio, un terzo di braccio e due quinti di braccio e simili parti o parte: il che, perchè è cosa minima, si lascia, e solamente delle staiora panori e pugnori e braccia quadre intere si tiene conto. Il braccio quadro è tanto spazio di terra, quanto da uno braccio di lunghezza et uno di larghezza è compreso; cioè per braccio quadro s'intende una superficie piana che per ogni verso sia un braccio, come verbigrazia la superficie, la quale pongo essere per ogni verso un braccio. E tutto quello spazio da detta superficie compreso dico essere braccio quadro o vero superficiale che è quel medesimo. E quando diciamo: questo campo è cinquanta o cento braccia, intendiamo quadre, cioè che in quel campo sia cinquanta o cento volte la sopraddetta superficie quadrata *a. b. c. d.*



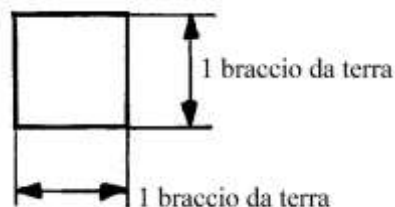
“Furono anticamente trovate due braccia, cioè di due ragioni, con le quali attualmente tutte le cose si misurano: l'uno si chiama braccio da terra, e l'altro braccio universale. Braccio universale è detto quello co 'l quale panni, drappi et universalmente ogni cosa si misura; braccio di terra è quello co 'l quale la terra solamente si misura, non alcuna altra cosa; e perchè egli è un poco di

minor quantità che il braccio universale, però s'è per pruova veduto che uno staioro a corda è 1728 braccia quadre di braccia da terra; e di quelle universali braccia di panno è 1600 braccia quadre, cioè 1728 braccia quadre da terra sono 1600 braccia quadre da panno; e questo secondo il comune uso; ma, secondo la verità, 1728 braccia da terra quadre sono 1540 braccia quadre in circa da panno. E però al vendere e comprare terreni è vantaggio con qual braccio si misuri; imperciocchè, comprando uno staioro di terra misurato co 'l braccio da panno che sarà 1600 braccia, sono più giusta misura o vero più braccia quadre che 1728 da terra. Ma qualche volta il detto braccio universale s'usa per aver più comodità di quello che del braccio da terra. Ma il modo del misurare e del fare il conto è un medesimo e con l'uno e con l'altro braccio che si sia misurato: solo questa differenza si piglia, che per ogni 1600 braccia quadre da panno si piglia un staioro a corda, e di quelle altre da terra per ogni 1728 braccia quadre s'ha a pigliare uno staioro a corda.

“Adunque il numero delle braccia quadre, quando sono da panno, si parte per 1600, e quando sono da terra si parte per 1728; e quello ne viene sono staiora e parti di staiora, come meglio al luogo conveniente sarà manifesto, ponendo esempi con l'una e con l'altra misura. Compone il misuratore co 'l detto braccio una misura che contiene seti di quelle braccia, la quale chiama canna; e con questo strumento piglia la misura della lunghezza e larghezza, la quale auta, si riduce a braccia quadre e staiora, come in quello che seguirà sarà manifesto. Quello che s'è detto e quello che si dirà è secondo il modo et uso fiorentino: questo dico, perchè le misure sono varianti secondo l'uso e costume dei paesi maggiori o minori...”.

Le unità di misura delle superfici a Firenze anteriori alla riforma del 1781-1782

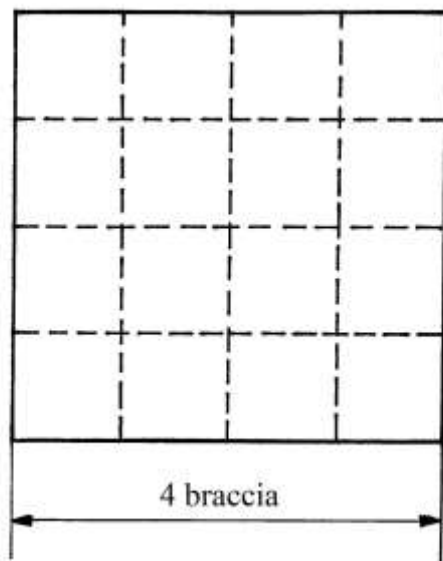
Fino alla riforma del 1781-1782, le unità di misura delle superfici agrarie usate a Firenze erano basate sul *braccio quadro da terra*.



La sua area era:

$$1 \text{ braccio}^2 \text{ da terra} = (1 \text{ braccio a terra})^2 \approx (0,551202 \text{ m})^2 \approx 0,303824 \text{ m}^2.$$

Era pure usato un multiplo del braccio quadro, la *canna quadra*, equivalente all'area di un quadrato con lati lunghi 4 braccia:



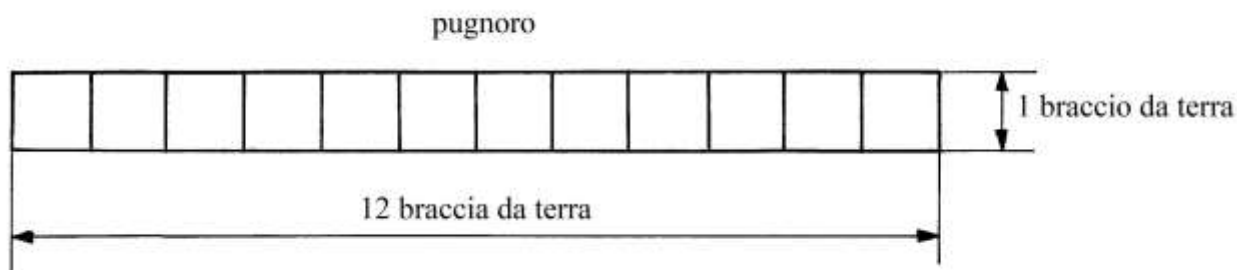
La canna quadra poteva essere basata sia sul braccio da terra sia su quello da panno (e dopo la riforma leopoldina del 1781-1782 solo questo ultimo braccio poteva essere usato):

- * 1 canna quadra (da terra) = (4 braccia da terra)² ≈ (4 * 0,551202)² ≈ 4,8612 m².
- * 1 canna quadra (da panno) = (4 braccia da panno)² ≈ (4 * 0,583626)² ≈ 5,45 m².

Come accadeva alle unità di misura di Pisa, la serie dei multipli del braccio quadro da terra fiorentino formava una progressione di ragione 12.

Il primo multiplo era il *pugnorò* che valeva 12 braccia²:

$$1 \text{ pugnorò} = 12 \text{ braccia}^2 \text{ a terra} \approx 12 * 0,3038 \approx 3,6459 \text{ m}^2.$$



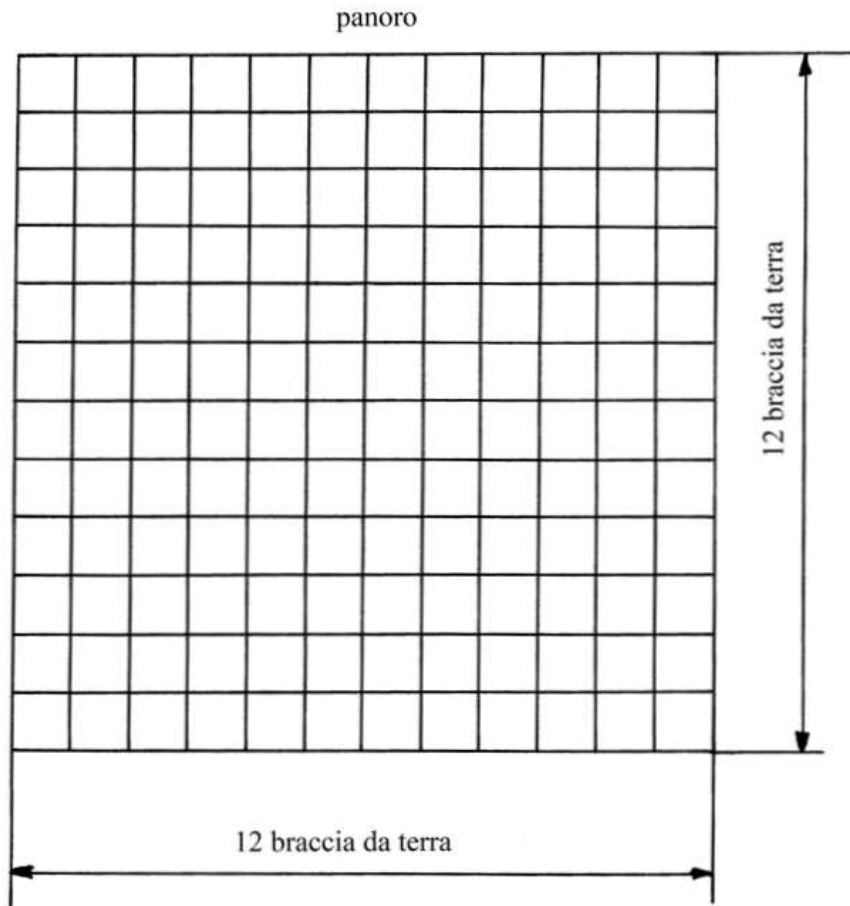
Il pugnorò è qui rappresentato come un rettangolo di dimensioni

$$(12 * 0,551202) * 0,551202 = 6,614424 * 0,551202 \text{ m.}$$

Nello schema qui sopra i quadrati rappresentanti le dodici braccia quadre sono stati disegnati affiancati: anche il pugnorò costituiva un'applicazione del metodo delle *linee larghe*?

Il successivo multiplo era il *panorò*, uguale a 12 pugnorò e quindi uguale a

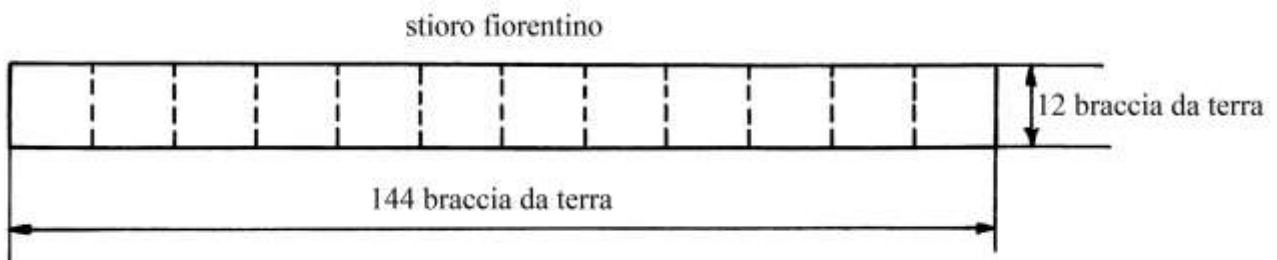
$$(12 \text{ braccia da terra})^2 = 144 \text{ braccia}^2 \approx 144 * 0,3038 \approx 43,75 \text{ m}^2:$$



Il panoro poteva essere rappresentato, come fatto qui sopra, come un quadrato con lati lunghi

$$12 \text{ braccia da terra} \approx 12 * 0,551202 \approx 6,614424 \text{ m.}$$

Lo *stioro fiorentino* (o *staioro a corda*) era la superficie contenente 12 panora e quindi $12 * 12^2 \text{ braccia}^2 = 12^3 \text{ braccia}^2 = 1728 \text{ braccia}^2$, equivalenti a $12 * 43,75 \approx 525 \text{ m}^2$.

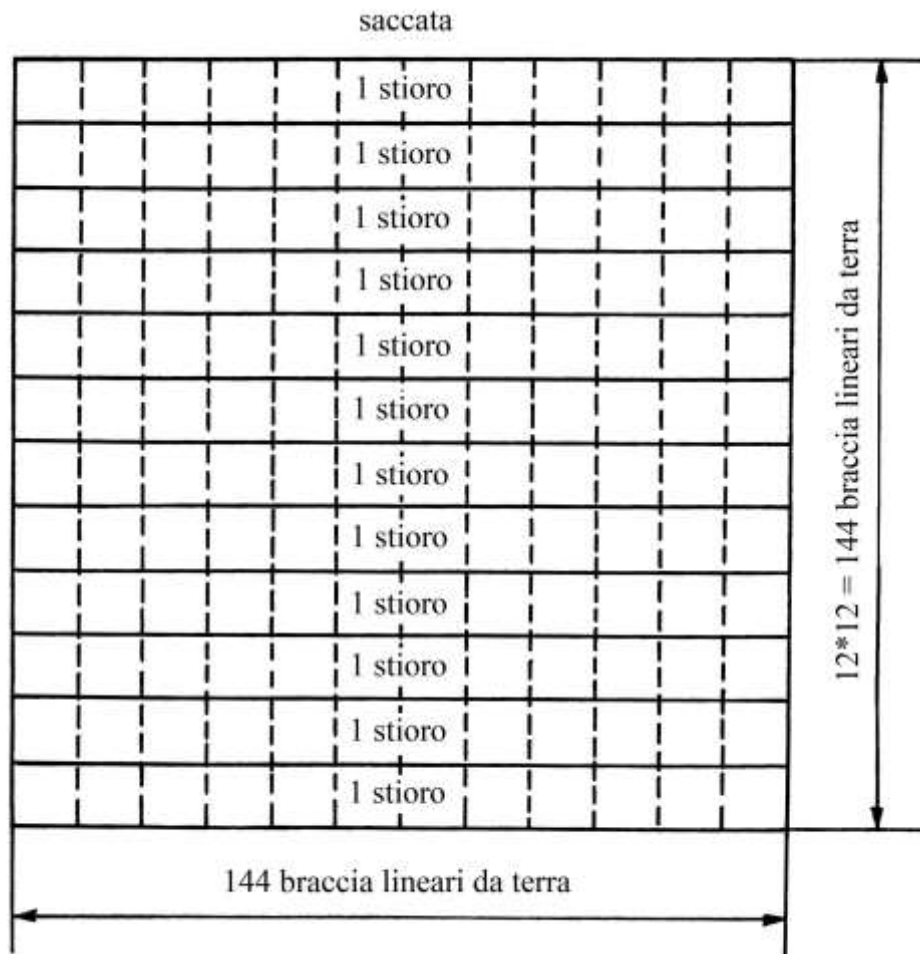


Lo stioro era un rettangolo di dimensioni

$$144 * 12 \text{ braccia} = (144 * 0,551202) * (12 * 0,551202) \approx 79,373088 * 6,614424 \text{ m.}$$

Anche questa rappresentazione dello stioro riporta a un'applicazione del metodo delle *linee larghe*?

Infine, la *saccata* era il multiplo più grande e equivaleva a 12 stiora:



La saccata aveva area uguale a:

$$1 \text{ saccata} = 12 \text{ stiora} \approx 12 \cdot 525 \approx 6300 \text{ m}^2.$$

Essa era rappresentabile come un quadrato con lati lunghi 144 braccia lineari da terra:

$$\text{lato} \approx 144 \cdot 0,551202 \approx 79,373088 \text{ m.}$$

La tabella che segue riassume i rapporti fra le unità di misura superficiali in uso a Firenze fino alla riforma del 1781-1782:

Unità di misura	Rapporti con il braccio quadro da terra
Braccio ² da terra	1
Pugnorio	12
Panoro	$12^2 = 144$
Stioro fiorentino (staioro a corda)	$12^3 = 1728$
Staioro a seme (= 3 stiora)	$3 \cdot 12^3 = 5184$
Saccata	$12^4 = 20736$

----- APPROFONDIMENTO -----

Le unità di misura superficiali utilizzate in un Cabreo Mugellano

Nell'articolo di Paolo Chiappe, citato in bibliografia, è descritto il contenuto di un *Cabreo Mugellano* oggi custodito presso l'Accademia dei Georgofili di Firenze.

Un Cabreo è un inventario molto dettagliato di beni fondiari di grandi amministrazioni e di singole famiglie: un documento di questo genere conteneva mappe e descrizioni di terreni, boschi, fabbricati (abitazioni, mulini e gualchiere, canali di derivazione) e degli animali da allevamento. Il documento poteva contenere le informazioni relative a eventuali ipoteche o ad altri vincoli gravanti sulle singole proprietà. Spesso vi erano indicati i nomi degli affittuari, la natura e la durata dei contratti e i canoni corrisposti.

La composizione del Cabreo Mugellano è attribuita al periodo 1698-1738 e quindi a un'epoca anteriore alla riforma leopoldina del 1781-1782.

I poderi descritti, tutti di proprietà di una famiglia, erano concentrati quasi tutti nel Mugello, un territorio nella Valle della Sieve e dei suoi affluenti, in provincia di Firenze e posizionato a nord del capoluogo.

Le unità di misura usate nel Cabreo sono quelle fiorentine.

La tabella che segue e il testo che li descrive sono riprodotte dall'articolo del Chiappe e mostrano la documentazione relativa al podere di Valluttole nei pressi dell'odierno Comune di Vicchio.

Le misure agrarie nel cabreo dei Georgofili

A. Presa lavorativa boscata ginestrata e maggiatica, con casa da lavoratore e capanna	Sta.a 97	Sti.a 2	Pa.a 0	Pu.a 4	B.a 3
B. Presa lavorativa, vitata olivata ginestrata pasturata	Sta.a 40	Sti.a 0	Pa.a 8	Pu.a 3	B.a 10
C. Selva castagnata (sic)	Sta.a 1	Sti.a 2	Pa.a 4	Pu.a 9	B.a 9
D. Selva castagnata	Sta.a 2	Sti.a 0	Pa.a 7	Pu.a 9	B.a 0
E. Selva castagnata derta al Sorbo	Sta.a 21	Sti.a 2	Pa.a 10	Pu.a 9	B.a 0
SOMMA	Sta.a 163	Sti.a 2	Pa.a 7	Pu.a 11	B.a 10

“... ”

Esempio di «Nota delle stiora" nel cabreo (podere di Valluttole)

“Si sommano le braccia, il risultato è 22; ma 12 braccia = 1 pugnoro, quindi si segnano dieci braccia e si aggiunge un'unità alle pugnora; somma delle pugnora allora = 35, se ne segnano 11 e si aggiungono alle panora due unità; somma delle panora = 31, se ne segnano 7 e si aggiungono due unità alle stiora; somma delle stiora = 8. Lo stioro qui usato è pari a 1/3 di staioro, infatti sono state segnate in risultante due stiora e sono state aggiunte due unità alle staiora. Quindi per l'agrimensore di questo cabreo: uno staioro = 3 stiora, ovvero 36 panora, ovvero 432 pugnora, ovvero 5184 braccia quadre.

