sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

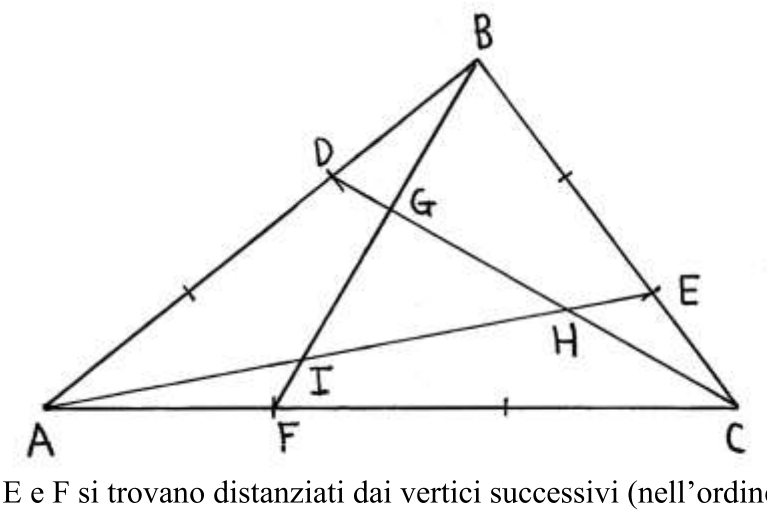
Parole chiave: triangolo di Feynman, divisione dei lati di un triangolo in parti uguali o differenti, divisione di un quadrilatero, divisione di un quadrato, formule per il calcolo dell'area, Philip Todd

I TRIANGOLI DI FEYNMAN

Il triangolo che è descritto in questo articolo deve il suo nome al grande fisico e divulgatore americano Richard Phillips Feynman (1918-1988) che ne avrebbe discusso in occasione di una cena presso l'Università Cornell con il suo collega matematico Kai Li Chung di Stanford e dimostrato che un generico triangolo con i lati divisi in *tre* parti uguali e tracciandovi tre corde dà vita a un triangolo interno di area uguale a 1/7 di quella del triangolo esterno.

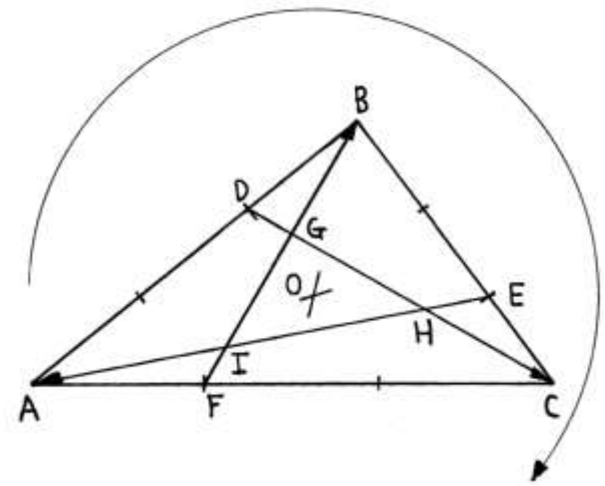
Un triangolo di Feynman

ABC è un generico triangolo scaleno e i suoi lati sono divisi in *tre* parti uguali:



I punti D, E e F si trovano distanziati dai vertici successivi (nell'ordine B, C e A, in *senso antiorario*) di 1/3 della lunghezza dei segmenti sui quali giacciono.

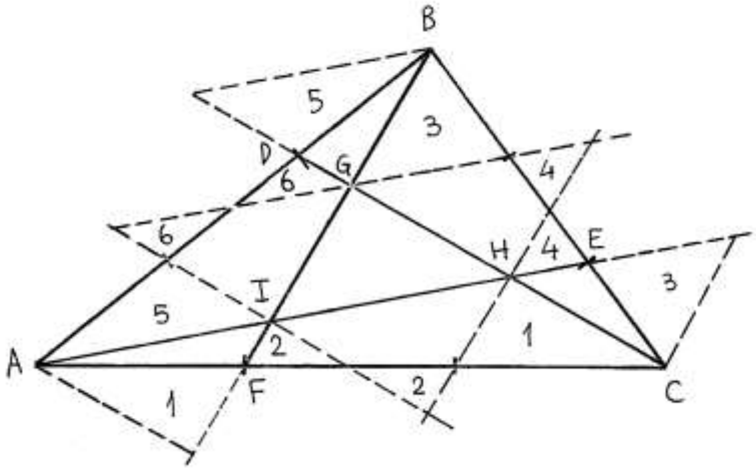
Il punto O è il *baricentro* del triangolo, intersezione delle *mediane*. I segmenti DC, EA e FB sono da considerare alla stregua di *vettori* orientati e disposti in senso *antiorario*:



Tracciare le corde DC, EA e FB: ciascuno dei punti D, E e F è collegato con il vertice più lontano del lato opposto.

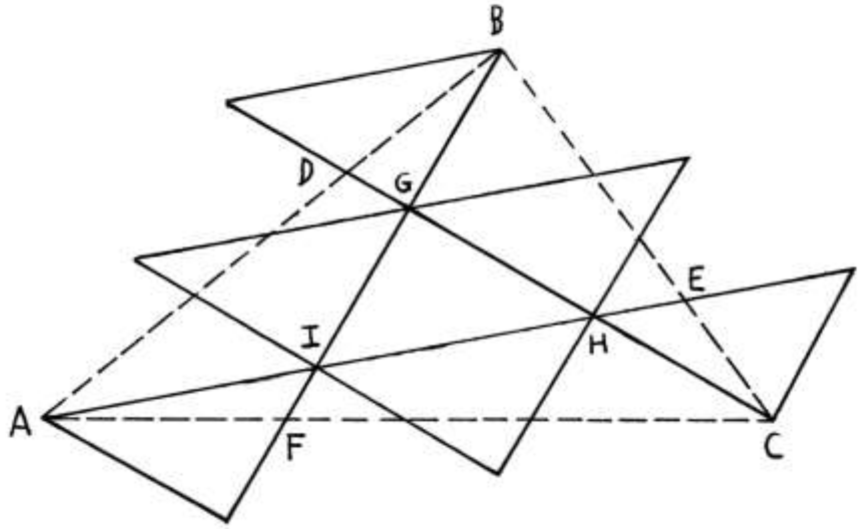
Le corde determinano il triangolo GHI: esso ha superficie uguale a 1/7 di quella di ABC. Inoltre i due triangoli sono *simili*.

La figura che segue è ricavata dalla precedente:

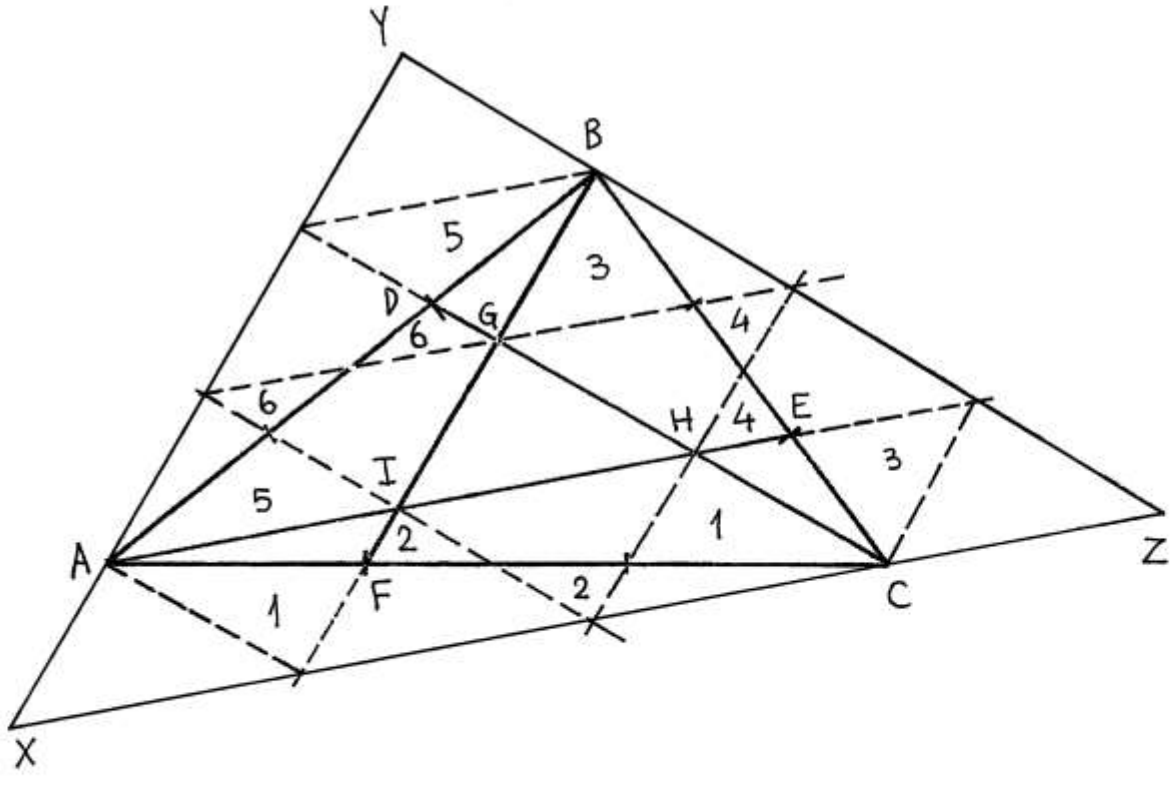


Con linee tratteggiate sono stati prolungati i collegamenti fra i vertici di GHI e i punti D, E e F.

Sono ora messi in evidenza i *sette* triangoli (compreso quello GHI) di dimensioni uguali. Il triangolo ABC ha area uguale a quella della somma delle aree dei sette triangoli: le *eccedenze* compensano le *lacune*.



