sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: mesolabio, Eratostene, Archita di Taranto, duplicazione cubo, Apollonio, Filone di Bisanzio, neusis, Nicomede, Diocle, Erone, Pappo, Leonardo da Vinci, Dürer, Zarlino, Cosimo Bartoli, Huygens, Montucci, Buonafalce, Vargiù, Boccali, Rivelli, Daniele, Ghersi, Bartolo, Gamba

Nota: questo articolo contiene una raccolta, senza alcuna pretesa di organicità, di materiali relativi agli strumenti meccanici, ai metodi geometrici e alle formule utilizzate nel passato per calcolare graficamente la radice cubica di un numero. La sua natura puramente *divulgativa* ha portato a escludere le soluzioni basate sull'uso delle *coniche*.

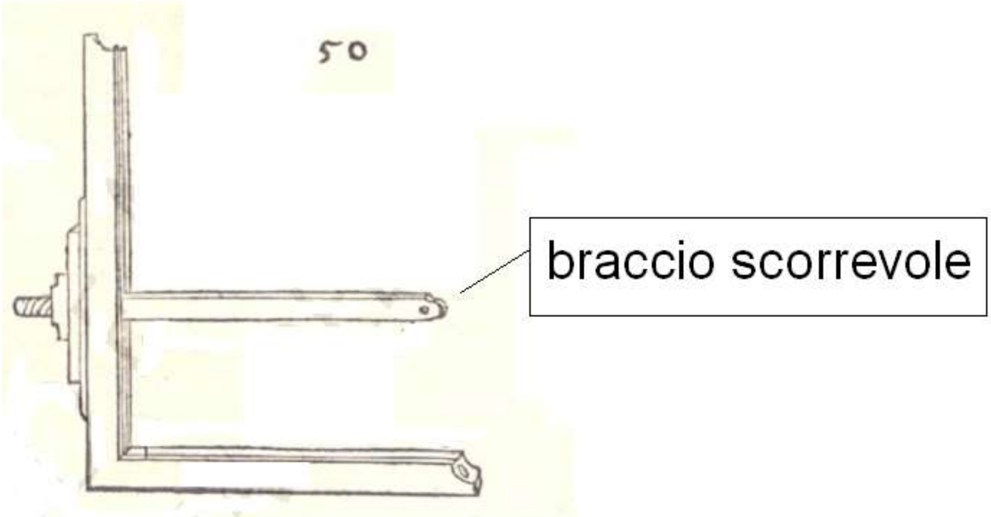
RADICE CUBICA

Nei tempi passati i geometri hanno elaborato metodi approssimati per determinare la radice cubica di un numero con l'aiuto di costruzioni geometriche o di strumenti meccanici. In questo articolo ne sono descritti alcuni.

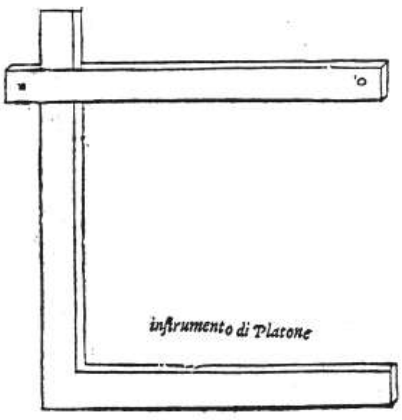
Secondo Werner Soedel e Vernard Foley ("Le antiche catapulte", citato in bibliografia), un ignoto geometra greco del III o IV secolo a.C., avrebbe creato un semplice dispositivo meccanico in grado di calcolare la radice cubica di un numero.

Fra gli strumenti antichi utilizzati allo scopo di ricavare un valore approssimato della radice cubica di un numero rientra una semplice *macchina matematica* conosciuta come *squadra* o *strumento* di Platone che alla lontana somiglia a una riga a T.

Essa è stata disegnata dal Dürer nel suo principale trattato geometrico e anche nella sua traduzione in italiano a cura di Cosimo Bartoli:

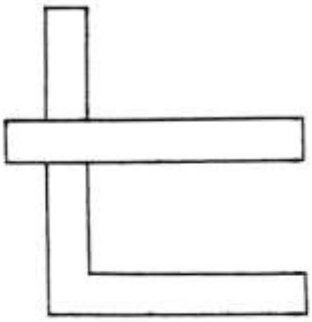


Il disegno dello strumento fu poi ripreso da Daniele Barbaro nella traduzione in italiano del trattato di architettura di Vitruvio e fu da lui chiamato *instrumento di Platone*:



Lo strumento consiste in una squadra a forma di “L” recante in alto un secondo braccio orizzontale che può scorrere lungo l’asta verticale della “L” come una comune riga a “T”.

Nell'insieme, esso ha la forma di una “F” rovesciata:

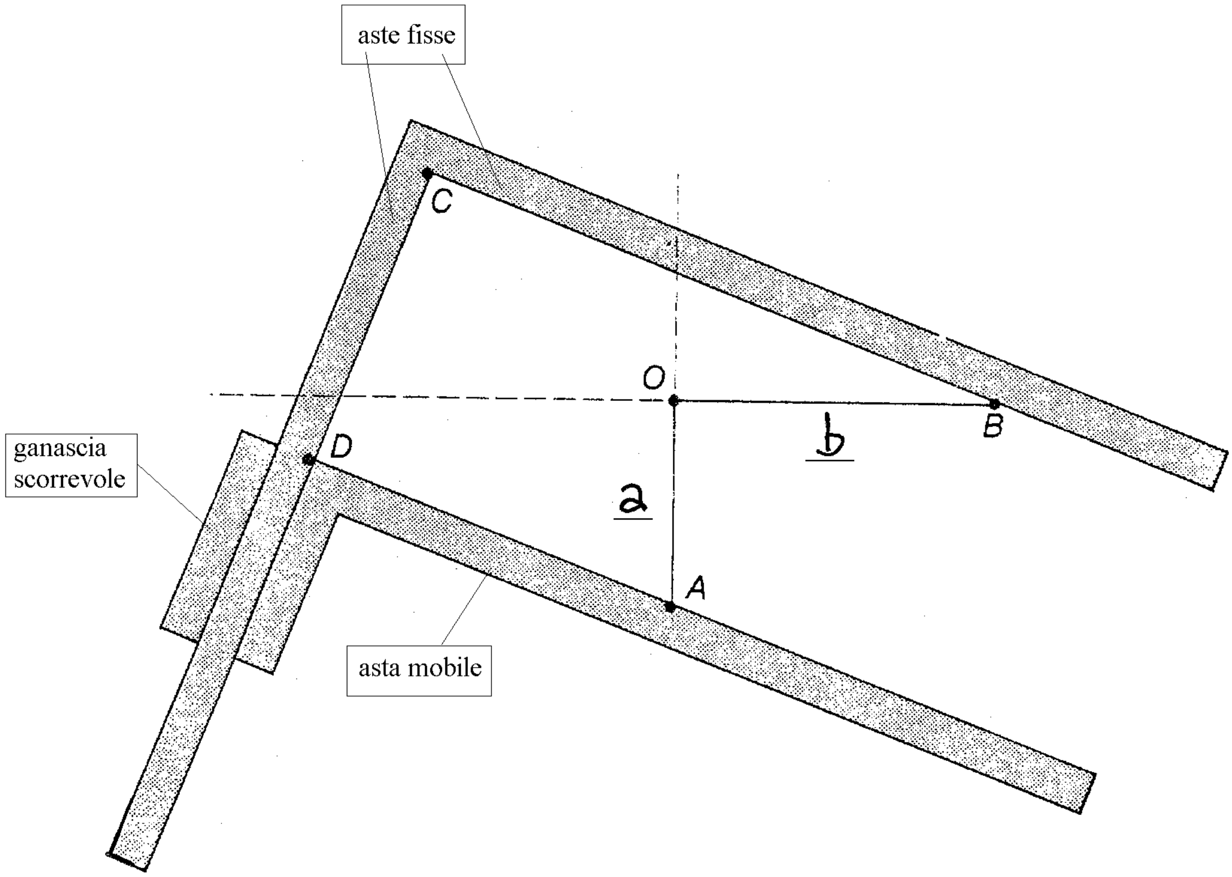


Serviva a determinare per via geometrica la lunghezza di due segmenti medi proporzionali fra altri due conosciuti e per calcolare radici cubiche.

È noto che i Greci usavano metodi geometrici per risolvere problemi di natura aritmetica.

L’estrattore di radice cubica

Dal citato articolo di Werner Soedel e Vernard Foley riportiamo la descrizione dello strumento che recava due aste fisse collegate a forma di angolo retto:



Lungo il suo lato verticale scorreva una ganascia collegata a un'asta mobile e parallela a quella fissa orizzontale.

Per calcolare la radice cubica di un numero Z, veniva seguita questa procedura: era scelto un segmento lungo a ed era calcolata la lunghezza di un altro segmento b tale che:

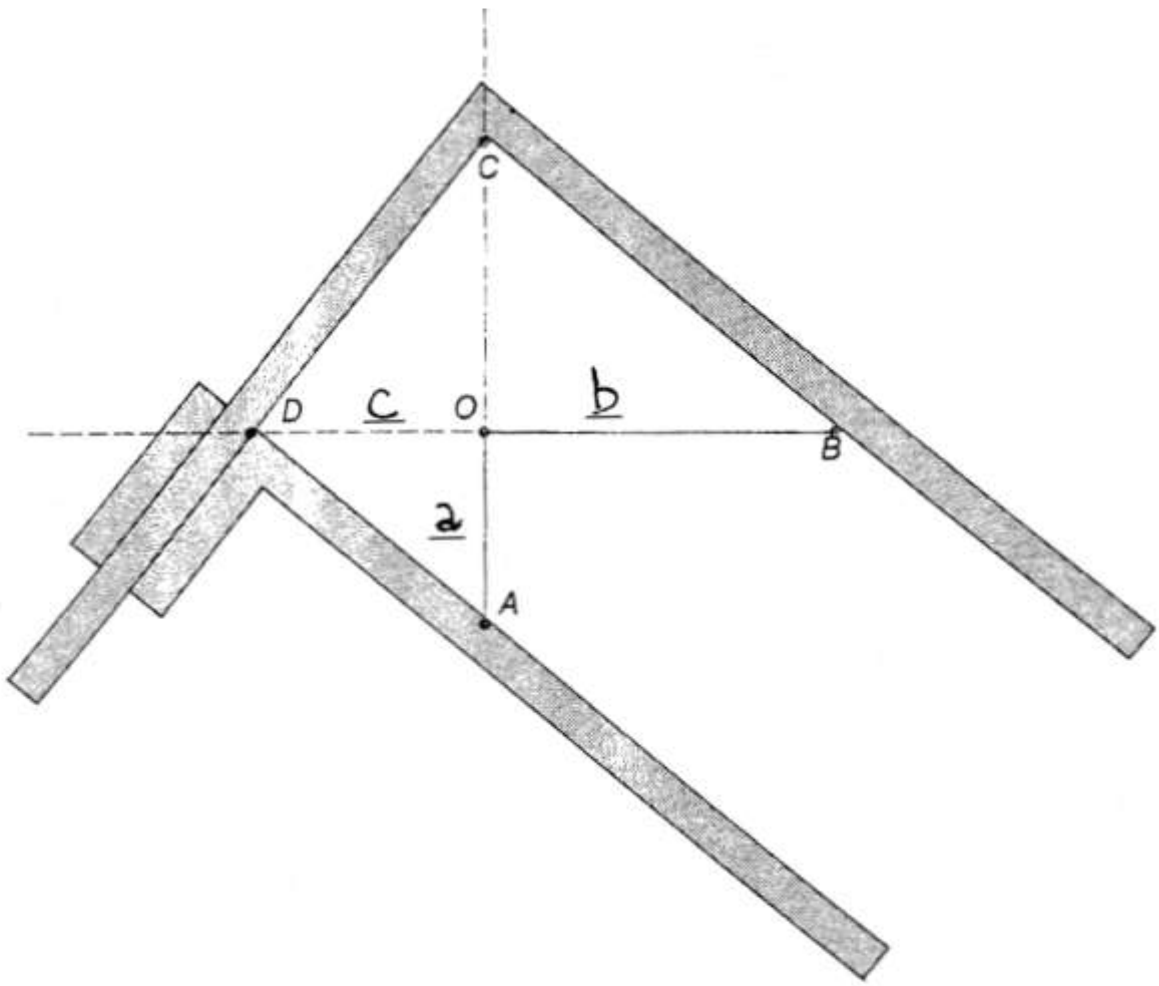
$$b = Z/a^2 .$$

I due segmenti a e b erano disegnati ad angolo retto, come nella figura precedente.

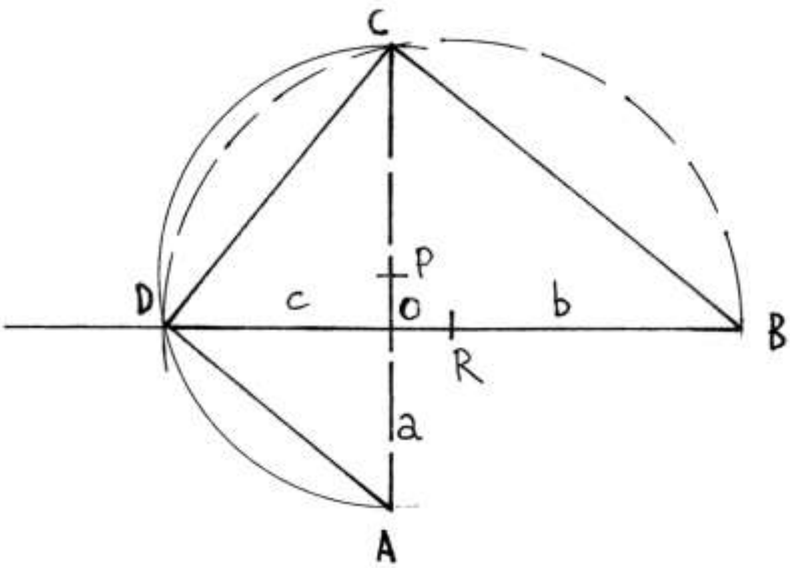
I punti A e B, estremi dell'angolo retto formato dai segmenti a e b erano posti a contatto con le aste.

L'estrattore veniva manovrato fino a posizionare il punto C sull'allineamento di OA e il punto D sul prolungamento di OB.

Il segmento DO, di lunghezza c, era la radice cubica del numero Z:



Il secondo teorema di Euclide (sui triangoli rettangoli) stabilisce che l’altezza relativa all’ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti nei quali essa divide l’ipotenusa stessa; la figura che segue riproduce la precedente figura senza lo schema dello strumento:



Determinare i punti medi di AC [P] e di DB [R]. Con centro in P e raggio AP disegnare la semicirconferenza passante per i punti A, D e C; dato che ADC è un triangolo rettangolo, per il 2° teorema di Euclide vale la seguente relazione:

$$OA : OD = OD : OC \qquad (1)$$

Con centro in R e raggio RB disegnare la semicirconferenza passante per i punti D, C e B. Anche il triangolo DCB è rettangolo nel vertice C; in esso vale la relazione:

$$OD : OC = OC : OB \qquad (2)$$

Per meglio chiarire il funzionamento dell'estrattore di radice cubica, ricaviamo il valore di OC dalla proporzione (1):

$$OC = OD^2/OA \,.$$

Sostituiamo questo valore nella proporzione (2):

$$OD : \frac{OD^2}{OA} = \frac{OD^2}{OA} : OB$$

da cui:

$$OB = \left(\frac{OD^2}{OA}\right)^2 \cdot \frac{1}{OD} = \frac{OD^4}{OA^2 \cdot OD} = \frac{OD^3}{OA^2} \,.$$

Per OA = 1 si ha: $OB = OD^3$.