Si tratta della griglia di unità di misura di superficie agraria usate a Firenze e nel suo contado nella prima età moderna e descritta per esempio nel manuale *Osservazioni sopra il braccio agrario fiorentino detto braccio a terra* (1781) dello scolio Bernardino Vestrini, il quale mette in guardia dalla confusione pratica e teorica che si faceva al suo tempo tra staioro e stioro (anche per le abbreviazioni spesso indistinguibili). La distinzione tra staioro e stioro usata nel cabreo sembra

corrispondere quindi alla comune distinzione tra staioro «a corda» e staioro «a seme» [...], solo che qui vengono razionalizzati l'uno come un multiplo esatto dell'altro. Resta da stabilire quale sia il braccio preso a misura di tutto dall'agrimensore, cosa che non è chiarita dalla scala di canne, braccia a terra e braccia a panno riportata nella prima tavola del cabreo. Come certifica però anche Bernardino Vestri cit. la base per lo stioro era di solito il braccio a terra e infatti nel passaggio successivo al sistema decimale [...] venne stabilita per lo stioro una equivalenza a 525 mq...”.

La tabella contiene cinque colonne intestate con le abbreviazioni delle unità di misura superficiali:

- * Sta.a sono le staiora.
- * Sti.a sono le stiora.
- * Pa.a sono le panora.
- * Pu.a sono le pugnora.
- * B.a sono le braccia quadre (da terra).

Il metodo descritto sopra per il riporto da un'unità al suo multiplo risultava (e risulta) abbastanza complicato e non poteva essere eseguito a mente, ma sicuramente richiedeva l'uso della scrittura.

Una causa di errore poteva essere data dalla *quasi* uguaglianza delle sigle dei due maggiori multipli: *Sta.a* per le staiora e *Sti.a* per le stiora.

Un confronto fra le unità superficiali di Pisa e di Firenze

La tabella che segue mette a confronto le antiche unità superficiali di Pisa e quelle di Firenze in vigore fino alla riforma leopoldina del 1781-1782. Le unità sono espresse, con una certa approssimazione, in m²:

Unità superficiali di Pisa		Unità superficiali di Firenze	
Nome	Equivalenza in m ²	Nome	Equivalenza in m ²
Oncia superficiale	0,0787		
Denaro	0,236	Braccio ² a terra	0,3038
Piede superficiale	1,416		
Soldo superficiale	2,833		
		Pugnorò	3,6459
Pertica quadrata (o superficiale)	8,5		
Scala	34		
Panoro	47	Panoro	43,75
Staioro	562,5	Stiòro	525
		Saccata	6 300
Modiòro	13 500		

Le unità di misura delle superfici a Firenze posteriori alla riforma del 1781-1782

La riforma del 1781-1782 confermò tutte le unità lineari già in vigore a Firenze e le estese all'intero Granducato di Toscana. La figura che segue riproduce la pagina del volume contenente le unità di misura lineari e superficiali di Firenze anteriori alla riforma leopoldina, come sono descritte nelle *Tavole di Raggiunglio* del 1782:

FIRENZE

Tutte le Misure, e Pesi che si usano presentemente nel Gran-Ducato di Toscana sono ragguagliate al Peso, e Misura moderna di Firenze, la quale non differisce dall' antica, che nelle Misure del Braccio a Terra, e dello Stioro, abolite con Editto del dì 13. Marzo 1781., alle quali Misure sono state sostituite il Braccio a Panno, ed il Quadrato.

Il Braccio a Terra di Firenze diviso in Soldi 20., ed ogni Soldo in Denari dodici corrisponde a Braccia Fiorentine da Panno —. Soldi 18. Denari 10. e $\frac{2}{3}$.

Lo Stioro Fiorentino si divide in 12. Panora, il Panoro in 12. Pugnora, ed il Pugnoro in 12. Braccia quadre da Terra, e corrisponde a Quadrati —. Tavole 1. Pertiche 5. Deche 4. Braccia quadre 1., e $\frac{1111}{1000}$, o sia $\frac{1}{7}$ di Misura di Firenze.

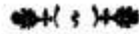
a

La riforma portò una innovazione riguardo al *miglio*: introdusse il *miglio riformato*, in sostituzione del precedente. Il riformato corrispondeva a 3000 braccia da panno e cioè a 1750,878 metri. Ricordiamo che il precedente miglio equivaleva a:

1 miglio = 3000 braccia da terra = 2833,33 braccia da panno \approx 1653,607 metri.

Nonostante la riforma, in Toscana si continuò a usare il vecchio miglio, fino all'introduzione del sistema metrico decimale con la legge italiana del 28 luglio 1861.

La tavola che segue è riprodotta dal Ragguaglio del 1782 e fornisce interessanti informazioni sul rapporto fra il *miglio antico* e quello *riformato*:



FIRENZE

*Tavola di riduzione del Miglio antico di Firenze
al nuovo Miglio riformato.*

		1000.	5.	1000.
Miglia.... 1.	_____ =	944.	1.	333.
2.	_____ =	1. 888.	2.	666.
3.	_____ =	2. 833.	1.	---
4.	_____ =	3. 777.	2.	333.
5.	_____ =	4. 722.	---	666.
10.	_____ =	9. 444.	1.	333.
25.	_____ =	23. 611.	---	333.
50.	_____ =	47. 222.	---	666.
100.	_____ =	94. 444.	1.	333.
Paffi 1.	_____ =	---	2.	833.
2.	_____ =	1.	2.	666.
3.	_____ =	2.	2.	500.
4.	_____ =	3.	2.	333.
5.	_____ =	4.	2.	166.
10.	_____ =	9.	1.	333.
25.	_____ =	23.	1.	833.
50.	_____ =	47.	---	666.
100.	_____ =	94.	1.	333.
250.	_____ =	236.	---	333.
500.	_____ =	472.	---	666.

Con i dati riportati in precedenza verificiamo l'esattezza del contenuto della tabella qui sopra:

lunghezza miglio antico/lunghezza miglio riformato =

= (2833,33 braccia da panno)/3000 braccia da panno \approx 944,44/1000. Nella tabella è indicato un valore leggermente inferiore e cioè (933 + 1/3): la spiegazione è semplice: al numeratore della frazione è stato usato il numero approssimato per difetto 2833, infatti:

$$2833/3000 = 944 + 1/3.$$

La parte inferiore della tavola del Raguaglio contiene riferimenti a un'altra unità di misura lineare: il *passo*. Sembra che 100 *passi* corrispondessero esattamente a un decimo della lunghezza di un di un miglio antico, valori espressi in relazione al nuovo miglio riformato:

$$(94 + 1/3) \approx (944 + 1/3)/10.$$

Essendo il miglio antico lungo 3000 braccia da terra, si può facilmente dedurre che il passo valeva *tre* braccia da terra e cioè:

$$1 \text{ passo} = 3 * 55,1102 \approx 165,3306 \text{ cm.}$$

Quindi un miglio antico corrispondeva alla lunghezza di 1000 passi.

La spiegazione ha un fondamento storico: nella tabella contenente le unità di misura di Roma (vedere a p. 2), il *miglio* era così chiamato (*miliarius*) perché lungo quanto 1000 passi doppi (o 5000 piedi).

La presenza del *passo* giustifica il nome attribuito al *passetto* che, lungo soltanto due braccia, era più corto del passo.

Con la riforma, il braccio da panno fiorentino fu diviso in *20 soldi*, il soldo in *12 denari* e il denaro in *12 punti*, conservando la precedente articolazione dei sottomultipli dell'unità lineare di base. La tabella che segue riassume i rapporti fra il braccio da panno e i suoi sottomultipli:

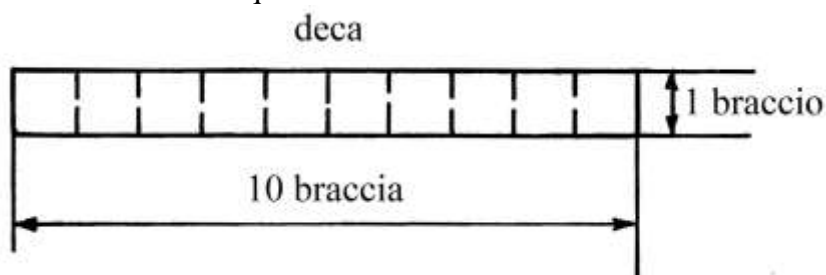
Unità	Braccio	Soldi	Denari	Punti
1 braccio	1	20	240	2880
1 soldo		1	20	240
1 denaro			1	12
1 punto				1

Le nuove unità superficiali furono tutte costruite sul *braccio da panno quadro* con alcuni multipli legati secondo una progressione geometrica di ragione 10 e quindi basati sul *sistema numerico decimale*.

Il *braccio da panno quadro* equivaleva a:

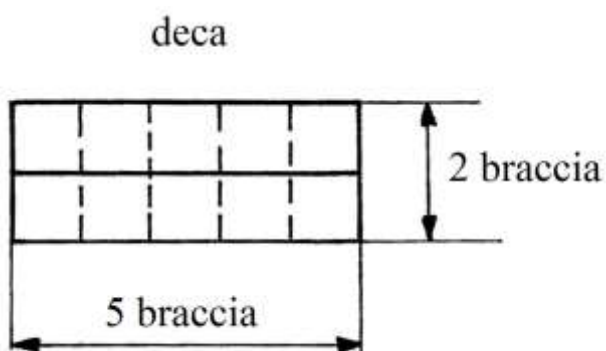
1 braccio da panno quadro = (1 braccio da panno)² ≈ (0,583626 m)² ≈ 0,340619307 m², da approssimare a 0,34062 m².

La *deca* valeva 10 braccia quadre:



La struttura lineare della deca applicava il metodo delle *linee larghe*?

La deca può essere rappresentata sotto forma di un rettangolo di dimensioni 5*2 oppure di 2*5 braccia lineari da panno:



Dato che il numero 10 possiede due soli divisori, 2 e 5, non è possibile organizzare in altro modo una struttura formata da 10 quadrati di uguali dimensioni.

Il sistema duodecimale presentava un indubbio vantaggio: dato che il numero 12 possiede ben *quattro* divisori – 2, 3, 4 e 6 – una struttura contenente dodici quadrati di uguali dimensioni può essere organizzata in ben quattro differenti modi:

- * 2*6;
- * 3*4;
- * 4*3;
- * 6*2.

A questo riguardo, pare opportuno riportare una citazione da p. 649 del contributo di Enrico Giannichedda (citato in bibliografia):

“...Prima di discutere di situazioni prettamente tardomedievali e rinascimentali, può essere utile ricordare che il sistema metrico, di cui si riconoscono gli ovvi pregi, ha dei difetti che, obiettivamente, lo rendono meno 'pratico' per chi è abituato a ragionare diversamente. Ragionare con base dieci non è affatto naturale, soprattutto perché in tal modo non è possibile suddividere più volte a metà l'intero. I sistemi a base dodici o venti hanno invece il pregio di avere la base divisibile a metà per due volte e il sistema a base sedici addirittura per tre volte. Il tutto senza decimali. Una pezza di tessuto (o una torta) è facilmente divisibile in 2 e poi in 4, 8, 16 e 32 parti, ma è anche quasi altrettanto facile ottenerne 2, 4, 12 e 24. Più difficile è invece ottenerne 5 o 10 e per fare ciò non è più possibile procedere senza strumenti e per suddivisioni in parti eguali. Sono quindi le esigenze pratiche che, storicamente, hanno portato a sistemi di multipli e sottomultipli che si configurano come guazzabugli logici tanto sono sistemi misti. Quelle stesse esigenze pratiche che hanno reso lenta e difficile l'affermazione di sistemi a base dieci nonostante il metodo decimale, adottato da matematici e astronomi fin dal XV secolo, sia vantaggioso nell'esecuzione dei calcoli aritmetici e, fatto non irrilevante, anche nella tenuta di quei libri contabili in cui, all'epoca, si riportavano, spesso in maniera discorsiva, misure, pesate, e addirittura valori monetali, espressi con sistemi diversi.

La forza della tradizione era quindi, in realtà, la forza degli elementi costitutivi un sistema che funzionava. Fra questi non devono neppure trascurarsi le credenze o i valori che hanno avuto un loro ruolo nella definizione del concetto di giusta misura...”.

Il sistema numerico decimale presenta però un indiscutibile pregio: effettuando moltiplicazioni o divisioni per 10 e suoi multipli o sottomultipli, i calcoli divengono velocissimi e nella scrittura i risultati sono resi più evidenti con il semplice spostamento verso destra o verso sinistra di *punti* o *virgole* separatori delle varie parti intere o frazionarie.

----- APPROFONDIMENTO -----

Usi moderni delle basi 12, 2, 60 e 7

Con l'adozione del *sistema metrico decimale* avvenuta a partire dall'Ottocento, le unità in base 12 sono formalmente state abbandonate in quasi tutti gli Stati.

Ma la base 12 non è del tutto scomparsa. Ecco alcuni esempi della sua sopravvivenza:

- * alcune confezioni di uova vendute nei supermercati contengono 12 o 6 (=12/2) uova.
- * La biancheria intima è spesso venduta in confezioni da:
 - 6 (=12/2), da 4 (=12/3) e da 3 (=12/4) pezzi.
- * Sia le uova che la biancheria intima sono pure disponibili in confezioni da 5 e da 10.
- * I fazzoletti di stoffa si trovano facilmente in confezioni da 12 pezzi.
- * I bottoni sono venduti anche in confezioni che risultano multiple di 12:
 - 12, 30 (= 12 * 2,5), 300 = (12 * 25).
- * Le matite da disegno sono vendute singolarmente ma si trovano anche in scatole che contengono un sottomultiplo di 12 o suoi multipli:
 - 6 (=12/2), 12, 30 (=12 * 2,5), 150 (=12 * 12,5).
- * Certi serviti da tavola possono contenere 12 oppure 6 (= 12/2) pezzi uguali.

- * Alcuni ortaggi, come i carciofi, sono venduti a mazzi contenenti 3 (=12/4) o 4 (=12/3) esemplari.

L'anno è diviso in 12 mesi. Il giorno è diviso in 24 ore: $24 = 12 * 2$.

Il numero 60 equivale a: $60 = 12 * 5$. I divisori di 60 (oltre a 1 e a sé stesso) sono *dieci*:
2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30.

Il numero 12 è un divisore di 60.

Il numero 60 è alla base della divisione delle ore in minuti e in secondi.

L'angolo giro misura 360° e 360 è scomponibile in: $360 = 12 * 30$.

L'angolo piatto misura 180° e 180 è scomponibile in: $180 = 12 * 15$.

Questi esempi mostrano che il sistema di numerazione in base 12 non è proprio del tutto scomparso.

Nel campo delle misure dei liquidi, molte unità usate nel Medioevo e nel Rinascimento rispettavano un sistema in *base 2*: i multipli e i sottomultipli di quelle unità erano ricavati moltiplicando o dividendo per 2, come spiega l'esempio delle unità usate a Firenze per la misura del *vino* e dell'*olio* (fonte: Martini p. 207):

Per il *vino*:

* 1 soma da vino	=	2 barili	≈ 91,168082 litri;
* 1 barile da vino	=	20 fiaschi	≈ 45,584041 litri;
* 1 fiasco	=	2 boccali	≈ 2,279204 litri;
* 1 boccale	=	2 mezzette	≈ 1,139602 litri;
* 1 mezzetta	=	2 quartucci	≈ 0,569801 litri;
* 1 quartuccio			≈ 0,284901 litri.

Per l'*olio*:

* 1 soma da olio	=	2 barili	≈ 66,857816 litri;
* 1 barile da olio	=	16 fiaschi	≈ 33,428908 litri;
* 1 fiasco	=	2 boccali	≈ 2,089306 litri;
* 1 boccale	=	2 mezzette	≈ 1,044653 litri;
* 1 mezzetta	=	2 quartucci	≈ 0,522326 litri;
* 1 quartuccio			≈ 0,261163 litri.

Sembra esistere una proporzione fra il volume di *alcune* unità di misura del vino e dell'*olio*:

fiasco olio : fiasco vino ≈ 13 : 14

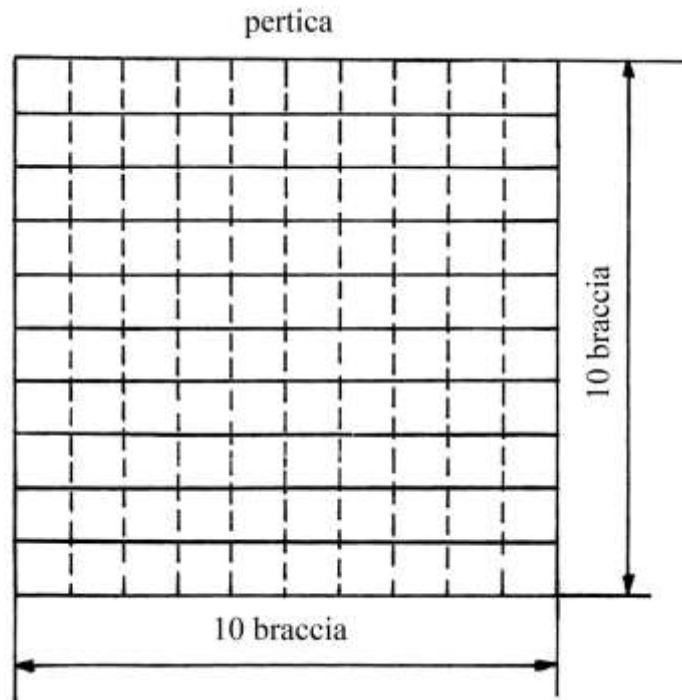
boccale olio : boccale vino ≈ 13 : 14

mezzetta olio : mezzetta vino ≈ 13 : 14

quartuccio olio : quartuccio vino ≈ 13 : 14.

Un altro numero, non legato al 12 o al 2, è il 7: esso fa la sua comparsa in alcune confezioni di medicinali: alcuni prodotti sono distribuiti in blister contenenti 7 o 14 compresse. Le confezioni sono realizzate con 28 pastiglie: 4 blister da 7 compresse oppure 2 blister da 14. Forse lo scopo è la sincronizzazione del numero delle pastiglie con il numero dei giorni della settimana.

