sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: area rettangoli, canna agrimensoria, braccio senese, palmo, problemi sul triangolo isoscele, area di un bislungo, area dei quadrilateri, problemi sui quadrati, triangoli rettangoli, area del pentagono regolare, problemi sul cerchio e sulla circonferenza, cerchi inscritti, problemi sui triangoli equilateri, problemi sui segmenti circolari, teorema delle corde, formule di Erone per i triangoli.

Tommaso della Gazzaia

Tommaso della Gazzaia (o dell'Agazzaia o degli Agazzari) visse a Siena fra la fine del Trecento e l'inizio del Quattrocento: morì nel 1433.

Egli apparteneva a una delle più influenti famiglie senesi, gli Agazzari.

Ricoprì numerose cariche pubbliche a Siena e fu suo ambasciatore presso altri Stati italiani.

Fu pure podestà a Bologna, Pisa, Lucca e Todi.

Il codice C. III. 23 della Biblioteca degl'Intronati di Siena contiene un trattato attribuito a Tommaso, in cui sono affrontati problemi di aritmetica, algebra e geometria e vi sono descritte le monete di molte città e Stati e i loro rapporti di cambio.

Particolarmente interessanti sono le sue considerazioni sul calcolo del contenuto delle botti, per le quali dichiara di essersi ispirato all'opera di Paolo dell'Abbaco.

Questo articolo prende in considerazione soltanto le costruzioni di geometria piana contenute nel Codice e trascritte nell'edizione a stampa citata in bibliografia.

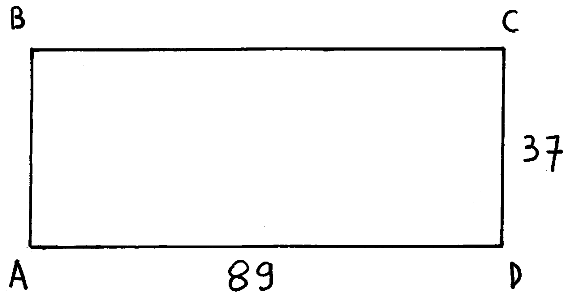
Nota: tutte le figure del manoscritto non contengono lettere per indicare i vertici: in questo articolo sono talvolta scritte per rendere più chiara la spiegazione.

Ciascun titolo dei paragrafi è preceduto da un numero racchiuso fra parentesi quadre […] che segue la numerazione progressiva introdotta da Cinzia Nanni nella sua trascrizione del testo e ciò allo scopo di distinguere i problemi.

Sempre fra parentesi quadre [...] sono aggiunti commenti dell'autore di questo articolo.

[1] Area di un terreno quadrangolare

Un campo fa la forma di un quadrilatero che ha lati (*facce* nel linguaggio di Tommaso) lunghi 89 37 canne:

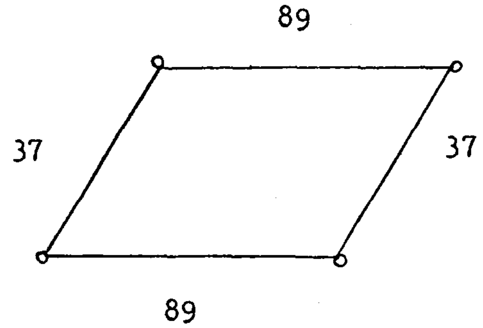


L'area è calcolata moltiplicando l'*ampiezza* (il lato più corto) per la *lunghezza* (il lato più lungo):

Area = ampiezza * lunghezza = 37 * 89 = 3293 canne^2.

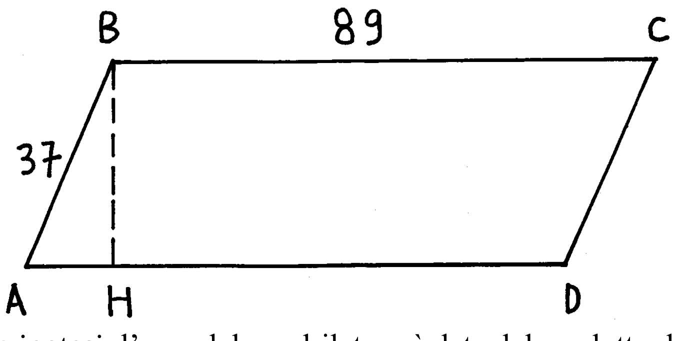
Le lettere ai vertici non sono presenti nella trascrizione e sono qui aggiunte per chiarire i concetti sottostanti ai problemi.

Lo schema contenuto nel testo stampato mostra un *parallelogramma* invece di un rettangolo:



Inoltre, il disegno è fuori scala.

Se nelle intenzioni di Tommaso il quadrilatero era realmente un parallelogramma, la sua area sarebbe minore di quella calcolata in 3293 canne^2 per il caso del rettangolo, come spiega la figura che segue:



In questa ipotesi, l'area del quadrilatero è data dal prodotto della lunghezza (AD = BC) per l'altezza BH che è più corta dei lati obliqui AB e CD.

Nella soluzione offerta da Tommaso vi è forse un'eco dell'antichissima ed errata *formula degli agrimensori*? Essa calcola l'area del parallelogramma con il prodotto delle semisomme dei lati opposti:

$$\text{Area}_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot \frac{AB+CD}{2} =$$

$$= \frac{89+89}{2} \cdot \frac{37+37}{2} = 89 \cdot 37 = 3293 \text{ canne}^2 .$$

Nota: sugli schemi di Tommaso della Gazzaia sono scritte le dimensioni dei singoli spigoli o delle aree, quasi sempre all'interno dei poligoni e delle altre figure geometriche.

- APPROFONDIMENTO -

La *canna* usata a Firenze e in altri Comuni della Toscana medievale era di due lunghezze:

* canna mercantile: era lunga 4 braccia da panno;
* canna agrimensoria: era lunga 5 braccia da panno ed era chiamata *pertica*.

Il braccio da panno di Firenze era lungo 58,3626 cm e di conseguenza le due canne erano lunghe:

* la canna mercantile 233,45 cm;
* la canna agrimensoria o pertica 291, 813 cm.

Il braccio da panno usato a Siena era leggermente più lungo di quello fiorentino e cioè 60,1055 cm.

Tommaso dell'Agazzaia usava sicuramente la canna agrimensoria lunga 5 braccia o una pertica.

Oltre alla canna, egli usò altre due unità di misura: il *braccio* (di cui la canna era un multiplo) e il *palmo*.

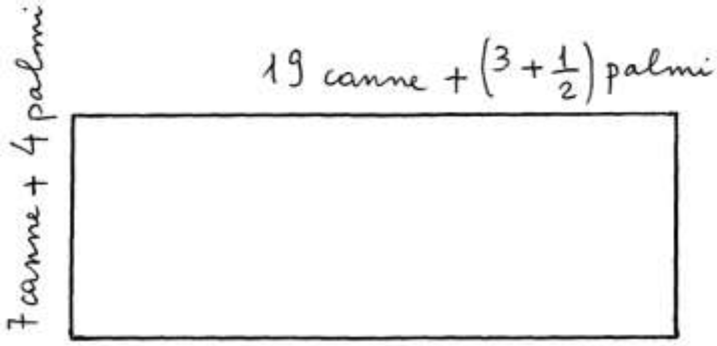
Stando allo Zupko (pp. 46 – 47), il braccio da panno usato fra gli altri a Arezzo, Firenze, Pistoia, San Miniato, Lucca, Pisa, Volterra, Siena e Montepulciano era diviso in *2 palmi*.

Vedremo in seguito che Tommaso della Gazzaia sembrerebbe discostarsi da questo rapporto (nel successivo problema [2]).

- -

[2] <u>Area di un rettangolo</u>

Un campo ha la forma di un rettangolo: le due *faccie* maggiori sono lunghe 19 canne e (3 + ½) palmi e le altre due sono lunghe 7 canne e 4 palmi:



Il problema chiede l'area del campo che nel trattato è ottenuta dal prodotto della lunghezza per la larghezza:

[19 canne + (3 + ½) palmi] * (7 canne + 4 palmi) =

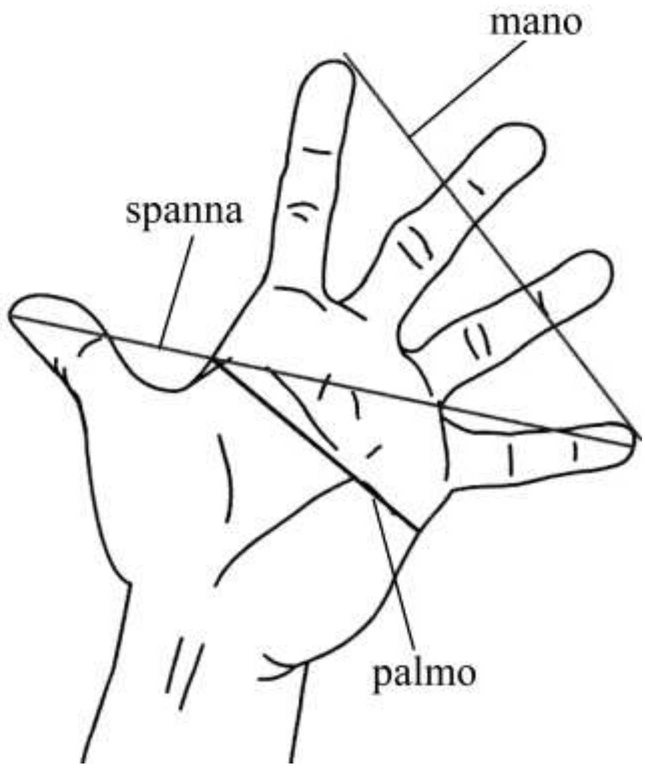
149 canne^2 + 1/16 canne^2 = 149 canne^2 + ¼ palmi^2.

L'ultimo risultato richiede un approfondimento.

Dato che il titolo del trattato di Tommaso si riferisce alle "*misure di terre*", l'unità di misura *canna* doveva essere quella del corrispondente strumento *canna agrimensoria* lunga 5 braccia da panno. Come visto sopra, lo Zupko sostiene che a Siena il braccio valeva *2 palmi*. Invece, il risultato dei calcoli dell'Agazzaia risulta incomprensibile se è fondata la tesi di Zupko.

Infatti, il risultato di Tommaso pare basato su un altro rapporto: 1 canna = 2 palmi e 1 canna^2 = 4 palmi^2.

Forse, nel territorio della Repubblica di Siena il *palmo* aveva una lunghezza diversa da quella di origine anatomica?



Stando a questa ipotesi, un palmo aveva a Siena una notevole lunghezza:

1 canna agrimensoria = 5 braccia da panno = 5 * 60,1055 cm = 300, 5275 cm.

Ne consegue che il palmo valesse

1 palmo = ½ canna agrimensoria = 300,5275 cm /2 ≈ 150,264 cm.

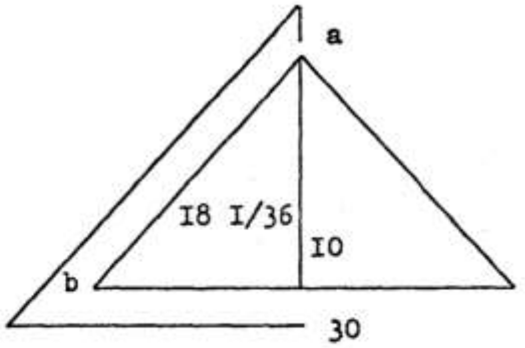
Forse il palmo era confuso con la *spanna*? Ma anche questa ultima aveva addirittura una lunghezza inferiore a quella del braccio.

Con una certa approssimazione, le lunghezze delle tre entità anatomiche di una mano, in epoca medievale, erano le seguenti:

*	*palmo* (o palmo minore):	7,64 cm ;
*	*mano* (anche detta *4 dita*):	12,36 cm ;
*	*spanna*:	20 cm .

[3] Triangolo isoscele

Un triangolo isoscele ha la base lunga 30 canne e l'altezza 10 canne.



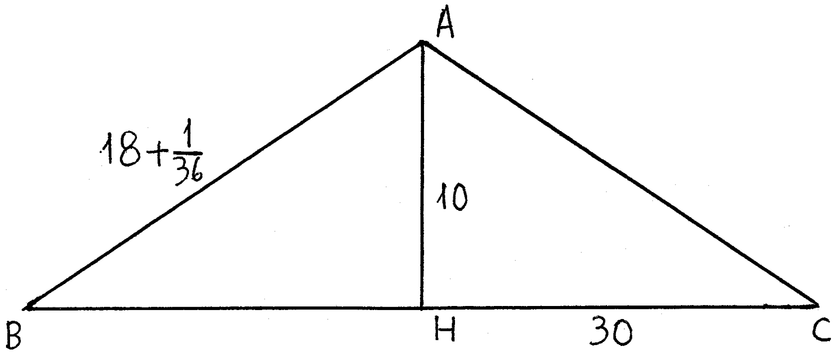
Due vertici del triangolo (che Gazzaia chiama *punte*) sono indicati con due lettere minuscole, *a* e *b*.

Il problema chiede le dimensioni dei lati obliqui e l'area del triangolo.