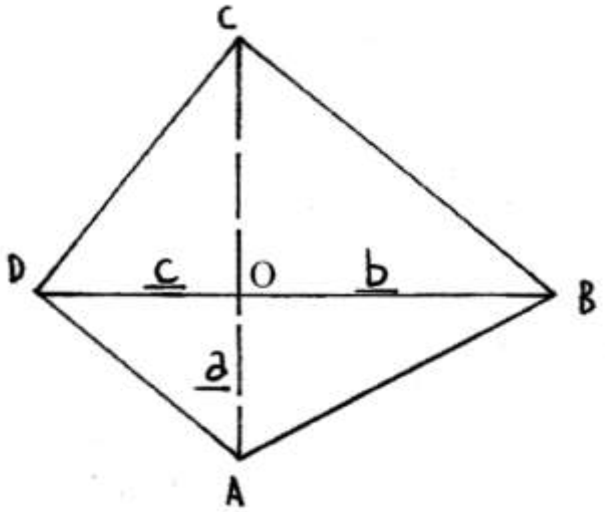
Ma

$$OB = \frac{Z}{a^2} = \frac{Z}{1^2} = Z \,.$$

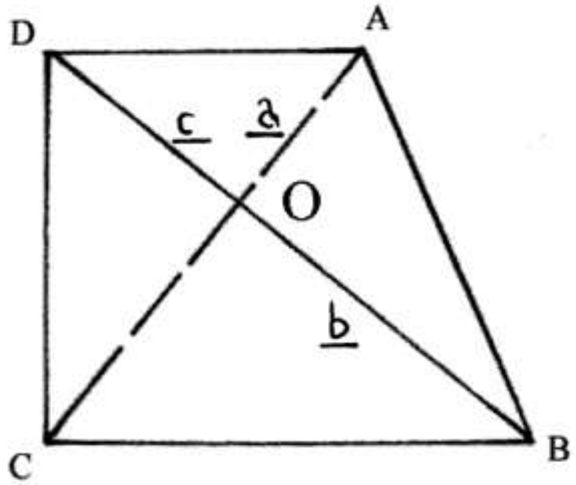
Ne consegue:

$$OD = \sqrt[3]{Z} \,.$$

Collegare i vertici A e B; ADCB è un trapezio rettangolo:



Ruotare e riflettere il trapezio ADCB fino a rendere le basi DA e CB orizzontali e il lato DC perfettamente verticale:



Le diagonali CA e DB sono fra loro *perpendicolari*.
Il problema è facilmente risolvibile con una costruzione che, per tentativi, ottenga
OB = 2 * OA o b = 2 * a .

Il mesolabio di Eratostene

Il matematico greco Eratostene di Cirene (276-194 a.C.) inventò o perfezionò lo strumento che fu chiamato *mesolabio*.

L'estrattore di radice cubica divenne indispensabile per progettare le antiche catapulte lancia sassi usate a partire dagli ultimi secoli a.C. nelle guerre del Mediterraneo.

Gli ingegneri militari greci usarono l'estrattore per calcolare il diametro del fascio di corde delle catapulte in relazione con il peso dei proiettili di pietra da lanciare.

Fra gli ingegneri che progettarono e costruirono catapulte sono Filone di Bisanzio, Archimede e Erone di Alessandria.

Le unità di misura da essi usate erano quelle greche:

- il *dito* equivale a circa 19,8 mm;
- il peso era misurato in *mine* con 1 *mina* equivalente a circa 437 g.

Gli ingegneri greci usarono una formula semplificata per calcolare il diametro della corda, d, espresso in *dita*, e P il peso dei proiettili misurato in *mine*:

$$d = 1{,}1 \cdot \sqrt[3]{100 * P}$$

Archimede realizzò una catapulta in grado di scagliare il peso di 3 *talenti* (equivalenti a 78 kg). *Un talento* valeva 60 mine e cioè:

1 talento = 60 mine = 60 * 437 ≈ 26 220 g ≈ 26,22 kg
3 talenti = 3 * 60 mine ≈ 3 * 26,22 kg ≈ 78,66 kg.

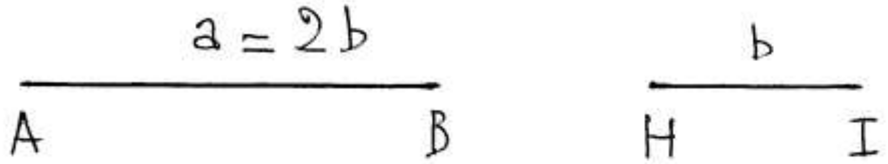
Applicando la formula precedente a questo caso specifico risulta:

$$d = 1{,}1 * \sqrt[3]{100 * 180} \approx 1{,}1 * 26{,}2074 \approx 28{,}828 \text{ dita}$$

L'uso di una catapulta di queste dimensioni (con un diametro delle corde pari a 570,79 mm) imponeva l'estrazione della radice cubica di (100 * 180 = 18 000), ma gli ingegneri non conoscevano un numero naturale che ne fosse la soluzione, né disponevano di tavole di logaritmi (introdotti nel 1614 dal matematico scozzese John Napier o Nepero).

Essi non erano in grado di calcolare per via aritmetica la radice cubica di un numero ma potevano ricorrere a un estrattore. Il risultato precedente, calcolato con uno strumento, veniva arrotondato per eccesso a 29 dita (29 * 19,8 mm = 574,2 mm).

Eratostene elaborò un metodo per determinare due lunghezze proporzionali fra due segmenti dati, a e b, nel rapporto di 2:



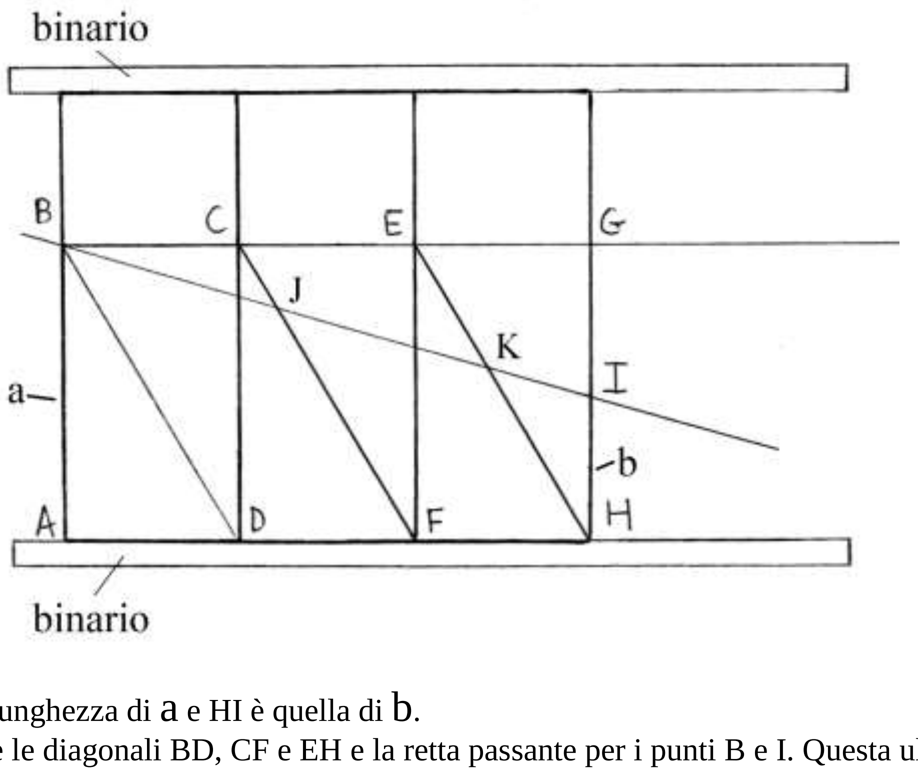
Le due lunghezze incognite sono x e y:

$$a : x = x : y = y : b$$

Eratostene usò uno strumento meccanico per determinare le lunghezze di x e y: il *mesolabio*.

La precisione offerta da questo strumento è relativa ma in teoria il risultato è esatto.

Esso è formato da un telaio con *tre* rettangoli di uguali dimensioni che possono scorrere fra due sostegni orizzontali e paralleli che agiscono come due *binari*: un qualcosa di simile a certe porte e pannelli scorrevoli dei mobili moderni e degli scaffali metallici.

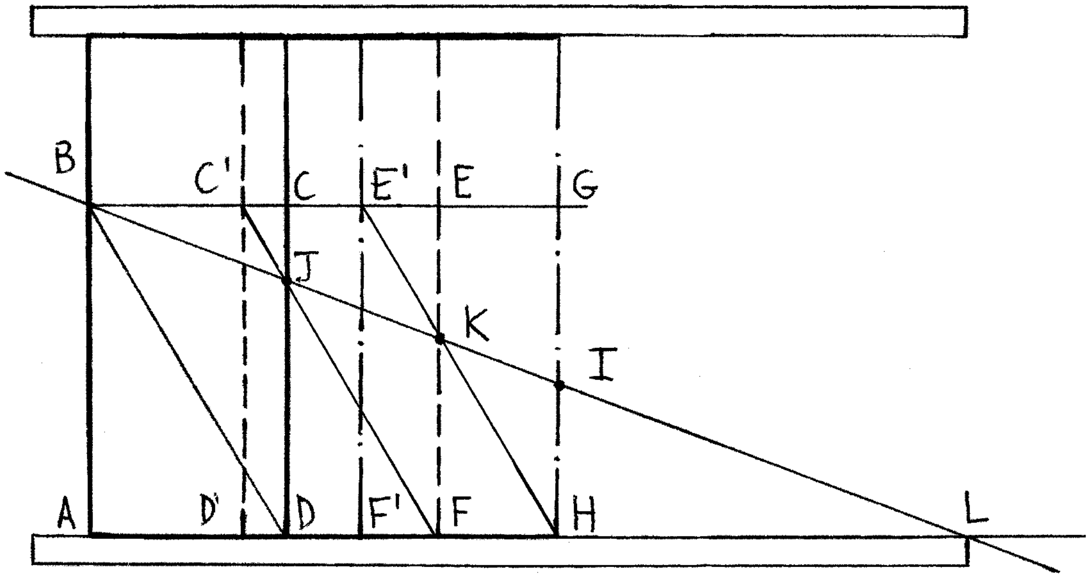


AB è la lunghezza di a e HI è quella di b.

Tracciare le diagonali BD, CF e EH e la retta passante per i punti B e I. Questa ultima taglia due diagonali nei punti J e K.

Con lo scorrimento lungo i *binari* i cateti verticali AB, DC, FE e HG restano fra loro paralleli come pure accade alle diagonali (BD, CF e EH) disegnate nel grafico che segue.

Spostare verso sinistra il rettangolo DCEF fino a portare il punto J sul segmento CD: il rettangolo assume la nuova posizione D'C'EF. Muovere verso sinistra il rettangolo FEGH fino a collocare il punto K sul lato EF: il rettangolo si trova nella nuova posizione F’E’GH. Il punto I è rimasto sul segmento GH.



Per i punti B, J, K e I tracciare una retta: essa stabilisce il punto L.

I triangoli rettangoli ABL, DJL, FKL e HIL sono *simili* per cui valgono le seguenti proporzioni:

$$BA : JD = JD : KF = KF : IH$$

I segmenti JD e KF sono i medi proporzionali fra BA e IH.

Fissiamo le seguenti relazioni:

$$JD = x \qquad \text{e} \qquad KF = y\,.$$

La precedente proporzione diviene

$$a : x = x : y = y : b\,.$$

Allo scopo di ricavare il valore dell’incognita x, consideriamo la seconda parte della proporzione:

$$x : y = y : b \qquad \text{da cui} \qquad x = y^2/b\,.$$

Sostituiano il valore di x nella prima parte della proporzione:

$$a : x = x : y$$

$$a : (y^2/b) = (y^2/b) : y\,.$$

Ne consegue il valore di a:

$$a = \frac{y^4}{b^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^3}{b^2}$$

Ma $a = 2 * b$ per cui

$$2 \cdot b = \frac{Y^3}{b^2} \qquad 2 \cdot b^3 = y^3$$

da cui

$$y = b \cdot \sqrt[3]{2}$$

Sostituiamo questo ultimo valore nella prima parte della proporzione, per calcolare X:

a : X = X : Y

$$x^2 = a \cdot y = 2 \cdot b \cdot b\sqrt[3]{2} = 2 \cdot b^2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

X è dato da:

$$X = b \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$$

Infine, attribuiamo i valori *convenzionali* di 2 ad a e di1 a b, per cui risulta:

a = 2 e b = 1

$$X = \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$$ e

$$y = \sqrt[3]{2}$$

Il cateto KF è lungo

$$\sqrt[3]{2}$$ che è il valore cercato con il *mesolabio* di Eratostene.

A questa soluzione si giunge anche per via aritmetica sostituendo i valori 2 (a AB) e 1 (a HI) nella proporzione iniziale:

2 : x = x : y = y : 1

Dalla proporzione 2 : x = x : y ricaviamo $x^2 = 2*y$.

Dalla proporzione x : y = y : 1 ricaviamo $y^2 = x$.

Sostituiamo questo ultimo valore nella precedente espressione:

$(y^2)^2 = 2 + y \rightarrow y^4 = 2 * y \rightarrow y^3 = 2$ e

$$y = \sqrt[3]{2}$$

La proporzione

a : x = x : y = y : b è una *progressione geometrica* con ragione

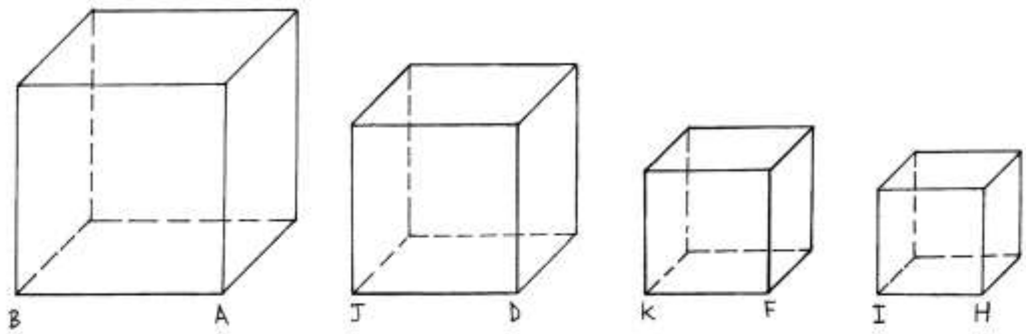
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \approx \frac{1}{1{,}25992105} \approx 0{,}793700$$

$$2 : (\sqrt[3]{2})^2 = (\sqrt[3]{2})^2 : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} : 1$$

Con buona approssimazione, la precedente proporzione può essere scritta come segue:

$$2 : 1{,}5874 = 1{,}5874 : 1{,}2599 = 1{,}2599 : 1\ .$$

La figura che segue mette a confronto *quattro cubi* disegnati con la stessa scala di rappresentazione e con lati lunghi BA, JD, KL e IH:



Fra i volumi dei quattro cubi vale la seguente proporzione:

$$BA^3 : JD^3 = JD^3 : KF^3 = KF^3 : IH^3$$

In lettere, la proporzione può essere scritta come segue:

$$a^3 : x^3 = x^3 : y^3 = y^3 : b^3$$

In numeri, la proporzione diviene:

$$2^3 : 1{,}5874^3 = 1{,}5874^3 : 1{,}2599^3 = 1{,}2599^3 : 1^3$$

Semplificando, la proporzione diviene:

$$8 : 4 = 4 : 2 = 2 : 1$$

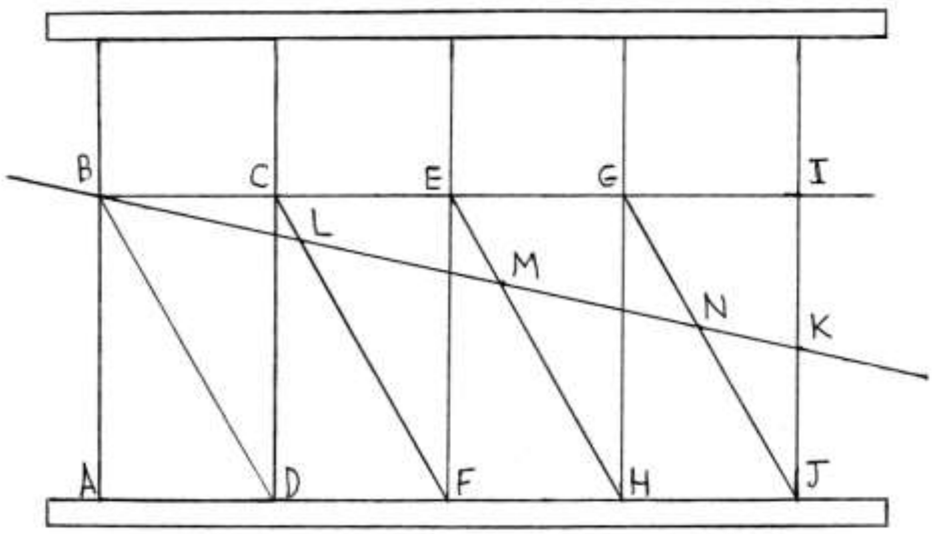
Anche questa proporzione è una *progressione geometrica* di ragione 2:

$$2^3 : 2^2 = 2^2 : 2^1 = 2^1 : 2^0$$

Un'estensione del mesolabio di Eratostene

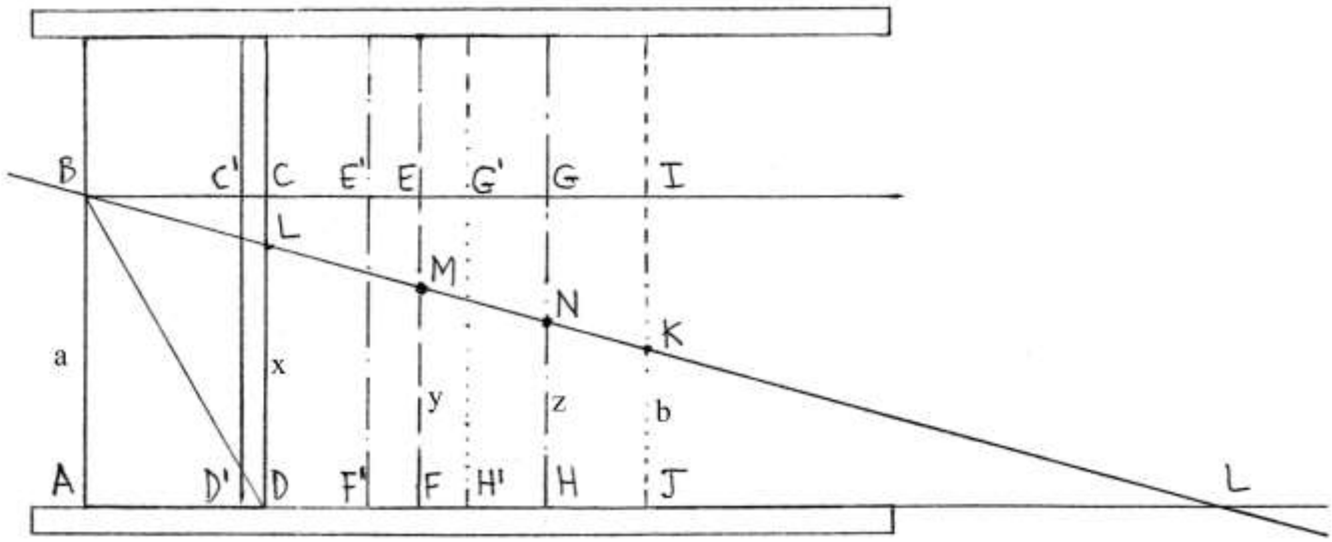
Dal mesolabio di Eratostene deriva lo strumento che è spiegato di seguito.

Lo strumento è un mesolabio a *quattro* tavolette. La figura ne descrive la struttura:



Fra i segmenti AB e JK devono essere inseriti *tre* medi proporzionali.

Usando il metodo descritto nel precedente paragrafo si ottiene la costruzione che segue:



Le lunghezze dei segmenti sono legate dalla proporzione

$$BA : LD = LD : MF = MF : NH = NH : KJ$$

$$a : x = x : y = y : z = z : b$$

Nel caso di $a = 2$ e $b = 1$ la proporzione diviene

$2 : x = x : y = z : z : 1$.

Con gli opportuni calcoli è facile stabilire che la proporzione è una *progressione geometrica* di ragione

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}} \approx 1{,}1892$$

La proporzione può essere scritta come segue:

$$2 : 1{,}68178 = 1{,}68178 : 1{,}4142 = 1{,}4142 : 1{,}1892 = 1{,}1892 : 1$$

$$2 : \sqrt[4]{2} * \sqrt{2} = \sqrt[4]{2} * \sqrt{2} : \sqrt{2} = \sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{2} = 1$$

$$2 : \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{8} : \sqrt{2} = \sqrt{2} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2} : 1$$

\- APPROFONDIMENTO -

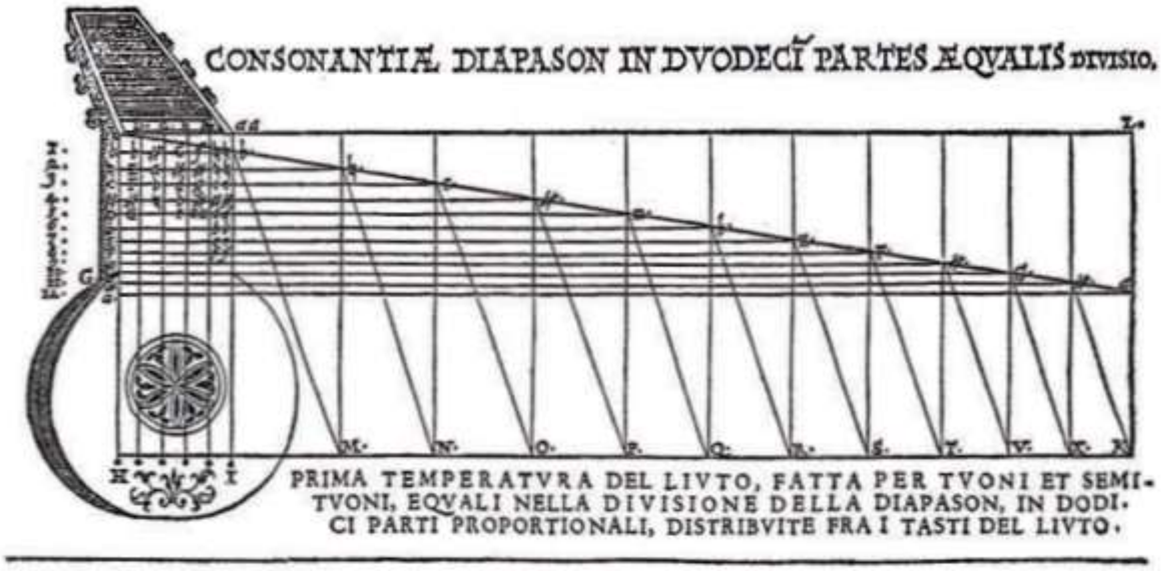
I due esempi appena mostrati, con *due* e *tre* numeri proporzionali inseriti fra due dati, porta a una generalizzazione: il numero *R* dei rettangoli di uguali dimensioni occorrenti per costruire un generico mesolabio per un numero *n* di intermedi è dato da

$R = n + 1$.

Nel Rinascimento, Niccolò Tartaglia (1499 – 1557) e Daniele Barbaro (1514 – 1570) studiarono l'uso del mesolabio.

Il musicologo veneziano Gioseffo Zarlino (1517 – 1590) utilizzò il mesolabio e ne costruì degli esemplari allo scopo di suddividere un'ottava in parti uguali.

La figura che segue è un mesolabio usato da Zarlino (nelle sue *Istituzioni Armoniche* del 1558) per il posizionamento dei tasti del liuto:

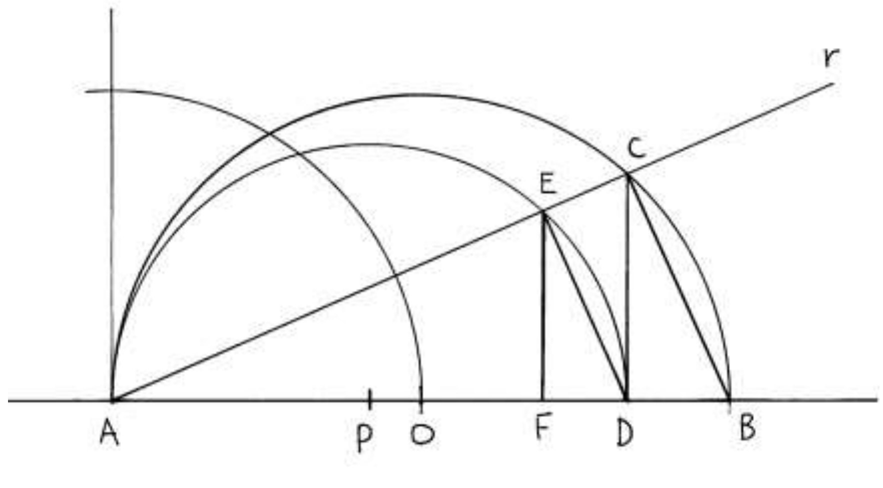


Il metodo di Archita

Prima di Eratostene, Archita di Taranto (428 – 360 a.C.) propose un suo metodo. Egli fu un matematico appartenente alla Scuola Pitagorica.

Nell'insieme i geometri greci delle varie epoche elaborarono almeno *dodici* differenti metodi per la soluzione del problema della duplicazione del cubo.

Di seguito è presentata una breve descrizione della soluzione proposta da Archita.



Su di una retta orizzontale scegliere un punto, O, e disegnare una semicirconferenza di centro O e raggio OA = OB.

Dal punto A tracciare una semiretta inclinata a piacere, r, che taglia la semicirconferenza in un punto, C.

Da questo ultimo punto abbassare la perpendicolare a AB: è stabilito il punto D.

Determinare il punto medio di AD: è P.

Fare centro nel punto P e con raggio PA = PD disegnare una seconda semicirconferenza che incontra la semiretta r in un punto, E.

Dal punto E abbassare la perpendicolare a AB: è il segmento EF.

Collegare i punti E e D.

Nella figura sono presenti tre *triangoli rettangoli*: AED, ACB e ACD, i primi due inscritti nei due semicerchi.

L’angolo EAD è comune ai tre triangoli: questi sono fra loro *simili* perché hanno certamente due angoli uguali (e lo è anche il terzo angolo): EAD e un angolo retto in ciascuno dei tre.

Le lunghezze dei lati dei tre triangoli sono in proporzione:

ipotenusa AB : cateto AC = ipotenusa AC : cateto AD = ipotenusa AD : cateto AE .

Semplificando

$$AB : AC = AC : AD = AD : AE$$

Le ipotenuse e i cateti dei tre triangoli sono fra loro legati perché il cateto di un triangolo (ad esempio AC di ACB) è l’ipotenusa di un triangolo più piccolo (AC di ACD).

Dalla prima parte della proporzione ricaviamo il valore di AC:

$AB : AC = AC : AD$ da cui $AC^2 = AB * AD$.

Ne deriva

$AC = \sqrt{(AB * AD)}$

Sostituiamo questo valore nella seconda parte della proporzione:

$AC : AD = AD : AE$

$\sqrt{(AB * AD)} : AD = AD : AE$

Il valore di AD è dato da

$AD^2 = AE * \sqrt{(AB * AD)}$

Elevando al quadrato entrambi i membri dell’eguaglianza si ha:

$$AD^4 = AE^2 * AB * AD$$

Semplificando

$$AD^3 = AE^2 * AB$$

Se le lunghezze *convenzionali* dei segmenti AE e AB è: AE = 1 e AB = 2, la precedente espressione diviene

$$AD^3 = 1^2 * 2 = 2$$

La lunghezza di AD è la radice cubica di 2:

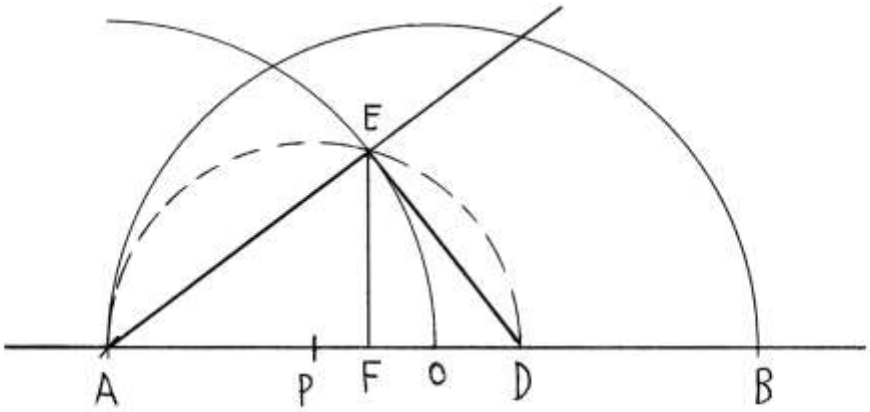
$$AD = \sqrt[3]{2}$$

La costruzione presentata nella figura deve essere modificata allo scopo di tracciare un segmento AE lungo la metà di quello AB: AB = 2 * AE.

Quando questa condizione è verificata, la lunghezza del segmento AD (ipotenusa del triangolo rettangolo AED) è quella dello spigolo del cubo di volume doppio di quello che ha spigolo AE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Con ulteriori passaggi intermedi – qui omessi – si arriva alla costruzione mostrata nella figura che segue:



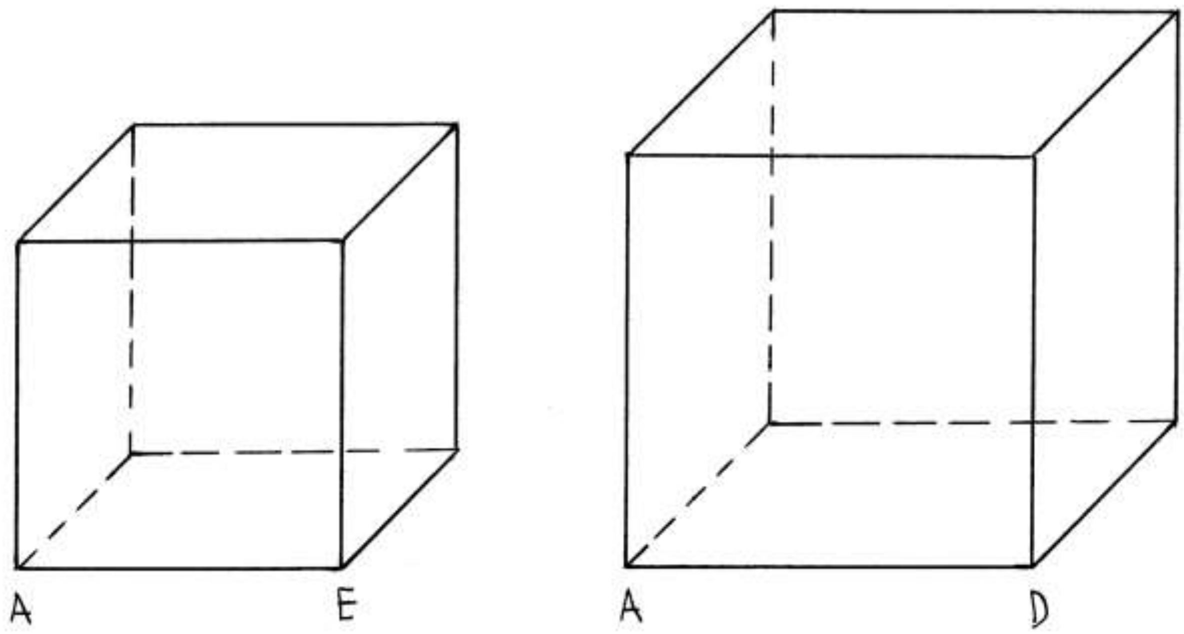
Con centro in A è stato disegnato un arco di circonferenza con raggio AO.