Il successivo multiplo della *deca* era la *pertica*, formata da 10 deche e rappresentata da un quadrato con lati lunghi 10 braccia lineari:



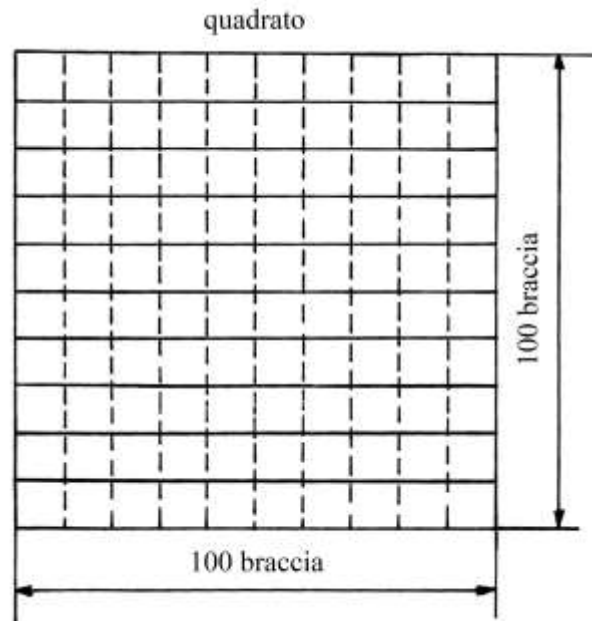
La pertica possedeva un multiplo, la *tavola*:

$$1 \text{ tavola} = 10 \text{ pertiche} = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ braccia}^2.$$



Il *quadrato* era l'equivalente di 10 tavole e aveva area:

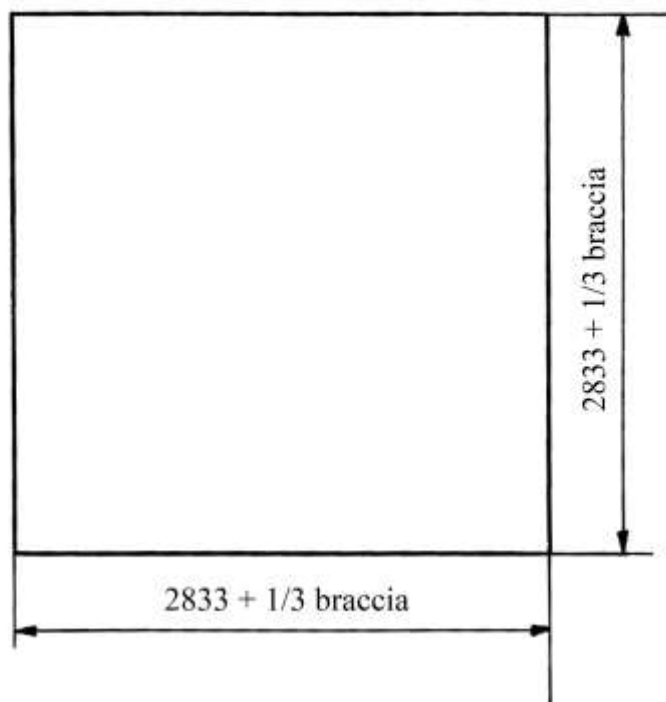
$$1 \text{ quadrato} = 10 \text{ tavole} = 10 \cdot 1000 = 10000 \text{ braccia}^2.$$



L'unità più grande era il *miglio quadrato* equivalente a $(802 + 7/9)$ quadrati e quindi uguale a:

$$(802 + 7/9) * 10.000 = 8027777 \text{ braccia}^2.$$

Questa unità rappresentava l'area di un quadrato con lati lunghi $(2833 + 1/3)$ braccia lineari da panno, equivalenti a $(2833 + 1/3) * 0,583626 \approx 1653,61$ metri.



La tabella che segue riassume i rapporti dei multipli delle unità superficiali con il braccio quadro da panno e le loro equivalenze in m^2 :

Unità di misura	Rapporti con il braccio ²	Equivalenza in m ²
Braccio quadrato	1	0,34062
Deca	10	3,4062
Pertica	100	34,062
Tavola	1000	340,62
Quadrato	10000	3406,2
Miglio quadrato	8027777	2734422

Per chiarire le relazioni con le unità di Siena (argomento al quale è dedicato il successivo paragrafo), riproduciamo i rapporti fra le nuove unità di misura superficiali fiorentine, con esclusione del *miglio quadrato*:

Unità di misura	Quadrati	Tavole	Pertiche	Deche	Braccia quadre
Quadrato	1	10	100	1000	10000
Tavola		1	10	100	1000
Pertica			1	10	100
Deca				1	10
Braccio quadro					1

%%%%%%%%%

Il *soldo quadro* era il primo sottomultiplo e corrispondeva alla 400esima parte del braccio quadro:

$$1 \text{ soldo quadro} = 1 \text{ braccio quadro} / 400 = 0,34062 / 400 = 0,00085155 \text{ m}^2 = 851,55 \text{ mm}^2.$$

Dato che 1 soldo lineare valeva 12 denari lineari, il *denaro quadro* corrispondeva a:

$$1 \text{ denaro quadro} = 1 \text{ soldo quadro} / (12^2) = 851,55 / 144 = 5,9136 \text{ mm}^2.$$

Il *quattrino lineare* valeva 4 *denari lineari* per cui il quattrino quadro equivaleva a:

$$1 \text{ quattrino quadro} = 4^2 \text{ denari quadri} = 16 * 5,9136 = 94,62 \text{ mm}^2.$$

SIENA

Le antiche unità di misura lineari di Siena

Possiamo calcolare *a ritroso* il valore delle antiche unità lineari e superficiali di Siena utilizzando i dati contenuti nelle tavole dedicate a questa città nel *Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure* del 1782, già citato. Il metodo qui utilizzato potrebbe essere impiegato anche per ricavare i valori delle altre unità di misura utilizzate nelle Comunità del Granducato di Toscana prima della riforma del 1781-1782.

❁ (553) ❁

S I E N A	
L	Libbra di Siena corrisponde a Once 11. Denari 15. Grani 15. del Pefo di Firenze.
Lo Stajo del Grano dividefi in	Boccali 16., e corrisponde a Staja — Quarti 3. Quartucci 11. e $\frac{26}{100}$ della Misura da Grano di Firenze.
Il Barile del Vino dividefi in	Staja 2., lo Stajo in Boccali 16., ed il Boccale in Quartucci 4., e secondo la Misura da Vino di Firenze contiene Fiaschi 18. Quartucci 5. $\frac{25}{100}$.
Il Barile dell' Olio è composto di due	Staja, e lo Stajo dividefi in Boccali 16., il Boccale in Quartucci 4. La sua tenuta a Misura Fiorentina è di Barili 1. Fiaschi 3. Quartucci 6. e $\frac{14}{100}$.
Il Braccio dividefi in Once	24., ed è lungo Braccia 1. Sol. — Den. 7. $\frac{2}{12}$.
Il Passetto è di lunghezza	Braccia 1. Soldi 5. Denari 9.
Lo Stajo di Terra è composto di	Tavole 100., la Tavola di Pertiche 6., e la Pertica di Braccia \square 6., e secondo la nuova Misura corrisponde a Quadrati — Tavole 3. Pertiche 8. Deche 1. Braccia \square 9. $\frac{2000}{10000}$.
Il Miglio Statutario è di lunghezza	Braccia 3600. Senefi, e corrisponde a Miglia 1. Passi 236.
Il Miglio moderno è di lunghezza	Braccia 2500., e corrisponde a Miglia — Passi 858. Braccia 1.

a a a a

Stando ai dati contenuti nella tavola qui sopra, il *braccio senese* equivaleva a:

1 braccio senese \approx 1 braccio da panno di Firenze + 0 soldi + 7 denari + 2 punti \approx
 \approx punti $(2880 + 0 \cdot 240 + 7 \cdot 12 + 2) = 2966$ punti di braccio da panno.

Con una proporzione si ha:

$2966 : 2880 = \text{braccio senese} : \text{braccio da panno}$

$2966 : 2880 = \text{braccio senese} : 58,3626 \text{ cm}$

braccio senese \approx 60,1054 cm, lunghezza arrotondata a 60,11 cm.

Nella tavola di cui sopra l'equivalenza è scritta usando delle abbreviazioni:

1 Braccio senese = Braccia fiorentine 1. + Sol.(di) - [= zero] + Den.(ari) 7. 2/12 .

Il braccio senese era suddiviso in 24 *once* e un'oncia corrispondeva a 2,5 cm, ciò che la avvicinava alla lunghezza dell'antica unità di misura romana *uncia*:

S I E N A		<i>Tavola di riduzione del Braccio di Siena al Braccio e Panno di Firenze.</i>		
		<u>20.</u>	<u>12</u>	<u>12.</u>
Braccia ..	1. _____ =	1. —	7. 2.	
	2. _____ =	2. 1.	2. 5.	
	3. _____ =	3. 1.	9. 7.	
	4. _____ =	4. 2.	4. 9.	
	5. _____ =	5. 3.	— —	
	10. _____ =	10. 6.	— —	
	25. _____ =	25. 15.	— —	
	50. _____ =	51. 10.	— —	
	100. _____ =	101. —	— —	
	200. _____ =	206. —	— —	
	300. _____ =	309. —	— —	
	400. _____ =	412. —	— —	
	500. _____ =	515. —	— —	
	1000. _____ =	1030. —	— —	
Once	1. _____ =	— —	10. 4.	
	2. _____ =	—	1. 8. 7.	
	3. _____ =	—	2. 6. 10.	
	6. _____ =	—	5. 1. 9.	
	12. _____ =	—	10. 3. 7.	

Un'oncia senese equivaleva a:

1 oncia = 0 braccia + 0 soldi + 10 denari + 4 punti di braccio da panno e cioè:

1 oncia = 10 denari + 4 punti = 120 punti + 4 punti = 124 punti.

Un braccio da panno conteneva 2880 punti e quindi la lunghezza dell'oncia senese era:

1 oncia : 124 = 1 braccio : 2880 da cui

1 oncia = 124 * (1 braccio)/2880 ≈ (124 * 58,3626)/2880 ≈ 2,513 cm.

Altra unità di misura senese era il *passetto* da stoffe; nella Tavola è indicata la seguente corrispondenza:

S I E N A				
<i>Tavola di riduzione del Passetto di Siena al Braccio e Panno di Firenze.</i>				
		<u>30.</u>	<u>12.</u>	<u>12.</u>
Passetti... 1.	_____ =	1.	5.	9. —
2.	_____ =	2.	11.	6. —
3.	_____ =	3.	17.	3. —
4.	_____ =	5.	3.	— —
5.	_____ =	6.	8.	9. —
10.	_____ =	12.	17.	6. —
25.	_____ =	32.	3.	9. —
50.	_____ =	64.	7.	6. —
100.	_____ =	128.	15.	— —
200.	_____ =	257.	10.	— —
300.	_____ =	386.	5.	— —
400.	_____ =	515.	—	— —
500.	_____ =	643.	15.	— —
1000.	_____ =	1287.	10.	— —
Parti..... $\frac{1}{11}$	_____ =	—	2.	4. 1.
$\frac{1}{7}$	_____ =	—	3.	8. 2.
$\frac{1}{5}$	_____ =	—	5.	1. 10.
$\frac{1}{4}$	_____ =	—	6.	5. 3.
$\frac{1}{3}$	_____ =	—	8.	7. —

1 passetto \approx 1 braccio da panno + 5 soldi + 9 denari e quindi

1 passetto \approx denari $(240 + 5 \cdot 12 + 9) = 309$ denari di braccio da panno.

Con una proporzione si ricava l'equivalente lunghezza in cm:

$309 : 240 = \text{passetto} : \text{braccio da panno}$

$309 : 240 = \text{passetto} : 58,3626$

passetto $\approx 75,14$ cm.

Il passetto da stoffe valeva 30 oncie di braccio senese e cioè:

1 oncia senese = $75,14/30 \approx 2,5047$ cm.

La parte inferiore della tabella contenuta nell'ultima figura introduceva un'interessante informazione: il passetto senese prevedeva alcuni sottomultipli che non erano espressi né in base 2 (a parte $\frac{1}{4}$) né in base duodecimale (a parte $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$), ma esistevano rapporti frazionari difficili da realizzare: $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{5}$.

A Siena lo Statuto dell'Arte della Mercanzia prevedeva l'uso di uno strumento di misura di ferro, il *passetto* lungo 2 braccia e cioè: $2 \cdot 60,11 \approx 120,22$ cm.

Lo strumento recava delle tacche incise a metà, a un quarto, a un ottavo.

Un multiplo del braccio era la *canna*, lunga 4 braccia:

1 canna $\approx 4 \cdot 60,11$ cm $\approx 240,44$ cm.

Un ulteriore multiplo del braccio era la *pertica senese* lunga 6 braccia:

1 pertica $\approx 6 \cdot 60,11 \approx 360,66$ cm.

Giovanni Sfortunati e Lorenzo Forestani chiamano *tavola* la pertica senese.

Per le lunghe distanze era usato il *miglio statuario* che valeva 3600 braccia equivalenti a:
 1 miglio statuario = 3600 braccia $\approx 3600 \cdot 0,6011 \approx 2163,96$ metri.

Pertanto, il miglio statuario corrispondeva a 600 pertiche senesi.

La tavola che segue è ricavata dalla solita fonte: essa forniva le relazioni fra il miglio statuario e il suo passo con le nuove unità fiorentine:

❖ 568 ❖

		1000.	1.	1000.
Miglia ...	1. _____ =	1.	236.	— —
	2. _____ =	2.	472.	— —
	3. _____ =	3.	708.	— —
	4. _____ =	4.	944.	— —
	5. _____ =	6.	180.	— —
	10. _____ =	12.	360.	— —
	25. _____ =	30.	900.	— —
Passi	50. _____ =	61.	800.	— —
	100. _____ =	123.	600.	— —
	1. _____ =	—	1.	708.
	2. _____ =	—	2.	1. 416.
	3. _____ =	—	3.	2. 124.
	5. _____ =	—	6.	— 540.
	10. _____ =	—	12.	1. 080.
	25. _____ =	—	30.	2. 700.
	50. _____ =	—	61.	2. 400.
	100. _____ =	—	123.	1. 800.
250. _____ =	—	309.	— —	
500. _____ =	—	618.	— —	

Un miglio statuario corrispondeva a $(1 + 236/1000)$ di miglio riformato di Firenze.

Accanto al miglio statuario, a Siena fu introdotto il *miglio moderno*, più corto del primo: era lungo soltanto 2500 braccia senesi:

1 miglio moderno = 2500 braccia senesi $[\approx (2500/3) \text{ passi}] \approx 2500 \cdot 0,6011 \approx 1502,75$ metri.

La tavola che segue mostra le proporzioni fra il miglio moderno e il miglio riformato fiorentino:

		1000.	3.	1000.
Miglia . . .	1. _____	=	858.	1. _____
	2. _____	=	1.716.	2. _____
	3. _____	=	2.575.	_____
	4. _____	=	3.433.	1. _____
	5. _____	=	4.291.	2. _____
	10. _____	=	8.583.	1. _____
Palfi	1. _____	=	_____	2.575.
	2. _____	=	1.	2.150.
	3. _____	=	2.	1.725.
	5. _____	=	4.	875.
	10. _____	=	8.	1.750.
	25. _____	=	21.	1.375.
_____	.50. _____	=	42.	2.750.
	100. _____	=	85.	2.500.
	250. _____	=	214.	1.750.
	500. _____	=	429.	500.

Le due ultime tabelle contengono dati organizzati su quattro colonne contrassegnate con:
 “spazio vuoto” 1000. 3. 1000.
 Esse corrispondono ai seguenti valori espressi in *miglia riformate* di Firenze:

unità	millesimi	terzo di millesimi	millesimo di terzi di millesimi
.....	1/1000	(1/3)*(1/1000)	(1/1000)*[(1/3)*(1/1000)] .

Le antiche unità superficiali di Siena

La base delle unità superficiali era il *braccio quadro* che valeva:

$$1 \text{ braccio quadro} = (1 \text{ braccio lineare})^2 \approx (0,6011 \text{ m})^2 \approx 0,3613 \text{ m}^2.$$

Lo *staioro* era un multiplo del braccio quadro:

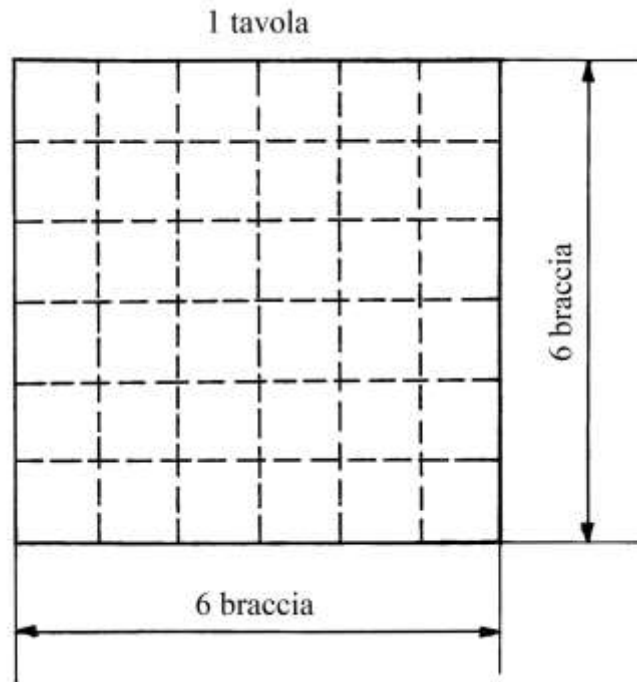
$$1 \text{ staioro senese} = 3600 \text{ braccia quadre} \approx 3600 * 0,3613 \approx 1300,68 \text{ m}^2.$$

A sua volta, lo *staioro* possedeva un sottomultiplo su base decimale, la *tavola*:

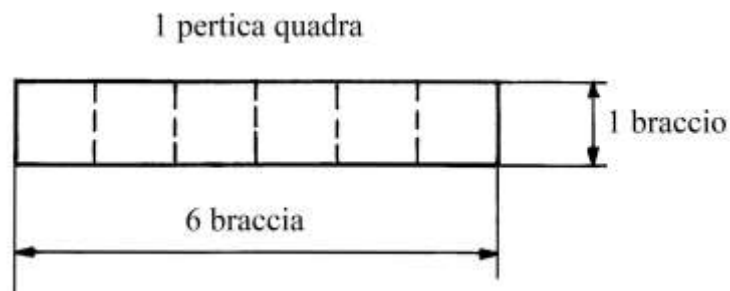
$$1 \text{ staioro} = 100 \text{ tavole}^2.$$

Quindi, una *tavola*² equivaleva a:

$$1 \text{ tavola}^2 = 1 \text{ staioro}/100 \approx 3600/100 = 36 \text{ braccia quadre} \approx 13,0068 \text{ m}^2.$$



La tavola possedeva un sottomultiplo, la *pertica quadra*:



Essa valeva:

$$1 \text{ pertica quadra} = 6 \text{ braccia quadre} \approx 6 * 0,3613 \approx 2,1678 \text{ m}^2.$$

La tabella che segue riassume i rapporti fra le quattro unità superficiali di Siena:

Unità di misura	Braccia quadre	Pertiche quadre	Tavole	Staiora senesi
Braccio quadro	1	1/6	1/36	1/3600
Pertica quadra	6	1	1/6	1/600
Tavola quadra	36	6	1	1/100
Staioro senese	3600	600	100	1

Le equivalenze con le unità toscane dopo la riforma del 1781-1782

La figura che segue riproduce una tavola del *Ragguaglio* del 1782: lo staioro senese era chiamato *Stajo di Terreno di Siena*:

		10.	10.	10.	10.	10000.
Staja	1. ----- = --	3.	8.	1.	9.	2400.
	2. ----- = --	7.	6.	3.	8.	4800.
	3. ----- = 1.	1.	4.	5.	7.	7200.
	4. ----- = 1.	5.	2.	7.	6.	9600.
	5. ----- = 1.	9.	--	9.	6.	2000.
	10. ----- = 3.	8.	1.	9.	2.	4000.
Tavole.....	1. ----- = --	--	--	3.	8.	1924.
	10. ----- = --	--	3.	8.	1.	9240.
	25. ----- = --	--	9.	5.	4.	8100.
	50. ----- = --	1.	9.	--	9.	6200.
Pertiche	1. ----- = --	--	--	--	6.	3654.
	2. ----- = --	--	--	1.	2.	7308.
	3. ----- = --	--	--	1.	9.	0962.
Braccia □	1. ----- = --	--	--	--	1.	0609.
	2. ----- = --	--	--	--	2.	1218.
	3. ----- = --	--	--	--	3.	1827.