L'area è calcolata con il semiprodotto della base per l'altezza:

$$Area = \frac{base \cdot altezza}{2} = \frac{30 \cdot 10}{2} = 150 \text{ canne}^2$$

Per determinare la lunghezza di uno dei due lati obliqui (che chiama *lingue*), Tommaso applica senza citarlo il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli nei quali l'altezza scompone il triangolo isoscele e cioè ABH e AHC:



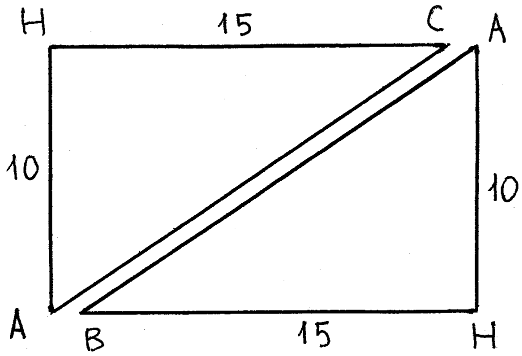
La procedura impiegata è la seguente:

*	dividere per 2 la lunghezza del lato di base:	30 : 2 = 15 ;
*	moltiplicare per se stesso:	15 * 15 = 225 ;
*	moltiplicare per se stessa l'altezza;	10 * 10 = 100 ;
*	sommare i due prodotti:	225 + 100 = 325 ;
*	estrarre la radice quadrata:	

$$\sqrt{325} \cong 18 + \frac{1}{36} \text{ canne}$$

, lunghezza dei lati obliqui.

Tommaso scompose il triangolo ABC in due triangoli rettangoli affiancati come nella figura che segue:

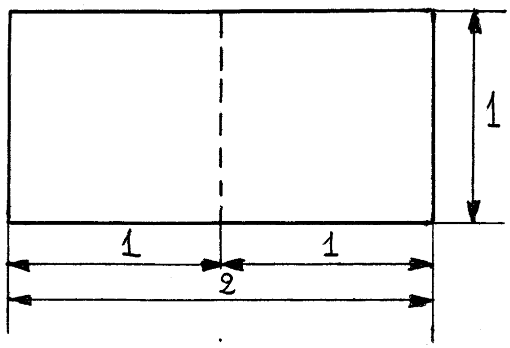


Nota: il triangolo isoscele che forma l'argomento di questo problema non è disegnato come uno *scudo* con la base orizzontale collocata superiormente.

[4] Area di un quadrilatero

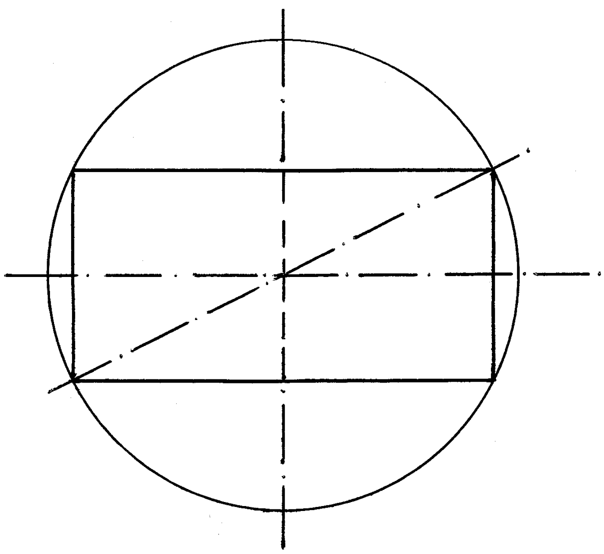
Un terreno ha la forma di un *bislungo* con i quattro lati lunghi 20 canne.

Il termine *bislungo* indicava presso gli abacisti medievali un rettangolo formato da un doppio quadrato e quindi con lunghezze dei lati nel rapporto 2 : 1.

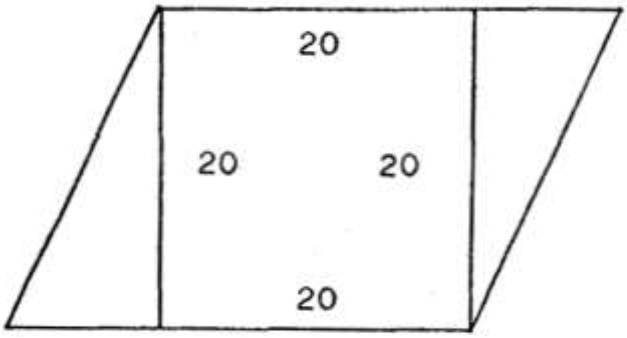


Il bislungo (o *bislungho* come tavolta veniva scritto) era già stato considerato in alcuni problemi geometrici contenuti nel *Trattato d'aritmetica* di Paolo dell'Abbaco e sarà studiato nel successivo trattato *Regole di geometria pratica* di Orbetano da Montepulciano.

Paolo dell'Abbaco descrisse alcuni bislunghi, come quello della figura che segue, inscritti nei cerchi:



Stando alla figura che segue, riprodotta dal testo di della Gazzaia, il quadrilatero non sembra essere un bislungo ma un rombo o un parallelogramma:



Come già visto, il problema afferma che i lati sono lunghi 20 canne e calcola l'area del quadrilatero moltiplicando per se stessa la lunghezza di un lato:

Area = 20 * 20 = 400 canne^2.

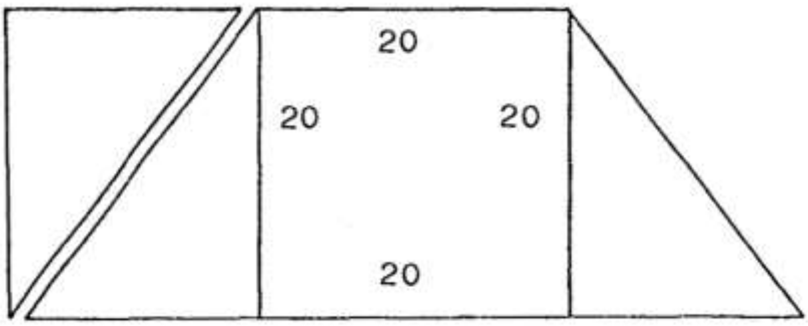
Se la figura fosse stata un *rombo*, Tommaso avrebbe applicato la formula errata degli agrimensori che fornisce l'area quale risultante del prodotto delle semisomme dei lati opposti:

$$\text{Area} = \frac{20+20}{2} \cdot \frac{20+20}{2} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ canne}^2.$$

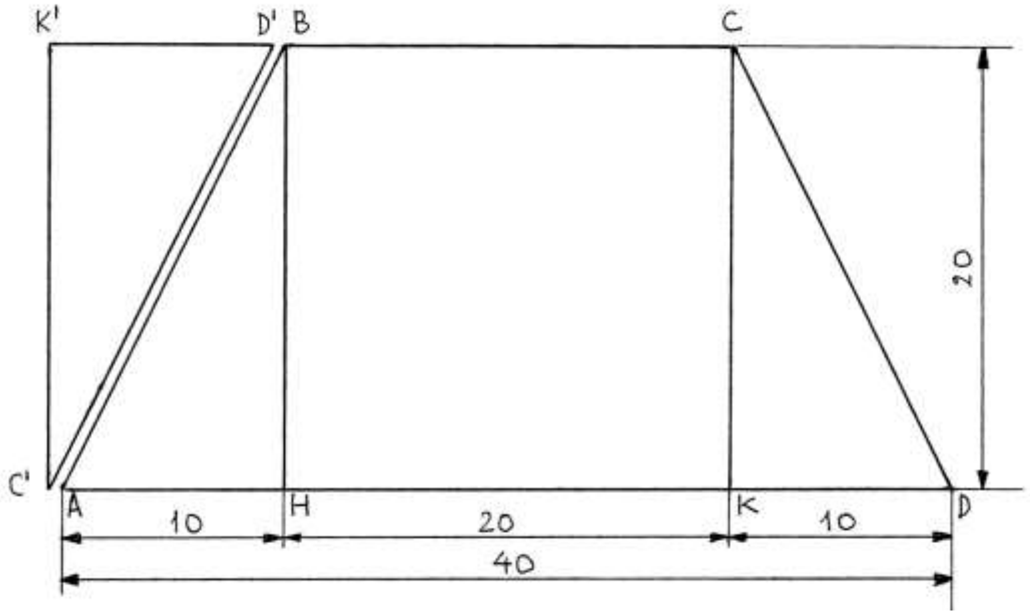
[5] <u>Area di un quadrilatero</u>

Come il precedente, anche questo problema è di difficile interpretazione.

Tommaso mostra un quadrilatero che afferma essere un *bislungo*:



La figura potrebbe essere interpretata come un *trapezio isoscele*:



In questa ultima figura, la base maggiore AD è lunga 40 e la base minore BC è lunga 20, come pure le due altezze BH e CK.

La base maggiore è scomposta da parte delle due altezze in tre segmenti:

* AH = KD = 10 canne ;
* HK = 20 canne.

Il rapporto fra le lunghezze delle due basi è:

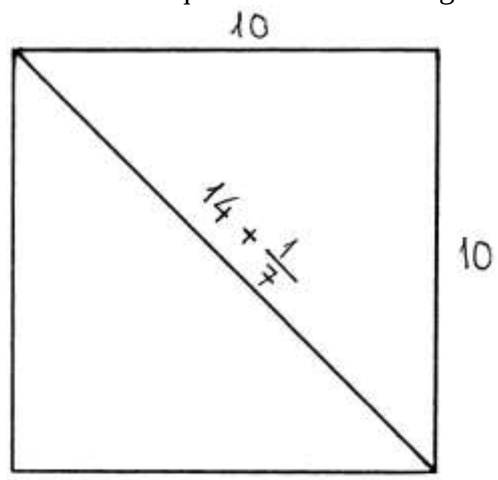
AD : BC = 40 : 20 = 2 : 1 e quindi la figura potrebbe essere definita un *bislungo*?

Tagliando i triangoli rettangoli ABH e CKD resta il quadrato HBCK la cui area vale

Area HBCK = HK * BH = 20 * 20 = 400 canne^2.

[6] Diagonale di un quadrato

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 10 canne.



Il problema domanda la lunghezza di una diagonale.

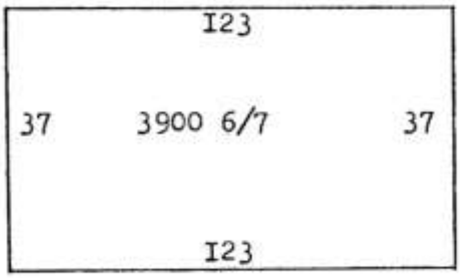
La procedura impiegata è:

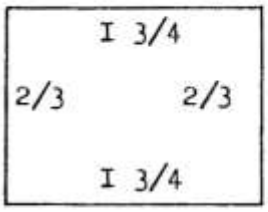
* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 10 * 10 = 100 canne^2, che è l'area del quadrato;
* moltiplicare per 2: 100 * 2 = 200 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{200} \approx 14 + 1/7$ canne, lunghezza di una diagonale.

[7] Copertura di un pavimento

Una sala (o una chiesa) ha il pavimento lungo 123 braccia e largo (*ampio*) 37 braccia.

Il pavimento deve essere ricoperto con lastroni identici lunghi (1 + ¾) braccia e larghi 2/3 di braccio.





Il problema chiede di calcolare il numero dei lastroni occorrenti.

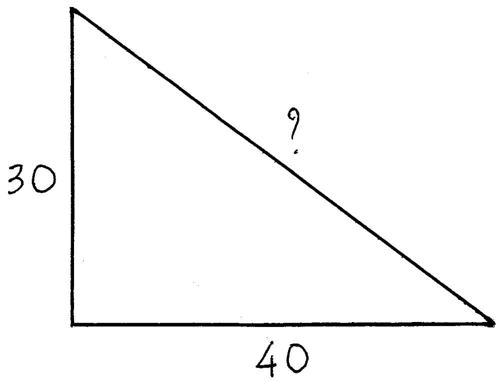
La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare l'ampiezza per la lunghezza del pavimento: 37 * 123 = 4551 braccia^2 , area del pavimento;
* moltiplicare l'ampiezza per la lunghezza di un lastrone: 2/3 * (1 + ¾) = 1 + 1/6 braccia^2 , area di un lastrone;
* dividere l'area del pavimento per quella di un lastrone:
  4551 : (1 + 1/6) = 3900 + 6/7 lastroni, che Tommaso arrotonda ottimisticamente a 3901 (non tenendo conto di rotture e ritagli).

Nota: la figura, riprodotta dal testo a stampa, è chiaramente fuori scala a causa delle notevoli dimensioni del pavimento.

[9] Triangolo rettangolo

Un triangolo rettangolo ha il cateto orizzontale lungo 40 canne e il cateto verticale 30 canne.



Il problema domanda la lunghezza dell'ipotenusa che Tommaso chiama *terza faccia*.

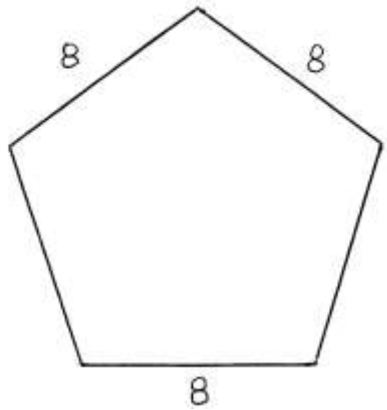
La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza del cateto maggiore (*maggiore faccia*):
  40 * 40 = 1600 ;

* moltiplicare il cateto minore (*seconda faccia*) per se stesso: 30 * 30 = 900 ;
* sommare i due prodotti: 1600 + 900 = 2500 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{2500} = 50$ canne, lunghezza dell'ipotenusa.