Il punto E è il vertice del triangolo rettangolo AED inscritto in una semicirconferenza di centro P e raggio PA = PD.

Se AE è *convenzionalmente* 1 (e AB = 2), AD è lungo

$$AD = \sqrt[3]{2}$$

AE è lo spigolo del cubo da duplicare e AD è lo spigolo del cubo doppio:

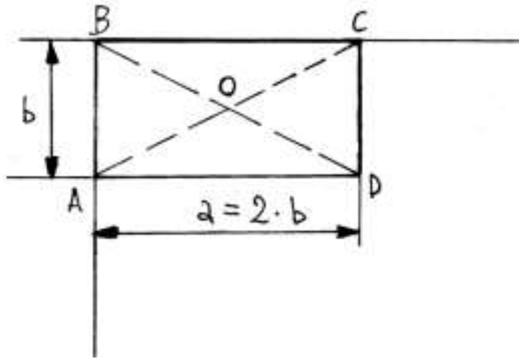


La duplicazione del cubo secondo Apollonio

Apollonio di Perga (circa 262 – 190 a.C.) elaborò una soluzione *approssimata* del problema della duplicazione del cubo.

Costruire il rettangolo ABCD con lati lunghi $AD = a$ e $AB = b$, con

$AD = 2 * AB$ e $a = 2 * b$.



Devono essere determinate due lunghezze, x e y, medie proporzionali fra a e b:

$$a : x = x : y = y : b$$

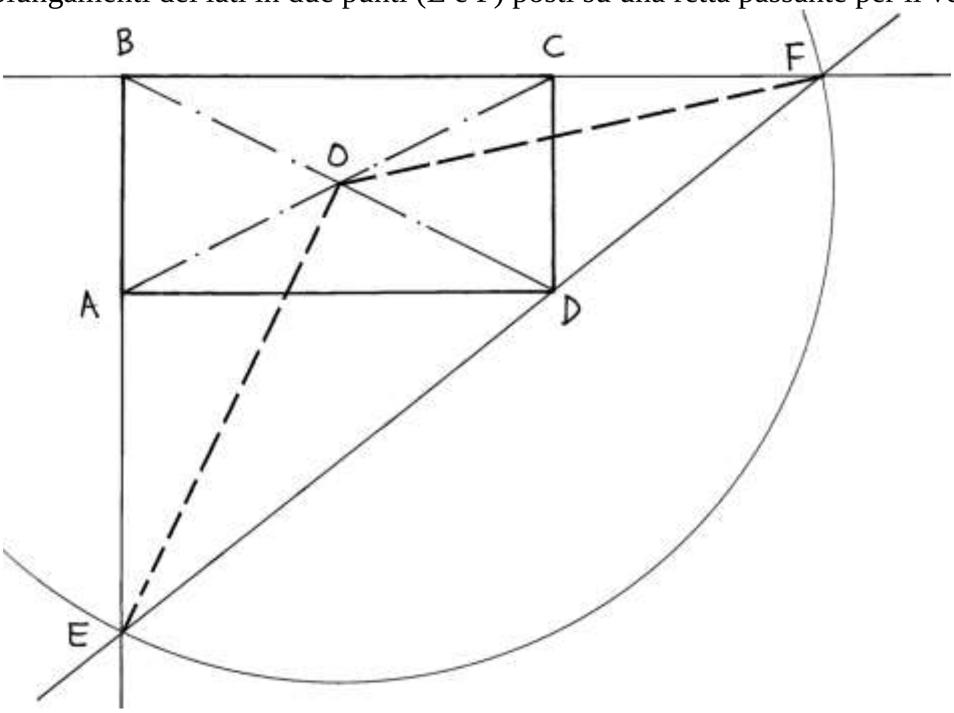
Nel caso della figura $a = 2 * b$, quindi:

$$2*b : x = x : y = y : b$$

Prolungare verso destra il lato BC e verso il basso BA.

Tracciare le diagonali AC e BD che si intersecano nel centro O.

Fare centro nel punto O e, *per tentativi*, determinare il raggio di un arco di circonferenza che intersechi i prolungamenti dei lati in due punti (E e F) posti su una retta passante per il vertice D:



OE e OF sono due raggi dello stesso arco di circonferenza di centro O.

Con buona approssimazione vale la seguente relazione:

$$AD : AE = AE : CF = CF : AB$$

AE è l'incognita x e CF quella y.

La proporzione può essere scritta come segue:

$$2 * b : AE = AE : CF = CF : b$$

$$2 * b : x = x : y = y : b$$

Risulta

$$CF^3 = y^3 = 2 * b^3 = 2 * AB^3$$

$$CF = AB \cdot \sqrt[3]{2} = b \cdot \sqrt[3]{2}$$

CF è la lunghezza dello spigolo del cubo di *volume doppio* di quello che ha per spigolo il segmento AB.

A sua volta, AE è la lunghezza dello spigolo del cubo di *volume doppio* di quello di lato AD e il *quadruplo* di quello di spigolo AB:

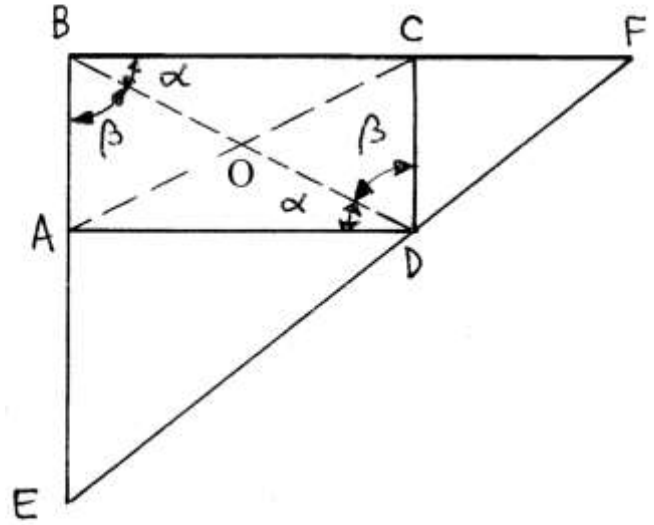
$$AE^3 = 2 * AD^3 = 2 * (2 * AB)^3 = 2 * (2 * b)^3$$

$$AE = 2 * b * \sqrt[3]{2}$$

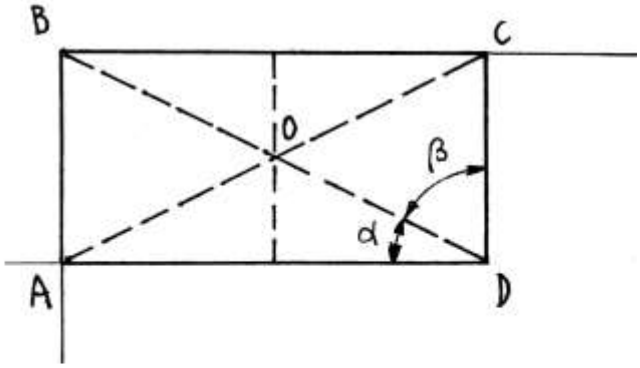
- APPROFONDIMENTO -

Il metodo proposto da Apollonio si presta a elaborare delle costruzioni grafiche capaci di fornire una soluzione accettabilmente approssimata del problema della duplicazione del cubo.

La figura che segue riprende lo schema di Apollonio:



ABCD è un *doppio quadrato*:



AC e BD sono le sue due diagonali: esse formano i due angoli complementari α e β.
La tangente dell'angolo α è data da:

tg α = CD/BC = CD/(2 * CD) = ½ .

L'angolo è ampio:

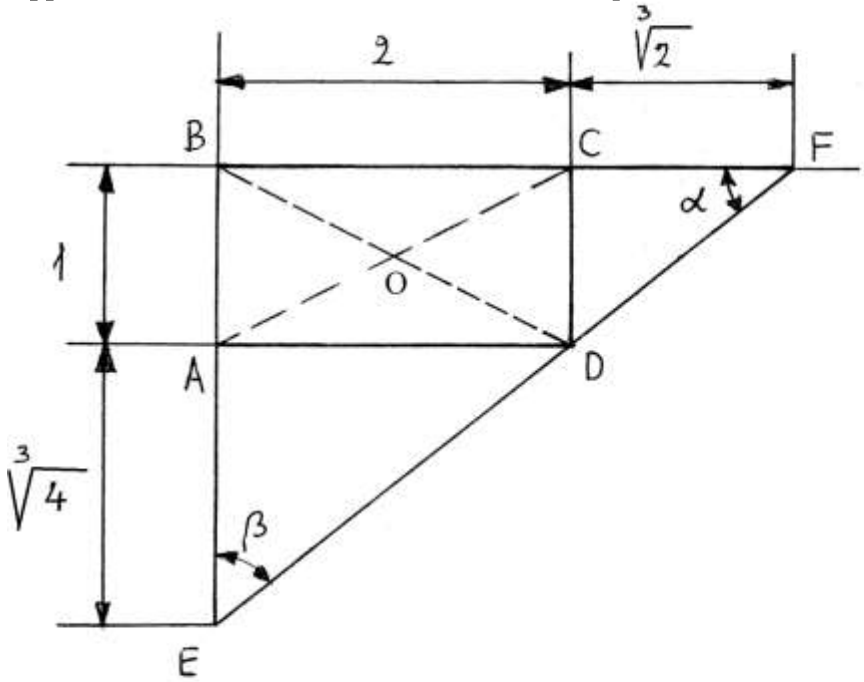
α ≈ 26,56° ≈ 26,5° .

A sua volta l'ampiezza approssimata dell'angolo complementare β è:

β = 90° – α ≈ 90° – 26,56° ≈ 63,44° ≈ 63,5°.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Approfondiamo l'analisi della costruzione di Apollonio:



Nota: gli angoli complementari α e β presenti nella figura qui sopra non hanno niente a che fare con gli angoli α e β definiti all'interno del rettangolo ABCD dalle sue diagonali AC e BD: infatti i segmenti AC e EF *non* sono paralleli.

I segmenti AE e CF hanno le seguenti lunghezze:

$$AE = \sqrt[3]{4} \quad \text{e} \quad CF = \sqrt[3]{2}.$$

Il triangolo rettangolo EBF forma due angoli complementari α e β.
La tangente dell'angolo α è:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{BE}{BF} = \frac{BA + AE}{BC + CF} = \frac{1+\sqrt[3]{4}}{2+\sqrt[3]{2}} \cong 0{,}79367$$

Ad essa corrisponde un'ampiezza uguale a:

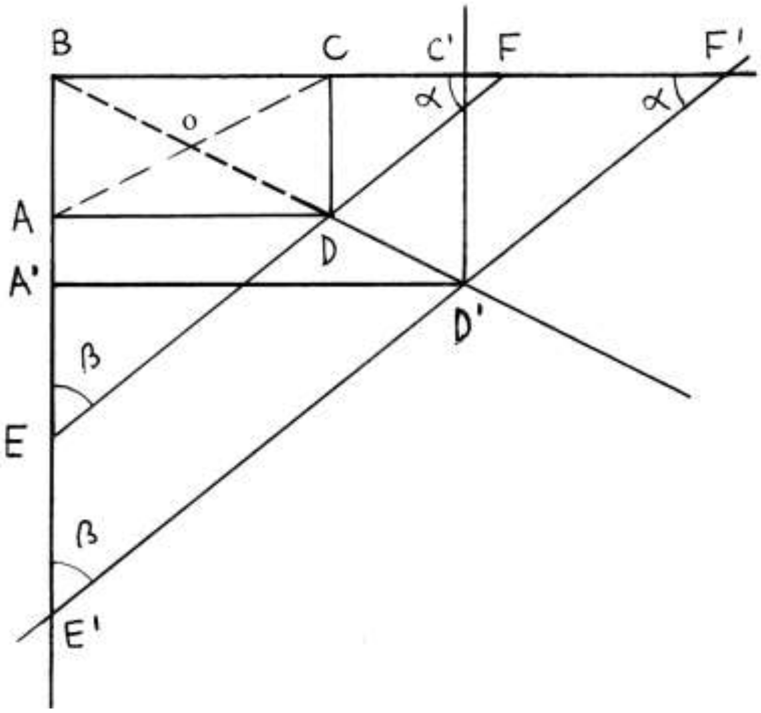
α ≈ 38,5° .

L’angolo complementare β è ampio:

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 38{,}5° \approx 51{,}5° .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Applichiamo il metodo *approssimato* risalente a Apollonio. Costruire un *doppio quadrato* ABCD di dimensioni convenzionali 1x2 e prolungare verso il basso la diagonale BD.



Tracciare l’ipotenusa EF con le inclinazioni α e β appena calcolate e quindi parallela alla diagonale AC.

Prolungare verso destra BF e verso il basso BE.

Costruire il nuovo *doppio quadrato* A’BC’D’ con BA’ uguale alla lunghezza dello spigolo del cubo da duplicare.

I rettangoli ABCD e A’BC’D’ sono *simili*.

Per il punto D’ disegnare una retta parallela all’ipotenusa EF: essa interseca le semirette uscenti da B in due nuovi punti, E’ e F’.

I segmenti C’F’ e A’E’ hanno le lunghezze cercate:

$$C'F' = BA' \cdot \sqrt[3]{2}$$ e

$$A'E' = BC' \cdot \sqrt[3]{2}$$

- -

<u>La costruzione di Filone di Bisanzio</u>

Filone di Bisanzio (circa 280 – 220 a.C.) apportò una piccola modifica al metodo di Apollonio.