Procediamo nell'analisi del contenuto nello stesso ordine seguito nella tavola riguardo alle vecchie unità senesi:

staja → tavole → pertiche [quadre] → braccia [quadre].

Nella tabella il termine *braccia* è seguito da un piccolo quadrilatero, per significare che si trattava di una unità di misura di superficie.

Allo scopo di chiarire il suo contenuto, la tabella originaria è stata rielaborata in quella che segue:

Unità di misura senesi	Quantità	Unità Superficiali di misura Toscane dopo la Riforma del 1781-1782					
		Quadrati	Tavole (10)	Pertiche (10)	Deche (10)	Braccia quadre (10)	Decimillesimi (1/10000)
Staja	1		3	8	1	9	2400
	2		7	6	3	8	4800
	3	1	1	4	5	7	7200
	4	1	5	2	7	6	9600
	5	1	9		9	6	2000
	10	3	8	1	9	2	4000
	25	9	5	4	8	1	
	50	19		9	6	2	
	100	38	1	9	2	4	
Tavole	1				3	8	1924
	10			3	8	1	9240
	25			9	5	4	8100
	50		1	9		9	6200
Pertiche quadre	1					6	3654
	2				1	2	7308
	3				1	9	962
Braccia quadre	1					1	609
	2					2	1218
	3					3	1827

Le prime due colonne verticali a partire da sinistra si riferiscono alle unità senesi e le altre otto colonne sono gli equivalenti espressi nelle nuove unità introdotte in Toscana.

Il simbolo “(10)” indica la progressione geometrica di ragione 10 che contraddistinse i rapporti fra le nuove unità.

L’ultima colonna, a destra, è un esempio dell’estrema accuratezza con la quale furono compilate le tabelle di conversione: le cifre in essa riportate sono espresse in *decimillesimi* di nuovo braccio da panno quadro.

Gli spazi vuoti nelle righe e nelle colonne stanno a indicare la cifra *zero*.

Lo *stajo* di terreno equivaleva a:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ stajo} &= 0 \text{ quadrati} + 3 \text{ tavole} + 8 \text{ pertiche [quadre]} + 1 \text{ deca} + (9 + 2400/10000) \text{ braccia quadre} \approx \\
 &\approx 0 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 9240/10000 \approx 3809,24 \text{ braccia quadre} \approx \\
 &\approx 3809,24 \cdot 0,34062 \approx 1297,5 \text{ m}^2.
 \end{aligned}$$

La *tavola* senese corrispondeva a:

1 tavola = 3 deche + $(8 + 1924/10000)$ braccia quadre $\approx (3 \cdot 10 + 8,1924)$ braccia quadre $\approx 38,1924 \cdot 0,34062 \approx 13,009 \text{ m}^2$.

La *pertica* [quadra] senese valeva:

1 pertica quadra $\approx (6 + 3654/10000)$ braccia quadre $\approx 6,3654$ braccia quadre $\approx 6,3654 \cdot 0,34062 \approx 2,168 \text{ m}^2$.

Infine, il *braccio quadro* senese equivaleva a:

1 braccio quadro = $(1 + 609/10000)$ braccia quadre da panno $\approx 1,0609$ braccia quadre $\approx 1,0609 \cdot 0,34062 \approx 0,3614 \text{ m}^2$.

La tabella che segue riassume i rapporti fra le antiche unità superficiali senesi e le loro equivalenze in m^2 (scritte fra parentesi):

Unità senesi	Staja	Tavole	Pertiche quadre	Braccia quadre
Stajo	1 (1297,5 m^2)	100	600	3600
Tavola		1 (13,009 m^2)	6	36
Pertica quadra			1 (2,168 m^2)	6
Braccio quadro				1 (0,3614 m^2)

La lettura delle dimensioni espresse in m^2 fa emergere piccole differenze, dovute alle necessarie approssimazioni.

Le unità di misura usate a Siena

Riassumiamo le principali unità di misura usate a Siena e citate da Giovanni Sfortunati, da Pietro Cataneo e da Lorenzo Forestani:

- * 1 canna = 4 braccia;
- * 1 tavola = 6 braccia;
- * 1 canna² = 16 braccia²;
- * 1 tavola² = 36 braccia²;
- * 1 staro da terra = 3600 braccia² = 225 canne² = 100 tavole²;
- * 1 staro da terra = 4 quarti;
- * 1 quarto = 4 boccali;
- * 1 staro da terra = 16 boccali;
- * 1 quarto = 25 tavole² = $(56 + \frac{1}{4})$ canne² = $(56 \text{ canne}^2 + 4 \text{ braccia}^2)$;
- * 1 boccale = $(6 \text{ tavole}^2 + 9 \text{ braccia}^2)$;
- * 1 braccio³ = 11 staia di vino = 11 staia di olio = 11 staia di cereali = 44 quarti = 176 boccali;
- * 1 braccio³ = 10 staia di calcina di gesso = 10 staia di inerti;
- * 24 staia = 1 moggio;
- * 1 moggio = 24 staia = 12 barili = 6 some;
- * 1 soma = 2 barili = 4 staia = 64 boccali = 256 quartini.

ALTRE UNITÀ MEDIEVALI TOSCANE

LE UNITÀ DI MISURA USATE A PESCIA

A Pescia e nella Valdinievole i terreni erano misurati in *coltre*, *quartieri*, *scale* e *pertiche*.

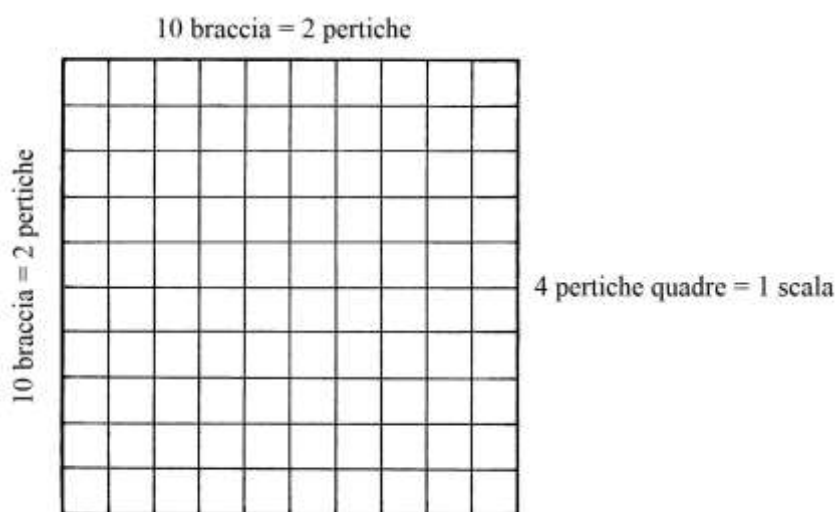
Lo strumento di misura lineare era la *canna* o *pertica* lunga 5 braccia.

Lorenzo Forestani informa che Pescia, Montecarlo, Buggiano, Montecatini, Uzzano e Montevettolini usavano unità di misura lineari recanti gli stessi nomi – ad esempio canne e pertiche – ma che avevano lunghezze differenti.

A Pescia, un quadrato con lati lunghi 2 pertiche o canne aveva area S che è:

$$S = 2 * 2 = 4 \text{ pertiche quadre.}$$

4 pertiche quadre valevano *1 scala*:



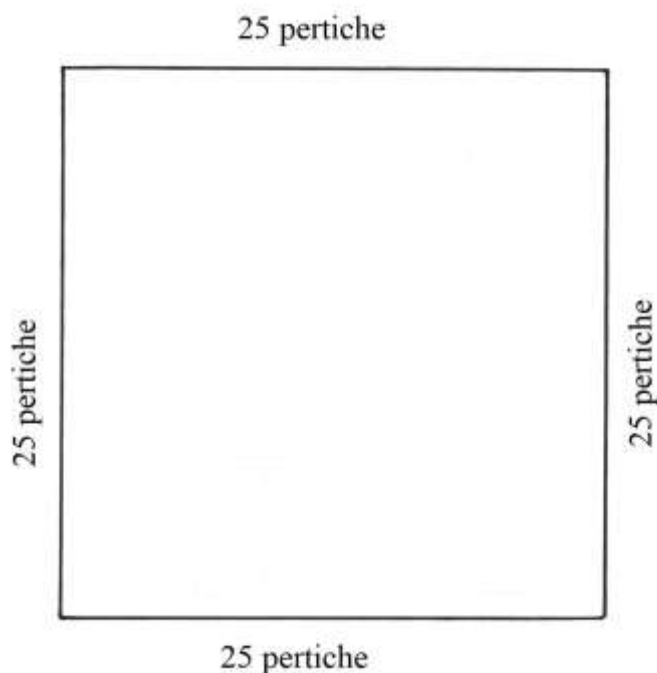
30 scale formavano *1 quartiere* e 4 quartieri componevano *1 coltra*:

- * 1 pertica (lineare) = 5 braccia;
- * 1 pertica quadra = 25 braccia quadre;
- * 4 pertiche quadre = 1 scala =
- * 30 scale = 1 quartiere;
- * 4 quartieri = 1 coltra.

In *braccia quadre* si avevano le seguenti equivalenze:

- * 1 pertica quadra = 25 braccia quadre;
- * 1 scala = 4 pertiche quadre = 100 braccia quadre;
- * 1 quartiere = 30 scale = 120 pertiche quadre = 3000 braccia quadre;
- * 1 coltra = 4 quartieri = 120 scale = 480 pertiche quadre = 12000 braccia quadre.

Un campo ha forma quadrata con lati lunghi 25 pertiche:



La sua area S è:

$$S = 25 * 25 = 625 \text{ pertiche quadre.}$$

L'area è poi convertita:

- * $625/4 \text{ scale} = 156 \text{ scale} + 1 \text{ pertica quadra};$
- * $156/30 \text{ quartieri} = 5 \text{ quartieri} + 6 \text{ scale};$
- * $5/4 \text{ coltre} = 1 \text{ coltra} + 1 \text{ quartiere.}$

Sommando i resti con 1 coltra si ha:

$$S = 625 \text{ pertiche quadre} = (1 \text{ coltra} + 1 \text{ quartiere} + 6 \text{ scale} + 1 \text{ pertica quadra}).$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Alcune informazioni sulle unità di misura usate a Pescia e negli altri centri della Valdinievole sono ricavabili dalle "Tavole di Raggiaglio" pubblicate nel 1782 a seguito della riforma metrologica introdotta in Toscana per volere del Granduca Pietro Leopoldo e dalle "Tavole di Raggiaglio" del Regno d'Italia pubblicate nel 1877.

Le pagine 379 e 380 che sono di seguito riprodotte sono ricavate da questa seconda pubblicazione.

PROVINCIA DI LUCCA

CIRCONDARIO DI LUCCA

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
MISURE DI LUNGHEZZA				
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA.....	Braccio fiorentino	Metri 0,5836	Metro	Braccia 1,7134
	Passetto	1,1673	Id.	Pasetti 0,8567
	Canna agrimensoria.....	2,9181	Id.	Canna 0,3427
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, ANTELMINELLI, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Braccio	0,5905	Id.	Braccia 1,6035
	Canna } di Lucca	2,3620	Id.	Canna 0,4234
	Perlica }	2,9525	Id.	Perliche 0,3387
MONTECARLO	Braccio antico	0,5934	Id.	Braccia 1,6853
	Braccio antico da terra	0,5696	Id.	1,7555
PIETRASANTA, STAZZEMA, SERRAVEREZZA.....	Perlica	3,1881	Id.	Perliche 0,3137
UZZANO	Braccio a terra	0,5743	Id.	Braccia 1,7412
<p>Il Braccio fiorentino si divide in 70 Soldi, il Soldo in 12 Denari, il Denaro in 12 Punti.</p> <p>Il Passetto, misura da stoffe, è eguale a 2 Braccia.</p> <p>La Canna agrimensoria, base delle misure del terreno, è eguale a 5 Braccia.</p> <p>Una misura di 4 Braccia diceasi Canna mercantile.</p> <p>Il Braccio lucchese divideasi in 12 Once, l'Oncia in 12 Punti, il Punto in 12 Atomi.</p> <p>La Canna lucchese, misura mercantile ed architettonica, è di 1 Braccia.</p> <p>La Perlica agrimensoria, base della misura agraria, è di 5 Braccia.</p> <p>Il Braccio di Lucca secondo documenti che risalgono al 1809 sarebbe eguale a Metri 0,590432. Il suo valore metrico fu però stabilito in Metri 0,5905 o scelto così come tipo allorchè venne eseguita la triangolazione del già Ducato di Lucca, ed allorchè si è proceduto alle operazioni di riforma del Catasto.</p> <p>Nel Comune di Serravezza per la misura del marmo si usava il Palmo di Genova eguale a Centimetri 25.</p> <p>La Perlica di Pietra Santa è di Braccia fiorentine 5, Soldi 9, Denari 3.</p> <p>Il Braccio a terra di Uzzano è di Soldi 19, Denari 8, $\frac{1}{16}$ del Braccio fiorentino.</p>				
MISURE DI SUPERFICIE				
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA.....	Braccio quadrato	Metri quadrati 0,3406	Metro quadr.	Braccia quadrato 2,9358
	Quadrato	Are 34,0619	Ettara	Quadrati 2,9358
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Braccio quadrato.....	Metri quadrati 0,3487	Metro quadr.	Braccia quadrato 2,8679
	Canna quadrata	5,5790	Id.	Canna quadrato 0,1792
	Coltra	Are 40,0994	Ettara	Coltre 2,4938
MASSA E COZZILE, BORGO A BUGGIANO...	Coltra	40,8743	Id.	2,4465
MONTECARLO	Braccio quadrato.....	Metri quadrati 0,3524	Metro quadr.	Braccia quadrato 2,8104
	Coltra	Are 38,9392	Ettara	Coltre 2,5681
PIETRA SANTA, STAZZEMA, SERRAVEREZZA...	Stajo	40,1637	Id.	Staja 2,8389

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
MONTECARLO	Braccio a terra quadrato...	Metri quadrati 0,3215 Etari	Metri quadr.	Braccia quadrato 3,0817 Coltra
UZZANO	Coltra	0,6010	Etara	2,4938

Il Quadrato, misura agraria, si divide in 10 Tavolo,
 la Tavola in 10 Pertiche,
 la Pertica in 10 Deca,
 la Deca in 10 Braccia quadrate.

La Coltra di Lucca, misura agraria, corrisponde a 160 Pertiche quadrate, e si divide in 4 Quartieri, ciascuno dei quali di 115 Pertiche quadrate.

Il Braccio quadrato nei conteggi si divideva in 12 parti eguali denominate Once superficiali, comprendenti ciascuna 12 Once quindrate.

L'Oncia superficiale si divide in 12 Punti superficiali,
 il Punto superficiale in 12 Atomi superficiali.

La Coltra di Montecarlo, corrispondente a Braccia fiorentine quadrate 11431,888 si divide in 4 Quartieri,
 il Quartiere in 30 Scale,
 la Scala in 14 Pertiche quadrate,
 la Pertica in 25 Braccia a terra quadrate.

La Coltra di Borgo a Boggiano si divide in 4 Quartieri,
 il Quartiere in 30 Scale,
 la Scala in 4 Pertiche,
 la Pertica in 25 Braccia quadrate fiorentine.

Lo Stajo di Pietra Santa, misura agraria, è di Braccia quadrate fiorentine 2983,8900 e si divide in 100 Pertiche quadrate.

La Coltra di Uzzano si divide in quattro Quartieri,
 il Quartiere in 30 Scale,
 la Scala in 4 Pertiche,
 la Pertica in 25 Braccia quadrate.

MISURE DI VOLUME

	Traino	Metri cubi	Metro cubo	Traini
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA	Traino	0,3976		2,5182
	Braccio cubo	0,1988	Id.	5,0303
	Catasta	4,7714	Id.	0,2096
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CA- MAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, PISCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA ..	Braccio cubo	0,2059	Id.	4,8567
	Scandiglio	3,2944	Id.	0,3035
BARNA	Passo	2,3855	Id.	0,4192
	Catasta	3,5783	Id.	0,2793
PESCIA, VELLANO, MONTECARLO	Braccio cubo	0,3089	Id.	4,7870

Il Traino misura del legname da costruzione, è di due Braccia cubo.

Il Braccio cubo si divide in 6 Bracciola o Braccia di Traino,
 il Bracciolo in 12 Once di Traino,
 l'Oncia di Traino in Soldi cubi 111 $\frac{1}{4}$,
 il Soldo cubo in 27 Quattrini cubi,
 il Quattrino cubo in 18 Denari cubi.