[10] <u>Area di un pentagono equilatero</u>

Un terreno ha la forma di un *pentagono equilatero* con lati lunghi 8 braccia e deve essere calcolata l'area.

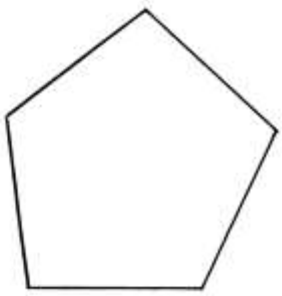


- APPROFONDIMENTO -

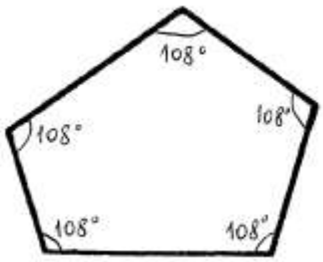
<u>I pentagoni</u>

Tommaso chiama il pentagono *equilatero* ma sembra doverlo ritenere semplicemente *regolare*.

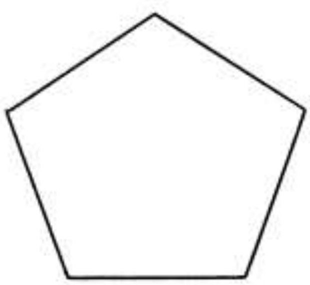
Nella figura che segue sono presentati tre differenti pentagoni:



pentagono equilatero



pentagono equiangolo



pentagono regolare
(equilatero e equiangolo)

Il primo, in alto a sinistra, è *equilatero* perché ha i lati della stessa lunghezza, ma gli angoli interni hanno differente ampiezza.

Il secondo pentagono, in alto a destra, è soltanto *equiangolo*, perché ha gli angoli interni della stessa ampiezza, 108°: i lati hanno differenti lunghezze.

Infine, il terzo pentagono (in basso nella figura) è *regolare* perché è sia equilatero che equiangolo.

Il primo e il secondo pentagono sono poligoni *semiregolari* (o *non regolari*) e solo il terzo è, come già detto, *regolare*.

- -

Torniamo al problema del pentagono. Esso era già stato affrontato, e con gli stessi dati, nel *Tractatus Algorismi* scritto nel 1307 dall'abacista Jacopo da Firenze.

È opportuno notare che Tommaso usa la stessa unità di misura di Jacopo: il braccio.

La procedura impiegata da Tommaso è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato (*una faccia*) per se stessa: $8 * 8 = 64$;
* moltiplicare per 3: $64 * 3 = 192$;
* sottrarre la lunghezza di un lato: $192 – 8 = 184$ braccia^2, area del pentagono.

La procedura di della Gazzaia è identica a quella di Jacopo da Firenze.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata da Tommaso della Gazzaia è riassunta nella formula che segue:

$$\text{Area pentagono} = (3 * \text{lato}^2) - \text{lato} = 3*\text{lato}*(\text{lato} - 1)\ .$$

Lato è la lunghezza di un lato del pentagono.

L'area di un pentagono regolare viene oggi celermente calcolata usando il *numero fisso* F (approssimato) che è il rapporto fra l'area del poligono e quella di un quadrato costruito su di un suo lato. Per il pentagono F vale 1,72.

L'area del pentagono è:

$$\text{Area pentagono} = F * \text{lato}^2 = 1{,}72 * 8^2 = 110{,}08 \text{ braccia}^2.$$

Il risultato ottenuto da Tommaso è grandemente errato per eccesso.

Nella sua formula vi è forse una tenue traccia delle formule usati dai Gromatici romani per calcolare l'area dei più comuni poligoni regolari?

L'ingegnere e gromatico Frontino (30 – 104) avrebbe calcolato come segue:

$$\text{Area pentagono} = \frac{3 \cdot \text{lato}^2 - \text{lato}}{2} = \frac{3 \cdot 8^2 - 8}{2} = \frac{184}{2} = 92 \text{ braccia}^2$$

Jacopo da Firenze e Tommaso della Gazzaia avrebbero usato la formula di Frontino, dimenticando di *dividere per 2* il risultato parziale (184) al numeratore della frazione.

Una seconda formula, più errata di quella di Frontino, venne usata da altri Gromatici:

$$\text{Area pentagono} = \frac{3 \cdot \text{lato}^2 + \text{lato}}{2} = \frac{3 \cdot 8^2 + 8}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ braccia}^2$$

Anche questa divideva per 2 il risultato parziale (200) al numeratore della frazione.

È bene ricordare che i Romani misuravano in *piedi* e Jacopo in *braccia*. Un piede romano valeva 29,57 cm (o 295,7 mm), secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma. Non sempre fu rispettata questa misura standard.

- -

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

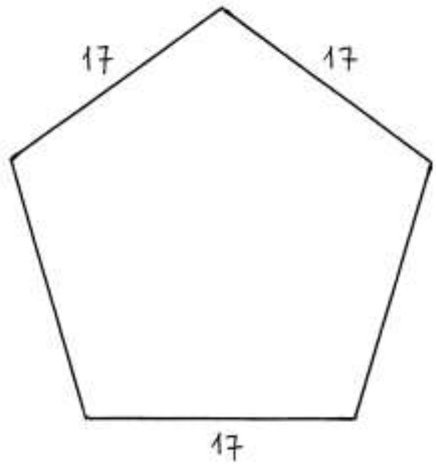
Un secondo pentagono ha lati lunghi 12 braccia e la procedura impiegata per calcolarne l'area è simile alla precedente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 12 * 12 = 144 ;
* moltiplicare per 3: 144 * 3 = 432 ;
* sottrarre la lunghezza di un lato: 432 – 12 = 420 braccia^2, area di questo secondo pentagono.

Alla luce di quanto appena scritto, anche questa soluzione è errata.

[11] Area di un pentagono

Un terreno ha la forma di un pentagono equilatero (cioè *regolare*), con lati lunghi 17 canne: mentre i due pentagoni considerati dal precedente problema avevano i lati misurati in *braccia*, in questo caso Tommaso torna all'uso della *canna*.



La procedura usata è identica a quella già usata per i due precedenti pentagoni:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 17 * 17 = 289 ;
* moltiplicare per 3: 289 * 3 = 867 ;
* sottrarre la lunghezza di un lato: 867 – 17 = 850 canne^2, area del terreno pentagonale.

Anche questo risultato è *errato* per eccesso.

[12] Divisione di un terreno

Un Vescovo possiede un grande terreno che misura 1237 per 739 canne.

Egli desidera dividerlo in *ostelli* o *case* di dimensioni 19 per 13 canne.

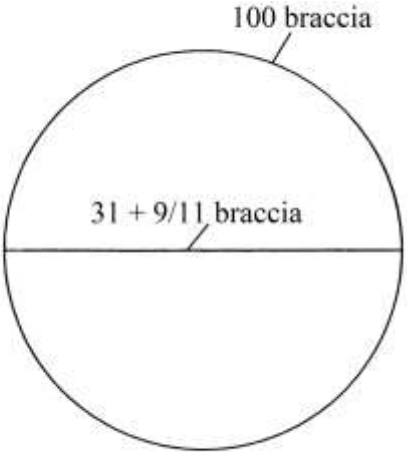
La procedura risolutiva è la seguente:

* moltiplicare la larghezza per la lunghezza del terreno: 739 * 1237 = 914 143 canne^2, area del terreno edificabile;
* moltiplicare la larghezza per la lunghezza di una casa: 13 * 19 = 247 canne^2, area di una *casa*;
* dividere l'area del terreno per quella di una *casa*:

914 143 : 247 = 3700 + 243/247 *case*, arrotondato a 3701.

[15] Diametro di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 100 braccia.
Il problema domanda il diametro.

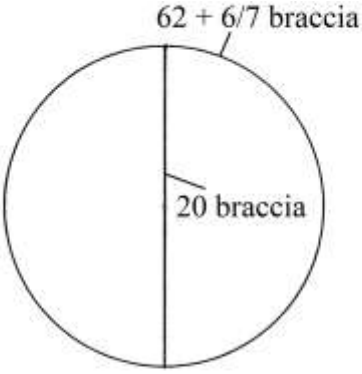


La soluzione è ottenuta dividendo la circonferenza per la costante (3 + 1/7), approssimazione di π:

diametro = circonferenza : (3 + 1/7) = 100 : (3 + 1/7) = 31 + 9/11 braccia.

[16] Circonferenza di un cerchio

Una ruota circolare ha diametro 20 braccia ed è domandata la lunghezza della circonferenza:

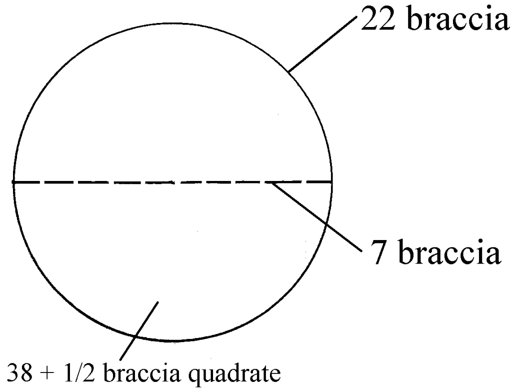


La circonferenza è data dal prodotto del diametro per la costante (3 + 1/7):

circonferenza = diametro * (3 + 1/7) = 20 * (3 + 1/7) = 62 + 6/7 braccia.

[17] Diametro e area di un cerchio

Una ruota circolare ha circonferenza lunga 22 braccia.



Il problema chiede di calcolare il diametro e l'area.

La procedura è la seguente:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 22 : (3 + 1/7) = 7 braccia, diametro;
* moltiplicare il diametro per circonferenza: 7 * 22 = 154 ;
* dividere per 4: 154 : 4 = 38 + ½ braccia^2, area del cerchio.

Nota: come molti altri autori medievali, Tommaso della Gazzaia calcola l'area di un cerchio di cui siano note le lunghezze della circonferenza e del diametro con la formula

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$

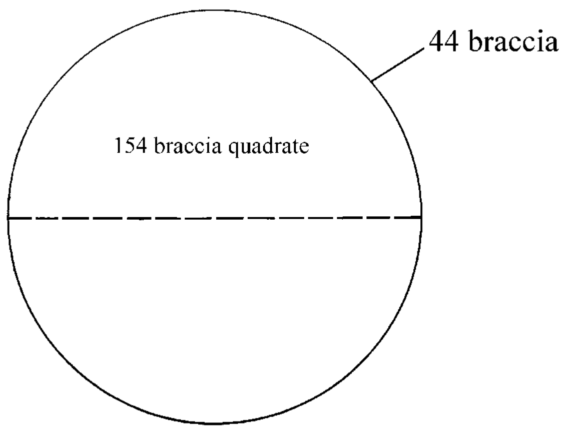
, formula che può essere ricondotta quella tradizionale

$$= \text{raggio} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \text{raggio}}{2} =$$

$$= \text{raggio} \cdot \text{raggio} \cdot \pi = \text{raggio}^2 \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right)$$

[18] Diametro e area di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 44 braccia. Il problema domanda il diametro e l'area.

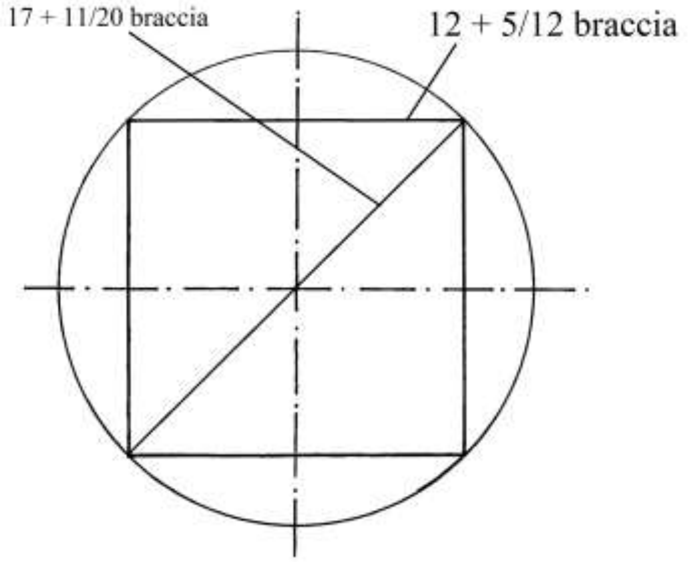


La procedura contiene i seguenti passi:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 44 : (3 + 1/7) = 14 braccia, diametro del cerchio;
* dividere per 2 il diametro: 14 : 2 = 7 ;
* dividere per 2 la circonferenza: 44 : 2 = 22 ;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: 7 * 22 = 154 braccia^2, area del cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda parte del problema domanda la lunghezza del lato del quadrato che ha area uguale a quella del cerchio:



La lunghezza è data da:

$$\text{lato} = \sqrt{\text{area cerchio}} = \sqrt{154} \cong$$
$$\cong 12{,}4096 \text{ braccia}$$

, che Tommaso arrotonda a 12 + 5/12 braccia.

Il testo si conclude con questo calcolo: è forse opportuno determinare la lunghezza della diagonale del quadrato equivalente. Essa vale

$$\text{diagonale} = \sqrt{2 \cdot \text{Area}} = \sqrt{2 \cdot 154} =$$
$$= \sqrt{308} \cong 17{,}55 \text{ braccia}$$

, da arrotondare a 17 + 11/20 braccia.