Infine, i vertici esterni della precedente figura giacciono sui lati del triangolo XYZ che è simile a quello ABC e ai sette precedenti triangoli: ABC è inscritto in XYZ.



XYZ ha lati lunghi *quattro* volte quelli di ABC e la sua area è:

$$\text{Area}_{\text{XYZ}} = 4^2 * \text{Area}_{\text{GHI}} = 16 * 1/7 * \text{Area}_{\text{ABC}} = 16/7 * \text{Area}_{\text{ABC}} .$$

Vediamo la dimostrazione del risultato di 1/7.

Se ciascun vertice di un generico triangolo è connesso a un punto distante (1/p) * lato da un vertice sul lato opposto, l'area del triangolo generato all'interno è uguale a

$$k * \text{Area}_{\text{triangolo esterno}} .$$

La costante k è data da:

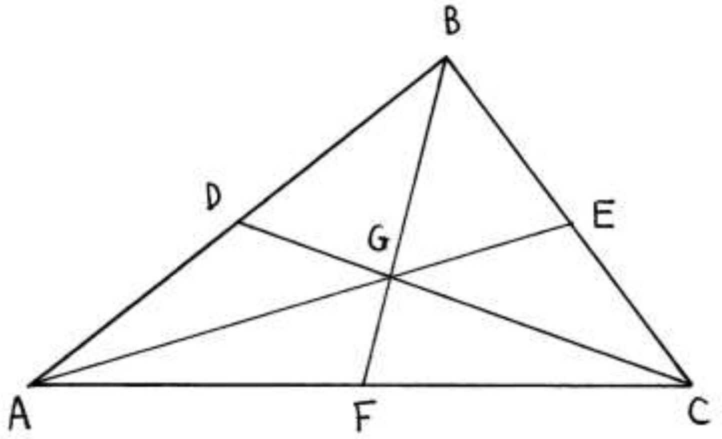
$$k = (p - 2)^2/(p^2 - p + 1) .$$

Essa indica il *rapporto* fra l'area del triangolo generato all'interno e quella del triangolo esterno: il valore di k è sempre minore di 1. Con k = 1, i due triangoli (interno e esterno) coincidono e la costruzione viene annullata: in tal caso, p = 1.

Nota: *p* sta per numero delle *p(arti)* nelle quali viene diviso un lato di un triangolo (o di un quadrilatero).

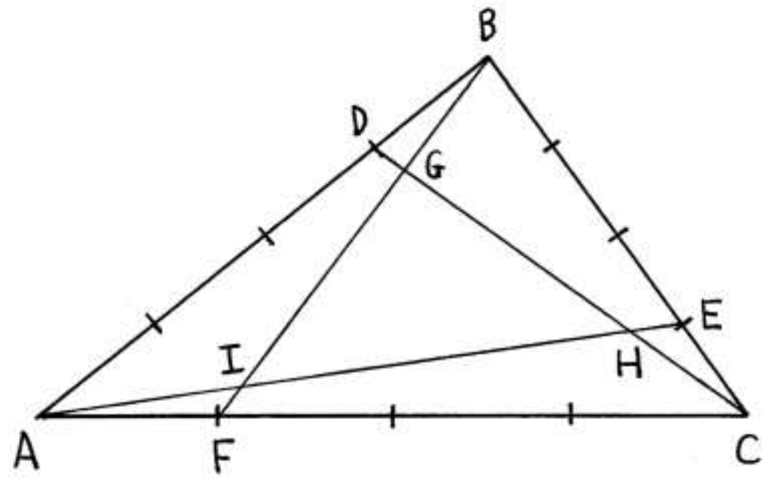
Nel caso di p = 3, la costante k vale 1/7 .

Il numero *p* deve essere *maggiore di 2*, perché nel caso di p = 2, si verifica ciò che è mostrato nella figura che segue:



AE, BF e CD sono le tre *mediane* che collegano i punti medi dei lati (D, E e F) con il vertice opposto. Le tre mediane si incontrano in un punto, G, che è il *baricentro* del triangolo. All'interno non viene creato alcun triangolo.

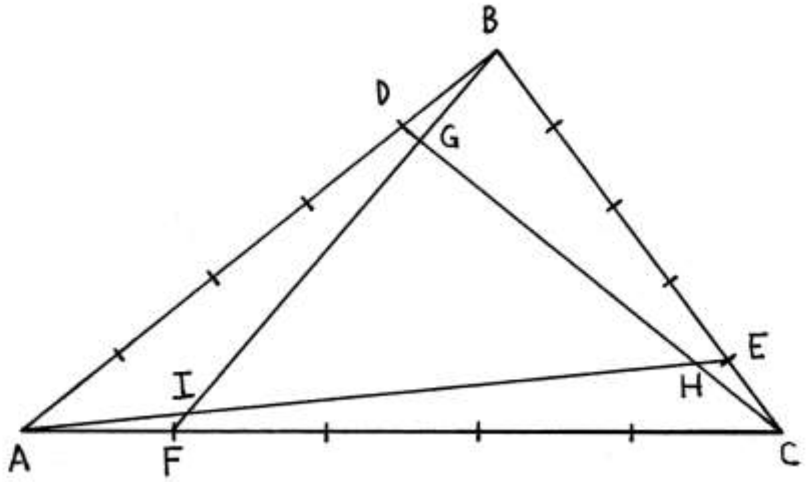
Nel caso di p = 4, la formula precedente fornisce il risultato k = 4/13 :



L'area di GHI è uguale a 4/13 di quella di ABC.

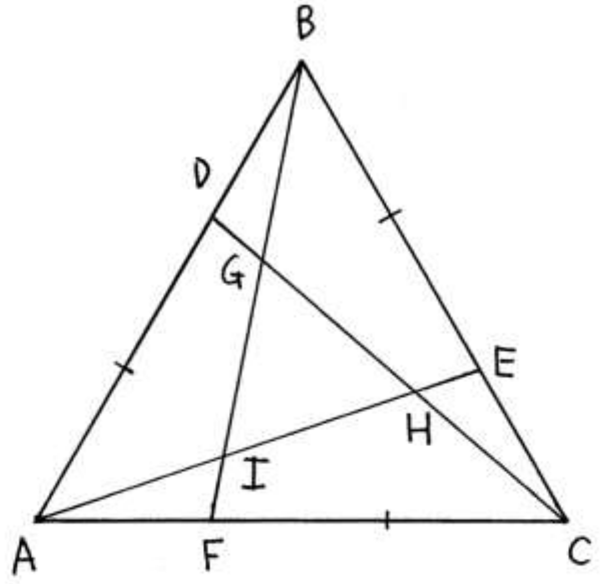
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso di p = 5, l'area del triangolo GHI è uguale a 3/7 di quella di ABC:



<u>Triangoli equilateri divisi</u>

ABC è un triangolo equilatero con i lati divisi in *tre* parti uguali:



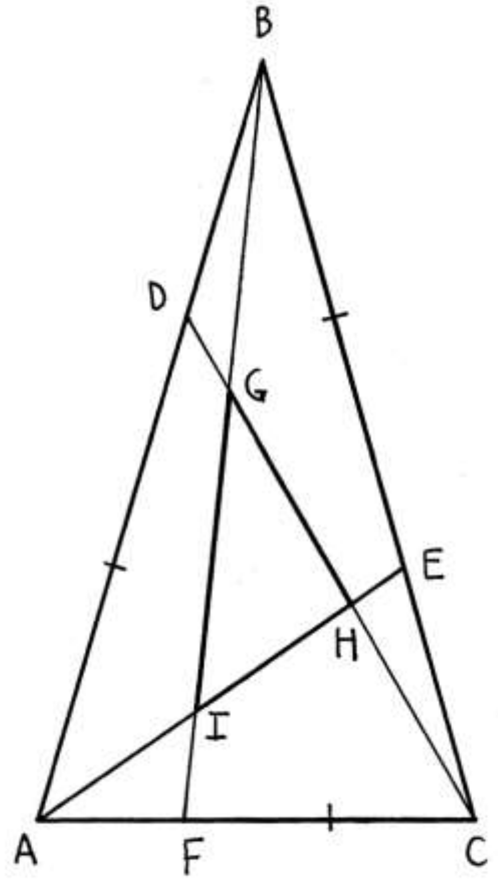
I punti che interessano per la costruzione sono D, E e F. Tracciare le *corde* DC. EA e FB: esse si intersecano nei punti G, H e I che sono i vertici di un triangolo anch'esso equilatero.

Dato che p = 3, il valore di k è:

$k = (3 – 2)^2/(3^2 – 3 + 1) = 1/7$.

L'area di GHI è 1/7 di quella del triangolo ABC.

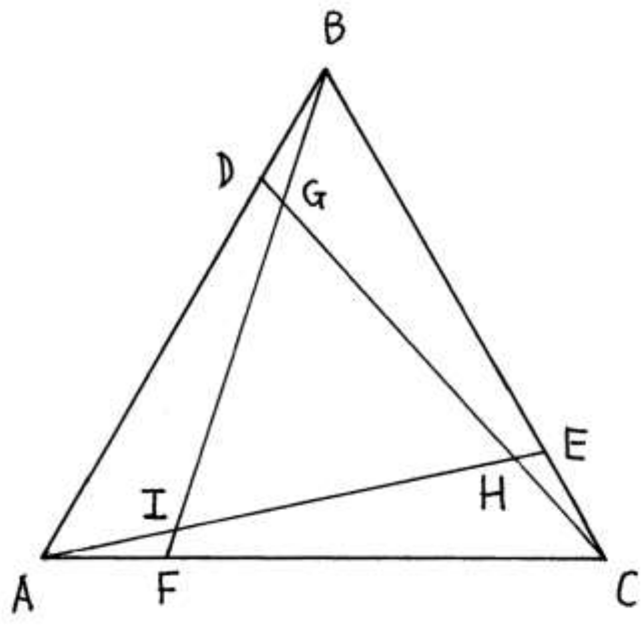
Oltre che ai triangoli scaleni, la formula si applica anche ai triangoli equilateri e anche ai triangoli isosceli, come è dato dall'esempio che segue. ABC è un *triangolo isoscele* e i suoi lati sono divisi con p = 3. Il valore di k è uguale a 1/7 e cioè l'area del triangolo GHI è uguale a 1/7 di quella di ABC:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Facciamo un’ipotesi: il teorema di Feynman è valido anche per valori frazionari di *p* purché sia soddisfatta la condizione p>2?