La Catasta, misura per la legna da fuoco, è di 24 Braccia cubo, e si divide in Metà, Terzi, Quarti, ecc. La Catasta è rappresentata da un parallelepipedo rettangolo avente 6 Braccia di lunghezza, $1 \frac{1}{4}$ di larghezza e 2 di altezza.

Il Braccio cubo di Lucca si divide in 12 Once solide,
 l'Oncia in 12 Punti solidi,
 il Punto in 12 Atomi solidi.

Lo Scandiglio di Lucca, misura per le pietre da taglio e per sassi spaccati corrisponde a 16 Braccia cubo.

Il Passo di Barna, misura per il legno da fuoco, è di 12 Braccia cubo fiorentino.

La Catasta di Pescia, misura da legname, corrisponde a 18 Braccia cubo. Talora però si fa di sole 16 Braccia cubo, ed allora corrisponde a Steri 3,1807.

MISURE DI CAPACITÀ PER GLI ARIDI

	Sacco	Stajo	Quartuccio	Etari	Etolitro	Litro	Sacco
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA	Sacco	73,0886		Etolitro	4,3682		
	Stajo	24,3629		Id.	4,1046		
	Quartuccio	0,3807		Litro	2,6269		

Le località della Valdinievole, compresa Pescia, all'epoca (1877) facevano parte del Circondario di Lucca: con la creazione della Provincia di Pistoia, avvenuta nel 1927, i Comuni della Valdinievole cessarono di appartenere alla Provincia di Lucca per entrare a far parte di quella di Pistoia.

Il braccio di Volterra

A Volterra sono presenti due campioni della *canna volterrana*. Il più antico, forse risalente a circa il 1220, è inciso sul lato sinistro della Porta Pisana (S. Francesco), è verticale ed è lungo 2,36 m.

Il secondo campione della canna è inciso sulla facciata principale del Palazzo dei Priori (1208-1257), è orizzontale e lungo 2,52 m.

Non è stata spiegata la ragione del passaggio dalla prima alla seconda lunghezza della canna.

La canna volterrana era lunga 4 braccia e i due campioni della canna avrebbero prodotto due braccia di differente lunghezza:

* la canna più antica dava un braccio lungo $2,36/4 = 0,59 \text{ m} = 59 \text{ cm}$;

* la canna più recente generava un braccio lungo $2,52/4 = 0,63 \text{ m} = 63 \text{ cm}$.

Il braccio era diviso in 12 *once* e un'oncia conteneva 12 *punti*.

Da un articolo del ricercatore pisano Costantino Caciagli riproduciamo un passo ripreso dal sito Internet citato in bibliografia:

“...Il Giachi [Anton Filippo Giachi, 1750-1810] scrive ... che la lunghezza della canna posta sul lato sinistro della porta Pisana era, rapportata alla misura del suo tempo, 3 e 2/3 braccia volterrane oppure braccia 4 e 2 quattrini di braccia fiorentine, ma non fa nessun riferimento alla misura della canna scolpita sulla facciata del Palazzo dei Priori.

Fatte queste brevi premesse la ricerca, che abbiamo condotto, sulle unità di misura lineare, consultando vecchie e recenti pubblicazioni, ci permette di svolgere alcune considerazioni sul braccio volterrano, che, peraltro, non viene menzionato nei testi di metrologia.

Prima vogliamo richiamare due notizie, trovate dallo studioso mons. Mario Bocci nella lettura degli statuti medievali volterrani, che ci servono per dire che probabilmente fino alla metà del duecento a Volterra non era ancora entrato in uso il braccio volterrano. La prima notizia si riferisce al 1242, anno in cui una certa misurazione venne effettuata in braccia lucchesi, la seconda risale al 1251, in questo caso la misurazione venne effettuata in braccia pisane.

Inoltre, se teniamo di conto che la porta Pisana è stata costruita dopo il 1260, come già scritto, e che la lunghezza della canna ivi scolpita è coincidente con quella lucchese, pari a mt. 2.362, uguale a 4 braccia di mt. 0.5905 per braccio, si arriva alla conclusione che la canna incisa sulla facciata del Palazzo dei Priori è posteriore (fino a prova contraria) a quella della Porta e può rappresentare effettivamente la canna volterrana.

Quest'ultima affermazione è avvalorata dalla misurazione di questa canna, accurata e ripetuta, ma non facile, in quanto un estremo della incisione è stato danneggiato, che è lunga complessivamente mt. 2,528 circa, cioè quattro braccia di mt. 0.632 per braccio.

Ora per l'appunto il braccio volterrano, al tempo del Giachi, misurava ancora mt. 0.63226, con una differenza tra le due unità di 2,6 mm, scarto esiguo che ci fa quindi ritenere il braccio volterrano lungo mt. 0,63226.

Le due canne non presentano relazioni dirette; sono due campioni di misura diversi e appartengono a differenti periodi: una è misura importata, l'altra è autoctona e si sarebbe conservata per alcuni secoli, dal XVI al XIX secolo, pur nella completa dipendenza politica da Firenze.

Per avere un controllo dell'esattezza del braccio volterrano, determinato come si è detto, occorrerebbe trovare un documento che precisi una dimensione di un'opera edilizia, identificabile e databile esattamente, che è giunta sino a noi inalterata.

L'applicazione dei due sistemi di misura, derivati dalla canna della Porta Pisana e dalla canna del Palazzo dei Priori, alle misure rilevate nella Fonte di S. Felice (anno 1318), non portano a nessuna conclusione chiarificatrice, risultando ogni misura computabile con un piccolo errore in entrambi i sistemi.

Infatti introducendo il punto (1 oncia = 12 punti), le differenze tra punto volterrano e punto lucchese sono così contenute che è possibile misurare una lunghezza con ambedue le unità di misura senza avere errori apprezzabili nella realtà costruttiva. Cioè si può scegliere per una data lunghezza, pari in prima approssimazione a un numero intero di braccia e di frazioni, una frazione più piccola che, aggiunta al valore approssimato scelto, ci fa avvicinare quanto si vuole alla lunghezza data...".

Verifichiamo le affermazioni del Giachi: la canna della Porta Pisana, lunga 236 cm, corrispondeva a $(3 + 2/3)$ braccia volterrane. Ne consegue:

1 braccio volterrano = $1 \text{ canna} / (3 + 2/3) = 236 / (3 + 2/3) = 236 / (11/3) \approx 64,36 \text{ cm}$, valore che non coincide con quello di 59 cm calcolato sopra, che corrisponde alla lunghezza di un quarto della canna più antica.

Il Giachi ha trascurato il secondo campione della canna.

La seconda equivalenza fornita dal Giachi era con le unità fiorentine:

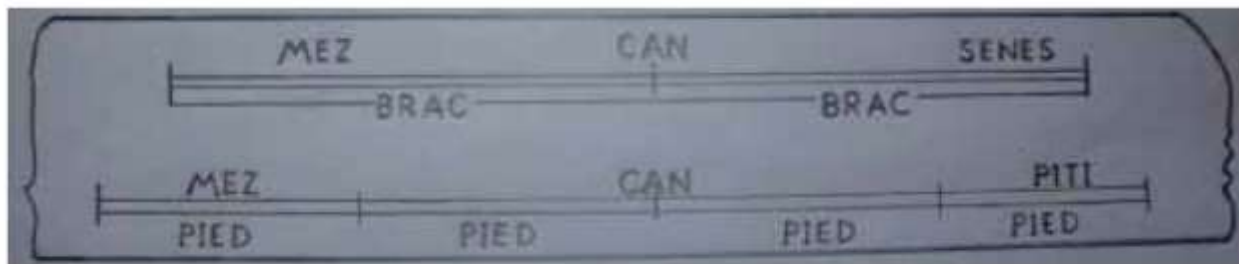
$1 \text{ canna volterrana} = 4 \text{ braccia} + 2 \text{ quattrini di braccia fiorentini} = 4 * 58,3626 + 2 * 0,9727 = 233,45 + 1,9454 = 235,3954 \text{ cm}$, valore prossimo a quello misurato di 236 cm (o 2,36 m).

Nelle "Tavole di Raggiunglio", a pagina 546, è pubblicata una tabella con i coefficienti per la conversione della lunghezza del braccio volterrano in braccia fiorentine:

$1 \text{ braccio volterrano} = (1 \text{ braccio} + 1 \text{ soldo} + 8 \text{ denari di braccio fiorentino}) = 58,3626 + 2,9181 + 8 * 0,2432 = 63,2263 \text{ cm}$, valore non troppo distante da quello calcolato sopra.

Le unità di misura di Pitigliano

Alcuni lavori eseguiti nel 2010 a Pitigliano sulle logge esistenti accanto alla Cattedrale di san Pietro hanno portato alla luce su un pilastro di travertino incisioni, disegni e lettere che rappresentano le misure lineari usate nella Contea di Pitigliano, appartenuta agli Orsini, nel corso del Cinquecento.



Disegno del pilastro con le antiche misure

Fonte: Angelo Biondi

L'incisione superiore è larga 1 cm circa e su di essa sono incise le scritte:

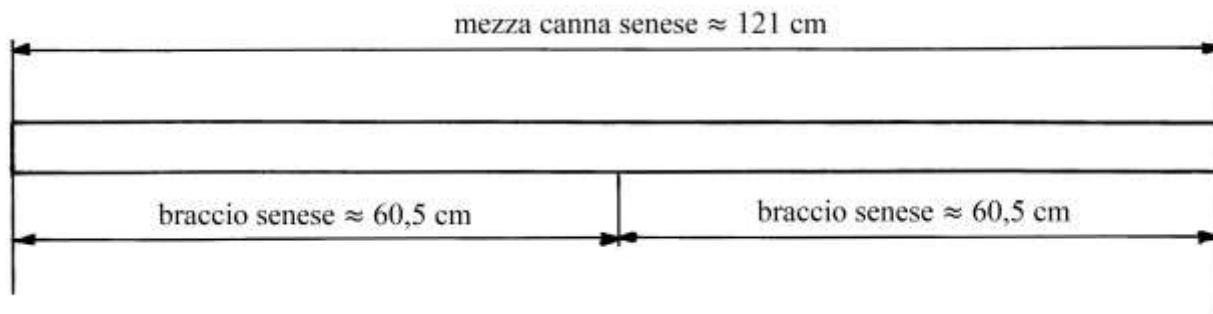
MEZ[za] CAN[na] SENES[e] .

La riga sottostante contiene due scritte:

BRAC[ccio] BRAC[cio].

Al centro vi è una tacca che divide in due parti uguali l'incisione.

Lo schema che segue spiega la parte superiore dell'incisione:

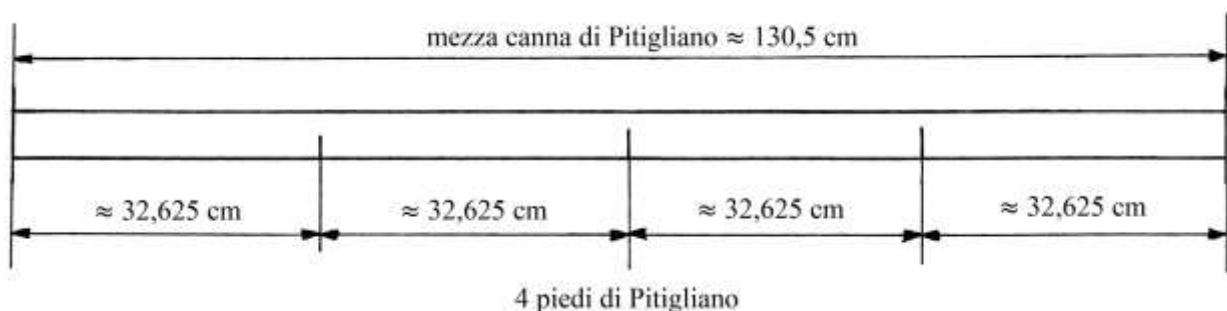


La parte inferiore fornisce le lunghezze delle unità di misura di Pitigliano:

MEZ[za] CAN[na] PITI[gliano] e

PIED[e] PIED[e] PIED[e] PIED[e] .

Il grafico che segue fornisce le lunghezze delle unità locali di Pitigliano:



Dalle incisioni si ricavano alcune informazioni:

- * la *canna senese* era lunga circa 242 cm ed era divisa in quattro *braccia* di 60,5 cm.
- * La *canna di Pitigliano* era più lunga di quella senese e cioè valeva 261 cm e aveva come sottomultiplo il *piede pitiglianese* lungo 32,625. Il rapporto fra le due unità era:
1 canna = 8 piedi.

APPENDICE I

Le proprietà agricole di Santa Maria Nuova

L'Arcispedale di Santa Maria Nuova di Firenze fu fondato nel 1288 dal mercante e banchiere Folco Portinari (1222? – 1289), padre della celebre Beatrice, la donna amata da Dante Alighieri.

L'Ospedale è tuttora attivo.

Nel corso dei secoli Santa Maria Nuova si trovò a gestire molte attività: possedeva un banco nel quale depositare i risparmi (anche Leonardo da Vinci pare se ne servisse) ma un'importante attività era data dalla gestione di un consistente insieme di proprietà agricole rappresentate da 22 fattorie composte da 304 poderi, sparpagliate in diverse zone della Toscana.

Esse furono poi vendute per effetto delle riforme volute dal granduca Pietro Leopoldo I d'Asburgo – Lorena (1747-1792).

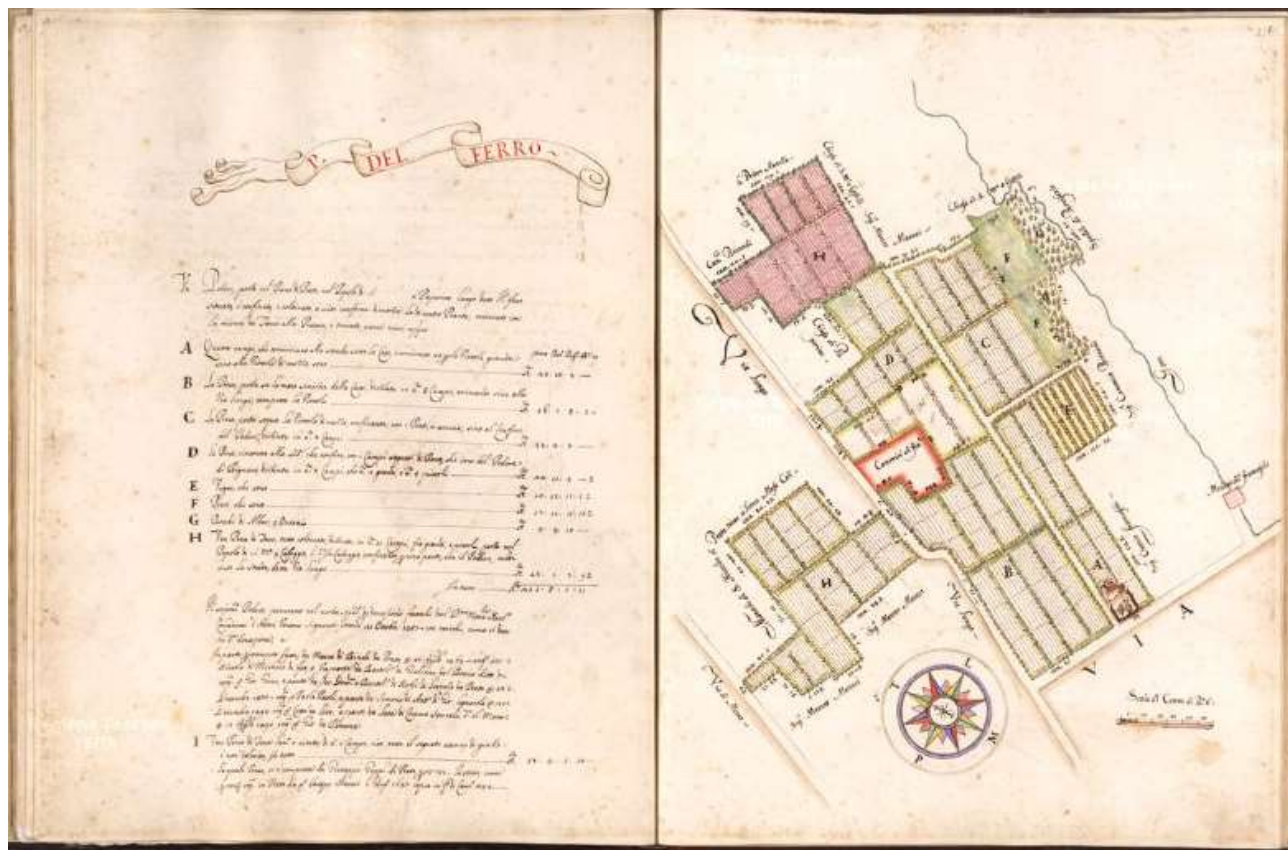
Nell'Archivio di Stato di Firenze è raccolto l'archivio di Santa Maria Nuova e di esso fanno parte i documenti relativi alle proprietà agricole, raccolte in alcuni *Cabrei*.

Una mostra tenutasi a Firenze presso l'Accademia dei Georgofili dal 18 gennaio al 16 febbraio 2024 ha presentato una selezione di carte ricavate da quei Cabrei: essa è stata documentata da un volume curato dalla Fondazione Santa Maria Nuova, citato in bibliografia.

Una delle fattorie (quella di Prato) è descritta nel documento

https://www502.regione.toscana.it/searcherlite/cartografia_storica_regionale_scheda_dettaglio.jsp?imgid=17896 cartografiastoricaregionale_17896.pdf

che contiene una scheda curata dallo storico della geografia Leonardo Rombai, professore presso l'Università degli Studi di Firenze.



Il documento è un registro cartaceo intitolato *P[odere] del Ferro* e risale 1646. È stato disegnato in scala 1 : 1773.

Il Cabreo che contiene quel documento è costituito da quasi 50 carte con 17 mappe di poderi e di terre geograficamente separate le une dalle altre.

Alcuni poderi descritti nel Cabreo erano situati nel contado di Prato, altri in quello di Firenze (Campi Bisenzio e Prato del Vingone) e altri nel contado di Pistoia (presso Agliana).

Caratteristica delle mappe e delle descrizioni contenute in questo Cabreo è l'uso delle differenti unità di misura lineari e superficiali da esse derivate:

- * braccio da terra fiorentino e il relativo braccio quadrato per i poderi di Campi Bisenzio;
- * braccio alla pratese (e braccio quadrato), più lungo di quello fiorentino, per i poderi pratesi;
- * braccio da terra pistoiese (e il braccio quadrato), più lungo di quello pratese e ancora di più nei confronti di quello fiorentino, usato per misurare i poderi di Agliana.