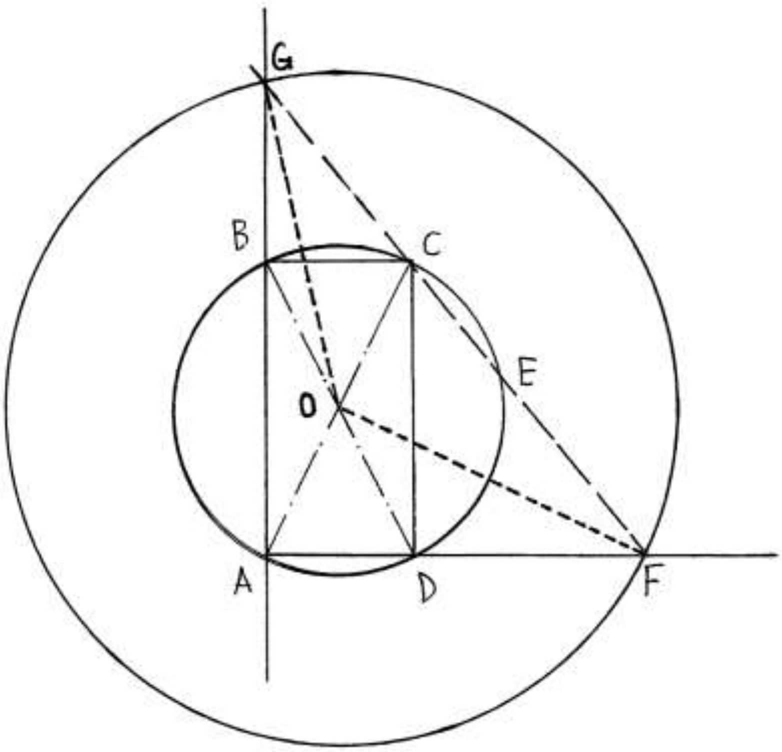
ABCD è il rettangolo con lati lunghi nel rapporto $2 : 1$:

$$AB = a \quad e \quad AD = b \;\rightarrow\; a = 2*b$$

Prolungare il lato AB verso l'alto e quello AD verso destra.

Tracciare le diagonali AC e BD che si incontrano nel punto O.

Fare centro nel punto O e con raggio OA disegnare la circonferenza circoscritta al rettangolo ABCD.



Per tentativi, tracciare una *retta secante* la circonferenza in due punti, C e E, e tale da determinare altri due punti vincolati dalla seguente relazione:

$$EF = CG .$$

Fare centro in O e con raggio OF = OG disegnare una seconda circonferenza: il triangolo OFG è *isoscele*.

Nella figura sono presenti tre *triangoli simili*: DCF, BGC e AGF.

Consideriamo i triangoli BGC e AGF; vale la proporzione:

BG : DF = AF : AG che è risolta come BG * AG = DF * AF .

Dalla precedente proporzione consegue:

AD : BG = BG : DF = DF : AB .

Ma AD = a e AB = 2*a per cui l'ultima proporzione diviene:

a : BG = BG : DF = DF : 2*a .

Essa può essere scritta come:

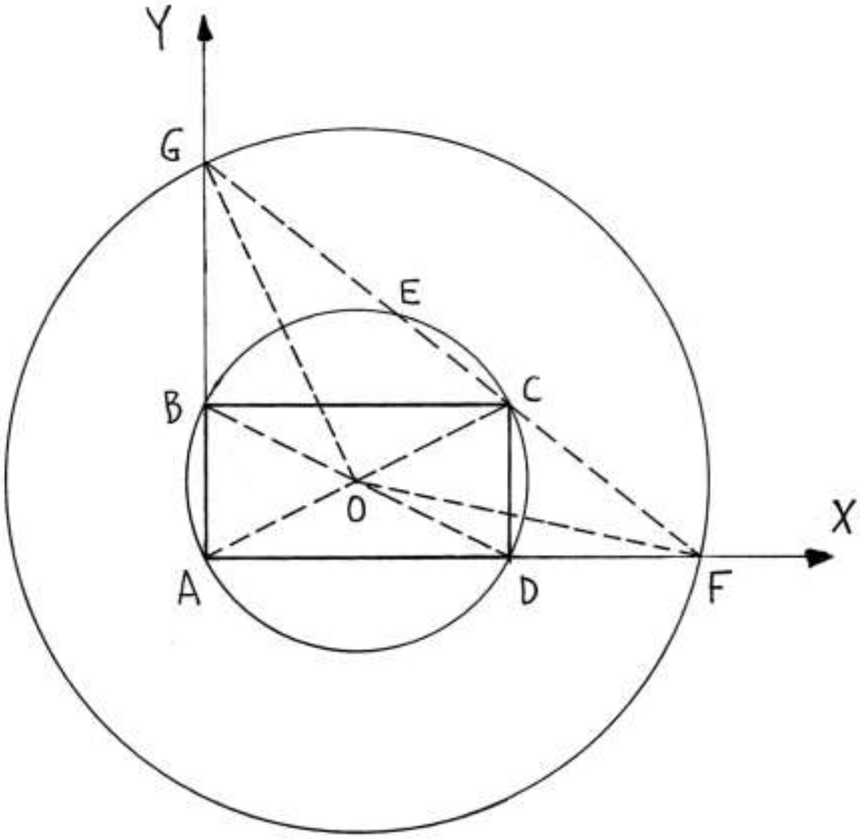
$$1 : \left(\sqrt[3]{2}\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right) : \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 : 2$$

Risolvendo le radici cubiche, la precedente proporzione diviene:

$$1 : 1{,}2599 = 1{,}\ 2599 : 1{,}587348 = 1{,}587348 : 2.$$

Il segmento BG è lo spigolo del cubo di volume doppio di quello che ha spigolo lungo AD.

Il metodo di Filone di Bisanzio è valido anche nel caso in cui il segmento più lungo sia disposto orizzontalmente come AD e quello più corto, AB = AD/2, sia collocato in posizione verticale e ortogonale allo stesso AD:



La precedente proporzione

AD : BG = BG : DF = DF : AB viene scritta come segue:

$$2 : \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{2}\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right) : 1$$

La proporzione può essere risolta come segue:

$$2 : 1{,}587348 = 1{,}587348 : 1{,}2599 = 1{,}2599 : 1\ .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Erone di Alessandria (I secolo d.C.) propose un metodo grafico simile a quello di Filone: la sua soluzione è descritta in un successivo paragrafo.

- APPROFONDIMENTO -

Il metodo *neusis*

La costruzione di Filone di Bisanzio è un'applicazione del metodo geometrico noto con il termine *neusis*: in particolare lo è la tracciatura della corda FG con il vincolo dell'equaglianza CG = EF: lo scopo poteva e può essere raggiunto soltanto con l'impiego di una riga graduata.

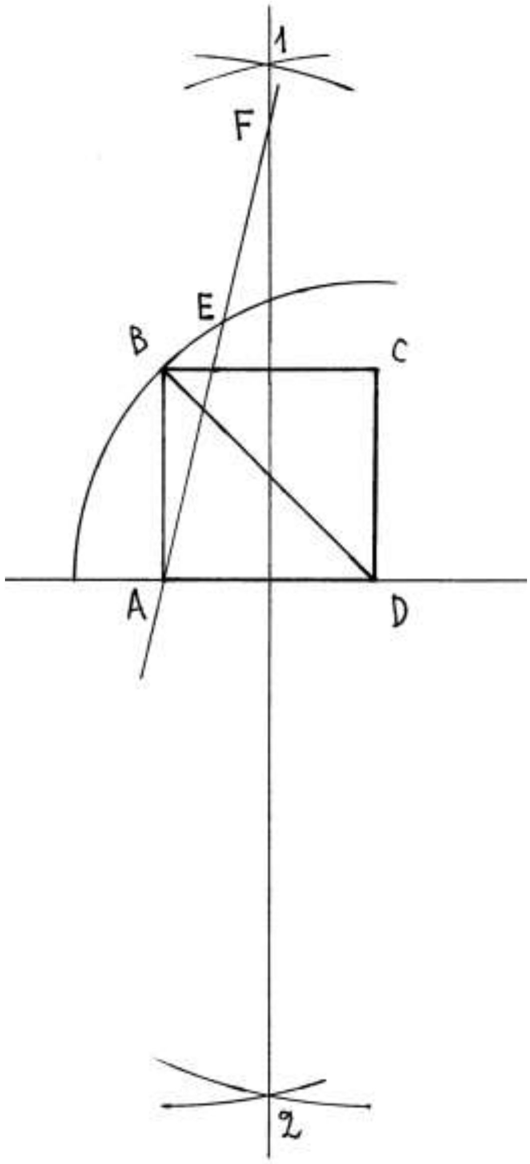
Il termine *neusis* viene dal greco e, grosso modo, significa "nella direzione di".

Il metodo risale agli antichi geometri greci; richiede l'uso del compasso e di un righello *graduato,* come tutti i righelli usati sempre dai tecnici e dagli artigiani. Il righello può scorrere e ruotare. Esso era impiegato nei casi nei quali era impossibile usare la riga non graduata e il compasso: la costruzione dell'ettagono, dell'ennagono, del tridecagono, la trisezione di un angolo qualsiasi e la duplicazione del cubo.

Facciamo l'esempio della costruzione dell'ettagono regolare con questo metodo.

Disegnare un quadrato ABCD, con lato AB uguale alla lunghezza del lato dell'ettagono da costruire: indichiamo questa lunghezza con *l*.

Costruire l'asse del segmento AD che passa per i punti 1 e 2:



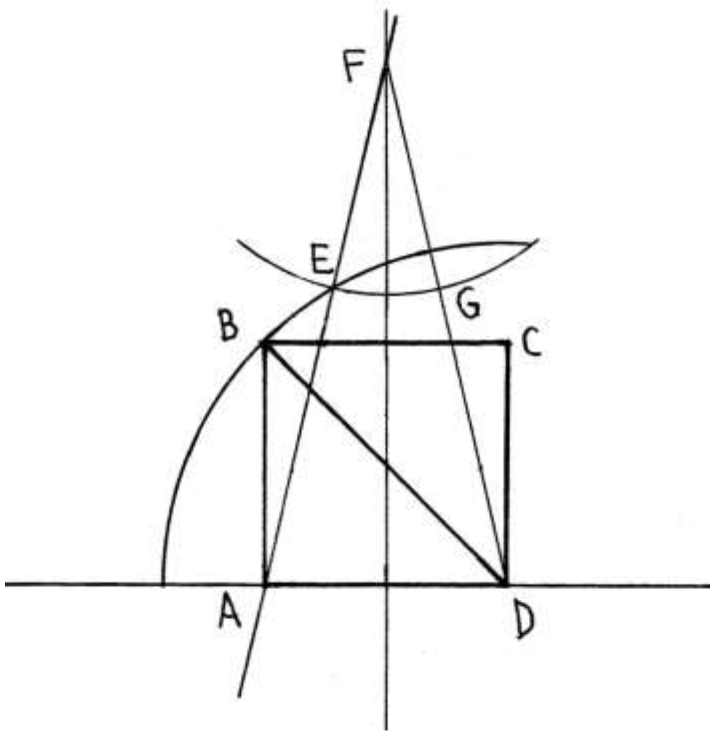
Con centro in D e raggio DB disegnare un arco di circonferenza.

Il segmento DB è la diagonale del quadrato ed è lungo √2 * *l*.

Posizionare un righello sul punto A fino ad intersecare l'asse del segmento AD.

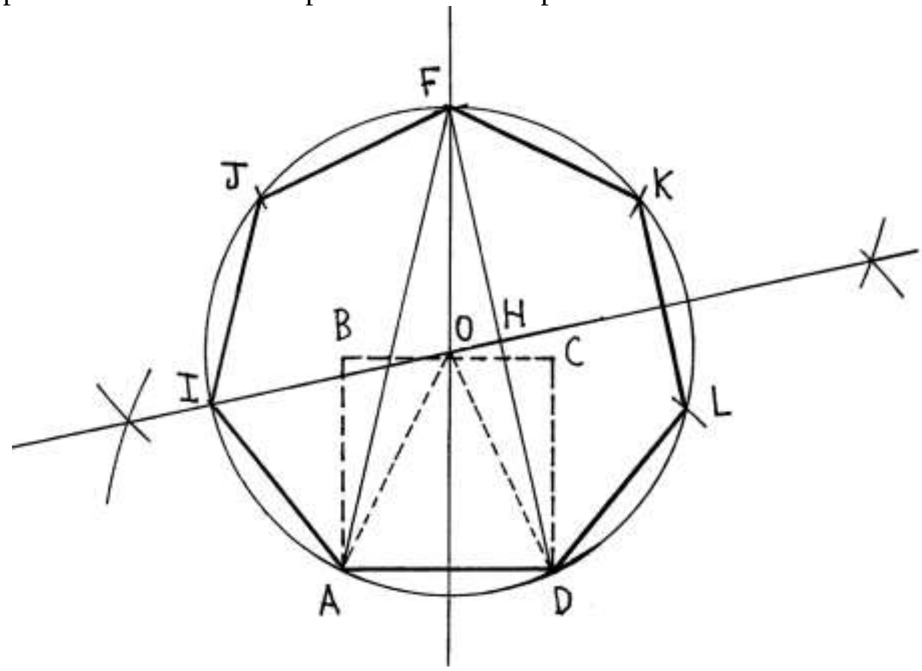
Con il righello misurare una lunghezza uguale a quella di *l*, dall'arco di circonferenza con centro in D, fino ad incontrare l'asse di AD in nuovo punto, F. Sono così fissati i due punti E e F, allineati con A: EF è lungo *l*.

Riprodurre la precedente figura e disegnare il segmento FD.



Fare centro in F e con raggio FE tracciare un arco che taglia FD in un nuovo punto, G.

La tracciatura dell'ettagono con il metodo *neusis* è mostrata nella figura che segue. Riprodurre la precedente costruzione per determinare il punto F:



Costruire l'asse del segmento FD che passa per il punto H. Questo asse taglia l'asse di simmetria di AD in un punto, O, che è il centro della circonferenza circoscritta all'ettagono da costruire.

Con raggio OF = OA = OA disegnare una circonferenza: essa interseca l'asse di FD in un punto, I, che è un vertice dell'ettagono: altri tre vertci sono A, D e F.

A partire da F riportare sulla circonferenza la lunghezza di AD.

AIJFKLD è l'ettagono cercato.

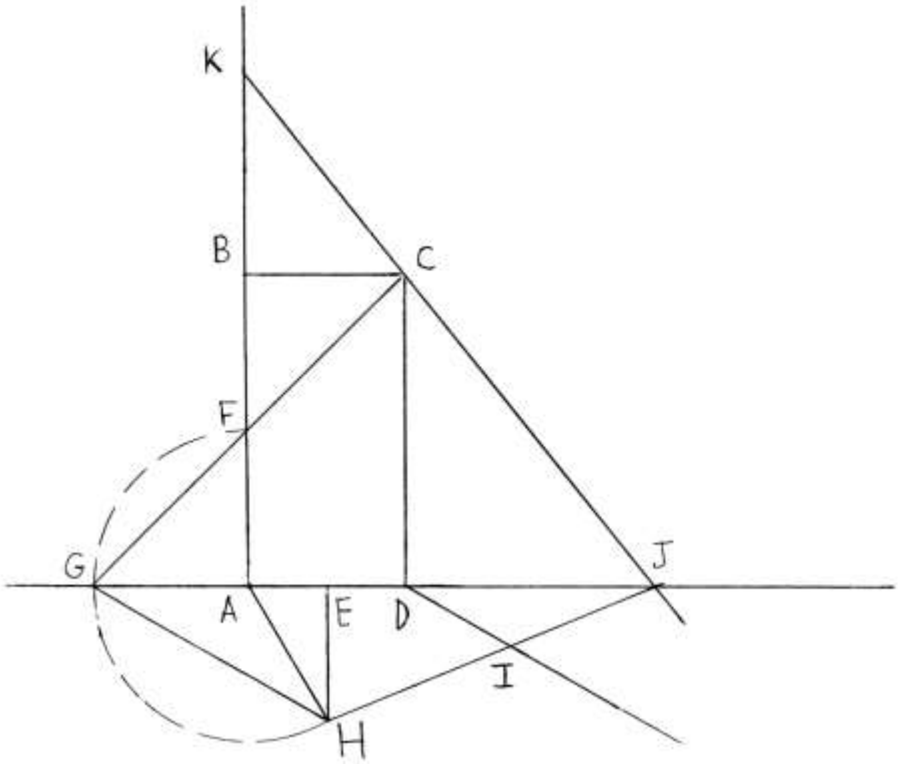
<u>Il metodo di Nicomede</u>

Nicomede (circa 280 – 210 a.C.) è stato un matematico greco.