La diagonale del quadrato è più lunga del diametro (14 braccia) del cerchio di area equivalente.

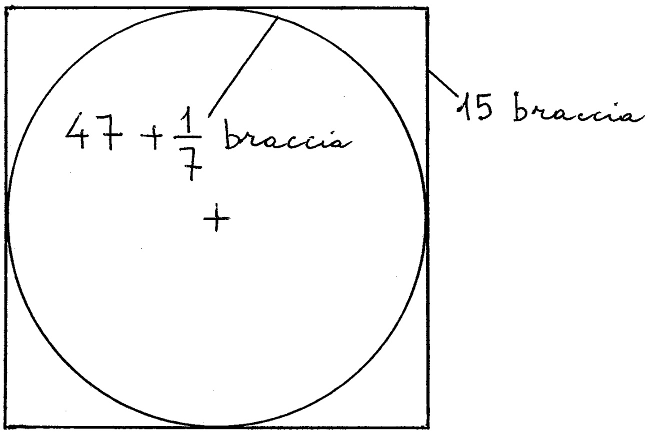
Come spiega la precedente figura, il quadrato è ora inscritto in un cerchio che ha diametro uguale alla diagonale del quadrato.

Nota: un quadrato inscritto in un cerchio ha area più piccola di quella del cerchio circoscritto.

[19] Cerchio inscritto in un quadrato

Un terreno ha la forma di un quadrato con i lati lunghi 15 braccia e deve esservi inscritto un cerchio.

Il problema domanda la lunghezza della circonferenza: il diametro del cerchio è uguale alla lunghezza del lato del quadrato.

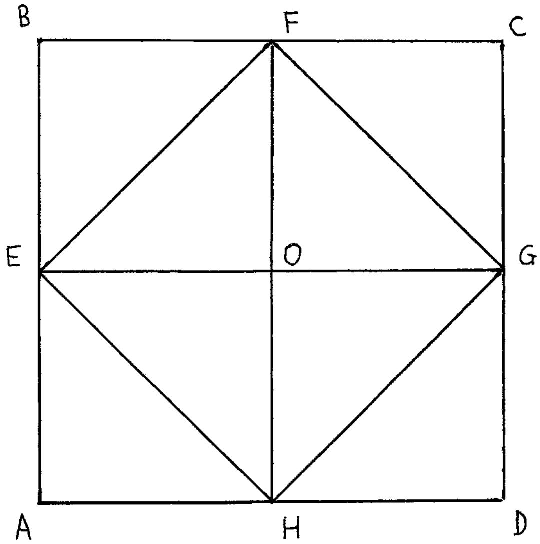


La circonferenza è data dal prodotto del diametro per la costante (3 + 1/7):

circonferenza = diametro * (3 + 1/7) = 15 * (3 + 1/7) = 47 + 1/7 braccia.

[24] Terreno quadrato da dividere

Un grande terreno ha forma quadrata con lati lunghi 40 canne:



Deve essere diviso in quattro *quartieri* uguali e in ciascuno di essi deve essere tracciata *una lingua a traverso* e cioè una diagonale.

Il problema domanda la lunghezza delle diagonali, l'area di ciascun *quartiere* e l'area dell'intero terreno.

La procedura usata è la seguente:

* dividere per 2 la lunghezza di un lato: 40 : 2 = 20 ;
* moltiplicare per se stesso: 20 * 20 = 400 canne^2, area di un *quartiere*;
* moltiplicare *per l'altro verso*: 20 * 20 = 400

[questi due ultimi passi possono essere interpretati come segue:

- il primo passo è BF^2 = 20^2 = 400;

- il secondo è $EB^2 = 20^2 = 400$];
* sommare i due ultimi prodotti: $400 + 400 = 800$;
* estrarre la radice quadrata:

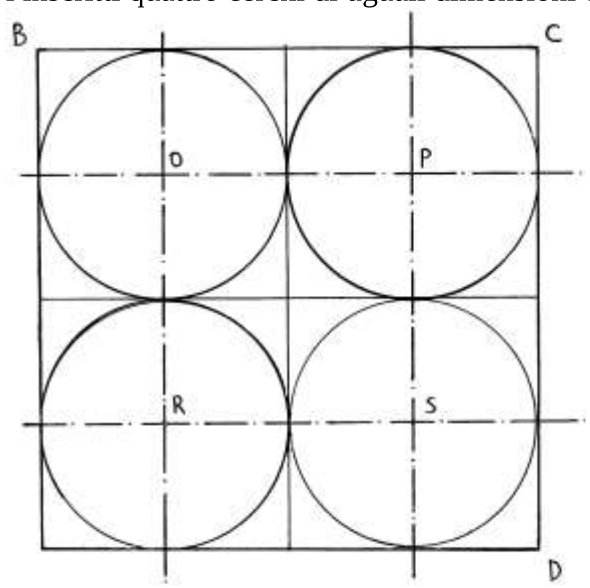
$$\sqrt{800} \cong 28 + \frac{2}{7} \text{ canne}$$

, lunghezza delle quattro diagonali (una delle quali è EF) [Tommaso ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele EBF];
* moltiplicare per 4 l'area di un *quartiere*: $400 * 4 = 1600$ canne^2, area dell'intero terreno.

Nota: il problema è riproposto nel successivo trattato geometrico di Oebetano da Montepulciano con gli stessi dati numerici e con una sola differenza: quest'ultimo misura in *pertiche* invece che in *canne*. I due termini possono essere considerati sinonimi perché probabilmente indicava sia la lunghezza di 5 braccia da panna sia lo strumento usato (la canna agrimensoria).

[27] Cerchi inscritti in un quadrato

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 14 braccia.
Devono esservi inscritti quattro cerchi di uguali dimensioni e i più grandi possibili.

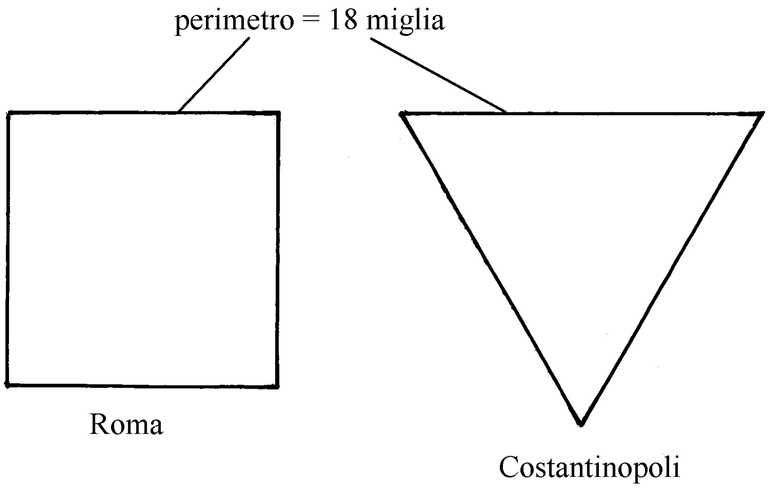


Il problema vuole conoscere la lunghezza della circonferenza e l'area di ciascun cerchio.
Per semplificare i calcoli, Tommaso divide il terreno in quattro quadrati uguali: ciascuno dei cerchi risulta inscritto in uno dei quadrati. I cerchi sono tangenti fra loro e ai lati dei quattro quadrati.
La procedura impiegata da Tommaso è la seguente:
* dividere per 2 la lunghezza del lato: $14 : 2 = 7$ braccia, lunghezza del diametro dei cerchi;
* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): $7 * (3 + 1/7) = 22$ braccia, circonferenza di ciascun cerchio;
* moltiplicare il diametro per la circonferenza di un cerchio: $7 * 22 = 154$;
* dividere per 4: $154 : 4 = 38 + ½$ braccia^2, area di un cerchio.

Nota: anche questo problema compare con le stesse dimensioni e unità di misura nel trattato di Orbetano da Montepulciano.

[28] <u>Confronto fra le superfici di Roma e di Costantinopoli</u>

Roma ha forma quadrata e il suo perimetro è lungo 18 miglia. Costantinopoli ha forma di uno *scudo* con tutti i lati uguali (ha la forma di un triangolo equilatero) con lo stesso perimetro di 18 miglia.



Il problema chiede di conoscere quale delle due città occupi la superficie maggiore e la differenza fra le due.

U La procedura applicata è la seguente:

* dividere il perimetro di Roma per 4: 18 : 4 = 4 + 1/2 miglia, lunghezza del lato del quadrato;
* moltiplicare il lato per se stesso: (4 + ½) * 4 + ½) = 20 + ¼ miglia^2, area occupata da Roma;
* dividere il perimetro di Costantinopoli per 3: 18 : 3 = 6 miglia, lunghezza dei lati del triangolo equilatero;
* moltiplicare 6 per se stesso: 6 * 6 = 36 ;
* dividere per 2 il lato del triangolo: 6 : 2 = 3 ;
* moltiplicare 3 per se stesso: 3 * 3 = 9 ;
* sottrarre 9 da 36: 36 – 9 = 27 ;
* estrarre la radice quadrata:

  $\sqrt{27} \cong 5{,}196$ miglia, che Tommaso arrotonda a (5 + 1/5) miglia, altezza del triangolo equilatero che rappresenta Costantinopoli;
* noltiplicare l’altezza per metà del lato: (5 + 1/5) * 3 = 15 + 3/5 miglia^2, area occupata da Costantinopoli;
* sottrarre la superficie di Costantinopoli da quella occupata da Roma:

  (20 + ¼) – (15 + 3/5) = 4 + 13/20 miglia^2, eccedenza dell’area occupata da Roma rispetto a quella di Costantinopoli.

Note: a) Il risultato è ovvio: a parità di perimetro, il poligono che ha area maggiore è quello con il più alto numero di lati. Il cerchio ha un numero infinito di lati e a parità di perimetro racchiude la massima superficie possibile.

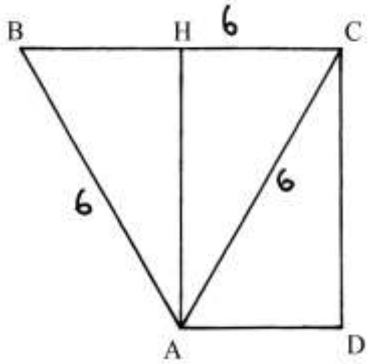
b) Un problema simile a questo era già stato proposto da Paolo dell’Abbaco che aveva confrontato le superfici occupate da Firenze e da Città di Castello.

c) Il *miglio* era un'unità di misura della lunghezza equivalente a 2833 + 1/3 (= 8500/3) braccia da panno.

[30] Area di un triangolo equilatero

La soluzione di questo nuovo problema, pur a scala molto più grande, riprende il metodo impiegato per calcolare l'area di Costantinopoli richiesta dal precedente [28].

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 6 braccia. Il problema richiede la sua area.



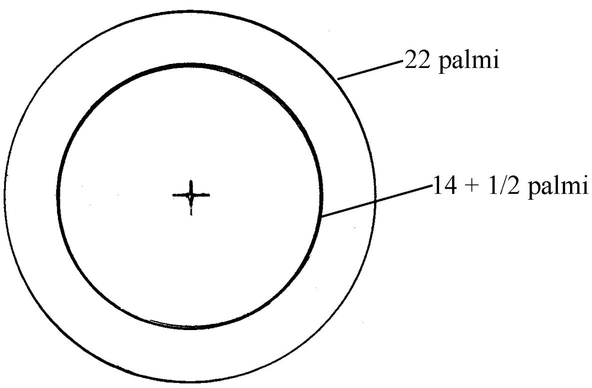
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare uno dei lati per se stesso: $6 * 6 = 36$;
* dividere per 2 la lunghezza di un lato: $6 : 2 = 3$;
* moltiplicare per se stesso: $3 * 3 = 9$;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 36: $36 – 9 = 27$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{27} \approx 5 + 1/5$ braccia, altezza del triangolo [AH];
* moltiplica l'altezza per metà del lato: $(5 + 1/5) * 3 = 15 + 3/5$ braccia^2, area del triangolo equilatero.

Tommaso critica poi una soluzione errata diffusa all'epoca: costruendo il rettangolo AHCD, il triangolo rettangolo ACD è equivalente a quello ABH e quindi il rettangolo AHCD ha la stessa area di ABC. Alcuni calcolavano l'area di AHCD (e quindi quella di ABC) moltiplicando *erroneamente* il segmento HC per il lato AC (che è anche una diagonale del rettangolo), ottenendo così un'area errata per eccesso: Area = $3 * 6 = 18$ braccia^2, invece di ($15 + 3/5$ braccia^2).

[34] Mola consumata

Per il suo lavoro, un fabbro ha usato una *mola* circolare e l'ha consumata in modo uniforme.
Da nuova, la sua circonferenza misurava 20 palmi.
Con l'uso, la ruota si è ridotta lungo il diametro di (1 + 3/4) palmi.
Il problema desidera conoscere la lunghezza della circonferenza della ruota usurata.



La procedura risolutiva è la seguente:

* dividere la lunghezza della circonferenza originaria per la costante (3 + 1/7):
20 : (3 + 1/7) = 6 + 4/11 palmi, diametro originario;

* sottrarre il *consumo* dal diametro originario: (6 + 4/11) – (1 + ¾) = 4 + 27/44 palmi, diametro della ruota usurata;

* moltiplicare questo secondo diametro per la costante (3 + 1/7):
(4 + 27/44) * (3 + 1/7) = 14 + ½ palmi, nuova circonferenza della mola.