Stando alle tavole contenute nel "Ragguaglio" ordinato da Pietro Leopoldo (e qui non riprodotte), a Pistoia erano usati due tipi di braccio:

- * il *braccio di Pistoia* (senza alcuna qualificazione) brPt, equivalente a (braccia 1 + soldi 1) di braccio a panno di Firenze (brpFi) e quindi uguale a 21 soldi da panno di Firenze, per una lunghezza equivalente, espressa in metri, che è:

$$1 \text{ brPt} : 1 \text{ brpFi} = 21 : 20$$

$$1 \text{ brPt} : 0,583626 = 21 : 20$$

$$1 \text{ brPt} = 0,583626 * 21/20 = 0,6128 \text{ metri};$$

- * il *braccio a terra di Pistoia*, brtPt, che è lungo (1 braccio + 5 soldi + 2 denari + 10 punti) di braccio a panno di Firenze, brpFi. La sua lunghezza equivale a:

$$1 \text{ brpFi} = 20 \text{ soldi} = 240 \text{ denari} = 2880 \text{ punti};$$

$$5 \text{ soldi} = 60 \text{ denari} = 720 \text{ punti};$$

$$2 \text{ denari} = 24 \text{ punti};$$

$$10 \text{ punti}.$$

In totale si ha: $2880 + 720 + 24 + 10 = 3634$ punti di brpFi = 1 brtPt.

La lunghezza del braccio a terra di Pistoia, in metri, è data dalla seguente proporzione:

$$1 \text{ brtPt} : 1 \text{ brpFi} = 3634 \text{ punti} : 2880 \text{ punti}$$

$$1 \text{ brtPt} = 0,583626 \text{ metri} = 3634 : 2880$$

$$1 \text{ brtPt} = 0,583626 * 3634/2880 = 0,7364 \text{ metri}.$$

A Pistoia, il *braccio a terra* era più lungo dell'altro *braccio di Pistoia*, al contrario di ciò che avveniva nel rapporto fra i due bracci di Firenze: ricordiamo che quello a terra era lungo i 17/18 di quello a panno.

La tabella che segue confronta le lunghezze dei bracci lineari e di quelli superficiali di Firenze, Prato e Pistoia: la lunghezza di quello a terra di Prato è stata ricavata in precedenza ed è uguale a 0,651716 metri.

Lunghezze bracci in metri	Area di un braccio quadrato in m ²	Rapporti con il braccio a panno quadrato di Firenze
* braccio a panno di Firenze: 0,583626 (brpFi)	0,3406 (brpFi ²)	1
* braccio a terra di Firenze: 0,551202 (brtFi)	0,3038 (brtFi ²)	0,892
* braccio a panno di Prato: 0,583626 (brpPo)	0,3406 (brpPo ²)	1
* braccio a terra Prato: 0,651716 (brtPo)	0,4247 (brtPo ²)	1,247
* braccio di Pistoia: 0,6128 (brPt)	0,3755 (brPt ²)	1,10
* braccio a terra di Pistoia: 0,7364	0,5423	1,592

Nella descrizione della documentazione del *P[odere] del Ferro*, citato sopra, Leonardo Rombai fornisce alcune uguaglianze:

“... Ogni braccia 1728 quadre fiorentine e pratesi fanno uno stioro, mentre ogni 9216 braccia quadre pistoiesi fanno una coltra che corrisponde a 12996 braccia quadre da panno alla pistoiese e 10368 alla pratese...”. Forse, l’Autore si riferiva alle braccia alla pistoiese senza alcuna qualificazione, qui sopra indicate con le sigle (brPt) e (brPt²).

Le tre espressioni dovrebbero essere equivalenti:
 $9216 \text{ brtPt}^2 = 12996 \text{ brPt}^2 = 10368 \text{ brtPo}^2$.

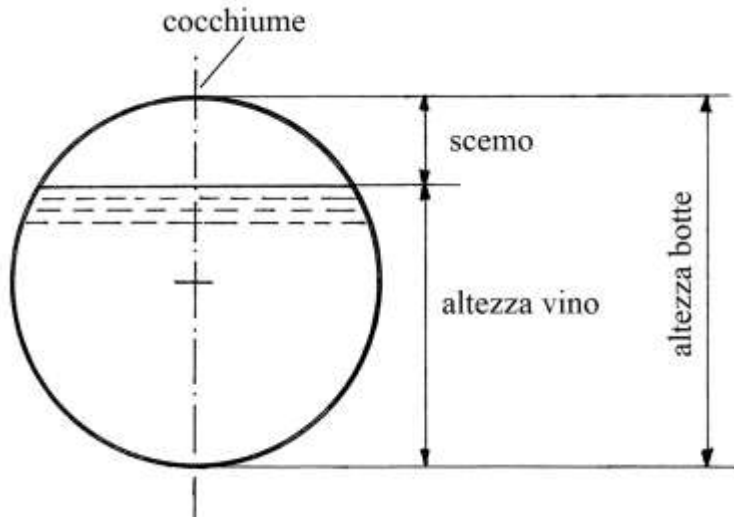
Convertiamo tutte le tre cifre in metri quadrati

- * $9216 \text{ brtPt}^2 = 9216 * 0,5423 = 4997,8368 \text{ m}^2$;
- * $12996 \text{ brPt}^2 = 12996 * 0,3755 = 4879,998 \text{ m}^2$;
- * $10368 \text{ brtPo}^2 = 10368 * 0,4247 = 4403,2896 \text{ m}^2$.

APPENDICE II

LA MISURA DELLE BOTTI SECONDO SFORTUNATI

La parte finale del trattato di Giovanni Sfortunati è dedicata alla misura delle botti. Lo *scemo* è l'altezza della colonna d'aria sovrastante il pelo libero del liquido:



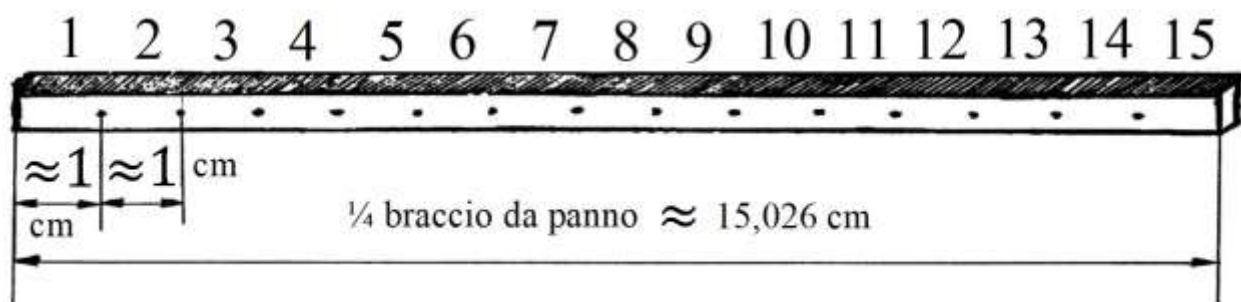
Lo schema mostra la sezione di una botte di forma circolare; sono evidenziati lo *scemo* e l'altezza del vino: lo loro somma costituisce l'altezza della botte.

La misura dello *scemo* era fatta con delle aste graduate, le *stagie* (*staggiuoli* secondo lo Sfortunati): il vino bagna l'asta ed è possibile leggere la profondità del liquido contenuto nella botte.

La stagia era conosciuta con diversi nomi: la stazza (da cui *stazzatura* delle botti), la riga da misuratore, la bacchetta cadometrica, la velta e la gauge (in Francia).

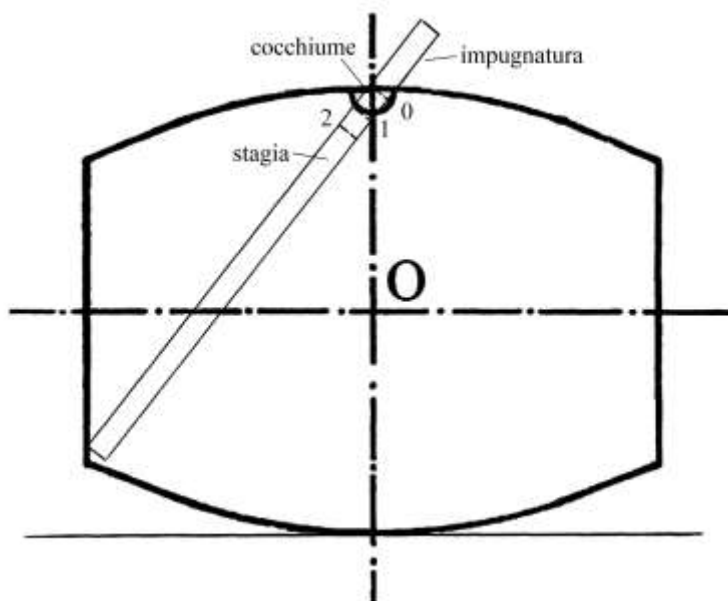
La stagia doveva recare delle tacche o dei fori per misurare il livello del vino.

Uno dei pochissimi esempi di questi strumenti è contenuto nel trattato di Giovanni Sfortunati:



Lo strumento aveva la forma di un prisma a base quadrata e su di una faccia laterale recava *quattordici* fori a uguale distanza che lo dividevano in 15 parti uguali. Lo strumento era lungo un quarto di braccio e cioè $60,1055/4 = 15,026$ cm: ciascuna delle divisioni corrispondeva a ≈ 1 cm.

La stagia veniva inserita obliquamente nella botte attraverso il cocchiere, fino a farle toccare un'estremità:



Le cifre “0”, “1” e “2” fanno parte della scala forse incisa sull’asta. Lo “0” doveva combaciare con il cocchiere.

Fra gli argomenti affrontati nel suo trattato vi è lo studio dei metodi di misura del contenuto delle botti da vino (e quindi anche dei loro *scemi*): allo scopo lo Sfortunati utilizzò le unità di misura lineari e volumetriche in uso a Siena all’epoca, all’inizio del Cinquecento.

L’edizione del 1561 contiene ben *ventuno* pagine di tabelle.

Interessanti sono le considerazioni che Sfortunati fa riguardo ai metodi usati dai misuratori senesi. Essi impiegavano il *braccio da panno*, lungo l’equivalente di 60,1055 cm, che da essi era suddiviso in 24, oppure in 45, 48 o anche 60 parti uguali: ciascuna di queste parti era chiamata *ponto*: probabilmente *ponto* stava per *punto*.

L’Autore ricorda le unità di misura dei volumi:

1 staio = 16 (= 2^4) boccali (o metadelle);

1 boccale = 4 (= 2^2) quartucci;

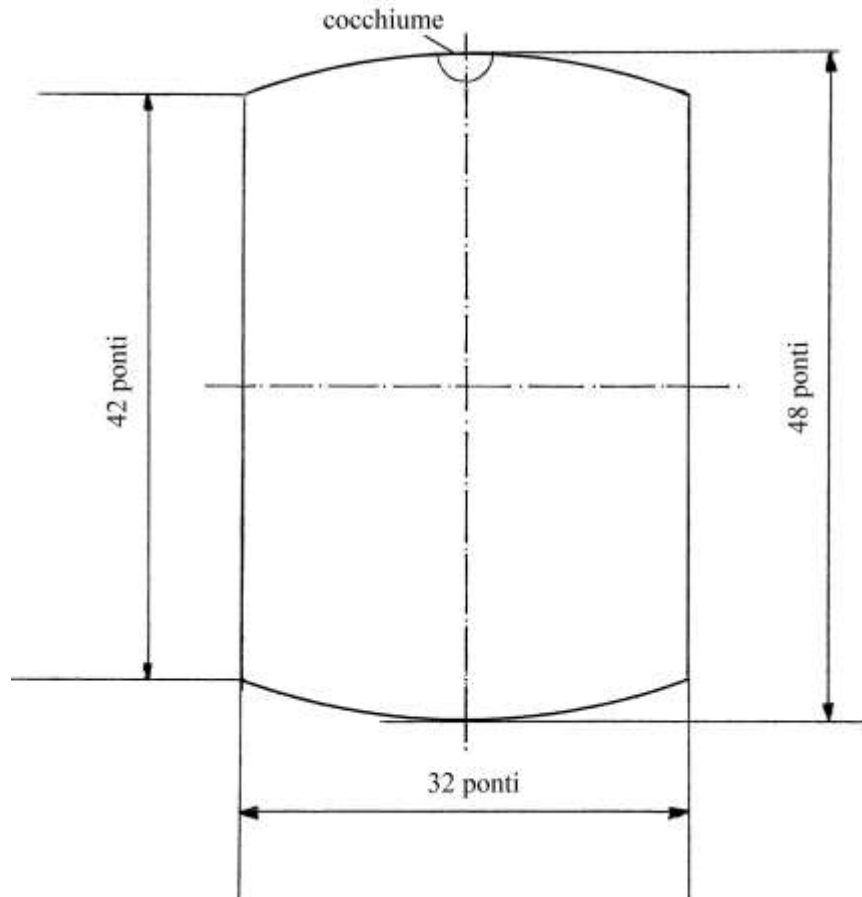
1 staio = 64 (= 2^6) quartucci.

A Siena erano usati due multipli dello staio:

1 soma = 2 barili = 4 (= 2^2) staia = 64 (= 2^6) boccali = 256 (= 2^8) quartucci.

Tutte queste unità erano fra loro legate da rapporti espressi da potenze di 2.

Lo Sfortunati fa l’esempio di una botte, probabilmente circolare, che ha i fondi di uguali dimensioni:



Egli la misura con il *ponto* sottomultiplo del braccio senese nel rapporto:

1 braccio = 45 ponti e

1 ponto = 1/45 di braccio = $1/45 * 60,1055 = 1,33567$ cm.

Sulla base di questo rapporto, le dimensioni della botte risulterebbero:

- * diametro dei fondi: $42/45 * 60,1055 = 56,14$ cm;
- * diametro al cocchiume: $48/45 * 60,1055 = 64,11$ cm;
- * lunghezza: $32/45 * 60,1055 = 42,74$ cm.

Sfortunati calcola il volume della botte con una procedura un po' strana:

- * moltiplicare la lunghezza della botte per il diametro dei fondi: $32 * 42 = 1344$ [ponti²];
- * moltiplicare il precedente risultato per il diametro al cocchiume:
 $1344 * 48 = 64512$ [ponti³].

L'Autore fornisce un risultato uguale a 645: egli ha diviso il prodotto per 100, ma non spiega il perché: in modo implicito, l'Autore fissa in 100 il numero dei boccali che misurano il volume della botte:

100 boccali = (96 + 4) boccali = (6 staia + 4 boccali).

Ne consegue:

64512 ponti³ = 100 boccali e

1 boccale = $64512/100 = 645,12$ ponti³.

Questo ultimo dato è confermato dal valore che è introdotto nella procedura che segue:

$645,12$ ponti³ \approx 646 ponti³.

L'Autore propone poi un'altra procedura:

- * sommare le due *altezze* (e cioè le lunghezze del diametro al fondo e di quello al cocchiume):
 $42 + 48 = 90$;
- * dividere per 2: $90/2 = 45$ [e cioè calcola l'*altezza ragguagliata* della botte];

- * moltiplicare per sé stesso: $45 * 45 = 2025$;
- * moltiplicare per la lunghezza della botte: $2025 * 32 = 64800$ [ponti³].

A questo punto, Sfortunati introduce le equivalenze con le unità di misura senesi:

- * 1 quartuccio = $(161 + \frac{1}{2})$ ponti³;
- * 1 boccale = 646 ponti³;
- * 1 staio = 10336 ponti³.

Sulla base di questi valori, la conversione del volume espresso da 64800 [ponti³] fornisce il seguente risultato:

$$\text{Volume BOTTE} = (6 \text{ staia} + 4 \text{ boccali} + 1 \text{ quartuccio e } 1/5).$$

Alle carte 116 *verso* e 117 *recto* sembra fornire un'informazione relativa al peso del vino: il vino leggero e *brusco* pesa un po' meno di quello dolce. Una botte contiene 256 *libbre* di vino (la libbra era un'unità di peso e non di volume): 256 libbre formano una *soma* e si hanno le seguenti relazioni:

$$1 \text{ soma} = 2 \text{ barili} = 4 \text{ staia} = 256 (= 2^8) \text{ libbre}$$

$$1 \text{ staio} = 1 \text{ soma}/4 = 256/4 = 64 \text{ libbre}$$

$$1 \text{ boccale} = 1 \text{ staio}/16 = 64/16 = 4 \text{ libbre}$$

$$1 \text{ quartuccio} = 1 \text{ boccale}/4 = 4/4 = 1 \text{ libbra.}$$

La *libbra* pesava l'equivalente di 339,5 grammi.

%%%%%%%%%

Le tre pagine finali del trattato di Sfortunati contengono la descrizione di un ulteriore metodo per il calcolo delle quantità di vino contenute nelle botti. Come accade a gran parte del libro non sono presenti figure, schemi o diagrammi esplicativi, ciò che avrebbe facilitato la comprensione da parte dei lettori.