Di seguito è descritto il metodo da lui usato per la duplicazione del cubo.

Costruire il rettangolo ABCD con lati lunghi nel rapporto $2 : 1$:

$AB : AD = 2 : 1$ con $AD = a$ e $AB = 2*a$



Fissare i punti medi dei lati AD e AB: sono rispettivamente E e F.

Prolungare verso l'alto il lato AB e il lato AD verso sinistra e verso destra.

Dal punto E abbassare la perpendicolare a AD.

Fare centro nel punto A e con raggio AF tracciare un arco da F fino a stabilire i punti G e H. I segmenti AD, AF, FB, BC, GA e AH hanno tutti la stessa lunghezza uguale a:

AB/2 = 2*a/2 e cioè a.

Tracciare la corda GH e una linea ad essa parallela uscente dal punto D.

Per il punto H disegnare una retta che taglia la linea uscente da D e la retta orizzontale in due punti, I e J, a distanza $IJ = AD = a$.

Tracciare il segmento CFG e la retta passante per i punti J e C fino a intersecare il prolungamento di AB in K.

Il segmento BK è lungo quanto lo spigolo del cubo di volume doppio di quello che ha spigolo $AD = a$.

Valgono le seguenti proporzioni:

$AB : DJ = DJ : BK = BK : AD$ che possono essere scritte come:

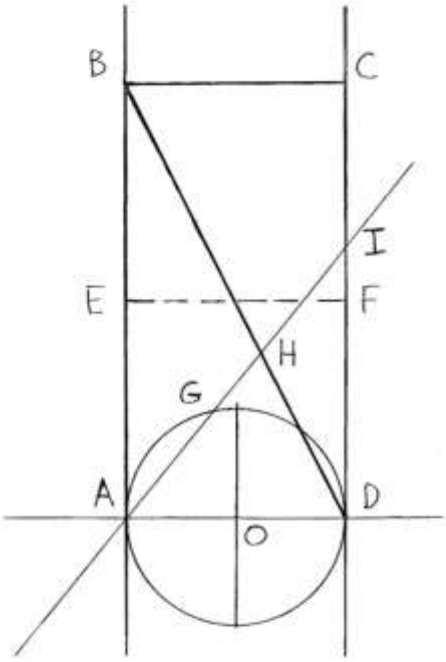
$$2 : (\sqrt[3]{2})^2 = (\sqrt[3]{2})^2 : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} : 1$$

<u>La costruzione di Diocle</u>

Anche Diocle di Caristo (circa 240 – 180 a.C.) è stato un matematico greco.

ABCD è il consueto rettangolo con lati lunghi nel rapporto 2 : 1 :

AB : AD = 2 : 1 = 2*a : a



I punti E e F sono i medi di AB e CD e EF è una mediana del rettangolo ABCD.

Tracciare la diagonale BD. Determinare il punto medio di AD: è O.

Fare centro nel punto O e con raggio OA = OD disegnare una circonferenza passante per i punti A e D e tangente ai lati AB e CD.

Per il punto A condurre una retta che tagli la circonferenza, la diagonale BC e il lato CD in tre punti G, H e I le cui distanze sono legate dalla relazione AG = HI.

Il segmento DI è la lunghezza dello spigolo del cubo di volume doppio di quello con spigolo lungo AD.

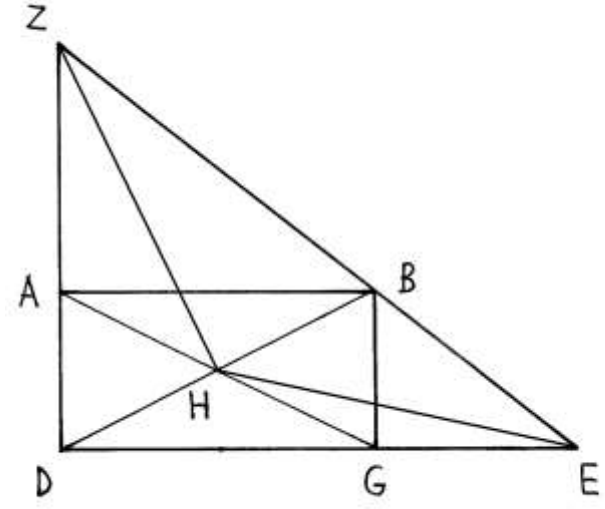
Valgono le seguenti proporzioni:

AB : AI = AI : DI = DI : AD

$$2 : (\sqrt[3]{2})^2 = (\sqrt[3]{2})^2 : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} : 1$$

Il metodo di Erone di Alessandria

ABGD è un rettangolo, non necessariamente formato da un doppio quadrato:

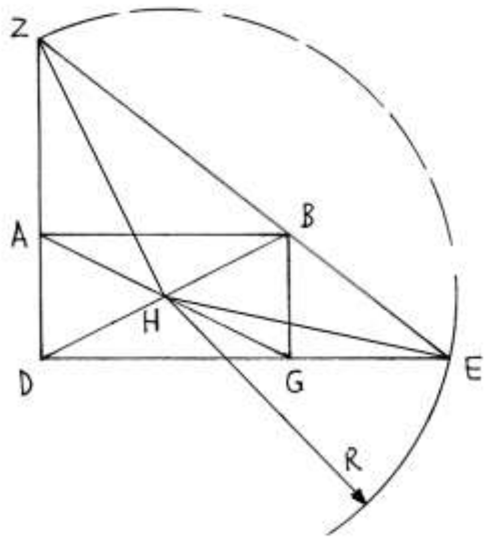


Prolungare verso destra il lato DG e verso l'alto quello DA. Tracciare le diagonali del rettangolo: esse si incontrano nel punto H.

Erone propose di usare una riga ruotante intorno al punto B: per tentativi disegnò una linea che tagliava i prolungamenti nei punti E e Z a condizione che i segmenti HE e HZ avessero la stessa lunghezza:

HE = HZ.

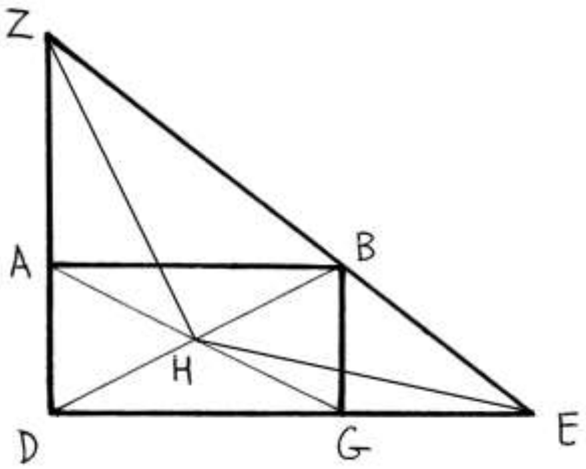
Tracciare un arco con centro in H e raggio HE = HZ:



I segmenti AZ e GE sono le *medie proporzionali* cercate:

AB : AZ = AZ : GE = GE : GB

Nella figura che segue sono evidenziati *tre triangoli simili*: DZE, AZB e GBE.

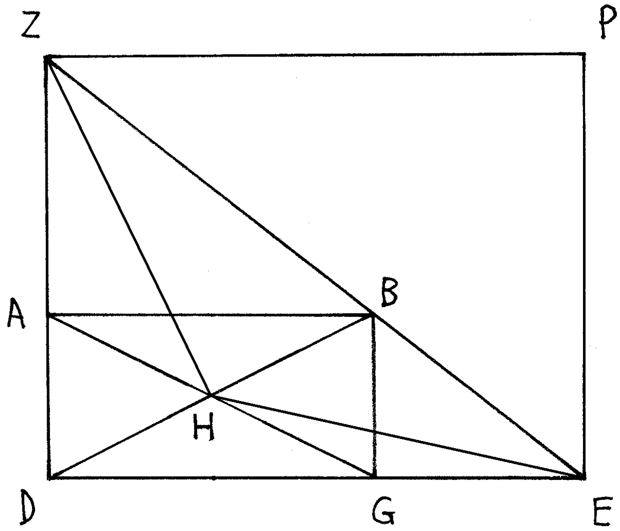


Ne risulta la seguente uguaglianza:

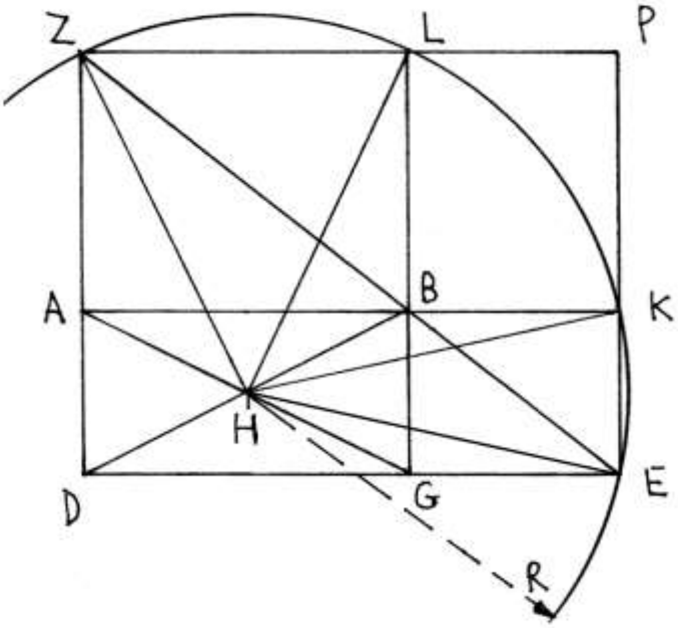
GE * ED = AZ * ZD

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La costruzione di Erone è inscrivibile in un rettangolo di dimensioni DZ x DE:



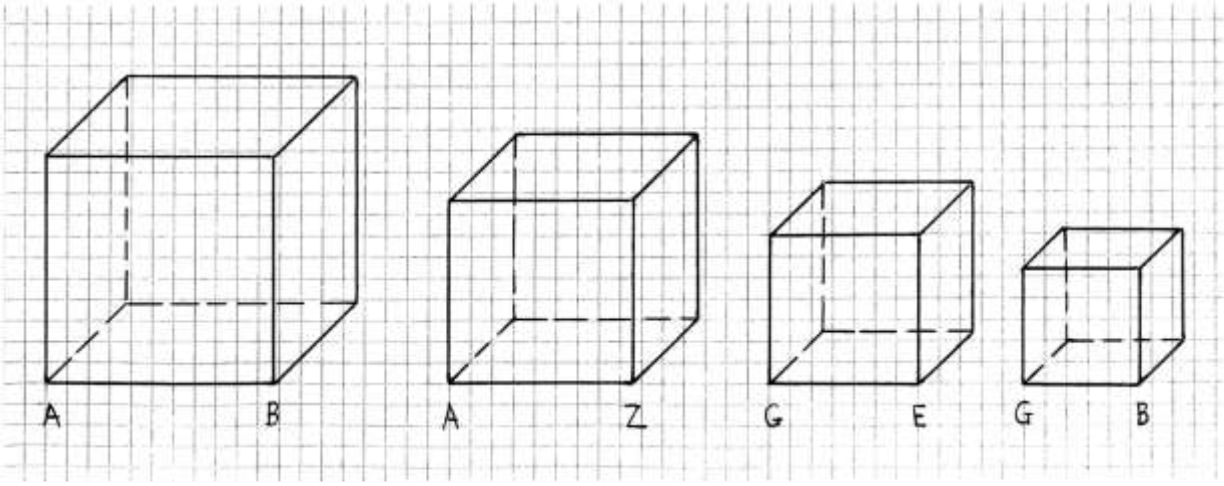
Apportiamo alcune aggiunte alla precedente figura:



Prolungare i lati AB e GB fino a stabilire i punti K e L.
Fare centro nel punto H e, con raggio HE = HZ, tracciare un ampio arco di circonferenza che passa per i punti K e L.

Nella figura sono presenti due triangoli isosceli: HZL e HKE.

Lo schema che segue, disegnato in assonometria cavaliera, mette a confronto i quattro cubi costruiti sui segmenti AB, AZ, GE e GB:



“Per numero” e “per linea”

Nei principali trattati di architettura e di ingegneria italiani del XVI secolo compaiono le espressioni dei due differenti metodi impiegati per la soluzione di problemi:

* “Per numero” quando la soluzione è ottenuta per via aritmetica. La duplicazione del cubo ricavata da Finé e da Bartoli rientra nella categoria dei problemi risolti “per numero” e cioè per via aritmetica: la lunghezza dello spigolo del cubo doppio di cui è noto il volume è data dalla sua radice cubica.
* “Per linea”: questo metodo richiede l’applicazione di tecniche geometriche o geometrico-meccaniche (con strumenti meccanici specializzati o “macchine matematiche”) per risolvere un problema quale è quello della duplicazione di un cubo.
  Questa seconda espressione ha fatto la sua comparsa nella seconda edizione del trattato del matematico e architetto senese Pietro Cataneo sull’architettura.

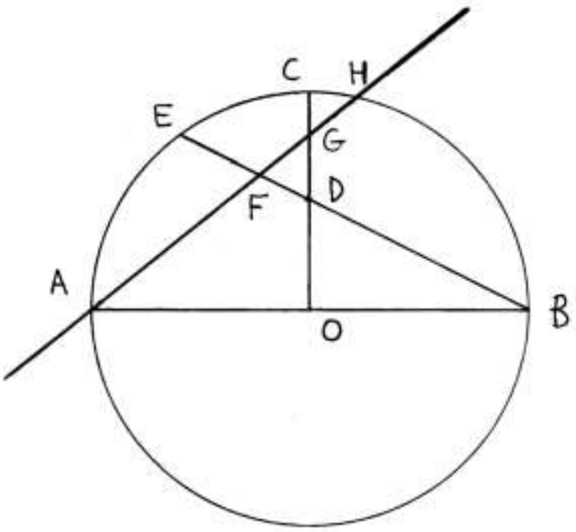
Gran parte dei metodi descritti in questo articolo rientrano fra quelli “per linea” perché impiegano metodi geometrici o meccanico-geometrici e gli eventuali calcoli aritmetici presenti hanno soltanto lo scopo di verificare il risultato.

- -

La duplicazione del cubo secondo Pappo

Pappo di Alessandria è un matematico vissuto fra il III e il IV secolo d.C.

Il metodo *approssimato* da lui descritto per la duplicazione del cubo è mostrato nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza con raggio OA, uguale alla lunghezza dello spigolo di un dato cubo. Deve essere costruito un secondo cubo che abbia volume uguale *alla metà*.

Il raggio OC è perpendicolare al diametro AB.

Fissare il punto medio di OC, D: OD = DC.

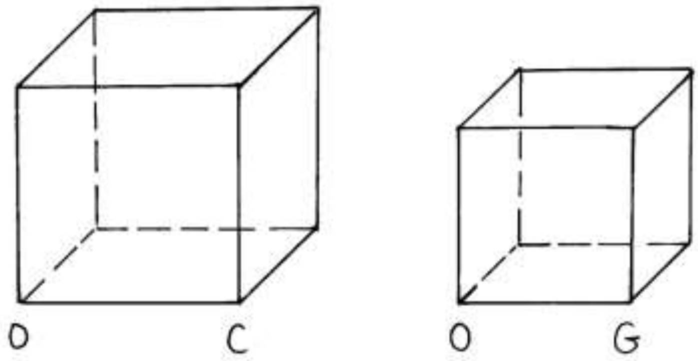
Tracciare una corda passante per i punti B e D fino a tagliare la circonferenza nel punto E.