Nota: questo problema e il successivo [35] sollevano di nuovo la questione dell'esatta determinazione della lunghezza del *palmo*.
Ricapitoliamo la situazione: il braccio da panno di Siena era lungo l'equivalente di 60,1055 cm e la canna agrimensoria da 5 braccia era lunga 300,5275 cm.
Stando all'ipotesi dedotta dalla soluzione del precedente problema [2], il *palmo* sarebbe ½ della lunghezza della canna e cioè 150,26 cm. Sempre seguendo questa ipotesi, la mola considerata da questo problema avrebbe avuto da nuova una circonferenza lunga 20 * 150,26 = 3005,2 cm alla quale corrisponderebbe un diametro di ben 956,2 cm! Le dimensioni sono assurde, anche considerata la durezza della pietra di cui è fatta una mola.
A questo punto riemerge la misura suggerita da Ronald Edward Zupko e già citata:

1 palmo = ½ di braccio = 30,05 cm.

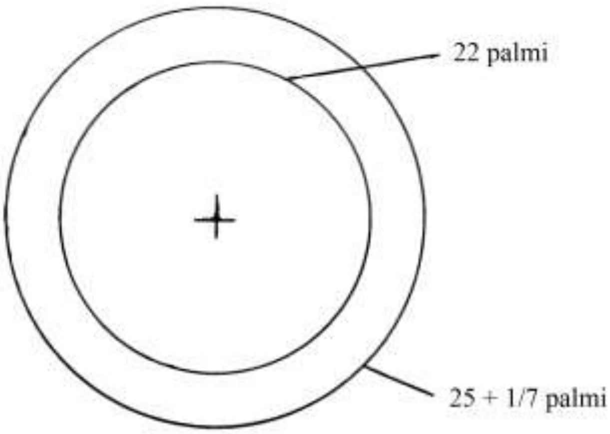
Secondo questa seconda ipotesi, la mola da nuova avrebbe avuto una circonferenza lunga 601 cm con un diametro di 191,23 cm: questa ipotesi è certamente più realistica della precedente.

Si è sbagliato Tommaso della Gazzaia o a Siena vi era una pluralità di unità di misura della lunghezza lineare portanti lo stesso nome *palmo*?

[35] <u>Cerchio accresciuto</u>

Questo problema è speculare rispetto al precedente: una ruota ha circonferenza lunga 22 palmi e il suo diametro viene incrementato di 1 palmo.

Viene chiesta la lunghezza della circonferenza accresciuta.



La procedura impiegata è la seguente:

* dividere la circonferenza originaria per la costante (3 + 1/7): 22 : (3 + 1/7) = 7 palmi, diametro della circonferenza;

* sommare l'incremento al diametro originario: 7 + 1 = 8 palmi, nuovo diametro;

* moltiplicare il nuovo diametro per la costante (3 + 1/7): 8 * (3 + 1/7) = 25 + 1/7 palmi, lunghezza della circonferenza accresciuta.

Nota: l'incremento di lunghezza della circonferenza è dato da:

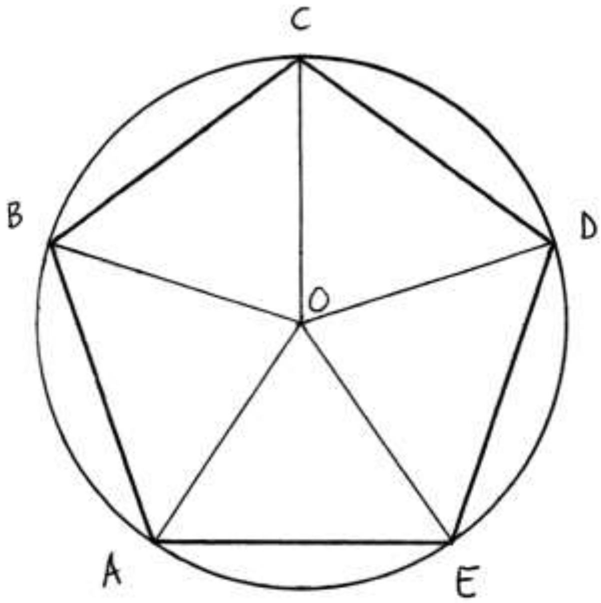
(25 + 1/7) – 22 = 3 + 1/7 palmi, che *in assoluto* è il valore della costante che approssima π.

Dato che l'incremento del diametro è di 1 palmo, il suo prodotto per la costante (3 + 1/7) produce esattamente (3 + 1/7) palmi.

[36] Pentagono inscritto

Un terreno ha la forma di un pentagono *equilatero* (e cioè *regolare*) che viene inscritto in un cerchio che ha diametro lungo 10 braccia e, quindi, raggio di 5 braccia.

Il problema chiede di calcolare l'area del poligono inscritto.



Il pentagono è diviso in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni, con vertice comune nel punto O, centro del cerchio in cui il poligono è inscritto.

Seguendo una regola che sarà poi codificata nel *Trattato di geometrica pratica* dell'Anonimo Fiorentino (citato in bibliografia), anche Tommaso della Gazzaia si adeguò alla regola empirica, ma *errata*, secondo la quale un pentagono inscritto in un cerchio di raggio 5 ha lati lunghi 6.

Stando a Tommaso, nella figura i raggi OA, OB, OC, OD e OE sono lunghi 5 braccia e i lati AB, BC, CD, DE e EA *sarebbero* lunghi 6 braccia. Ma non è così.

- APPROFONDIMENTO -

In più occasioni Annalisa Simi, ricercatrice dell'Università di Siena, si è occupata della geometria medievale, come testimoniato dai diversi saggi citati in bibliografia.

Riguardo al calcolo della superficie dei poligoni regolari inscritti, riportiamo un passo dal suo articolo citato in bibliografia al numero 5, pagina 23, in cui si riferisce al *Trattato di geometria pratica* dell'Anonimo Fiorentino:

"... Altrettanto soddisfacente dal punto di vista pratico doveva essere la regola, relativa ai poligoni inscritti, anch'essa proposta dall'autore del codice senese. Dalla constatazione empirica che, se il lato del poligono di nove lati inscritto in un cerchio misura 6, allora il raggio del cerchio misura (circa) 9 e l'autore, operando un'arbitraria generalizzazione, deduce la seguente regola:

"Il raggio del cerchio nel quale è inscritto un poligono di lato 6 ha come misura il numero dei lati del poligono stesso.

"La regola, ovviamente falsa, come mostra la seguente tabella, fornisce tuttavia valori approssimati, per eccesso, dal triangolo all'esagono e, per difetto, dall'esagono al decagono…".

poligoni inscritti	rapporti fra r (raggio) e l (lato)	lunghezza raggio r per lato = 6
TRIANGOLO	$r = l/\sqrt{3}$	$r = 3{,}46$
QUADRATO	$r = l/\sqrt{2}$	$r = 4{,}25$
PENTAGONO	$r = 2l/\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$r = 5{,}10$
ESAGONO	$r = l$	$r = 6$
EPTAGONO	$r = l/(2 \cdot \text{sen } 25{,}71°)$	$r = 6{,}97$
OTTAGONO	$r = l/\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$r = 7{,}83$
ENNAGONO	$r = l/(2 \cdot \text{sen } 20°)$	$r = 8{,}82$
DECAGONO	$r = 2l/\left(\sqrt{5}-1\right)$	$r = 9{,}75$

Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Poligono_regolare) ha una voce dedicata alle proprietà dei poligoni regolari; in essa è contenuta una tabella con le costanti tipiche del rapporto fra la lunghezza del lato di un poligono inscritto e quella del raggio del cerchio ad esso circoscritto: *k* è il rapporto fra la lunghezza del *lato* del poligono e quella del *raggio*:

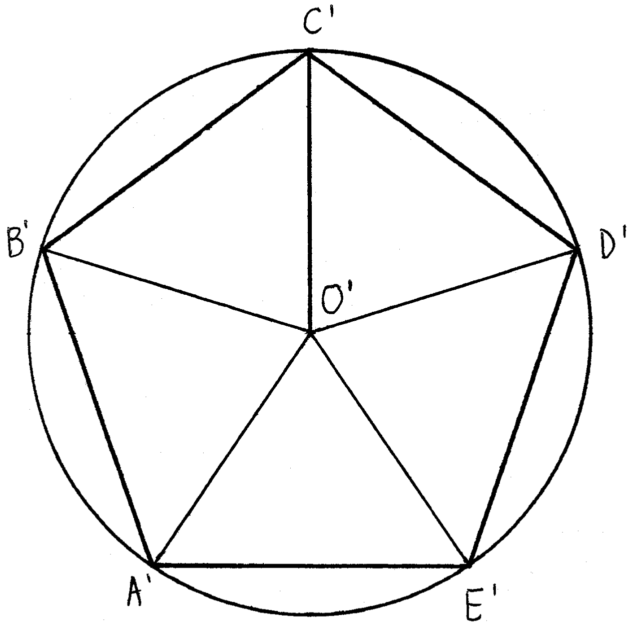
poligoni inscritti	*k = lato/raggio*
triangolo equilatero	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$
quadrato	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$
pentagono	$\approx 1{,}176$
esagono	1
ettagono	$\approx 0{,}868$
ottagono	$\approx 0{,}765$
ennagono	$\approx 0{,}684$
decagono	$\approx 0{,}618$

I valori di *k* diminuiscono con il crescere del numero dei lati dei poligoni.

Per il pentagono, la tabella di Wikipedia fornisce la costante $k \approx 1{,}176$: in un cerchio di raggio 5, il lato del pentagono inscritto è dato da lato ≈ k * raggio ≈ 1,176 * 5 ≈ 5,88.

Viceversa, se il lato del pentagono è lungo 6, il raggio del cerchio è:
raggio ≈ lato/k ≈ 6/1,176 ≈ 5,10 , risultato conforme al dato indicato nella tabella della Simi.

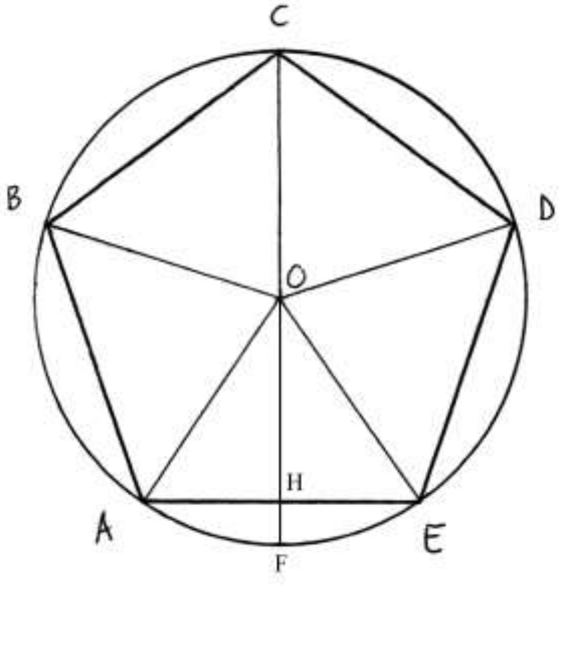
Tommaso della Gazzaia ha chiaramente fornito un dato errato: un pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio 5 braccia *non* può avere lati lunghi 6 braccia. Viceversa, il pentagono che ha lati lunghi 6 braccia (come quello della figura che segue) *non* è inscritto in un cerchio di raggio 5, ma di raggio 5,1 braccia:



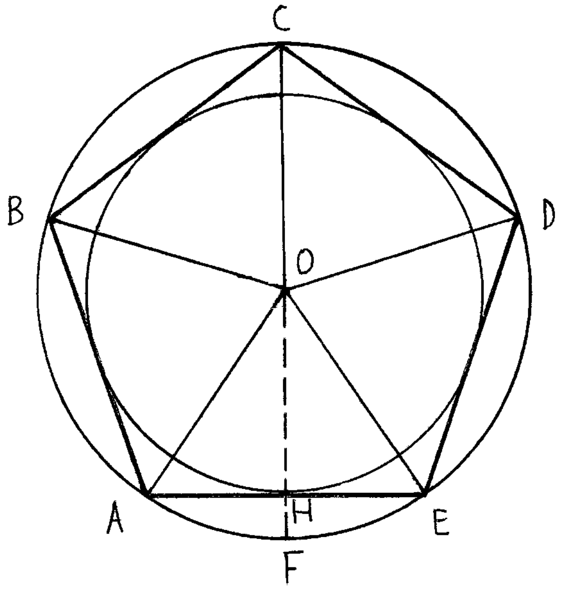
Il secondo pentagono è *leggermente* più grande del precedente: sia ABCDE che A'B'C'D'E' sono qui disegnati nella stessa scala di rappresentazione: riproducendo le due figure su carta trasparente e sovrapponendole si noterà la piccola differenza che intercorre fra i due poligoni.

- -

Torniamo al pentagono di Tommaso della Gazzaia. Consideriamo uno dei triangoli isosceli in cui è suddiviso il poligono, ad esempio quello AOE: OH è la sua altezza (che è pure un *apotema* del pentagono).



L'*apotema* è il raggio del cerchio *inscritto* in un poligono regolare:



La lunghezza dell'apotema è strettamente legata a quella del lato del poligono.