La figura che segue riproduce il precedente triangolo equilatero:



I suoi lati sono divisi con un valore $p = 9/2 = 4,5$.

I segmenti DB, EC e FA hanno lunghezze uguali a 2/9 di quella dei lati del triangolo.

Applicando la formula precedente ricaviamo il valore di k:

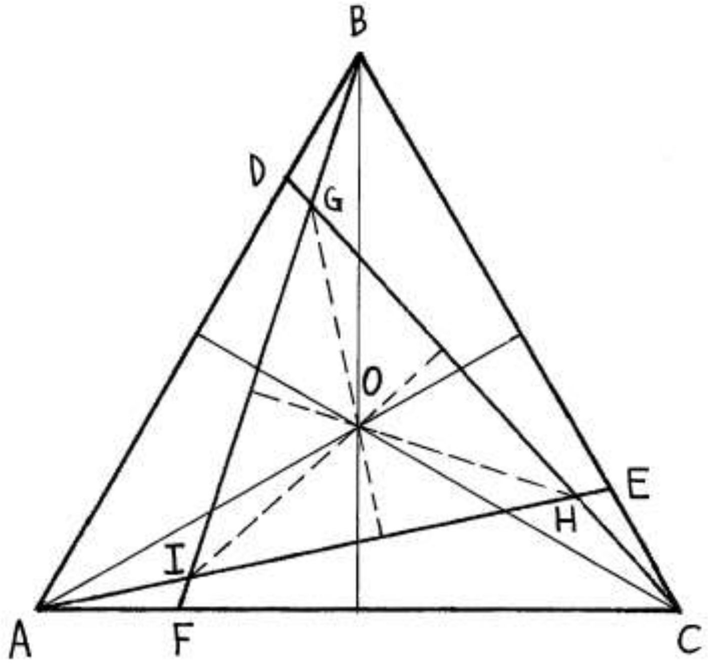
$$k = (9/2 - 2)^2/[(9/2)^2 - 9/2 + 1] = (25/4)/(67/4) = 25/67 .$$

L'area di GHI è realmente uguale ai 25/67 di quella di ABC.

L'ipotesi avanzata all'inizio del paragrafo è confermata: il teorema di Feynman vale anche per valori frazionari di *p*, purché siano maggiori di 2. Vedremo in seguito che questa ipotesi è confermata anche nel caso dei *quadrilateri*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue riproduce il triangolo equilatero diviso con il valore p = 9/2.

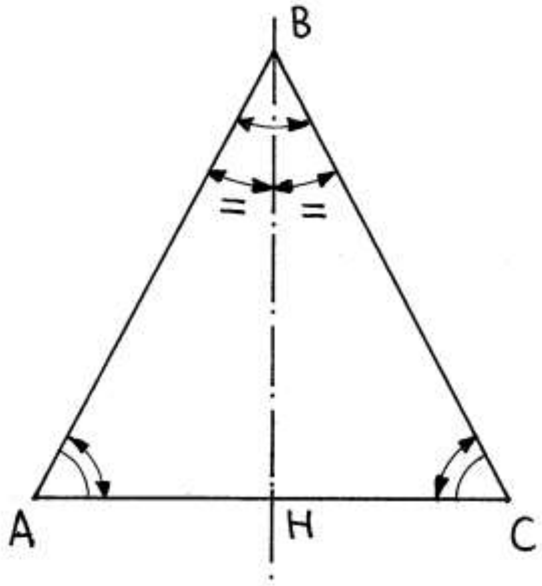


All'interno di un triangolo qualsiasi sono tracciabili un buon numero di segmenti. Quelli che qui interessano sono i seguenti *quattro*:

* Le *mediane* che collegano un vertice con il *punto medio* del lato opposto. Esse si incontrano nel *baricentro*.
* Le *altezze* si incrociano nell'*incentro* (che è il centro del cerchio inscritto).
* Le *bisettrici* degli angoli si intersecano nell'*ortocentro*.
* Infine, gli *assi* dei *lati* si tagliano nel *circocentro* (che il centro del cerchio circoscritto al triangolo).

Nel triangolo equilatero i quattro segmenti coincidono e si incontrano nello stesso punto interno.

Solo nel *triangolo isoscele* accade lo stesso: il segmento BH che collega il vertice B, comune ai due lati di uguale lunghezza (AB e BC), al punto medio di AC è la mediana di AC, l'altezza relativa allo stesso lato, la bisettrice dell'anbolo ABC e l'asse di AC:



La figura mostra le altezze e le mediane dei triangoli equilateri ABC e GHI: esse si intersecano tutte nello stesso punto O.

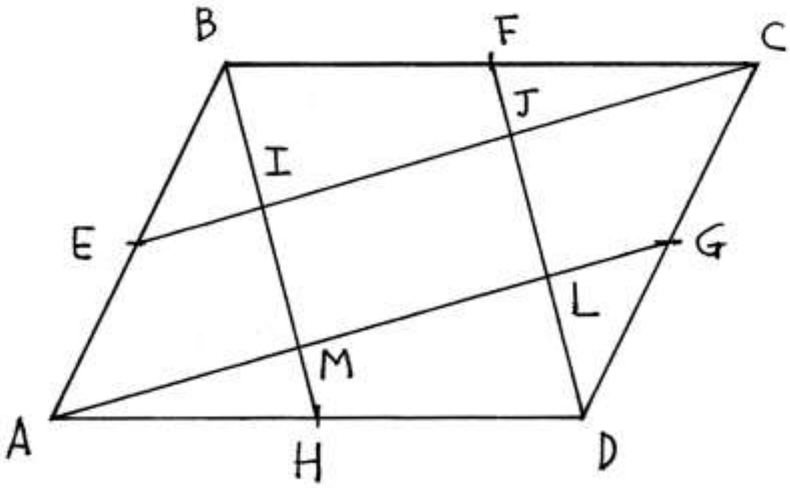
I parallelogrammi

Il teorema di Feynman sui triangoli è stato esteso ai *parallelogrammi* da parte di altri geometri.

Per questi quadrilateri vale una formula leggermente diversa:

$$k = (p^2 - 2p + 1)/(p^2 + 1) .$$

Il parallelogramma ABCD ha i lati divisi in *due* parti uguali a causa della collocazione dei punti medi E, F, G e H.

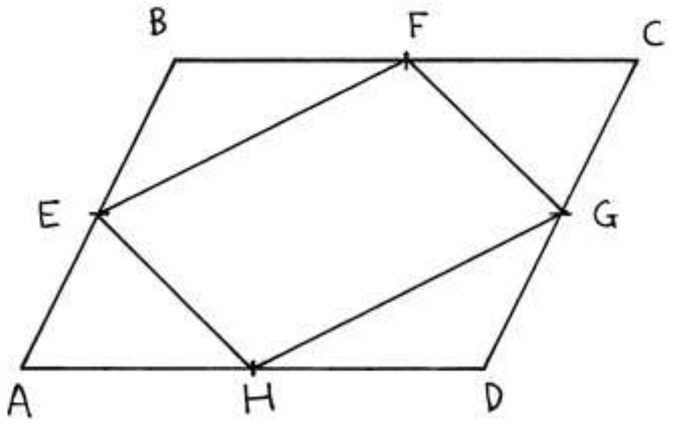


Collegando i punti medi con il primo vertice del lato opposto viene generato il parallelogramma IJML. Il coefficiente k con p = 2 vale:

$$k = (2^2 - 2*2 + 1)/(2^2 + 1) = 1/5 .$$

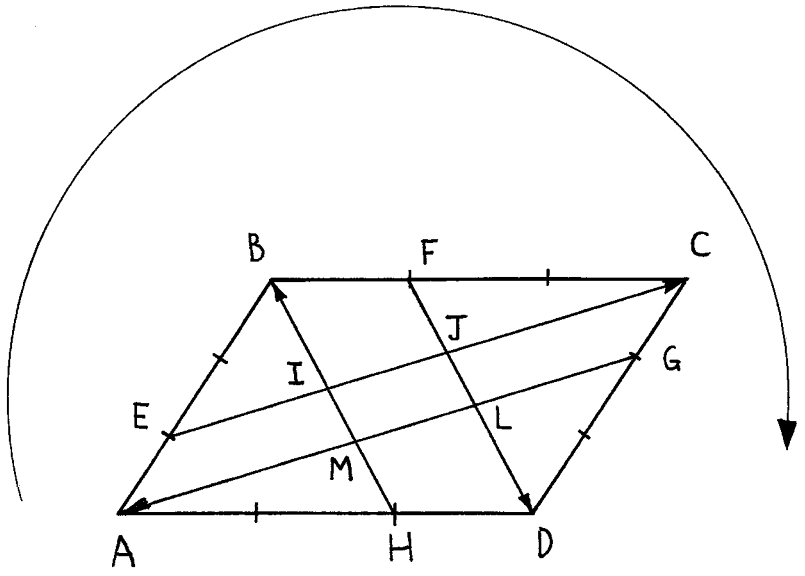
L'area di IJML è 1/5 di quella di ABCD.