Con una riga disegnare una retta passante per A in grado di determinare tre punti allineati – F, G e H con un vincolo: le lunghezze di FG e di GH devono essere *uguali*.

Come già scritto sopra, la costruzione è approssimata e per ricavare una soluzione la più corretta possibile è necessario ingrandire al massimo il disegno per ridurre l’errore.

Il segmento OG è la lunghezza dello spigolo del cubo che ha volume metà:

$$2 * OG^3 = OC^3$$

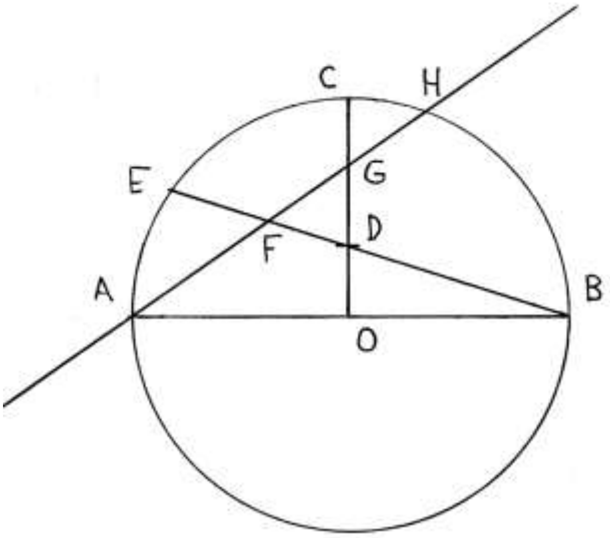


Secoli dopo, Albrecht Dürer utilizzerà il metodo di Pappo estendendone l'applicazione a multipli del cubo iniziale, come vedremo in un capitolo successivo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il metodo di Pappo può essere applicato anche alla costruzione di cubi i cui volumi sono legati da un rapporto diverso da quello 2 : 1 (o 1 : 2).

Nello schema che segue è spiegata la costruzione dello spigolo di un cubo di volume uguale a 1/3 di quello dato.



Il punto D è a distanze:

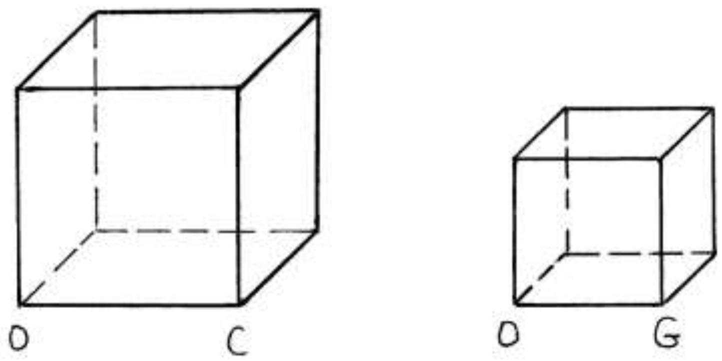
OD = 1/3 * OC e DC = 2/3 * OC.

Tracciare la corda BDE.

Con una riga disegnare la retta passante per A e che taglia EB, OC e la circonferenza nei tre punti allineati F, G e H posti a distanze FG = GH.

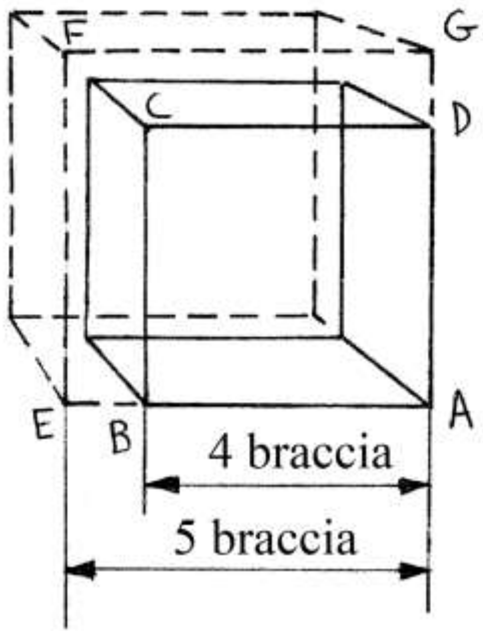
Il segmento OG è lo spigolo del cubo che ha volume uguale a 1/3 di quello che ha spigolo OC:

$$3 * OG^3 = OC^3$$



La duplicazione del cubo secondo Leonardo da Vinci

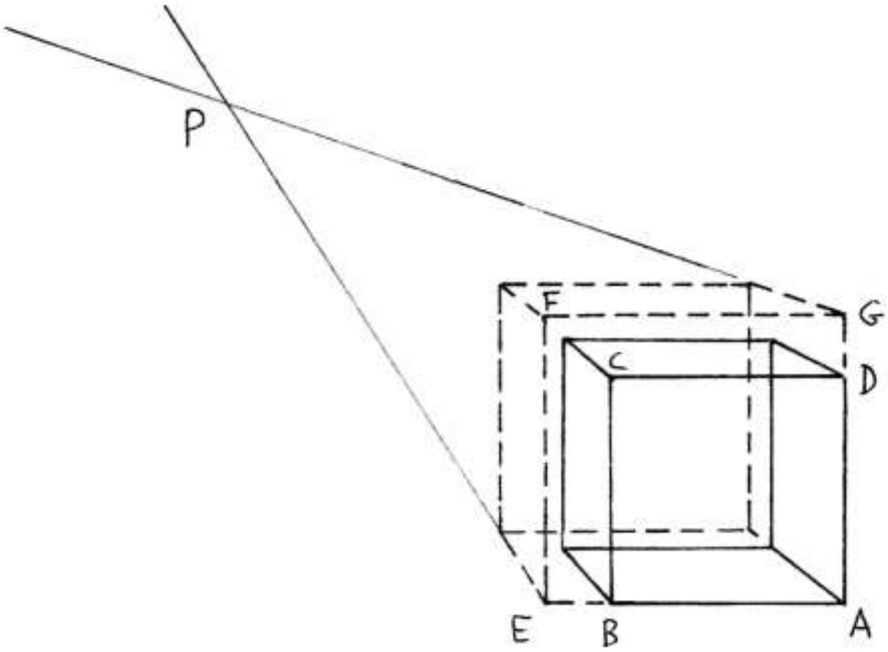
Nel foglio 161 *recto* del *Codice Atlantico*, Leonardo propose un metodo approssimato ma assai semplice per costruire un cubo di volume doppio di uno dato.



I due cubi sono disegnati con il vertice A in comune e sono costruiti in *prospettiva*.

ABCD è la faccia anteriore del cubo da duplicare e AEFG è la faccia anteriore del cubo doppio. Per distinguerli graficamente, gli spigoli del primo sono tracciati con segno continuo e quelli del cubo doppio sono tratteggiati.

Il punto di fuga degli spigoli obliqui dei due cubi è P, che nello schema è posizionato a sinistra:



Lo spigolo AB è lungo 4 *braccia* (1 braccio fiorentino da panno era equivalente a 0,583626 m) e quello AE è lungo 5 *braccia*.

Il volume del cubo da duplicare è:

$$V_1 = AB^3 = 4^3 = 64$$

Il volume del cubo doppio di Leonardo è:

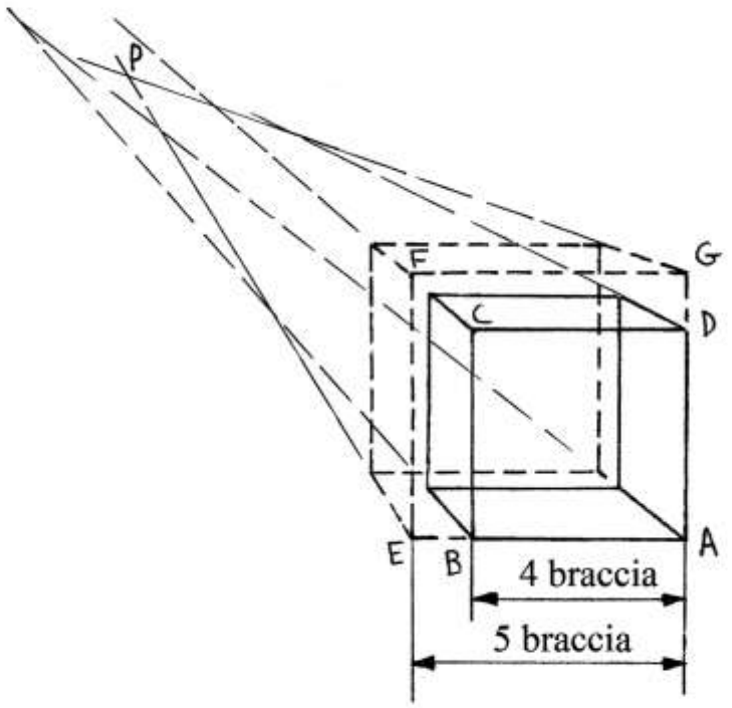
$$V_2 = AE^3 = 5^3 = 125 \approx 2*V_1$$

Il valore 125 non è esattamente il doppio di 64.

La radice cubica del volume doppio (128) di quello di V_1 è:

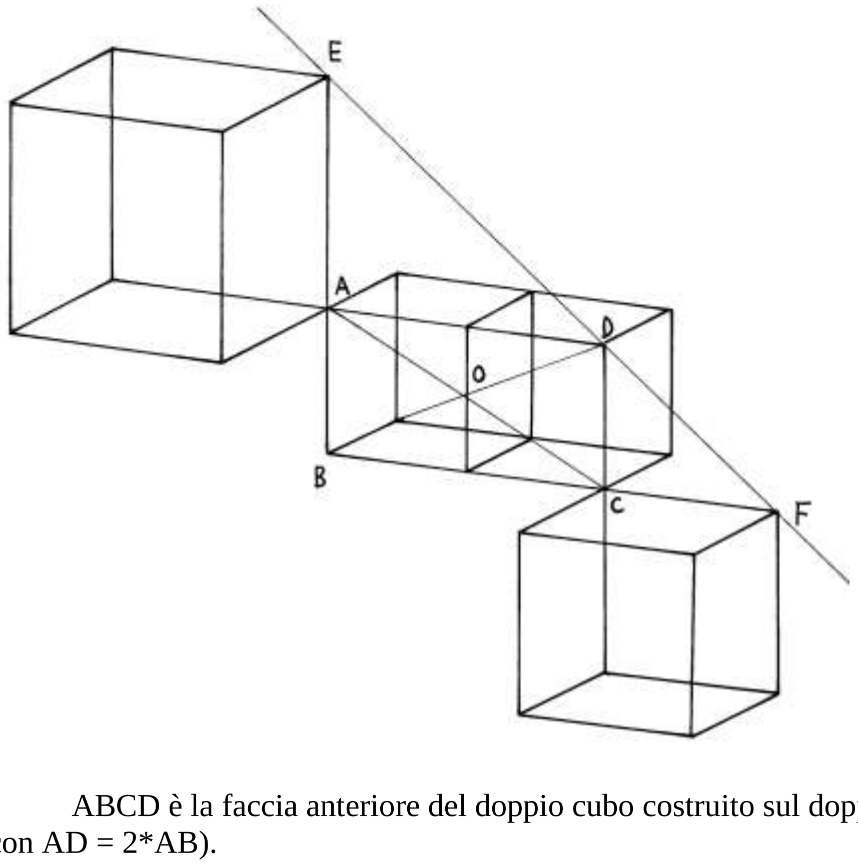
$$\sqrt[3]{2 * V_1} = \sqrt[3]{2 * 64} = \sqrt[3]{128} \approx 5{,}039 .$$

Per la precisione, nello schema di Leonardo sono presenti più punti di fuga, oltre a quello, P, individuato in precedenza:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

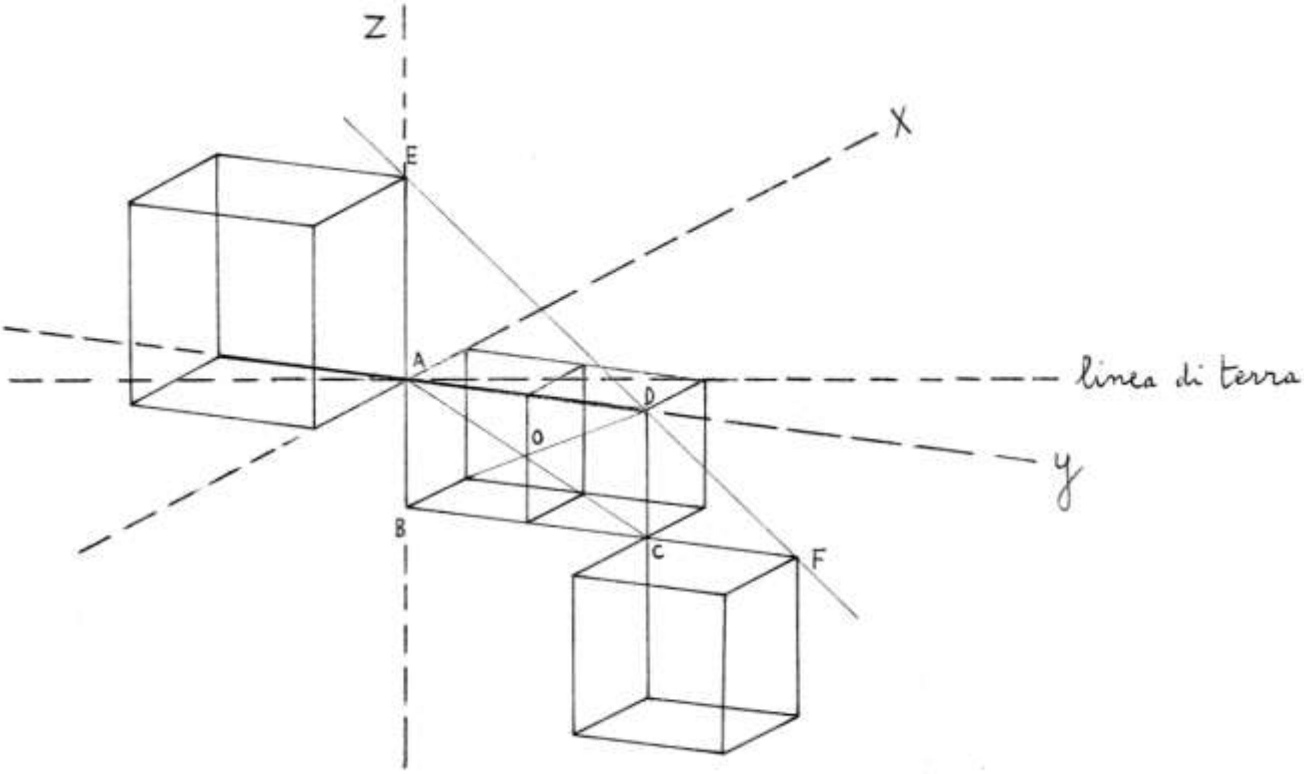
Nell’articolo citato in bibliografia, Sylvie Duvernoy ha fornito una sua interpretazione di un’altra costruzione per la duplicazione del cubo contenuta nel foglio 32 del *Codice Forster* di Leonardo da Vinci.