Per semplificare i calcoli sono disponibili delle tabelle che contengono i *numeri fissi*, indicati con la lettera minuscola *f* (per distinguerli dai numeri fissi contrassegnati con la *F* maiuscola e relativi al calcolo delle aree).

L'apotema, *a*, è dato da:

$$a = f * \text{lato}.$$

Nel caso del pentagono il numero fisso *f* vale 0.688.

Proseguiamo nella descrizione della soluzione descritta da Tommaso pur se i suoi dati sono errati.

AH è lungo quanto HE e cioè è la metà di AE: AH = AE/2 = 6/2 = 3 braccia.

La procedura impiegata per calcolare l'area usa la scomposizione del pentagono nei cinque triangoli isosceli: AOH è un triangolo rettangolo di cui sono noti il cateto AH e l'ipotenusa AO. La lunghezza del cateto OH è data da

$$OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ braccia}$$

Il triangolo rettangolo AOH è *pitagorico* perché le lunghezze dei suoi lati formano la terna 3-4-5.

I lati del triangolo isoscele, AO e EO, sono lunghi 5/6 del lato AE e cioè

(5/6) * 6 = 5 braccia.

L'area del triangolo isoscele AOE è

Area AOE = AH * OH = 3 * 4 = 12 braccia^2.

L'area del pentagono è cinque volte quella di uno dei triangoli isosceli:

Area pentagono = 5 * Area AOE = 5 * 12 = 60 braccia^2.

Infine, l'area del cerchio circoscritto è:

Area cerchio = raggio^2 * (3 + 1/7) = 5^2 * 22/7 = 25 * 22/7 = 78 + 4/7 braccia^2 [che Tommaso scrive nella forma (78 + 8/14) senza semplificare. Questo stesso dettaglio è presente nella soluzione del problema n. [243] del *Trattato di geometria pratica* dell'Anonimo Fiorentino che ripropone lo stesso di Tommaso della Gazzaia: hanno entrambi attinto alla stessa fonte?].

La differenza fra l'area del cerchio e quella del pentagono è:

differenza = Area cerchio – Area pentagono = (78 + 4/7) – 60 = 18 + 4/7 braccia^2.

La *differenza* appena calcolata corrisponde all'area dei cinque *segmenti circolari* che sono delimitati dalla circonferenzabe dai lati del pentagono. Ciascuno di essi ha area uguale a

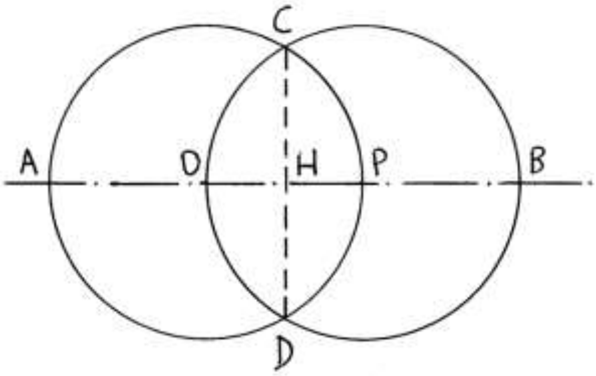
Area di un segmento circolare = differenza/5 = (18 + 4/7) : 5 = 3 + 5/7 braccia^2.

Con questo metodo Tommaso riesce a calcolare l'area di un segmento circolare senza impiegare formule che richiedano la conoscenza della *corda* (AE), della *freccia* (HF) e del *raggio* (OA). Egli però determina la *freccia* HF che è data da:

HF = OF – OH = raggio – altezza = 5 – 4 = 1 braccio.

Usando formule approssimate o corrette, prima e dopo di Tommaso altri studiosi avevano calcolato l'area di un segmento circolare: Columella, Paolo dell'Abbaco, Leonardo da Cremona, Leon Battista Alberti, Orbetano da Montepulciano.

Infine, egli chiama i segmenti circolari *mezze mandorle*. Una *mandorla* è una figura piana creata dall'intersezione di due cerchi aventi lo stesso raggio con la proprietà che il centro di uno di essi si trova sulla circonferenza dell'altro, come è il caso dei centri O e P della figura che segue:



La figura curvilinea CPDO è la *mandorla*: essa è divisa a metà – in due *mezze mandorle* – dalla corda CD comune a entrambi i cerchi. Questa corda origina due segmenti circolari di uguali dimensioni: CPD e COD.

Nota: è utile notare che già Jacopo da Firenze fin dal 1307 aveva calcolato l'area del pentagono con un metodo più sbrigativo usando una formula, errata perché forniva un risultato almeno doppio del reale, forse ricalcata su quelle approssimate utilizzate dai Gromatici romani. Sulla stessa linea si era poi posto il trattato di Orbetano da Montepulciano, anch'egli operante in ambito senese e successivo a Tommaso della Gazzaia.

Un'ultima considerazione: né Tommaso né altri scrittori di geometria illustrano un metodo per costruire un pentagono, inscritto oppure no in un cerchio. Dovevano pur conoscere qualche metodo, anche se approssimato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'area del pentagono inscritto in un cerchio di raggio 5,1 braccia e con lati lunghi 6 braccia (e cioè con dimensioni *corrette*) è oggi calcolata con la formula

Area pentagono = F * lato^2 , dove F è il *numero fisso* che rappresenta il rapporto fra l'area di un pentagono regolare e quella di un quadrato costruito su di un suo lato e che vale 1,72. Ne consegue

Area pentagono = 1,72 * 6^2 = 61,92 braccia^2 , dato difforme da quello calcolato da Tommaso per il pentagono con lati lunghi 6 braccia e raggio del cerchio 5 braccia e pari a 60 braccia^2.

Usando il metodo impiegato da Tommaso, ma con i valori corretti, calcoliamo la lunghezza dell'apotema:

OH = f * OA = 0,688 * 6 = 4,128 braccia.

L'area del triangolo isoscele AOE è data da

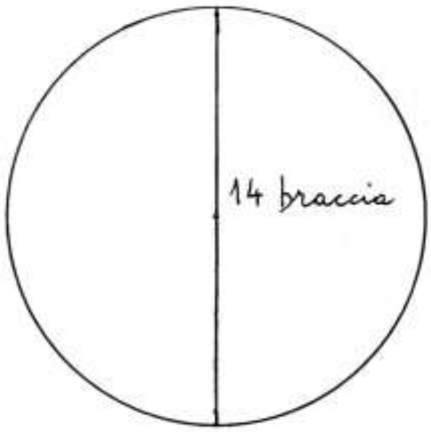
Area AOE = AH * OH = 3 * 4,128 = 12,384 braccia^2.

L'area del pentagono è

Area pentagono = 5 * Area AOE = 5 * 12,384 = 61,92 braccia^2, risultato uguale a quello calcolato con il numero fisso F = 1,72.

[37] Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 14 braccia:



La procedura impiegata per calcolare la sua area è:

* moltiplicare il diametro per se stesso: 14 * 14 = 196 ;
* moltiplicare per 11: 196 * 11 = 2156 ;
* dividere per 14: 2156 : 14 = 154 braccia^2, area del cerchio.

Tommaso ha applicato la formula

Area cerchio = diametro^2 * (11/14).

[38] Circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha diametro 10 braccia: il problema chiede la lunghezza della circonferenza.

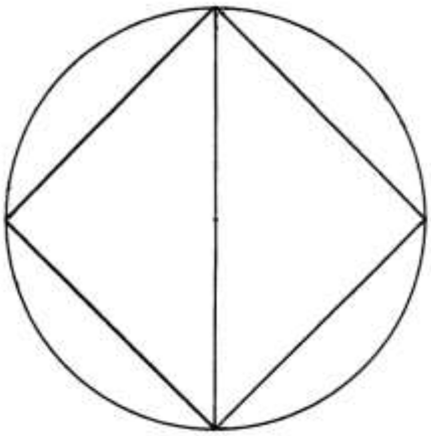
La circonferenza è ricavata dal prodotto del diametro per la costante (3 + 1/7):

circonferenza = diametro * (3 + 1/7) = 10 * (3 + 1/7) = 31 + 3/7 braccia.

[39] Quadrato inscritto in un cerchio

Un cerchio ha circonferenza lunga 44 braccia: il problema chiede di inscrivervi il quadrato più grande possibile.

Il diametro del cerchio ha la stessa lunghezza delle diagonali del quadrato: Tommaso chiama *diametro magiore* la diagonale.



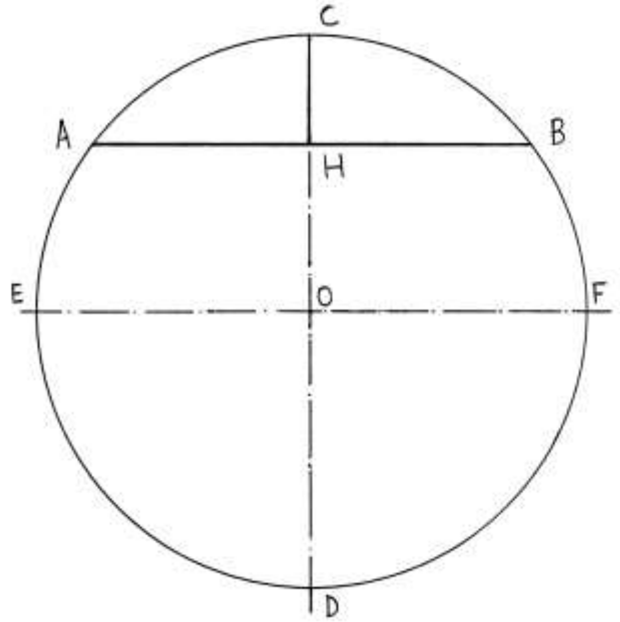
La procedura impiegata è la seguente:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 44 : (3 + 1/7) = 14 braccia, diametro del cerchio;
* moltiplicare il diametro per se stesso: 14 * 14 = 196 ;
* dividere per 2: 196 : 2 = 98 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{98} \approx 9{,}90$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato inscritto;
* moltiplicare il diametro per la circonferenza: 14 * 44 = 616 ;
* dividere per 4: 616 : 4 = 154 braccia^2, area del cerchio;
* sottrarre l'area del quadrato da quella del cerchio: 154 – 98 = 56 braccia^2.

Tommaso conclude con una costatazione: l'area del quadrato è uguale a 7/11 di quella del cerchio e la differenza fra l'area di quest'ultimo e quella del quadrato è 56/154 è cioè 4/11 dell'area del cerchio.

[40] Ruota conficcata nel terreno

Una è conficcata verticalmente nel terreno e ne emerge solo un *segmento circolare*: la sua corda è lunga 12 braccia e la freccia (*saetta*) 3 braccia.



Il problema domanda la lunghezza della circonferenza della ruota.

La procedura contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: 12 : 2 = 6 ;
* moltiplicare per se stesso: 6 * 6 = 36 ;
* dividere per la freccia: 36 : 3 = 12 ;
* sommare la freccia all'ultimo quoziente: 12 + 3 = 15 braccia che è il diametro della ruota;
* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 15 * (3 + 1/7) = 47 + 1/7 braccia, circonferenza della ruota.

La procedura impiegata da Tommaso è sintetizzabile con la formula

$$\text{diametro} = [(\text{corda}/2)^2 : \text{freccia}\ ] + \text{freccia}$$

- APPROFONDIMENTO -

Nel suo *Trattato d'Aritmetica*, Paolo dell'Abbaco aveva già studiato il problema del cerchio e del segmento circolare. Egli applicò alla soluzione il *teorema delle corde*.

Per chiarire meglio la situazione, nella precedente figura sono state scritte le lettere (maiuscole) sui punti significativi.

Il segmento circolare ACB emerge dal terreno, mentre il più grande segmento circolare ADB è sepolto nel terreno.

Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nello stesso cerchio e si intersecano ad angolo retto nel punto H, tagliando in due parti uguali la corda AB.

I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) sono i *medi* e i due segmenti dell'altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:

$$CH : AH = HB : HD$$

medi

estremi

Da cui

$$HD = \frac{AH \cdot HB}{CH}$$

.

Sostituendo nella formula i dati si ha: HD = (6 * 6) /3 = 12 braccia.
Aggiungere ora la lunghezza della freccia a quella del segmento HD:

CD = CH + HD = 3 + 12 = 15 braccia, diametro della ruota.

La soluzione di Tommaso della Gazzaia ricalca quella di Paolo dell'Abbaco.

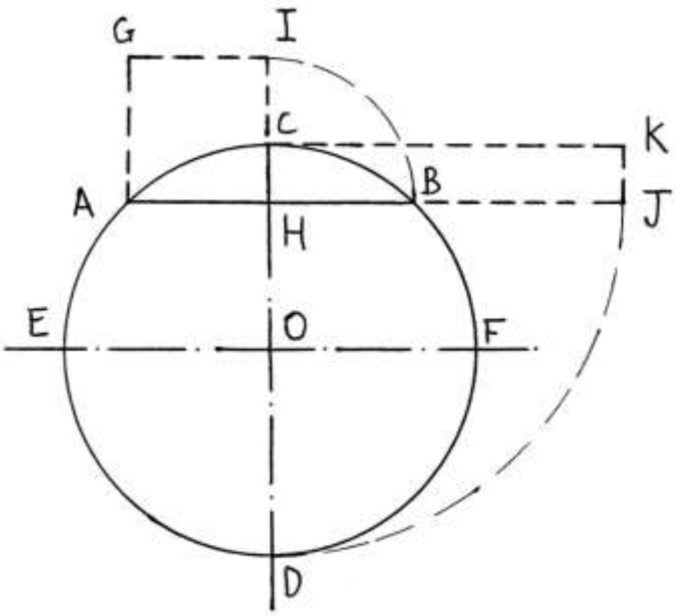
Nota: una corda divide un cerchio in *due* segmenti circolari.