Se invece sono collegati in successione i punti medi dei quattro lati, il risultato è il *parallelogramma* EFGH che ha superficie uguale alla metà di quella di ABCD:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Proviamo ora a dividere per *tre* i lati del parallelogramma ABCD, con una modifica: fissiamo i punti E, F, G e H nella parte *iniziale* dei lati di cui fanno parte:

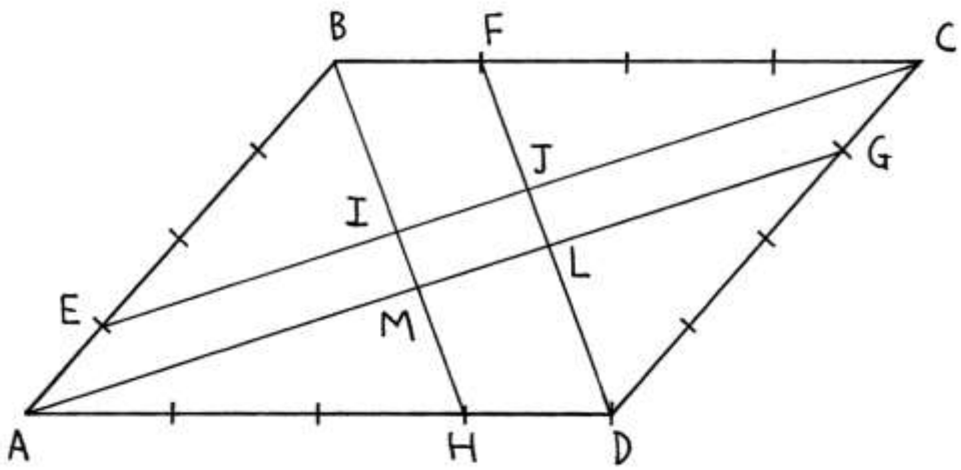


La costante k vale:

$$k = (3^2 – 2*3 + 1)/(3^2 + 1) = 2/5 .$$

La formula ha fornito un risultato *errato* per eccesso: l’area di IJLM è soltanto 3/40 di quella di ABCD.

Vediamo il caso di p = 4:



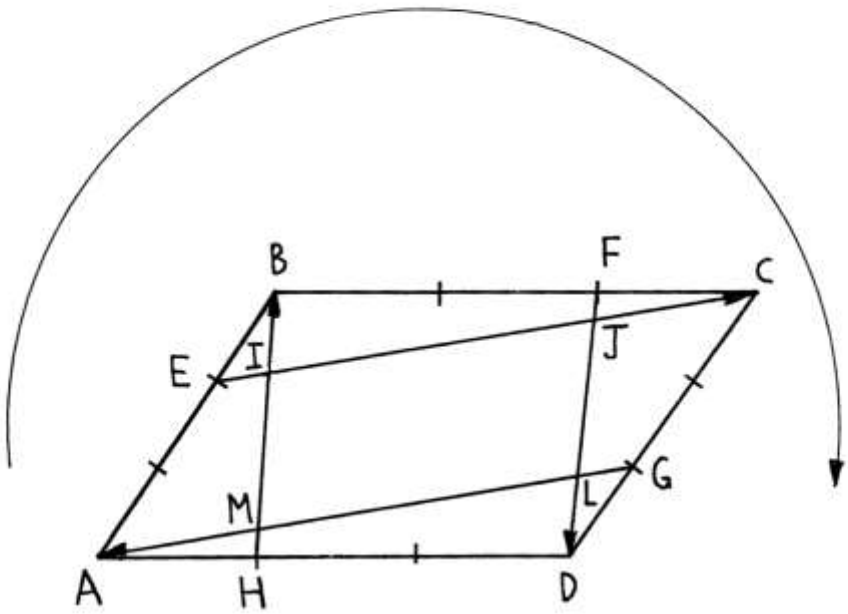
I lati di ABCD sono tutti divisi in *quattro* parti uguali. Con lo stesso metodo già impiegato nella figura precedente tracciare le corde EC, FD, GA e HB: è generato il parallelogramma IJLM. La costante k vale:

$$k = (4^2 – 2*4 + 1)/(4^2 + 1) = 9/17.$$

Anche questo risultato è grandemente errato per eccesso: il parallelogramma IJLM è assai più piccolo di 9/17 di ABCD.

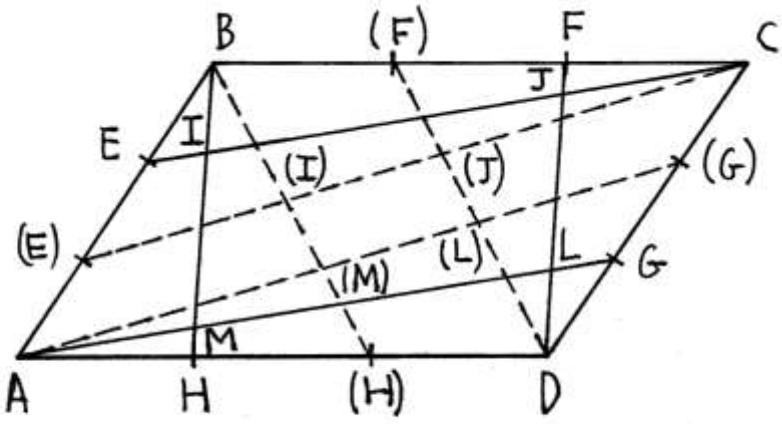
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Proviamo a costruire le stesse divisioni del parallelogramma ABCD scegliendo gli ultimi punti divisori, come fatto per i triangoli e orientando i *vettori* in senso antiorario:

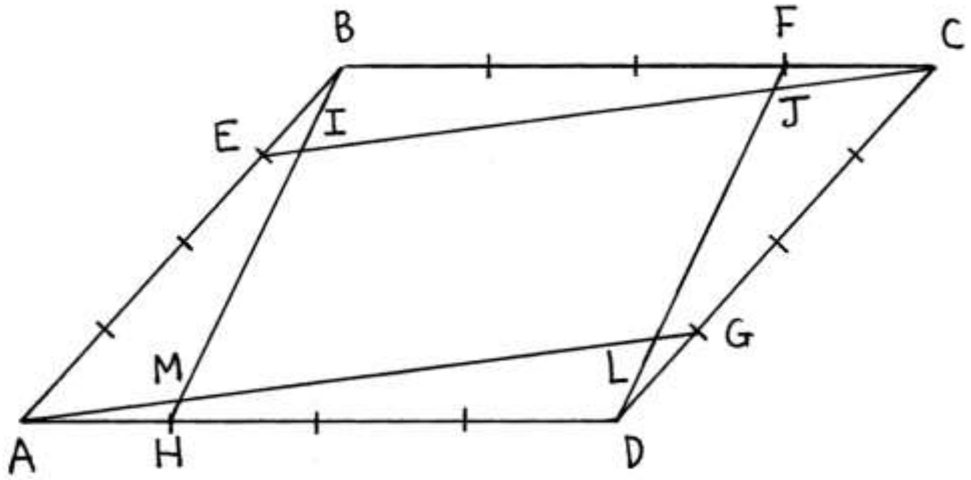


Il parallelogramma IJLM ha realmente area uguale a 2/5 di quella di ABCD.

La figura che segue mette a confronto le due costruzioni della divisione del parallelogramma con k = 3: quella errata è disegnata con linee tratteggiate e i suoi punti sono indicati con lettere racchiuse fra parentesi tonde:



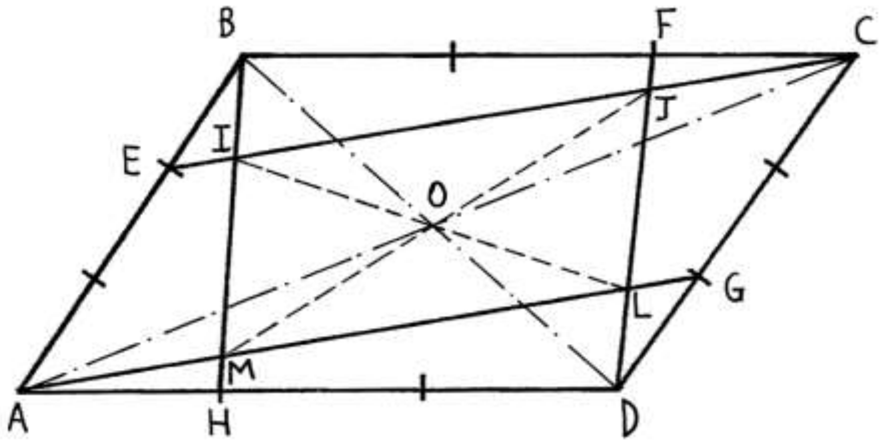
Infine, nello schema che segue è riportata la divisione del parallelogramma con k = 4:



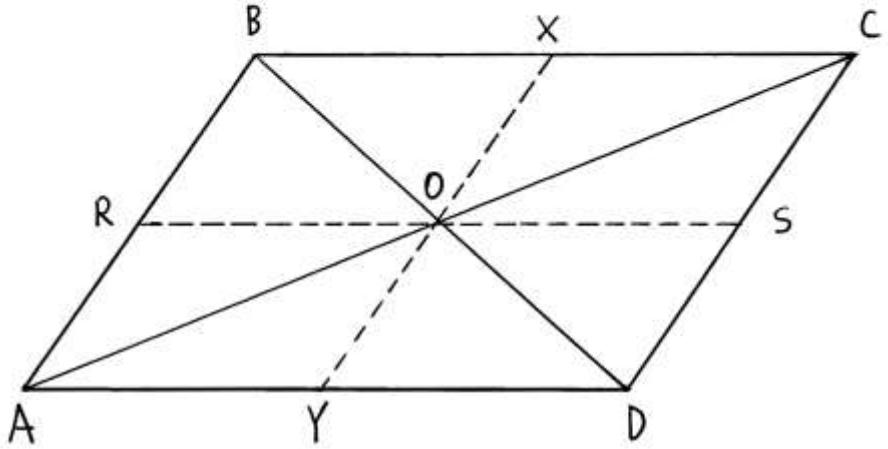
La costruzione è corretta e l'area di IJLM è 9/17 di quella di ABCD, come previsto dall'applicazione della formula a questo caso.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel parallelogramma ABCD diviso con p = 3, tracciare le diagonali di ABCD e di IJLM: esse si intersecano nel punto O, che è il *baricentro* di entrambi:

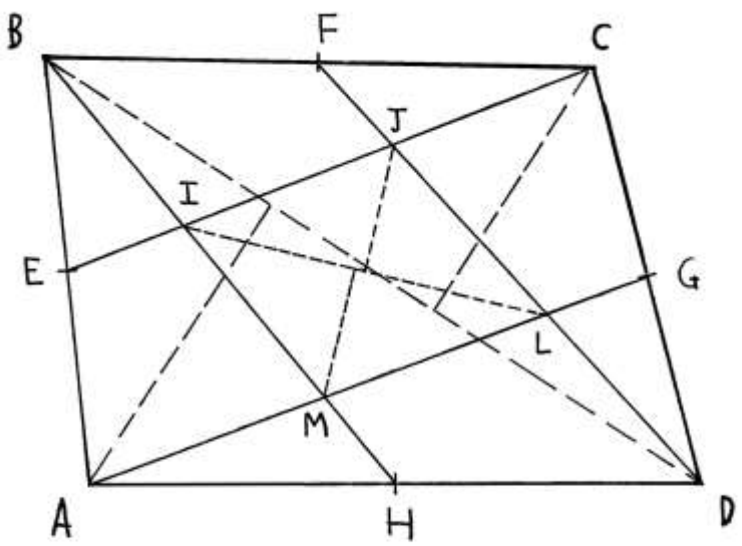


In un parallelogramma il baricentro è il punto di intersezione delle diagonali (AC e BD) e delle mediane che collegano i punti medi dei lati opposti (RS e XY):



<u>Divisione di un quadrilatero</u>

ABCD è un quadrilatero che è diviso con il valore p = 2.



E, F, G e H sono i punti *medi* dei lati AB, BC, CD e DA.

Tracciare le corde EC, FD, GA e HB: esse si incontrano per formare il quadrilatero IJLM.

Proviamo ad applicare la formula già impiegata per i parallelogrammi:

$$k = (p^2 – 2*p + 1)/(p^2 + 1) = (2^2 – 2*2 + 1)/(2^2 + 1) = (4 – 4 + 1)/(4 + 1) = 1/5 .$$

Stando al risultato della formula, il quadrilatero ha area uguale a 1/5 di quella di ABCD.

Per via geometrica, verifichiamo la corretteza di questo risultato. Disegnare le diagonali BD e IL: esse dividono i due quadrilateri in due coppie di triangoli: ABD–BCD e IJL–ILM.

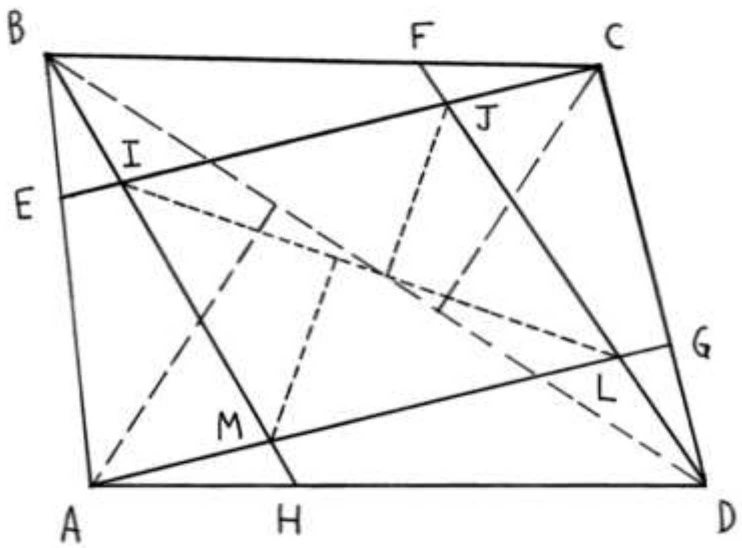
Risulta facile calcolare l'area dei quattro triangoli. Dai vertici A, C, J e M innalzare o abbassare le quattro altezze relative ai lati BD e IL.

Misurando con la massima precisione le lunghezze di questi ultimi due lati e delle quattro altezze ricaviamo le aree dei quattri triangoli.

Il risultato è la conferma del valore k = 1/5.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Proviamo con la divisione dello stesso quadrilatero ABCD, con p = 3.



I segmenti EB, FC, GD e HA sono lunghi 1/3 dei lati di appartenza. Le corde EC, FD, GA e HB danno origine al quadrilatero IJLM.

Applichiamo la consueta formula:

$$k = (3^2 – 2*3 + 1)/(3^2 + 1) = (9 – 6 + 1)/(9 + 1) = 4/10 = 2/5 .$$

L'area di IJLM è 2/5 quella di ABCD.

Impieghiamo la procedura usata nel caso precedente. Tracciare le diagonali BD e IL e le quattro altezze relative a questi due lati comuni.

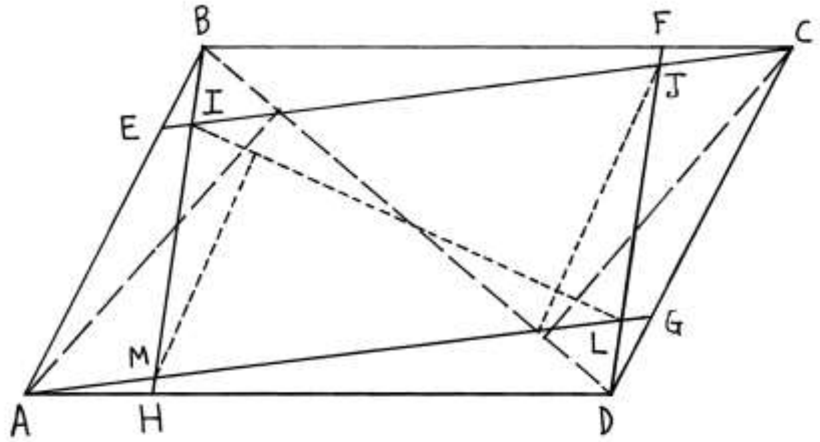
La più precisa misura dei lati e delle altezze permette di calcolare le aree dei quattro triangoli e di verificare la corretteza del risultato k = 2/5.

Questa conclusione è abbastanza ovvia: se il teorema di Feynman è applicabile ai triangoli generici lo dovrebbe essere pure ai quadrilateri originati dalla fusione di due triangoli lungo un loro lato comune.

Divisione di un parallelogramma con p frazionari

Fino ad ora abbiamo presentato esempi con valori di *p* i*nteri*: vediamo se è possibile usare valori frazionari.

Il parallelogramma ABCD ha i lati divisi in proporzione alla frazione 2/9, con p = 9/2 = 4,5.



I segmenti EB, FC, GD e HA sono lunghi i 2/9 dei lati dei quali fanno parte.

Tracciare le corde EC, FD, GA e HB: esse si intersecano formando il parallelogramma IJLM.

Disegnare le diagonali BD e IL: esse dividono i due parallelogrammi in due coppie di triangoli aventi in comune un lato che è una diagonale: si tratta delle coppie ABD–BCD e MIL–IJL.

Dai vertici A e C condurre le altezze relative a BD e da M e J tracciare le altezze relative a IL.

Applicando la formula si ha:

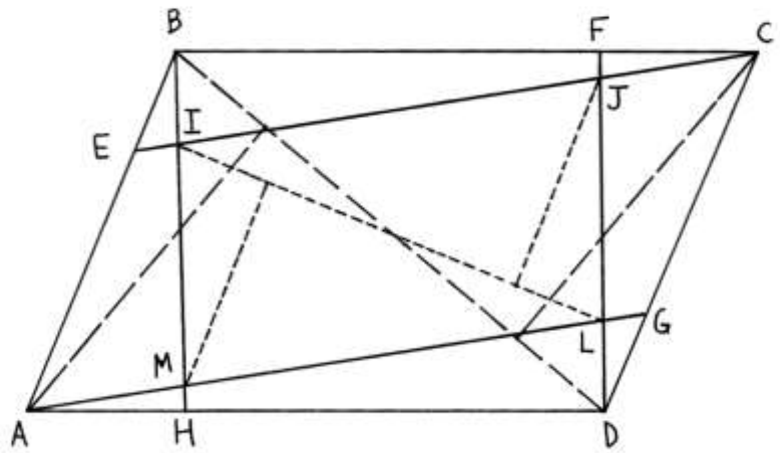
$$k = [(9/2)^2 – 2*9/2 + 1]/[(9/2)^2 +1] = 49/85.$$

Misurando con la massima precisione possibile i quattro triangoli generati dalle diagonali e dalle altezze si può facilmente calcolare l'area dei due parallelogrammi e verificare la validità del precedente risultato:

Area $_{IJLM}$: Area $_{ABCD}$ = 49 : 85 .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue presenta lo stesso parallelogramma con i lati divisi con p = 11/3 .



I segmenti EB, FC, GD e HA sono lunghi i 3/11 dei lati di appartenenza.

Le corde EC, FD, GA e HB si incontrano per formare il parallelogramma IJLM.