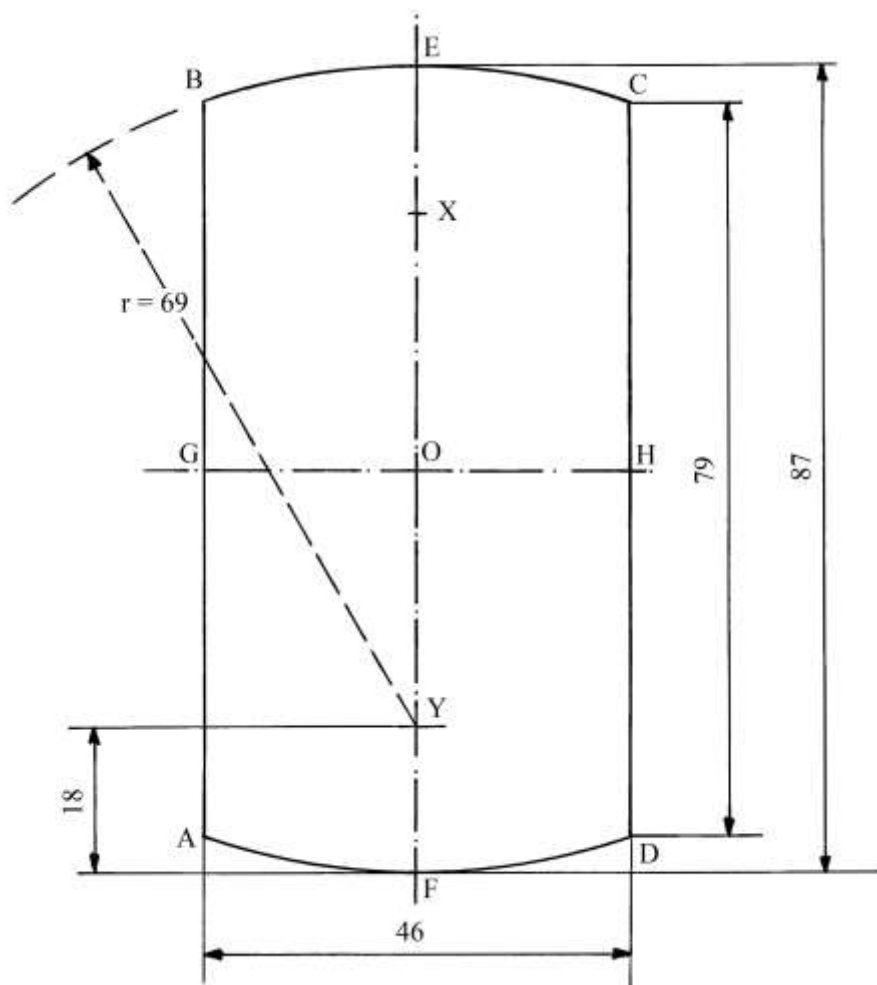
Una botte ha le seguenti dimensioni:

- * capacità: 3 some + 1 staio (= 13 staia);
- * diametro al cocchiere: 87 ponti;
- * diametro del (o dei) fondo/i: 79 ponti;
- * distanza fra i fondi: 46 ponti;
- * volume: 208 boccali.

Il ponto usato in queste tre pagine del trattato è uguale a $1/60$ (e non $1/45$) della lunghezza del braccio e quindi:

$$1 \text{ ponto} = 1 \text{ braccio}/60 \approx 60,1055/60 \approx 1,002 \text{ cm, arrotondato a } 1 \text{ cm.}$$

Ricordiamo che in precedenza Sfortunati aveva usato il ponto uguale a $1/45$ di braccio.



La botte di questo esempio *potrebbe* avere avuto un profilo delimitato da due archi di circonferenza di raggio $XA = YB = 69$ ponti. I due centri X e Y sono posizionati sull'asse di simmetria EF a 18 ponti di distanza rispettivamente da E e da F e cioè $EX = FY = 18$ ponti.

L'Autore richiama il volume di metà della botte e cioè 104 boccali. Infatti:

Volume METÀ BOTTE = 13 staia/2 = $(6 + \frac{1}{2})$ staia = $(6 + \frac{1}{2}) * 16 = 104$ boccali.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare il diametro al cocchiere per quello di un fondo: $87 * 79 = 6873$ [ponti²];
- * moltiplicare per la lunghezza della botte: $6873 * 46 = 316158$ [ponti³];
- * dividere per 1520 [Sfortunati introduce senza alcuna spiegazione un nuovo valore per il boccale: 1 boccale = 1520 ponti³]:
 $316158/1520 \approx 207,998$ arrotondato a 208 boccali.

----- APPROFONDIMENTO -----

Proponiamo un'ipotesi riguardo alle differenti equivalenze fra boccali e ponti³: se il braccio è diviso in 45 ponti, il boccale vale:

$$1 \text{ boccale} = 646 \text{ ponti}^3.$$

Con la divisione della lunghezza del braccio in 60 ponti, il volume del boccale è:

$$1 \text{ boccale} = 1520 \text{ ponti}^3.$$

Sembra ragionevole proporre la seguente proporzione:

$$646 : 45^3 = 1520 : 60^3.$$

In assenza di indicazioni da parte dello Sfortunati, questa ipotesi sembra l'unica possibile.

A questo punto è utile riepilogare le nuove equivalenze secondo l'abacista senese:

- * 1 ponto = 1/60 braccio;
- * 1 boccale = 1520 ponti³;
- * 1 staio = 16 boccali = 16 * 1520 = 24320 ponti³.

Dato che i 316158 [ponti³] calcolati da Sfortunati devono equivalere a 13 staia, l'Autore introduce il valore convenzionale di 24320 (=16*1520) per verificare il risultato del calcolo del volume in 13 staia:

$$\text{Volume BOTTE} = 316158/24320 \approx 12,9999, \text{ arrotondato a 13 staia.}$$

A questo riguardo l'esatto valore in *ponti³ convenzionali* è:

$$13 \text{ staia} * 24320 = 316160.$$

Il volume effettivo della botte in boccali vale:

$$\text{Volume BOTTE} = 13 \text{ staia} * 16 = 208 \text{ boccali.}$$

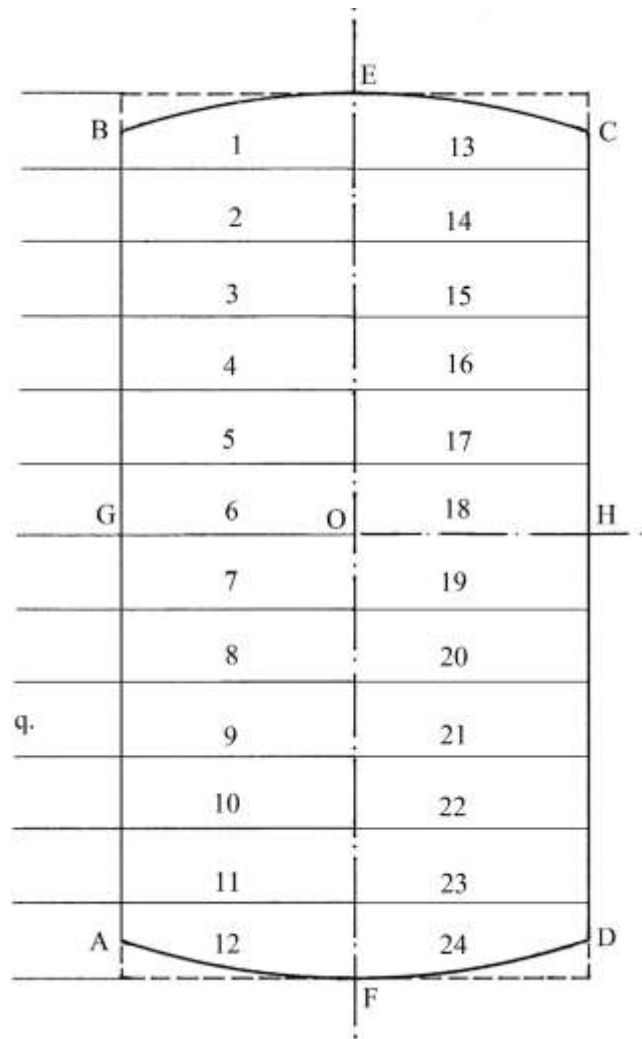
La scomposizione in fattori primi dei due numeri mostra i rapporti esistenti fra di loro:

$$24320 = 2^8 * 5 * 19$$

$$1520 = 2^4 * 5 * 19.$$

Infatti, la divisione 24320/1520 dà come risultato 2⁴ e cioè 16.

L'Autore divide la botte in 24 parti uguali con sezionamenti orizzontali e con una sezione effettuata lungo l'asse di simmetria verticale EF:



Le parti sono numerate dall'alto verso il basso: nella semibotte di sinistra vanno da 1 a 12 e in quella di destra da 13 a 24.

Sfortunati prende in considerazione una delle due semibotti: qui è stata scelta quella di sinistra.

Egli mostra una tabella, che qui di seguito è riformulata, nella quale fornisce i successivi volumi contenuti nelle dodici parti: la capacità cresce secondo una progressione quasi aritmetica:

Sezioni	Capacità in <i>boccali</i> e <i>quartucci</i>	Differenza con il successivo
1	1 bb. + 3 qq.	5 bb. + 0 qq.
2	6 bb. + 3 qq.	7 bb. + 0 qq.
3	13 bb. + 3 qq.	7 bb. + 1 qq.
4	21 bb. + 0 qq.	9 bb. + 1 qq.
5	30 bb. + 1 qq.	9 bb. + 3 qq.
6	40 bb. + 0 qq.	10 bb. + 0 qq.
7	50 bb. + 0 qq.	10 bb. + 1 qq.

8	60 bb. + 1 qq.	11 bb + (1 + 1/3) qq.
9	71 bb. + (2 + 2/3) qq.	10 bb. + (1 + 1/3) qq.
10	82 bb. + 0 qq.	11 bb. + 0 qq.
11	93 bb. + 0 qq.	11 bb. + 0 qq.
12	104 bb. + 0 qq.	-----

Nota: *bb.* sta per *barili* e *qq.* per *quartucci*.

Gli incrementi discontinui che la tabella mostra nella terza colonna possono essere giustificati con la curvatura del profilo della botte.

Lo Sfortunati non fornisce alcuna spiegazione riguardo alla procedura con la quale ha calcolato i valori delle successive capacità: operò empiricamente con una serie di misurazioni?

%%%%%%%%%

L'Autore applica il metodo appena visto a un *secondo caso*.

Una botte ha la capacità di 100 staia e al cocchiere ha diametro uguale a 176 ponti e l'altezza del vino è 136 ponti: ne consegue che lo scemo vale:

$$\text{scemo} = 176 - 136 = 40 \text{ ponti.}$$

Prima di procedere, Sfortunati introduce una precisazione: se il vino occupa in altezza più della metà del diametro al cocchiere (ed è questo caso) deve essere misurato lo scemo. Se, invece, il vino è alto meno della metà del diametro (e quindi lo scemo è maggiore della metà del diametro al cocchiere) deve essere misurata la profondità del vino per poi ricavare, per differenza, la lunghezza dello stesso scemo.

Ecco i passi della procedura:

- * dividere per 2 la capacità della botte: $100/2 = 50 \text{ staia} = 800 \text{ boccali};$
- * dividere per 2 il diametro al cocchiere: $176/2 = 88 \text{ [ponti];}$
- * dividere per 12: $88/12 = (7 + 1/3) \text{ [ponti];}$
- * dividere la lunghezza dello scemo per 12: $40/12 = (3 + 1/3) \text{ [ponti].}$

A questo punto, Sfortunati fornisce alcuni dati:

- * fino alla quinta parte [rivedere la precedente tabella] tiene (30 boccali + 1 quartuccio).
- * Sempre utilizzando la tabella, fra la sesta e la quinta parte vi è una differenza di (9 barili e 3 quartucci).
- * Calcolare la terza parte di questa differenza: $(9 \text{ barili} + 3 \text{ quartucci})/3 = (3 \text{ barili} + 1 \text{ quartuccio}).$
- * Sommare l'ultimo risultato al valore della quinta parte: $(30 \text{ boccali} + 1 \text{ quartuccio}) + (3 \text{ boccali} + 1 \text{ quartuccio}) = (33 \text{ boccali} + 2 \text{ quartucci}) = (33 + 1/2) \text{ boccali.}$

Per determinare il volume del vino contenuto in questa seconda botte, l'Autore impiega una seconda procedura che inizia con una proporzione:

- * ultimo dato : volume prima semibotte = x : volume metà seconda botte
 $(33 + 1/2 \text{ boccali}) : 104 \text{ boccali} = x : 800 \text{ boccali}$ da cui
 $x = [(33 + 1/2) * 800]/104 = (257 + 1/2) \text{ boccali.}$

- * Sottrarre l'ultimo risultato dalla capacità totale della seconda botte, 100 staia = 1600 boccali:
 $1600 - (257 + 1/2) = (1342 + 1/2) \text{ boccali, contenuto in vino della botte.}$

Questo dato equivale a:

$$(1342 + 1/2)/16 = (83 \text{ staia} + 14 \text{ boccali} + 2 \text{ quartucci}).$$

%%%%%%%%%

Un *terzo esempio* è quello di una botte che ha capacità uguale a 80 staia, con diametro al cocchiere uguale a 172 ponti e con il vino alto 60 ponti.

Quindi, il livello del liquido è più basso della metà del diametro al cocchiere e lo scemo misura:

$$\text{scemo} = 172 - 60 = 112 \text{ ponti.}$$

La procedura impiegata per calcolare il volume del vino prevede i seguenti passi:

- * dividere per 2 la lunghezza del diametro al cocchiere: $172/2 = 86$ [ponti];
- * dividere per 12: $86/12 = (7 + 1/6)$;
- * dividere l'altezza del vino, 60, per l'ultimo quoziente: $60/(7 + 1/6) = (8 + 16/43)$.

La procedura si interrompe con la consultazione della solita tabella: la parte intera dell'ultimo quoziente, "8", porta a leggere il dato relativo alla *sezione 8* che vale la capacità di (60 boccali + 1 quartuccio).

Dalla stessa tabella risulta che fra la *nona* e l'*ottava* sezione vi è una differenza di [11 boccali + (1 + 2/3) quartucci]: occorre calcolarne i 16/43:

[11 boccali + (1 + 2/3) quartucci] * 16/43 \approx 4 boccali [Sfortunati calcola 5 boccali] + 2/3 quartucci.

Occorre sommare l'ultimo quoziente al dato relativo alla *sezione 8*:

$$\begin{aligned} & (4 \text{ boccali} + 2/3 \text{ quartucci}) + (60 \text{ boccali} + 1 \text{ quartuccio}) = \\ & = [64 \text{ boccali} + (1 + 2/3) \text{ quartucci}]. \end{aligned}$$

Per calcolare il volume del vino contenuto nella terza botte occorre applicare una seconda procedura che inizia con una proporzione:

ultimo dato : volume prima semibotte = y : volume terza semibotte.

Il volume della terza botte è:

$$\text{Volume TERZA BOTTE} = 80 \text{ staia} = 80 * 16 = 1280 \text{ boccali.}$$

La proporzione diviene:

$$[64 \text{ boccali} + (1 + 2/3) \text{ quartucci}] : 104 = y : 1280/2$$

$$y = \{ [64 \text{ boccali} + (1 + 2/3) \text{ quartucci}] * 640 \} / 104 \approx (24 + 3/4) \text{ staia} \approx$$

$$\approx (396 + 2/5) \text{ boccali [Sfortunati fornisce un risultato leggermente diverso: 400 boccali].}$$

LA MISURA DELLE BOTTI SECONDO FORESTANI

Nel suo trattato, Forestani conclude la descrizione del problema della misura dei tini e delle botti richiamando un uso praticato in diverse località: il braccio lineare era diviso in un certo numero di parti uguali: i *punti*.

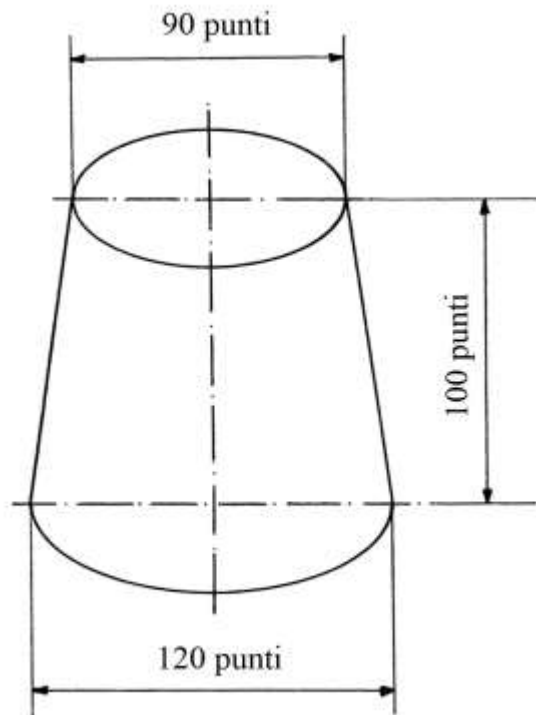
Un'asta graduata in punti serviva a misurare il livello del liquido nei recipienti.

In alcuni luoghi il braccio era diviso in 43, 45, 48 o 60 *punti*: Giovanni Sfortunati nel suo trattato "*Nuovo Lume*" afferma che il braccio senese era ripartito dai misuratori senesi in 24, 45, 48 o 60 parti uguali chiamate *ponti*.

Nel caso di Pescia, secondo Forestani il braccio era diviso in 43 punti. Lo strumento usato per misurare il livello del vino nei tini e nelle botti era chiamato, sempre a Pescia, *scandaglio*: era ovvio che su questo strumento erano incise delle tacche distanziate quanto quanto la lunghezza di 1 punto, uguale a 1/43 di braccio.

Tino misurato in punti

Un tino ha la forma di un tronco di cono: il fondo ha diametro lungo 120 punti, la bocca 90 ed è alto 100.



Il problema chiede il volume del tino espresso in *barili*.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

- * sommare le lunghezze dei diametri del fondo e della bocca: $120 + 90 = 210$;
- * dividere per 2: $210/2 = 105$;
- * moltiplicare per sé stesso: $105 * 105 = 11025$;
- * moltiplicare per l'altezza: $11025 * 100 = 1102500$.

A questo punto Forestani introduce le equivalenze fra i punti e le unità di misura, probabilmente valide per il contado di Pescia; l'Autore non fa cenno a un dato di fatto: moltiplicando punti per punti si dovrebbero ottenere *punti quadri* (11025 sono punti quadri) e moltiplicando *punti quadri* per *punti lineari* l'unità di misura risultante dovrebbe essere *punti cubici* (1102500 sono punti cubici). Solo in questo modo si spiegano le equivalenze fra le unità usate a Pescia:

- * 1000 punti [cubici] equivalgono a 1 fiasco;
- * 1 fiasco = 2 boccali;
- * 20 fiaschi = 1 barile.

I 1102500 punti [cubici] che rappresentano il volume del tino valgono:

$$\begin{aligned} 1102500/1000 &= (1102 + \frac{1}{2}) \text{ fiaschi} = (1102 + \frac{1}{2})/20 \text{ barili} = \\ &= 55 \text{ barili} + (2 + \frac{1}{2}) \text{ fiaschi.} \end{aligned}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

L'equivalenza

$$1000 \text{ punti [cubici]} = 1 \text{ fiasco}$$

usata da Forestani non sembra esatta, ma soltanto un'approssimazione.

Un *punto* è lungo $1/43$ di braccio [lineare].