<u>Il teorema delle corde</u>

Dalla proposizione CH : AH = HB : HD deriva

CH * HD = AH * HB .

Costruire i due rettangoli basati sulle lunghezze dei quattro segmenti che formano le due corde:

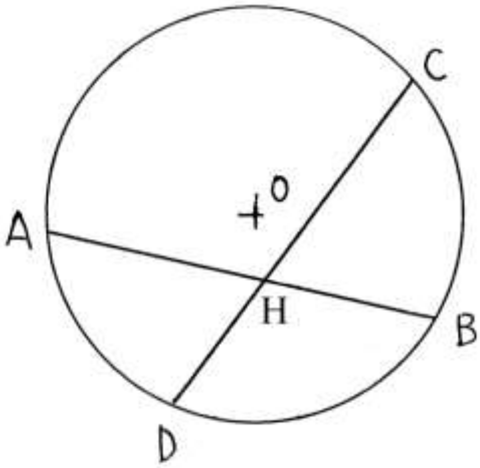


* il rettangolo [ma in questo caso è un quadrato perché AH = HB] AGIH ha dimensioni AH x HB ;
* il rettangolo HCKJ che ha dimensioni CH x HD.

I due poligoni hanno *uguale superficie*.

La figura è un caso particolare del *teorema delle corde*: infatti le due corde, AB e CD, si intersecano ad angolo retto.

In generale, il teorema vale per qualunque coppia di corde che si incrociano all'interno di un cerchio, senza formare angoli particolari e senza che almeno una delle due sia un diametro, come è il caso della figura che segue:



Anche in questo caso vale la relazione

AH : DH = HC : HB da cui

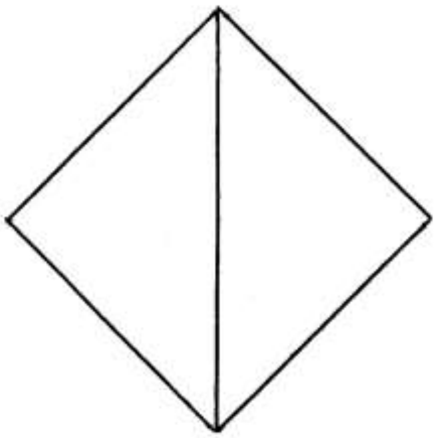
AH * HB = DH * HC .

Il teorema delle corde afferma: nel caso di due corde generiche interne a un cerchio e intersecantesi, il rettangolo costruito sui due segmenti di una corda ha la stessa superficie del rettangolo costruito sui segmenti dell'altra corda.

- -

[41] <u>Diagonale di un quadrato</u>

Un quadrato ha i lati lunghi 6 braccia. Il problema chiede la lunghezza della diagonale e l'area [Questo e il precedente problema n. 39 mostrano un quadrato con le diagonali orientate Nord-Sud e Ovest-Est].



La figura disegnata da Tommaso mostra il quadrato inscritto in un cerchio, che non è indispensabile per risolvere il problema.

La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 6 * 6 = 36 braccia^2, area del quadrato;
* moltiplicare per 2: 36 * 2 = 72 ;

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{72}$ braccia, lunghezza delle diagonali.

[43] Lati di un quadrato

Un quadrato ha *diametro* (e cioè la diagonale) lungo 7 braccia.

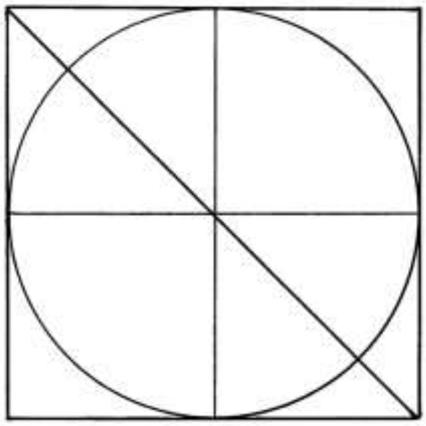
Il problema domanda la lunghezza della diagonale e l'area.

La procedura impiegata è:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza della diagonale: $7 * 7 = 49$;
* dividere per 2: $49 : 2 = 24 + ½$ braccia^2, area del quadrato;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{24{,}5}$ braccia, lunghezza del lato del quadrato.

[44] Cerchio inscritto in un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 7 braccia. Deve esservi inscritto un cerchio che ha diametro lungo quanto il lato del quadrato.



Il problema chiede la lunghezza delle diagonali, le aree del quadrato e del cerchio e la loro differenza.

La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: $7 * 7 = 49$ braccia^2, area del quadrato;

[i passaggi racchiusi fre queste parentesi sono assenti nel testo di Tommaso che dà per scontata l'acquisizione delle relative operazioni nella soluzione dei precedenti problemi];

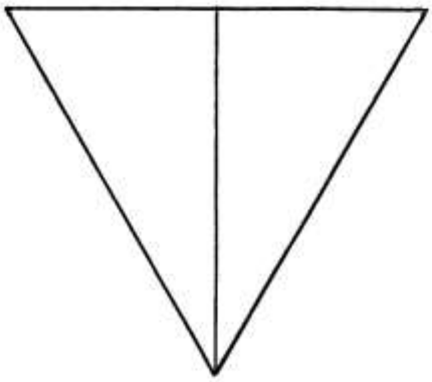
* moltiplicare per 2: $49 * 2 = 98$:
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{98} \approx 9{,}9$ braccia, lunghezza della diagonale;
* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): $7 * (3 + 1/7) = 22$ braccia, lunghezza della circonferenza;
* moltiplicare il diametro per la circonferenza: $7 * 22 = 154$;
* dividere per 4: $154 : 4 = 38 + ½$ braccia^2, area del cerchio] ;

* sottrarre l'area del cerchio da quella del quadrato: $49 – (38 + ½) = 10 + ½$ braccia^2, differenza fra le due aree.

[45] Altezza e area di un triangolo equilatero

Il problema descrive due differenti casi centrati sullo stesso argomento.

a) Uno *scudo* ha tre lati di uguale lunghezza: la figura è un triangolo equilatero con lati lunghi 8 braccia.



Sono richieste l'altezza e l'area del triangolo.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: $8 * 8 = 64$;
* dividere per 4: $64 : 4 = 16$;
* sottrarre da 64: $64 - 16 = 48$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48}$ braccia, altezza dello scudo.

b) Uno *scudo* ha lati lunghi 6 braccia.

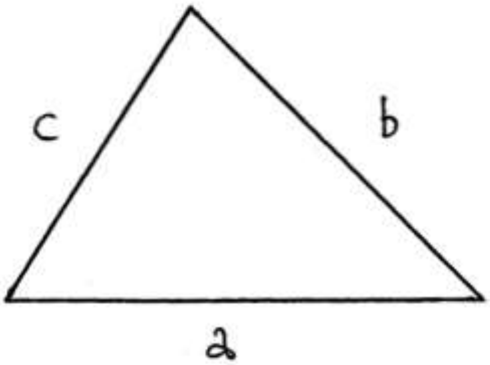
La procedura è:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: $6 * 6 = 36$;
* dividere per 4: $36 : 4 = 9$;
* sottrarre da 36: $36 - 9 = 27$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{27}$ braccia, lunghezza dell'altezza (il *diametro* secondo Tommaso);
* moltiplicare il quadrato della metà di un lato per il quadrato dell'altezza:
$$3^2 * (\sqrt{27})^2 = 9 * 27 = 243 ;$$
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{243} = 9 * \sqrt{3}$ braccia^2, area del triangolo equilatero.

Forse questa seconda soluzione riduceva il numero delle radici quadrate da estrarre per giungere all'area dello scudo.

[46] Area di un triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ha lati lunghi 5, 6, 7 braccia.



La procedura impiegata è la seguente:

*	sommare le lunghezze dei tre lati:	5 + 6 + 7 = 18 braccia, perimetro;
*	dividere per 2:	18 : 2 = 9, semiperimetro;
*	sottrarre il lato maggiore dal semiperimetro:	9 – 7 = 2 ;
*	moltiplicare per il semiperimetro:	2 * 9 = 18 ;
*	sottrarre il secondo lato dal semiperimetro:	9 – 6 = 3 ;
*	moltiplicare per 18:	3 * 18 = 54 ;
*	sottrarre il lato più corto dal semiperimetro:	9 – 5 = 4 ;
*	moltiplicare per 54:	4 * 54 = 216 braccia^2.

Tommaso si ferma, erroneamente, a questo risultato: L'area è data dalla *radice quadrata* di 216: Area triangolo = $\sqrt{216} = 6 * \sqrt{6}$ braccia^2.

A parte questo errore, la procedura descritta da Tommaso è un'applicazione della nota formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo: *a*, *b* e *c* sono le lunghezze dei tre lati e *p* il semiperimetro

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Con a = 7, b= 6 e c =5, *p* vale:

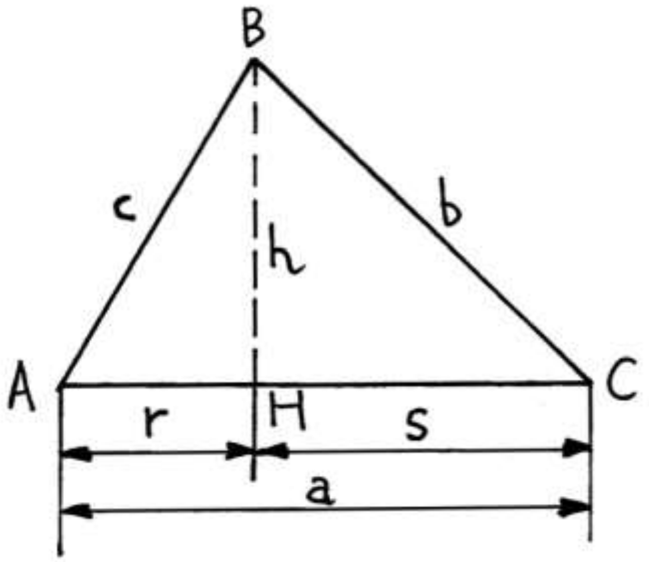
$$p = \frac{7 + 6 + 5}{2} = 9 .$$

La formula di Erone è:

$$\text{Area} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$
$$= \sqrt{216} = 6 \cdot \sqrt{6} \text{ braccia}^2 .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda parte del problema chiede di conoscere il punto (H) del lato più lungo (AC) in cui cade l'altezza ad esso relativa (BH): Tommaso chiama *cantetto* (cateto) l'altezza.



Allo scopo di rendere più chiara la procedura usata è utile riferirsi alla figura qui sopra in cui sono scritte le lettere maiuscole ai vertici.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare per 2 la lunghezza del lato maggiore (AC): 7 * 2 = 14 ;
* moltiplicare il lato maggiore (AC) per se stesso: 7 * 7 = 49 ;
* moltiplicare la lunghezza del lato intermedio (BC) per stessa: 6 * 6 = 36 ;
* sommare i due ultimi quadrati: 49 + 36 = 85 ;
* moltiplicare il lato più corto (AB) per stesso: 5 * 5 = 25 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto dalla somma dei primi due: 85 – 25 = 60
  [$AC^2 + BC^2 – AB^2 = 7^2 + 6^2 – 5^2 = 60$];
* dividere per il doppio della lunghezza del lato maggiore (AC): 60/(7*2) = 4 + 2/7 braccia, che è la lunghezza della proiezione del lato BC e cioè HC:

[la procedura prosegue con i passi occorrenti per calcolare la lunghezza di AH]

* moltiplicare il lato maggiore (AC) per se stesso: 7 * 7 = 49 ;
* moltiplicare il lato più corto (AB) per stesso: 5 * 5 = 25 ;
* sommare i due prodotti: 49 + 25 = 74 ;
* moltiplicare il lato intermedio (BC) per se stesso: 6 * 6 = 36 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto dall'ultima somma: 74 – 36 = 38 ;
* dividere per il doppio del lato AC: 38 : 14 = 2 + 5/7 braccia, lunghezza della proiezione (AH) del lato più corto (AB) sulla base.

Sommando le lunghezze delle proiezioni si ha:

AH + HC = (2 + 5/7) + (4 + 2/7) = 7 braccia = AC.

Tommaso calcola l'altezza applicando il teorema di Pitagora (peraltro non citato) ai triangoli rettangoli ABH e BHC:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 5^2 – (2 + 5/7)^2 = 17 + 31/49$, da cui

$$BH = \sqrt{17 + \frac{31}{49}}$$ braccia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per calcolare HC Tommaso ha usato la formula

$$HC = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC}$$

e per AH

$$AH = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC}$$

.

Le due formule risalgono a Erone.

Nella precedente figura, le proiezioni dei lati obliqui AB e BC sulla base AC sono rispettivamente *r* (AH) e *s* (HC).

L'altezza BH divide il triangolo ABC in due triangoli rettangoli, ABH e BHC.

L'altezza BH è un *cateto comune* ai due triangoli.

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ABH e BHC si hanno le seguenti relazioni:

I. $BH^2 = AB^2 - AH^2$ che corrisponde a $h^2 = c^2 - r^2$;

II. $BH^2 = BC^2 - HC^2$ che corrisponde a $h^2 = b^2 - s^2$.

Le due formule si equivalgono:

$c^2 - r^2 = b^2 - s^2$.