Applicando la solita formula si ottiene:

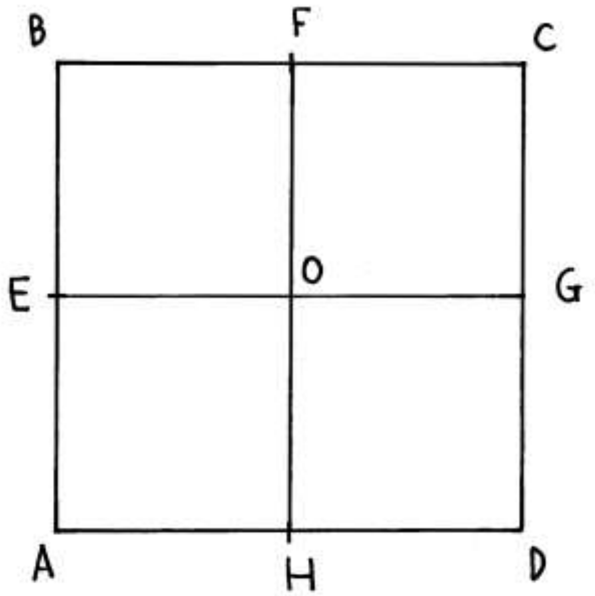
$$k = [(11/3)^2 – 2+11/3 + 1]/[(11/3)^2 + 1] = 32/65.$$

Verificando con la procedura suggerita nel caso precedente è facile confermare la validità del risultato.

L'estensione del teorema di Feynman ai quadrilateri è valida anche per valori di *p* frazionari.

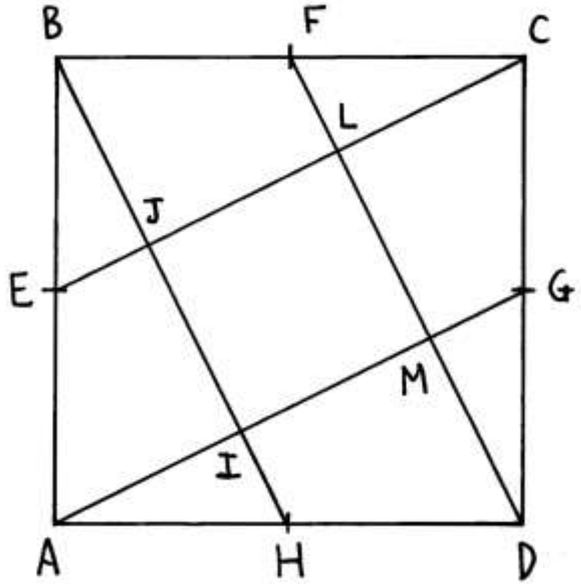
Divisione di quadrati

ABCD è un quadrato e E, F, G e H sono i punti medi dei suoi lati.



Le mediane EG e FH lo dividono in quattro quadrati di area uguale a ¼ di quella di ABCD.

Se i punti medi sono collegati al secondo vertice del lato opposto, le intersezioni delle quattro corde (EC, FD, GA e HB) generano il quadrato IJLM:



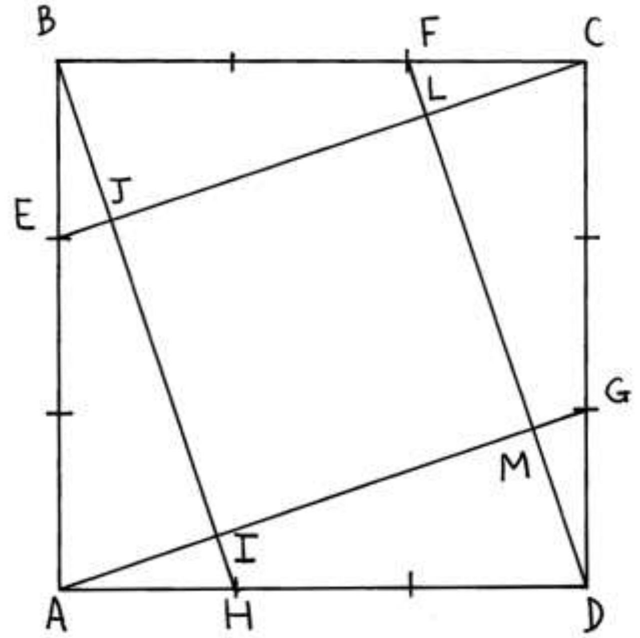
Applicando la formula già vista per i parallelogrammi, con p = 2, si ha:

k = (4 – 4 + 1)/(4 + 1) = 1/5 .

L’area di IJLM è effettivamente uguale a 1/5 di quella di ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Dividiamo ora i lati del quadrato ABCD in *tre* parti uguali:



Le intersezioni delle corde EC, FD, GA e HB danno origine al quadrato IJLM.

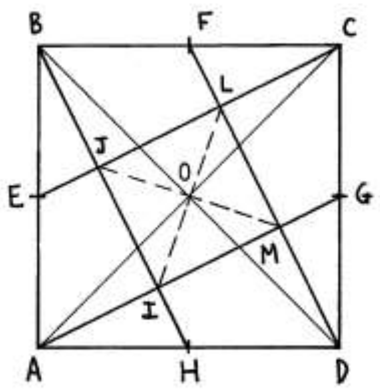
Applicando la solita formula, con p = 3, si ha:

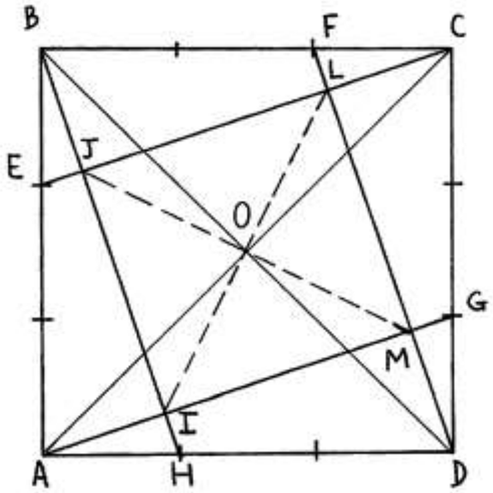
k = (9 – 6 + 1)/(9 + 1) = 4/10 = 2/5 .

Misurando le dimensioni dei lati dei due quadrati viene confermato che l’area di IJLM è 2/5 di quella di ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le due figure che seguono riproducono gli ultimi due grafici: in entrambe sono state disegnate le diagonali dei quadrati, esterno e interno: le diagonali si incontrano sempre nel baricentro O:

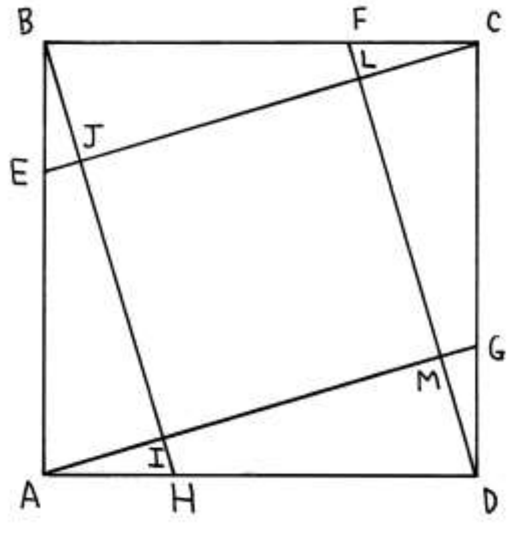




Le diagonali dei quadrati esterni (AC e BD) sono disegnate con linea continua, mentre quelle dei quadrati interni (IJLM) sono tracciate con linee tratteggiate.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il quadrato ABCD è ora diviso con un valore di *p* uguale a 10/3: p = 10/3 .



I segmenti EB, FC, GD e HA sono lunghi 10/3 dei lati di appartenenza.

Tracciare le consuete *corde* EC, FD, GA e HA: con le loro intersezioni determinano il quadrato IJLM.

Applicando la formula già impiegata si ha:

$$k = [(10/3)^2 – 2 * 10/3 + 1]/[(10/3)^2 + 1] = (41/9)/(109/9) = 41/109 .$$

L’area di IJLM è uguale a 41/109 di quella di ABCD.

- APPROFONDIMENTO -

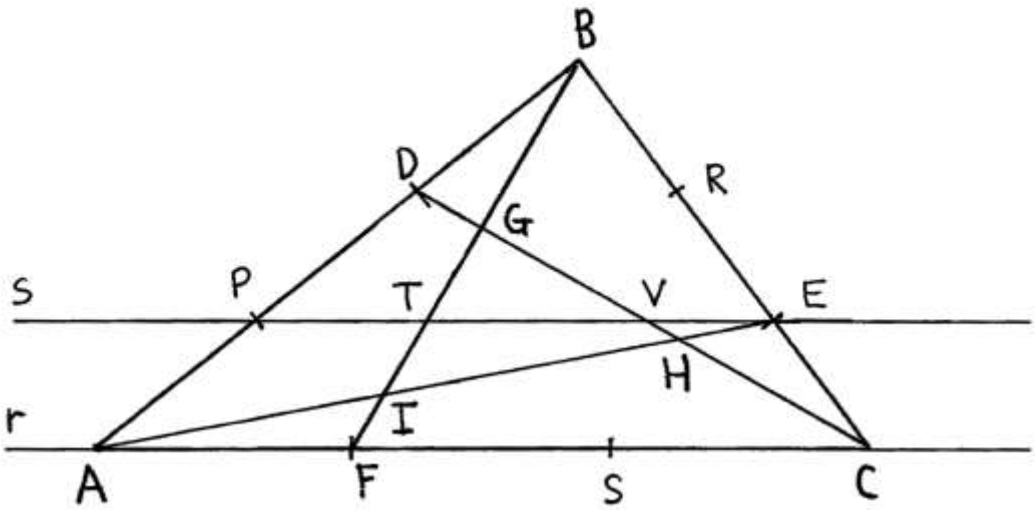
Dimostrazione con il teorema di Talete

Esistono numerose dimostrazioni del teorema di Feynman: geometriche, basate sulla scomposizione e ricomposizione di figure, con la geometria analitica, con la trigonometria, con i prodotti vettoriali, con le formule relative ai triangoli di Erone.