1 braccio è lungo 43 punti e *un braccio cubico* vale:

$$1 \text{ braccio cubico} = 43^3 \text{ punti [cubici]} = 79507 \text{ punti [cubici]}.$$

1 braccio cubico vale:

$$1 \text{ braccio cubico} = 5 \text{ barili} = 100 \text{ fiaschi, dato che 1 barile è equivalente a 20 fiaschi.}$$

Se un braccio cubico vale 79507 punti [cubici] che corrispondono a 100 *fiaschi*, un fiasco equivale a:

$$1 \text{ fiasco} = 1/100 * \text{braccio cubico} = 79507/100 = 795,07 \text{ punti [cubici]} \text{ e non } 1000 \text{ punti [cubici]} \text{ come afferma Forestani.}$$

Se 1 braccio cubico equivale a 100 fiaschi e ciascun fiasco ha volume uguale a 1000 punti [cubici] possiamo ricavare il valore del *punto p*:

$$1 \text{ braccio cubico} = 100 \text{ fiaschi} = 100 * 1000 = 100000 p^3.$$

Il valore di *p* è:

$$\sqrt[3]{100000} \approx 46,4158$$

$$e \quad p = 1/46,4158 \text{ braccia.}$$

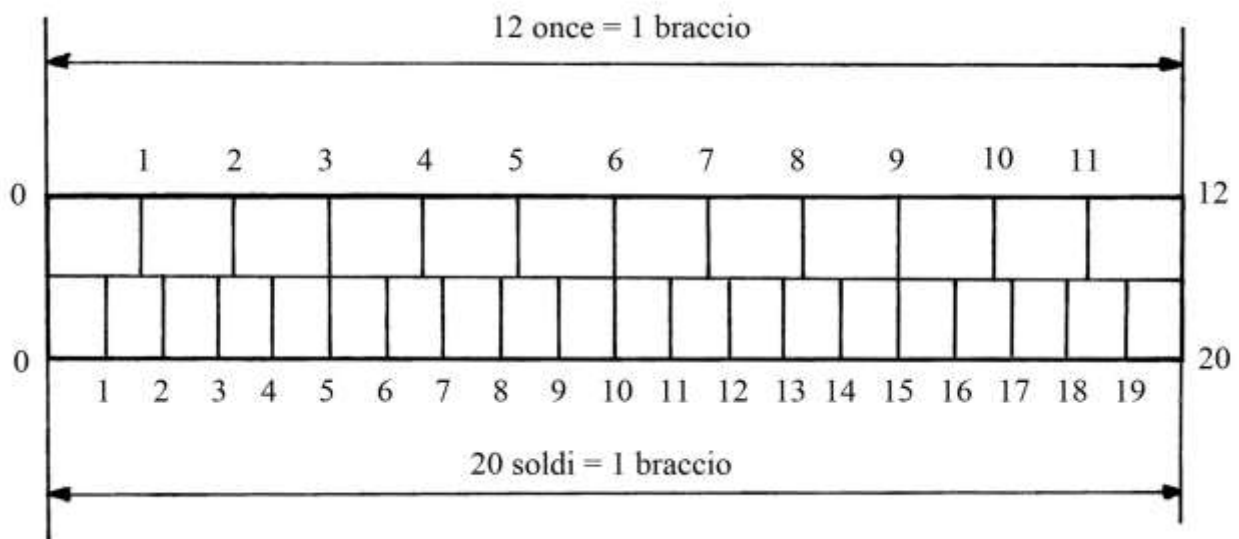
Lo *scandaglio* usato per misurare il livello del vino non doveva avere tacche incise a distanza di 1/43 di braccio ma almeno di 1/46.

Misurazione delle pile da olio

All'epoca in cui Forestani scriveva, in Toscana era usanza comune fabbricare certi vasi di forma quadrata ottenuti unendo *sei* tavole di pietra importate dalla riviera di Genova.

Questi vasi erano noti come *pile* o *pozzi per l'olio*: in essi era conservato l'olio e a volte anche il grano.

La misura di questi vasi poteva essere fatta a braccia, unità lineare divisibile in 12 once o in 20 soldi:



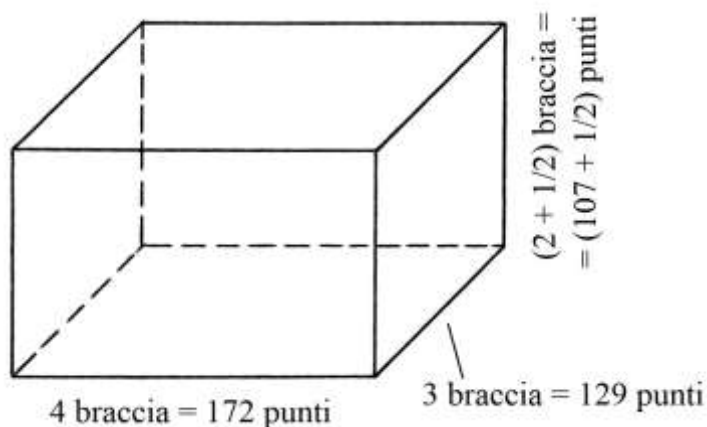
Il preciso calcolo del peso dell'olio costringeva ad operare con i *rotti*, i numeri frazionari. Per rimediare alle difficoltà, Forestani propose di misurare le dimensioni delle pile da olio usando il metodo dei *punti* già applicato alle botti e fissò alcune equivalenze:

1590 punti quadri [in realtà *cubici*] equivalevano a 1 libbra grossa di olio.

La pila considerata ha le dimensioni espresse in punti, convertite con l'equivalenza

1 braccio = 43 punti,

- * lunghezza: 4 braccia = $4 * 43 = 172$ punti;
- * larghezza: 3 braccia = $3 * 43 = 129$ punti;
- * altezza: $(2 + \frac{1}{2})$ braccia = $(107 + \frac{1}{2})$ punti.



Il volume V in punti [*cubici*] è:

$$V = 172 * 129 * (107 + \frac{1}{2}) = 2.385.210 \text{ punti [cubici]}.$$

Il peso P dell'olio in *libbre grosse* è:

$$P = V/1590 = 2.385.210/1590 = (1500 + 7/53) \text{ libbre grosse}.$$

Infine, Forestani calcola con una proporzione il volume di grano espresso in staia che può contenere la pila:

$$50 \text{ libbre grosse da olio} : 9 \text{ staia} = 1509 : \text{staia grano} \quad \text{da cui}$$

$$\text{staia grano} = 9 * 1509/50 = (271 + 31/50) \text{ staia}.$$

È utile ricordare che 1 braccio cubico contiene 50 libbre grosse di olio ed è equivalente a 9 staia.

Il problema può essere risolto anche calcolando il volume V della pila in braccia cubiche:

$$V = 4 * 3 * (2 + \frac{1}{2}) = 30 \text{ braccia cubiche}.$$

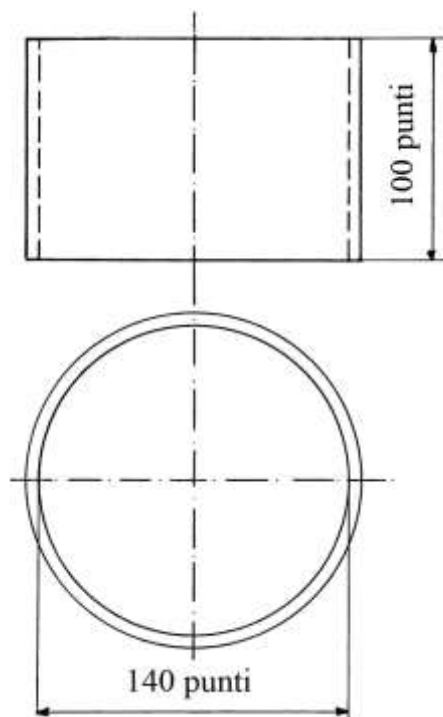
Un braccio cubico contiene 9 staia per cui il volume del grano è:

$$V_{\text{GRANO}} = V * 9 = 30 * 9 = 270 \text{ staia}.$$

Contenuto in olio di un vaso tondo

Un vaso cilindrico, come un pozzo, ha diametro d lungo 140 punti ed è alto $h = 100$ punti.

Il problema chiede quante libbre grosse di olio contiene.



Il testo di Forestani forse reca errori di calcolo o di stampa. Qui proponiamo una soluzione che utilizza i simboli della moderna aritmetica.

I calcoli sono effettuati in *punti*, ricordando che 1 braccio vale 43 punti lineari.

L'area S della sezione trasversale del vaso è:

$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 140^2 = 15400 \text{ punti [quadri].}$$

Il volume V del vaso è:

$$V = S * h = 15400 * 100 = 1.540.000 \text{ punti [cubici].}$$

Occorre convertire i punti [cubici] in braccia cubiche:

$$1 \text{ braccio cubico} = 43^3 \text{ punti [cubici]} = 79507 \text{ punti [cubici].}$$

Il volume in braccia cubiche è:

$$V = 1.540.000/79507 \approx 19,37 \text{ braccia cubiche.}$$

Un braccio cubico equivale a 5 barili e il volume del vaso è:

$$V_{\text{BARILI}} = V * 5 = 19,37 * 5 = 96,85 \text{ barili, ad esempio di vino.}$$

Forestani ricorre a una proporzione:

5 barili sono occupati da 50 libbre d'olio.

L'olio contenuto nel vaso pesa P :

$$P = V_{\text{BARILI}} * 50/5 = 96,85 * 50/5 = 968,5 \text{ libbre grosse da olio.}$$

Con la sua un po' oscura proceduta, Forestani fornisce risultati vicini a quelli sopra calcolati:

* $V_{\text{BARILI}} = 98$ barili di vino;

* $P_{\text{OLIO}} = 980$ libbre grosse di olio.

BIBLIOGRAFIA

1. Arrighi Gino (a cura e con introduzione di), “La pratica di geometria”. Volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano, dal Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, Pisa, Domus Galilæana, 1966, pp. 97.
2. Ascani Valerio, “Il Trecento disegnato”: Le basi progettuali dell’architettura gotica in Italia, Roma, Viella, 1997, pp. 180+54 tavv. f.t.
3. Bartoli Maria Teresa, “Cubito, pertica, canna ferrata nel disegno dell’architettura occidentale”, “Disegnare idee immagini”, anno II, n. 2 giugno 1991, pp. 81-89.
4. Bartoli Maria Teresa, “Il modulo progettuale di Orsanmichele a Firenze”, “Disegnare idee immagini”, anno VIII, n. 16, giugno 1998, pp. 9-17.
5. Bartoli Maria Teresa, “«Musso e non quadro». La strana figura di Palazzo Vecchio dal suo rilievo”, Firenze, Edifir, 2007, pp. 125.
6. Bartoli Maria Teresa, “Santa Maria Novella a Firenze. Algoritmi della scolastica per l’architettura”, Firenze, Edifir, 2009, pp. 87.
7. Bartoli Maria Teresa, “Il cortile della Dogana in Palazzo Vecchio, il dettaglio che illumina la regola”, “Disegnarecon”, n. 9, giugno 2012, pp. 55-64.
8. Bartoli Maria Teresa, “Il disegno gotico di San Giovanni Valdarno”, “Disegnarecon”, volume 10/ n. 19, dicembre 2017, pp. 16.
9. Bartoli Maria Teresa, “*Ad quadrum et in quadro*, la matematica dell’Umanesimo nelle addizioni di Palazzo Vecchio”, in a cura di AA. VV., “La Sala grande di Palazzo Vecchio e la *Battaglia di Anghiari* di Leonardo da Vinci”, Firenze, Olschki, 2019, pp. 97-112.
10. Benevolo Leonardo, “Indagine su Santo Spirito di Brunelleschi”, Rimini, Guaraldi | Engramma, 2015, pp. XIV+98.
11. Biondi Angelo, “Canna senese e canna pitiglianese: antiche misure scoperte a Pitigliano”, Siena, Accademia dei Rozzi, s.d. (ma 2011), anno XVII, n. 33, pp. 37-43.
12. Borgherini Malvina, “Disegno e progetto nel cantiere medievale. Esempi toscani del XIV secolo”, Venezia, Marsilio, 2001, pp. 190.
13. Caciagli Costantino, “Il braccio volterrano”, <https://www.volterracity.com/considerazioni-misura-braccio-volterrano/>
14. Calandri Pietro Maria, “Compendium de agrorum corporumque dimensione”, in “I due trattati dell’Agricoltura e della Coltivazione delle Viti”, di Giovanvettorico Soderini, a cura di Alberto Bacchi Della Lega, Bologna, Romagnoli Dall’Acqua, 1902, pp. da 291 a 346.
15. Calzolani Sergio, *Piermariacalandri.pdf*, 2020, pp. 88, in www.geometriapratice.it.
16. Camera di Commercio, Industria, Artigianato e Agricoltura di Firenze, “Raccolta provinciale degli usi”, Firenze, 2005, pp. 321, reperibile in rete come [1382078847025_raccolta_usi_2005_provincia_di_firenze.pdf](http://www.camerafirenze.it/1382078847025_raccolta_usi_2005_provincia_di_firenze.pdf).
17. Carboni Donatella – De Vincenzi Matteo, “Storia dei sistemi di misura: un problema tecnico e sociale”, in “L’unificazione metrologica” a cura di Fabrizio Benincasa, Sassari-Firenze, CNR – Istituto di Biometeorologia, 2013, pp. 1-44.
18. Cataneo Pietro, “Le pratiche delle due prime matematiche”, Venezia, Giuseppe Griffio, 1567, pp. 88.
19. Chiappe Paolo, “Il Cabreo Mugellano dei Georgofili e la ricerca del suo committente”, in “Rivista di Storia dell’Agricoltura”, Firenze, Accademia dei Georgofili, anno LIV, n. 1, giugno 2014, pp. 123-145.
20. Chiovelli Renzo, “Tecniche costruttive murarie medievali. La Tuscia”, Roma, “L’Erma” di Bretschneider, 2007, pp. 496.
21. De Baillou Giovanni, “Delle misure agrarie e di capacità degli Antichi Romani”, Firenze, Guglielmo Piatti, 1818, pp. 32.
22. Ferraro Alfredo, “Dizionario di metrologia generale”, Bologna, Zanichelli, 1959, pp. XVI+270.

23. Filippi Giovanni, “L’Arte dei Mercanti di Calimala in Firenze ed il suo più antico Statuto”, Torino, Fratelli Bocca Editori, 1889, pp. 196.
24. Finiello Zervas Diane, “The Trattato dell’Abaco and Andrea Pisano’s Design for the Florentine Baptistery Door”, “Renaissance Quarterly”, Vol. 28, No. 4, Studies in the Renaissance Issue (winter, 1975), pp. 483-503.
25. Forestani Lorenzo, “Pratica d’Arithmetica e Geometria”, Siena, Stamperia del Pubblico, 1682, pp. 574.
26. Giannichedda Enrico, “Pesi e misure: storia e archeologia di sistemi eterogenei”, in “Il Rinascimento Italiano e l’Europa”, a cura di Antonio Clericuzio e Germana Ernst, Treviso, Angelo Colla Editore, 2008, pp. 641-657 e apparati alle pp. 766-770.
27. Ginori Lisici Leonardo, “Cabrei in Toscana. Raccolte di mappe, prospetti e vedute sec. XVI – sec. XIX, Firenze, Cassa di Risparmio di Firenze, 1978, pp. 327.
28. Guidi Giuseppe, “Ragguaglio dei pesi, delle monete e delle misure”, Firenze, Giovan-Gualberto Guidi e Ulisse Pratesi, Firenze, 1855, seconda edizione, pp. VII+320.
29. Høyrup Jens, “Linee larghe. Un’ambiguità geometrica dimenticata”, “Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche”, XV, 1995, n. 1, pp. 3-14.
30. Hughes Barnabas, “Fibonacci’s *De Practica Geometrie*”, New York, Springer, 2010, pp. xxxv+408.
31. Hughes Barnabas, “An early abridgement of Fibonacci’s *De practica geometrie*”, “Historia Mathematica”, 37 (2010), pp. 615-640.
32. Istituto Centrale di Statistica, “Misure locali per le superfici agrarie”, Roma, A.B.E.T.E., 1950, seconda edizione, pp. 191.
33. “Le Fattorie di Santa Maria Nuova al tempo dei Medici (secc. XVI-XVIII): Viaggio nei possedimenti terrieri dell’Ospedale attraverso i *cabrei* conservati all’Archivio di Stato di Firenze, Firenze, Fondazione Santa Maria Nuova, 2023, pp. 151.
34. Lugli Emanuele, “Measuring in the Renaissance. An Introduction”, Cambridge University Press, 2023, pp. 100.
35. Luzzati Michele, “Note di metrologia pisana”, “Bollettino Storico Pisano”, XXXI-XXXII (1962-1963), Livorno, S.E.I.T., 1965, pp. 191-220.
36. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
37. Mazzi Angelo, “Il piede liprando e le misure di Garlenda”, Bergamo, Tipografia Pagnoncelli, 1885, pp. VIII+231.
38. Ministero di Agricoltura, “Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836”, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. 767.
39. Nanni Paolo, “Uomini nelle campagne. Agricoltura ed economie rurali in Toscana (secoli XIV-XIX), Firenze, Accademia dei Georgofili – Le Lettere, 2012, pp. 286.
40. Rozza Nicoletta, “La *Practica Geometrie* di Leonardo Pisano: edizione critica, traduzione e commento delle *Distinctiones* I-III”, tesi di dottorato, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, anno accademico 2014-2015, pp. 632.
41. Sfortunati Giovanni, “Nuovo Lume”, Venezia, Francesco del Leno, 1561, carte 129.
42. “Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze”, Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.
43. Ulivi Elisabetta, “Gli abacisti fiorentini delle famiglie ‘Del maestro Luca’, Calandri e Micceri e le loro Scuole d’Abaco”, Firenze, Olschki, 2013, pp. X-298.
44. Uzielli Gustavo, “Le misure lineari medioevali”, Firenze, Bernardo Seeber, 1899, pp. 37.
45. Vestrini Bernardino, “Osservazioni sopra il braccio agrario fiorentino detto braccio a terra”, Firenze, Anton-Giuseppe Pagani, 1781, pp. 20.

46. Weber Giovanni, “Le nuove monete pesi e misure metriche Italiane ragguagliate alle monete pesi e misure Toscane e viceversa”, seconda edizione, Siena, Tip. dell’Ancora di G. Bargellini, 1868, pp. 123.
47. Ximenes Leonardo, “Del vecchio e nuovo Gnomone Fiorentino”, Firenze, Stamperia Imperiale, 1757, pp. CXXIV + 336, con tavole fuori testo.
48. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.