Ma $r = a - s$ e sostituendo si ha

$c^2 - (a - s)^2 = b^2 - s^2$

$c^2 - a^2 - s^2 + 2*a*s = b^2 - s^2$

$c^2 - a^2 - b^2 = -2*a*s$

$a^2 + b^2 - c^2 = 2*a*s$ da cui

$$s = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7} = \frac{49 + 36 - 25}{14} =$$

$$= \frac{60}{14} = 4 + \frac{2}{7} \text{ braccia}$$

che è il risultato calcolato da Tommaso.

La formula

$$s = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

equivale a

$$HC = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC}$$

.

Le formule appena impiegate risalgono al matematico e ingegnere Erone di Alessandria (I secolo d.C.) ed è chiaro che, anche in questo caso, Tommaso ha usato le formule di Erone.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A questo punto è possibile calcolare l'altezza BH:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2$

$BH^2 = c^2 - r^2 = 5^2 - (2 + 5/7)^2 = 25 - (4 + 10/7 + 25/49) = 25 - (4 + 20/7 + 25/49) =$

$= 864/49 = 17 + 31/49$ da cui

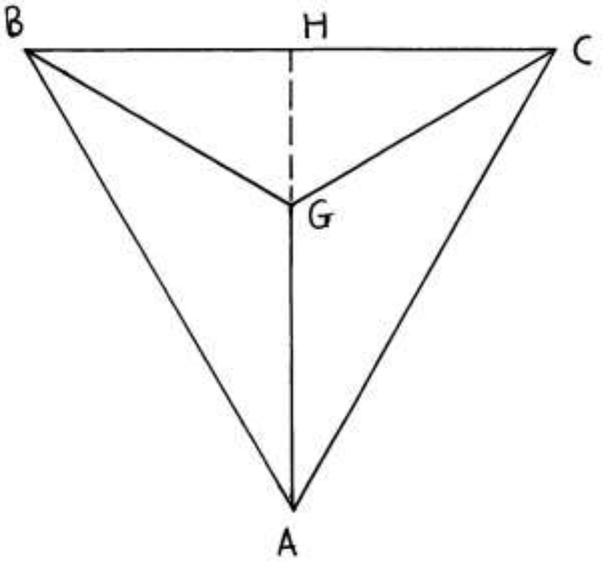
$$BH = \sqrt{17 + \frac{31}{49}}$$

braccia.

Nota: i valori utilizzati da Tommaso in questo problema conducono a risultati frazionari. In generale, nei loro trattati gli abacisti presentavano problemi con numeri interi o con limitate frazioni.

[47] Triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia:



Il problema domanda la lunghezza dei segmenti tracciati da *baricentro* G ai tre vertici (A, B e C).

Tommaso chiama quel punto *centro di mezo* e ciascuno dei tre vertici *cantone*.

In un triangolo equilatero, il punto G è l'*ortocentro* (intersezione delle altezze), il *baricentro* (intersezione delle mediane), l'*incentro* (intersezione delle bisettrici degli angoli) e il *circocentro* (intersezione degli assi dei lati).

La procedura impiegata da Tommaso è la seguente:

* moltiplicare un lato per se stesso: 10 * 10 = 100 ;
* dividere per 3: 100 : 3 = 33 + 1/3 ;
* estrarre la radice quadrata:

$\sqrt{33 + \frac{1}{3}}$ braccia, lunghezza di GA, GB e GC.

La procedura è riassumibile con la formula che segue:

$$AG = \sqrt{\frac{AB^2}{3}}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

AH è un'altezza del triangolo equilatero: incontrandosi nel punto G, le tre altezze si dividono reciprocamente in due parti proporzionali a 1 e a 2:

AG : GH = 2 : 1 .

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH, possiamo ricavare l'altezza AH:

$AH^2 = AB^2 – BH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = (3/4) * AB^2$, da cui

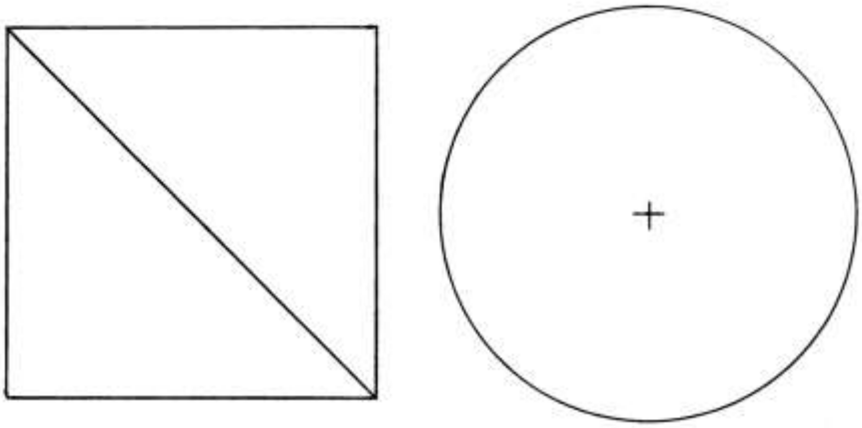
$AH = AB * (\sqrt{3})/2$

Il segmento AG è lungo 2/3 di AH.

AG =(2/3) * AB * (√3)/2 = AB * (√3)/3 = 10 * (√3)/3 ≈ 5,773 braccia che equivale a $\sqrt{33+\frac{1}{3}}$ braccia, valore calcolato da Tommaso.

[48] <u>Dal quadrato al cerchio equivalente</u>

Un terreno ha forma quadrata e ha area di 30 braccia^2: deve essere calcolato il diametro di un cerchio che abbia la sua stessa area.

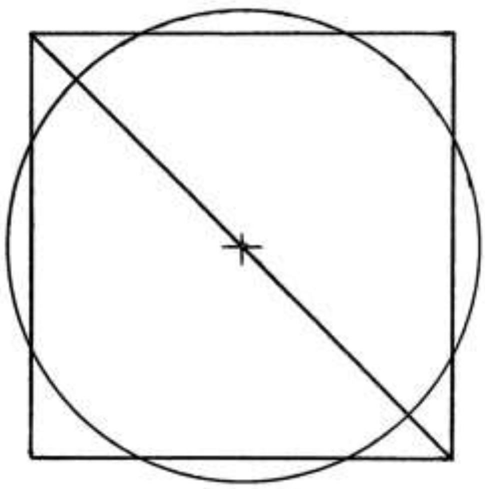


La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare l'area del quadrato per 3/11: 30 * 3/11 = 8 + 2/11 ;
* sommare all'area del quadrato: 30 + (8 + 2/11) = 38 + 2/11 [equivalente a 14/11 dell'area del quadrato e del cerchio];
* estrarre la radice quadrata:

$\sqrt{38+\frac{2}{11}} \cong 6{,}179$ braccia, diametro del cerchio di area 30 braccia^2.

La figura che segue mostra il quadrato e il cerchio equivalente sovrapposti:



- APPROFONDIMENTO -

La soluzione data da Tommaso è basata sulle consuete formule semplificate e approssimate usate per calcolare l’area di un cerchio e i suoi rapporti con l’area di un quadrato inscritto, circoscritto o equivalente.

L’area di un cerchio è:

$$\text{Area del cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2}$$

Ma la lunghezza della circonferenza è espressa da:

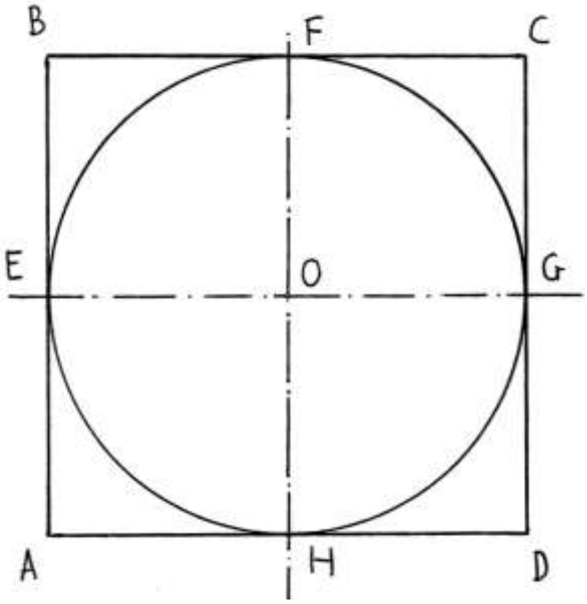
$$\text{circonferenza} = \left(3 + \frac{1}{7}\right) \cdot \text{diametro} = \frac{22}{7}\ \text{diametro}$$

e sostituendo questo valore nella precedente formula si ha:

$$\text{Area del cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \left(\frac{\frac{22}{7} \cdot \text{diametro}}{2}\right) = \text{diametro}^2 \cdot \frac{11}{14}$$

Un quadrato che lato lungo quanto il diametro del cerchio inscritto ha area

Area quadrato = lato^2 = diametro^2



La relazione fra le due aree è la seguente:

Area quadrato : Area cerchio = 1 : 11/14, da cui si ricava:

Area quadrato = (14/11) * Area cerchio = (3 + 11)/11 * Area cerchio =

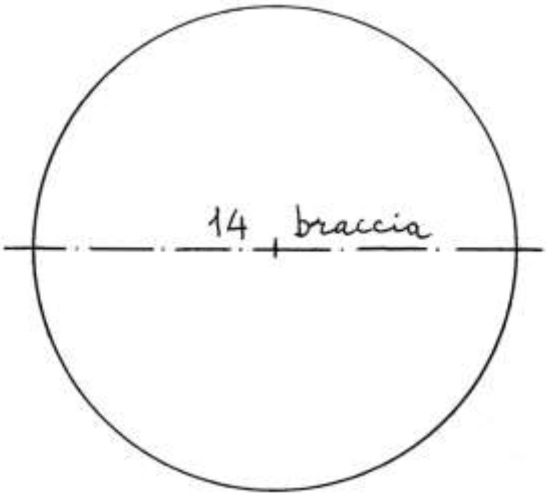
= [(11/11) + (3/11)] * Area cerchio.

In questa ultima espressione compare la costante (3/11) usata da Tommaso per risolvere il problema.

- -

[51] <u>Area del cerchio</u>

Un cerchio ha diametro lungo 14 braccia:



Deve essere calcolata la sua area.

Per risolvere Tommaso descrive *sei* metodi diversi, tutti corretti.

Ecco descritti i differenti metodi:

a) moltiplicare il diametro per se stesso: 14 * 14 = 196 ;
calcolare i 3/14: 196 * 3/14 = 42 ;
sottrarre dal quadrato del diametro: 196 – 42 = 154 braccia^2,
area del cerchio.

b) Moltiplicare il diametro per se stesso: 14 * 14 = 196 ;
moltiplicare per 11: 196 * 11 = 2156 ;
dividere per 14: 2156 : 14 = 154 braccia^2,
area del cerchio.

c) Calcolare i 3/14 del diametro: (3/14) * 14 = 3 ;
sottrarre dal diametro: 14 – 3 = 11 ;
moltiplicare per il diametro: 11 * 14 = braccia^2, area
del cerchio.

d) Dividere per 2 il diametro: 14 : 2 = 7 ;
calcolare la lunghezza della circonferenza:
diametro * (3 + 1/7) = 14 * (3 + 1/7) = 44 braccia ;
dividere per 2: 44 : 2 = 22 ;
moltiplicare per metà del diametro: 22 * 7 = 154 braccia^2,
area del cerchio.

e) Moltiplicare il diametro per la circonferenza: 14 * 44 = 616 ;
dividere per 4: 616 : 4 = 154 braccia^2,
area del cerchio.

f) Moltiplicare il diametro per se stesso: 14 * 14 = 196 ;
moltiplicare per la costante (3 + 1/7): 196 * (3 + 1/7) = 616 ;

dividere per 4: $616 : 4 = 154$ braccia^2,
area del cerchio.

BIBLIOGRAFIA

1. Gazzaia (della) Tommaso, “Pratica di geometria e tutte misure di terre” (dal ms. C III. 23 della Biblioteca Comunale di Siena), a cura di Cinzia Nanni e con introduzione di Gino Arrighi, Siena, Servizio Editoriale dell’Università di Siena, 1982, pp. 77.
2. Simi Annalisa (a cura e con introduzione di), Anonimo Fiorentino, “Trattato di geometria pratica” (dal Codice L.IV.18 (sec. XV) della Biblioteca Comunale di Siena, Università di Siena, Siena, “Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale” n. 21, 1993, pp. 195.
3. Simi Annalisa, “Celerimensura e strumenti in manoscritti dei secoli XIII – XV”, in “Itinera matematica. Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno”, a cura di Raffaella Franci – Paolo Pagli – Laura Toti Rigatelli, Siena, Centro Studi sulla Matematica Medioevale – Università di Siena, Siena, 1996, pp. 71 – 121.
4. Simi Annalisa, “Problemi caratteristici della geometria pratica nei secoli XIV-XVI”, in “Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale”, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, 2000, pp. 154 – 199.
5. Simi Annalisa, “L’eredità della *Practica Geometriae* di Leonardo Pisano nella geometria del basso Medioevo e del primo Rinascimento”, in “Bollettino di Storia delle Scienze matematiche”, Pisa-Roma, XXIV, 2004, n. 1, pp. 9-41.
6. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.