Di seguito è descritto l'impiego del teorema di Talete. Esso è attribuito al matematico greco Talete di Mileto (VII-VI secolo a.C.) anche se parrebbe già noto ai matematici Babilonesi (XVII secolo a.C.).

Il teorema afferma che un fascio di rette parallele che tagliano due trasversali fissa su di esse dei segmenti fra loro proporzionali.

Vediamo subito un'applicazione al caso del triangolo di Feynman:



Prolungare verso destra e verso sinistra il lato AC: esso giace sulla retta *r*. P, R e S sono i punti che distano 1/3 delle lunghezze dei rispettivi lati dai vertici A, B e C. Per i punti P e E passa la retta *s* che è parallela alla *r*.

I lati AB e BC sono due trasversali tagliate dalle rette *r* e *s*.

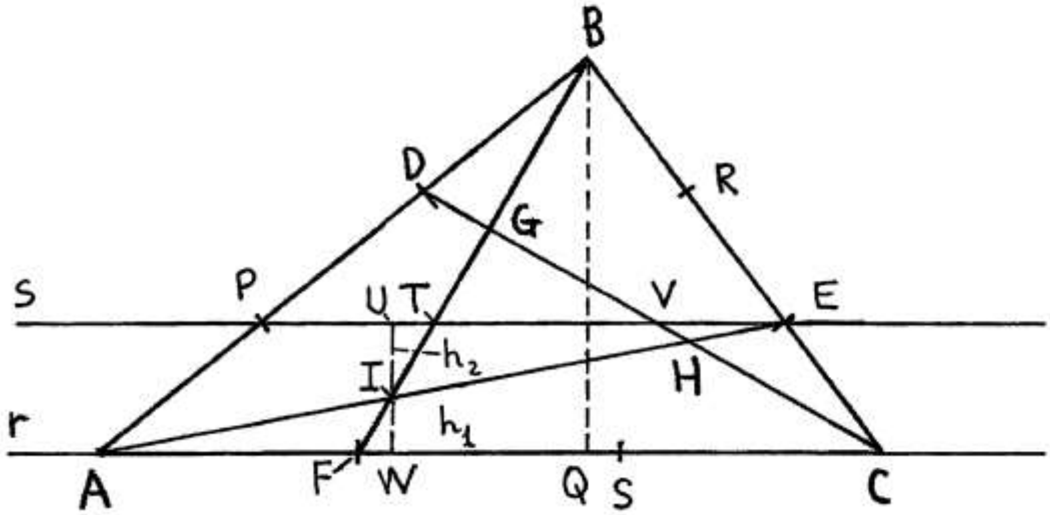
A sua volta, la retta *s* taglia le corde BF e DC nei punti T e V.

Per il teorema di Talete valgono le seguenti proporzioni:

AP : AB = FT : FB = EC : BC = VC : DC = 1 : 3 .

Da queste proporzioni è ricavata la seguente:

$$\frac{BF}{TN} = \frac{\frac{1}{3} \cdot BC}{\frac{2}{3} \cdot PE} = \frac{\frac{1}{3} \cdot BC}{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot BC\right)} = \frac{3}{4}$$



Per il punto I tracciare la perpendicolare alle rette *r e* s: è UW. Dal vertice B condurre l'altezza relativa alla base AC: è BQ.

h_1 è il segmento IW che è l'altezza del triangolo AIW e h_2, che è il segmento IU, lo è del triangolo IUT.

Valgono le seguenti relazioni:

$h_1 : h_2 = 3 : 4$ e $h_2 : h_1 = 4 : 3$

$(h_1 + h_2)/h_1 = h_1/h_1 + h_2/h_1 = 1 + 4/3 = 7/3$

$h_1 + h_2 = 7/3 * h_1$.

Il segmento UW, lungo quanto la somma di $(h_1 + h_2)$ è lungo 1/3 dell'altezza BQ = h:

$(h_1 + h_2) = 1/3 * h \quad \rightarrow \quad h = 7 * h1$ e

Quindi $7/3 * h_1 = 1/3 * h$ da cui $h_1 = 1/7 * h$ e

$h_2 = 4/3 * h_1 = 4/3 * 1/7\ h = 4/21 * h$.

L'area del triangolo AIF è data da

$$Area_{AIF} = \frac{AF \cdot h_1}{2} = \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot AC\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot h}{2} = \frac{1}{21} \cdot \frac{AC \cdot h}{2} =$$
$$= \frac{1}{21} \cdot Area_{ABC}$$

Analogamente si ha:

$Area_{DBG} = 1/21 * Area_{ABC} = Area_{ECH}$.

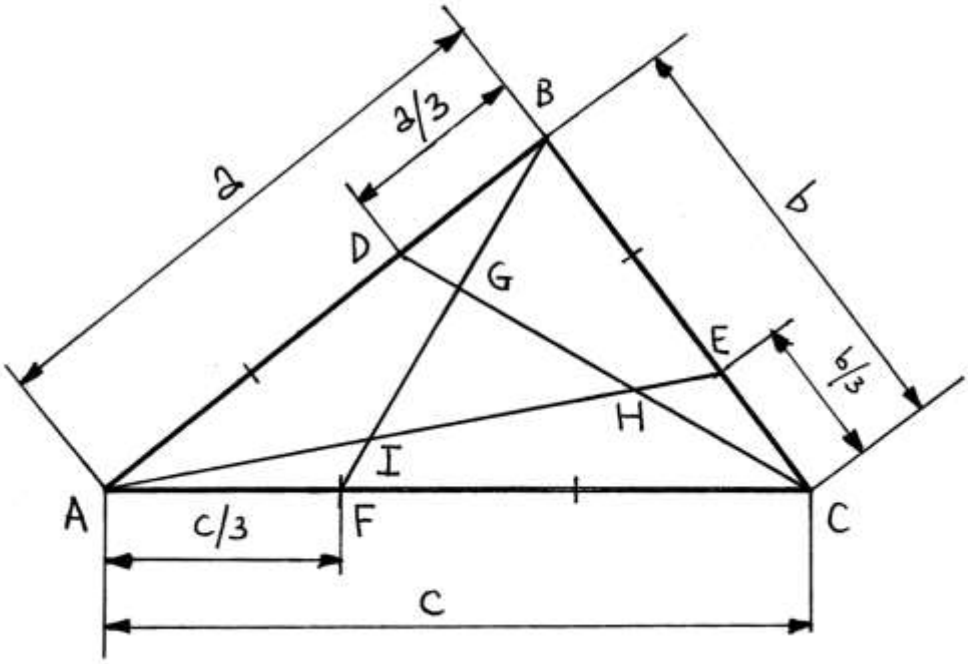
$Area_{GHI} = Area_{AIF} + Area_{ECH} + Area_{DBG} = 3 * (1/21 * Area_{ABC}) = 1/7 * Area_{ABC}$.

- -

APPENDICE

Nell’articolo di Philip Todd, citato in bibliografia, sono contenute alcune formule che permettono di ricavare l’area dei triangoli interni generati dalle diverse divisioni dei lati di un triangolo qualsiasi.

Nel caso del primo triangolo considerato in precedenza in questo articolo, quello diviso con *p = 3*, chiamiamo *a* la lunghezza del lato AB, *b* quella di BC e *c* quella di AC:



Le formule di Todd servono a calcolare l’area di GHI con la massima precisione, soltanto conoscendo le lunghezze di *a*, *b* e *c*, senza la necessità di misurare le dimensioni dei lati di quel triangolo.

Per p = 3, la formula è:

$$\text{Area}_{\text{GHI}} = \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{28}$$

Per p = 4 :

$$\text{Area}_{\text{GHI}} = \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{13}$$

Per p = 5 :

$$\text{Area}_{\text{GHI}} = \frac{3\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{28}$$

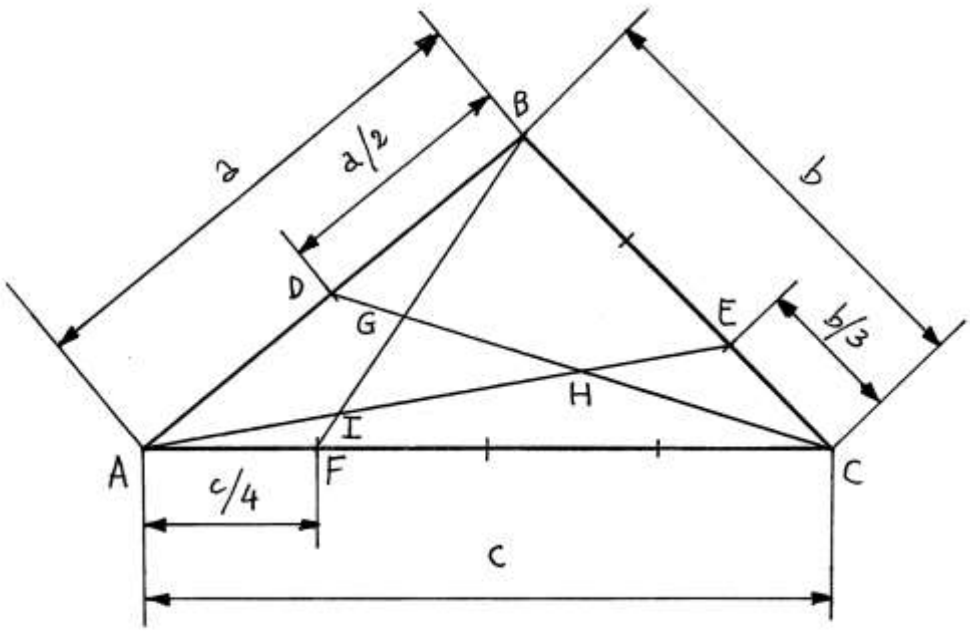
Per p = n :

$$\text{Area}_{\text{GHI}} = \left|\frac{-(-2+n)^2\cdot\left(a^4+b^4-2\cdot b^2\cdot c^2+c^4+a^2\cdot\left(-2\cdot b^2-2\cdot c^2\right)\right)}{4\cdot\left(1-n+n^2\right)\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}\right|$$

Generalizzazione delle divisioni del triangolo di Feynman

Tutti gli esempi fin qui mostrati relativamente ai triangoli ne dividevano i lati nelle stesse proporzioni.

Philip Todd introduce una generalizzazione usando differenti proporzioni nella divisione dei lati del triangolo:



In questo caso, il lato AB è diviso in *due* parti, quello BC in *tre* e AC in *quattro*: non è quindi dato un valore unico per la costante *p*.

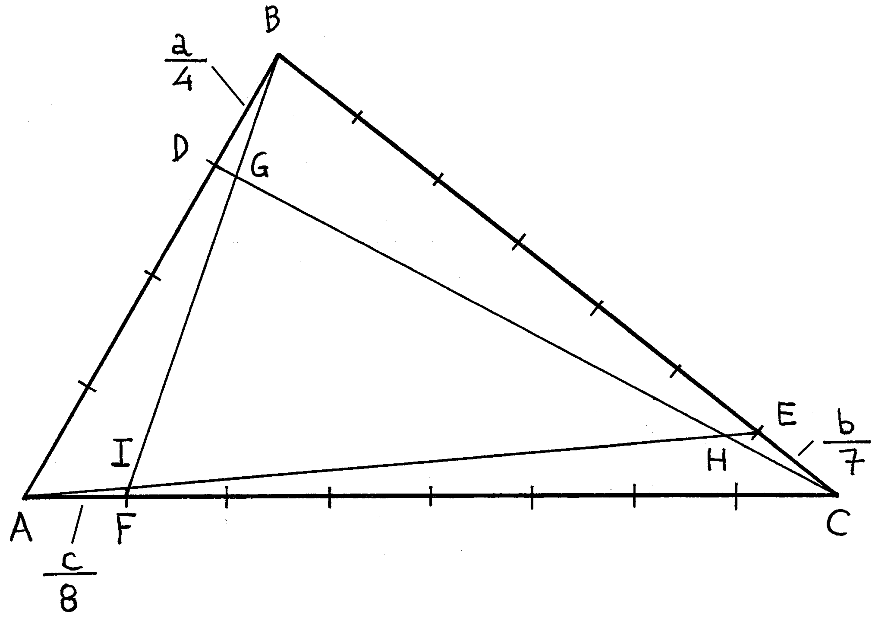
Per calcolare l'area la formula proposta da Todd è la seguente:

$$\text{Area}_{GHI} = \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{40}$$

Vedremo in seguito che il valore di k è uguale a 1/10: l'area di GHI è 1/10 di quella di ABC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un'ulteriore generalizzazione è offerta dall'esempio che segue, con divisori assai differenti per i tre lati: 4, 7 e 8:



La formula proposta da Todd è la seguente:

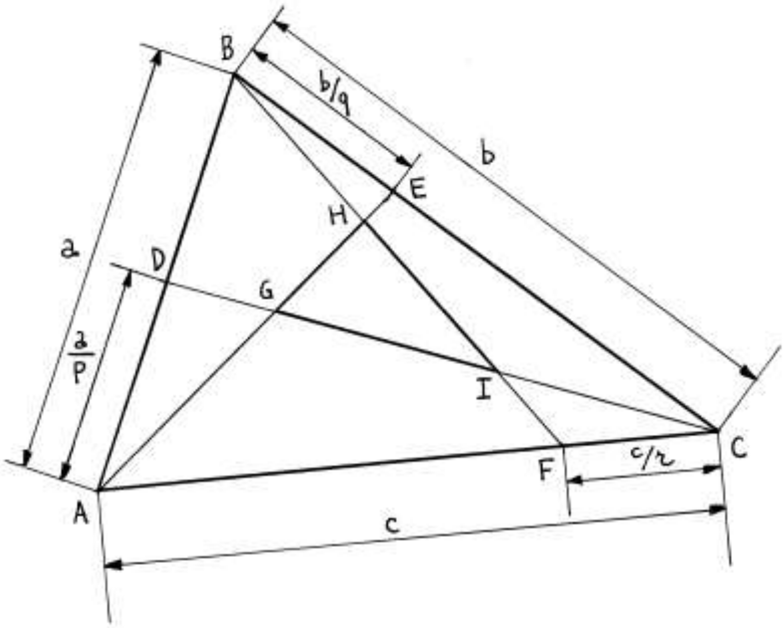
$$\text{Area}_{\text{GHI}} = \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{8}$$

È interessante notare che, in questo caso, vale la seguente proporzione:

$$\text{Area}_{\text{GHI}} = ½ * \text{Area}_{\text{ABC}} .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

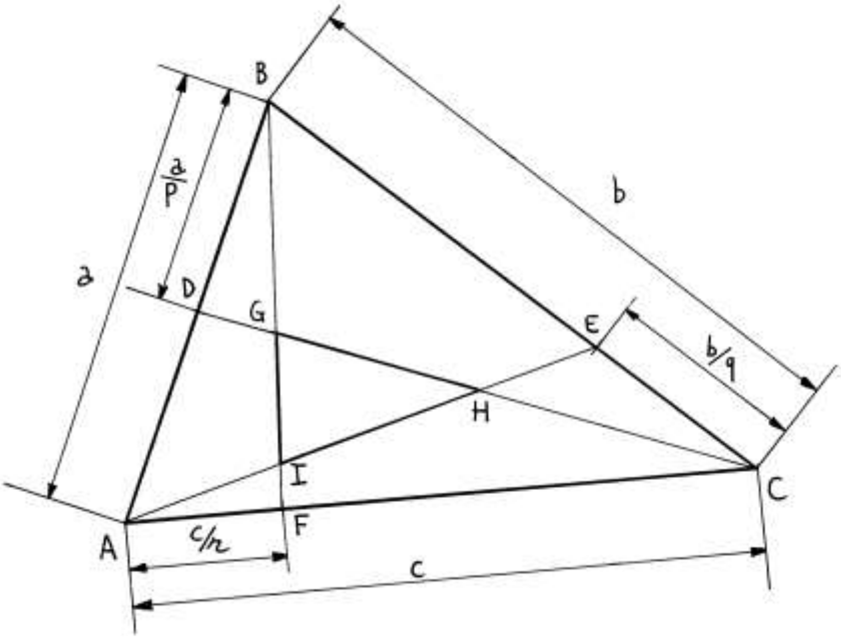
Nel caso più generale nel quale siano impiegati divisori *differenti* per i tre lati di un triangolo, Todd presenta un esempio e propone due formule. Il suo esempio è il seguente:



Si noti che Todd ha scelto le posizioni dei punti D, E e F a distanze calcolate dai vertici che li precedento (rispettivemente A, B e C).

Le costanti generiche *p*, *q* e *r* sono fra loro differenti.

Il risultato fornito dalle formule di Todd vale anche nel caso in cui i punti D, E e F siano posizionati a distanze rispettivamente uguali a a/p, b/q e c/r dai vertici successivi: B, C a A.



La formula per calcolare l’area di GHI è:

$$\text{Area}_{GHI} = \left| \frac{-(2-q-r+q\cdot r+p\cdot(-1+q+r-q\cdot r))^2\cdot\left(a^4-2\cdot a^2\cdot b^2+b^4-2\cdot a^2\cdot c^2-2\cdot b^2\cdot c^2+c^4\right)}{4\cdot(1-p+p\cdot q)\cdot(1-q+q\cdot r)\cdot(1+r\cdot(-1+p))\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}} \right|$$

Todd fornisce pure la formula per calcolare il valore della costante k in funzione di *p*, *q* e *r*:

$$k = \frac{(-p^*r + p^*r^*q - p^*q + p + r - r^*q + q - 2)^2}{(1 - q + r^*q)^*(1 - p + p^*q)^*(-r + p^*r + 1)}$$

.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

In precedenza sono stati mostrati due esempi di triangoli con lati divisi con costanti differenti:

1° caso: p = 2 q = 3 e r = 4 .

Applicando la formula di Todd per calcolare il valore di k, risulta:

k = 1/10.

2° caso: p = 4 q = 7 e r = 8 .

Con la formula di Todd si ottiene il valore k = 1/2, come già indicato.

TABELLE RIASSUNTIVE

Le due tabelle riassumono i valori di *k* corrispondenti a quelli di *p*, per i triangoli e per i parallelogrammi.

Tabella triangoli

p	k
3	1/7
4	4/13
9/2	25/67
5	3/7

Tabella quadrilateri

p	k
2	1/5
3	2/5
10/3	41/109
4	9/17

Con *p* tendente all'infinito, il valore di *k* tende a 1: con l'aumentare del valore di *p* le dimensioni del triangolo o del quadrilatero interni giungono a coincidere con quelle del poligono esterno.

Bibliografia

1. Ash J. Marshall – Ash Michael A. – Ash Peter F., "Constructing a quadrilateral inside another one", "The Mathematiccal Gazette", Leicester, United Kingdom, vol. 93, n° 528, november 2009, pp. 522-532.
2. De Villiers Michael, "Feynman's Triangle: Some Feedback and More", feynman.pdf, pp. 4, in http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html .
3. Hernández Aarón Aparicio, "El misterio del triángulo de Feynman", in "Matemática y sus Aplicaciones 4", Puebla, Fernando Macías Romero Editor, 2014, pp. 109-127.
4. Todd Philip, "Feynman's and Steiner's Triangle", in The Journal of Symbolic Geometry", volume 1 (2006), pp. 85-90.