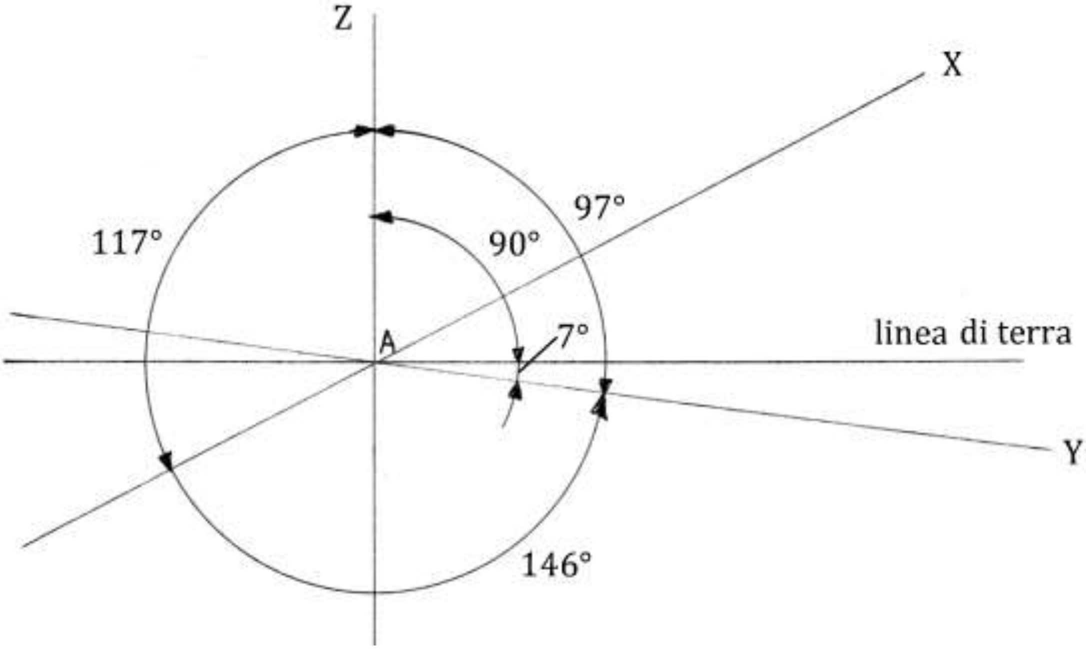


ABCD è la faccia anteriore del doppio cubo costruito sul doppio quadrato di lati AB e AD (con AD = 2*AB).

La costruzione di Leonardo è tridimensionale ed è basata su quella di Apollomio (già incontrata).

Il grafico di Leonardo, rielaborato dalla Duvernoy, è tracciato in *assonometria trimetrica*, come spiegano le due figure che seguono:

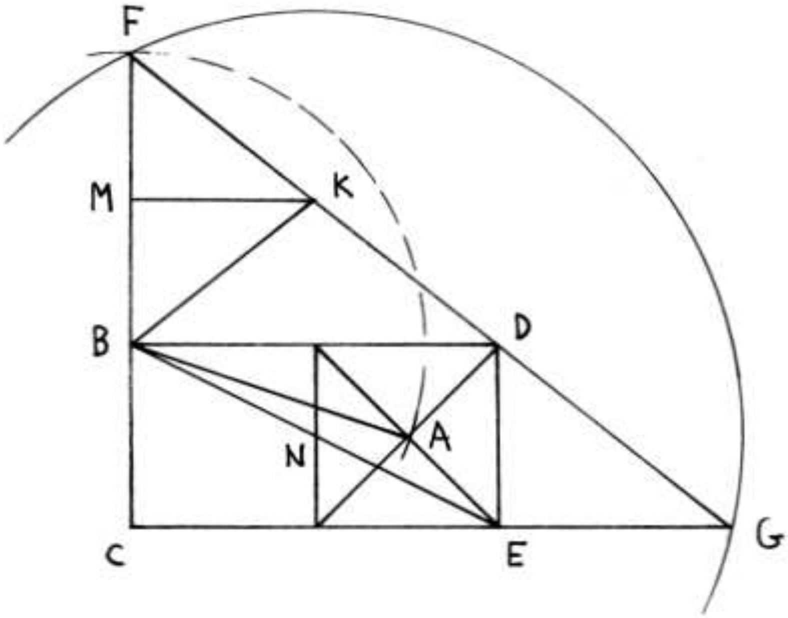




%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel foglio 588 *recto* del *Codice Atlantico* Leonardo utilizzò il metodo di Apollonio recando delle modifiche.

La descrizione che segue è una rielaborazione molto aderente al grafico di Leonardo.



CBDE è un rettangolo formato da un *doppio quadrato*: CE = 2 * CB.

Ciascuno dei due quadrati è la faccia del cubo da duplicare.

Disegnare le diagonali del quadrato di destra che si incontrano nel punto A.

Tracciare la diagonale BE: essa fissa il punto medio N.

Prolungare verso l'alto CB e verso destra CG.

La costruzione serve a determinare due valori intermedi fra le lunghezze di BC e di CE:

$$CE : x = x : y = y : BC$$

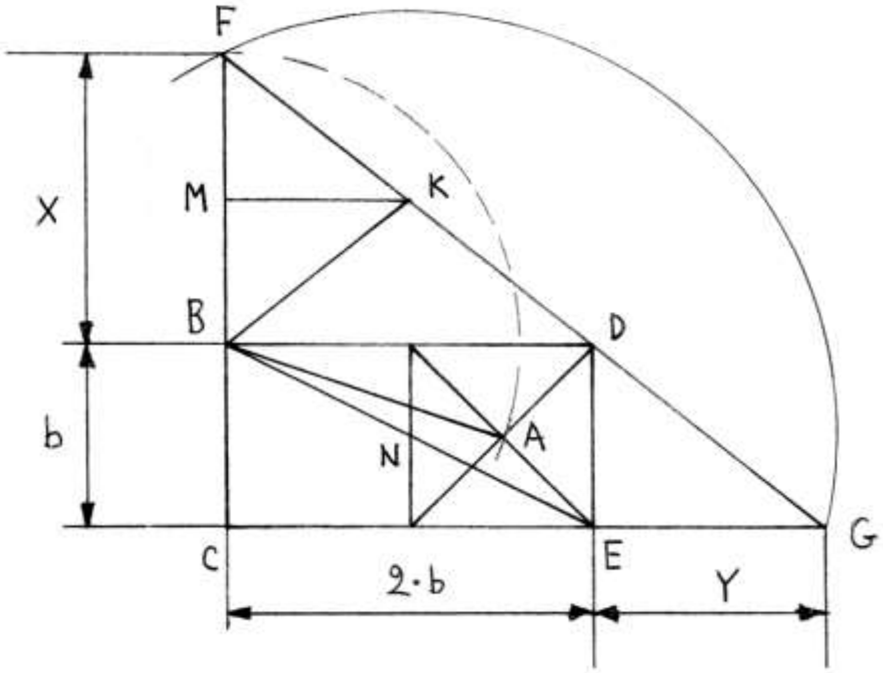
Leonardo usò riga e compasso per determinare i punti significativi per la duplicazione. Egli scoprì un'importante proprietà geometrica:la distanza del vertice B dal centro A del quadrato di destra è la lunghezza dell'incognita x.

Fare centro nel punto B econ raggio BA tracciare un arco da A fino a tagliare il prolungamento di CB in un punto, F.

Per i punti F e D disegnare una linea che incontra il prolungamento di CE nel punto G.

Fare centro in N e con raggio NF = NG tracciare un arco di circonferenza.

Lo schema che segue riassume i dati relativi alle lunghezze:



Vale la seguente proporzione:

CE : BF = BF : EG = EG : BC

Se la lunghezza *convenzionale* di BC è 1, la proporzione diviene:

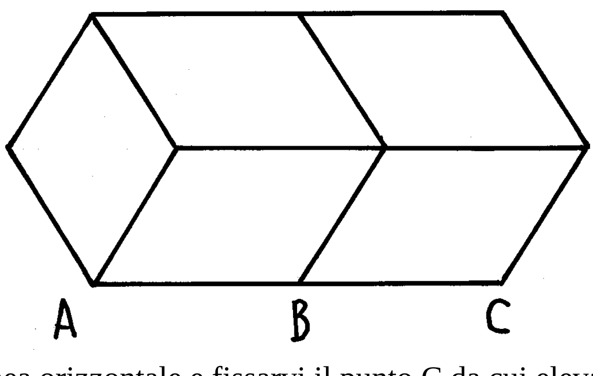
2 : BF = BF : EG = EG : 1

<u>I metodi di Albrecht Dürer</u>

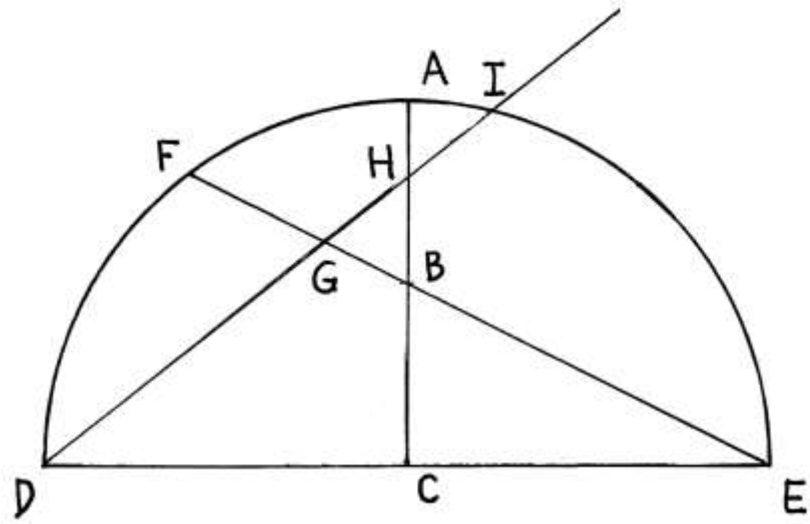
La versione italiana del più importante trattato geometrico di Albrecht Dürer (1471-1528), curata da Cosimo Bartoli (1503-1572), contiene nel *quarto libro* alcune costruzioni relative alla duplicazione e a ulteriori moltiplicazioni di un cubo.

Le costruzioni sembrano ispirate al metodo di Pappo, già descritto in precedenza.

Due cubi di uguali dimensioni, con AB = BC, sono disegnati uniti in assonometria:



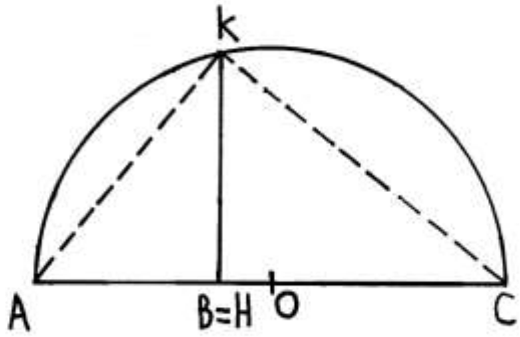
Disegnare una linea orizzontale e fissarvi il punto C da cui elevare la perpendicolare CBA e tracciare una semicirconferenza con centro in O e raggio CA: la curva è DAE.



Dal punto E condurre una corda passante per B fino a incontrare la semicirconferenza in un punto, F.

Posizionare un righello *graduato* sul punto D e ruotarlo fino a tracciare una semiretta che tagli EF, CA e la semicirconferenza in un punto I: i punti G, H e I sono allineati e deve essere soddisfatta la condizione GH = HI. Dürer e Bartoli hanno applicato il metodo *neusis*.

Disegnare una linea orizzontale e riportarvi la lunghezza di HC:



Misurare la lunghezza di BA e riportarla da H verso sinistra.

Determinare il punto medio di AC: è O. Fare centro in O e con raggio OA = OC tracciare una semicirconferenza da A a C.

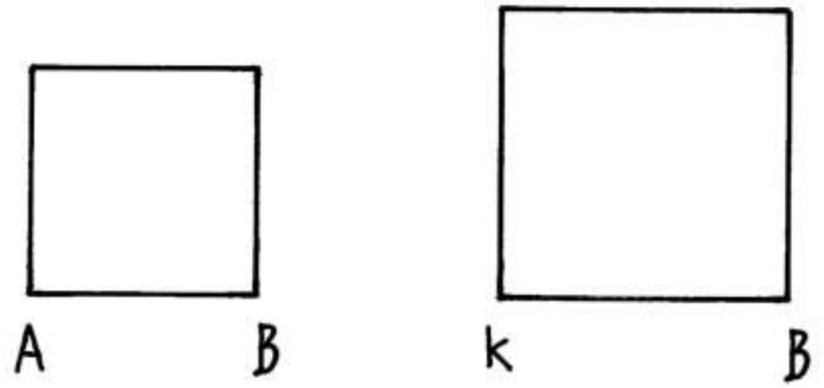
Dal punto B elevare la perpendicolare a AC: essa taglia la semicirconferenza in K.

AKC è un triangolo rettangolo inscritto e KB è la sua altezza rispetto all'ipotenusa AC. Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli vale la relazione:

$$AB : KB = KB : BC \qquad \text{da cui} \qquad KB = \sqrt{AB * BC}\ .$$

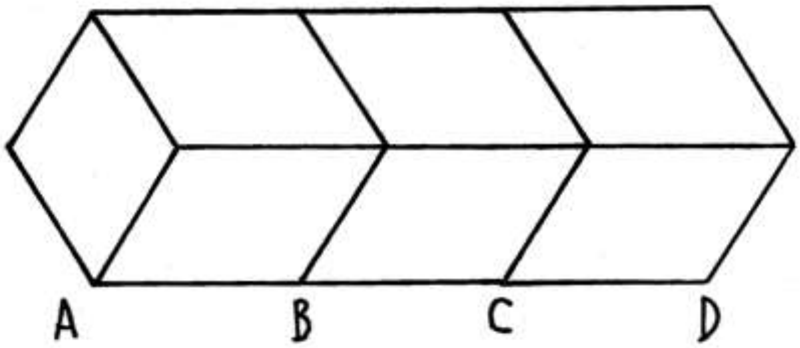
KB è la lunghezza dello spigolo di volume doppio di quello costruito su AB:

$$KB = AB * \sqrt[3]{2}\ .$$



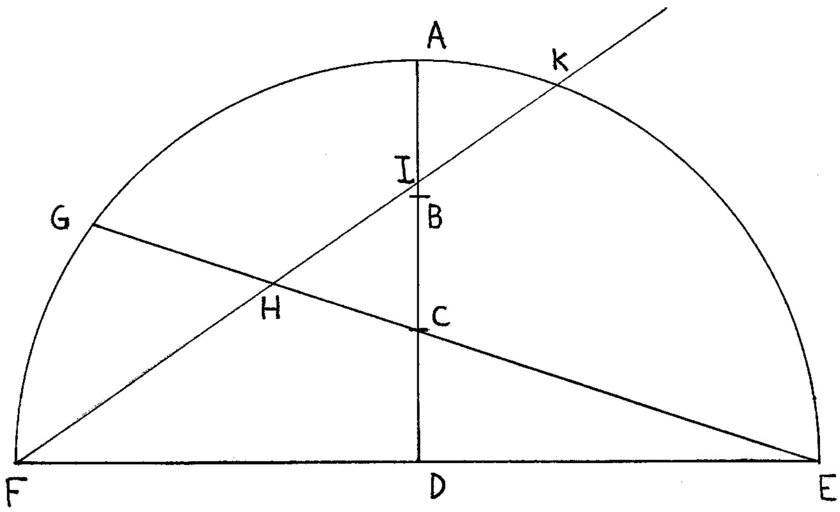
Triplicare un cubo

Tre cubi di identiche dimensioni sono uniti e deve essere costruito un nuovo cubo che abbia il volume complessivo dei primi tre:



Il metodo impiegato da Dürer è identico a quello già visto.

Tracciare una retta orizzontale e fissarvi un punto, D, dal quale innalzare la perpendicolare DCBA:



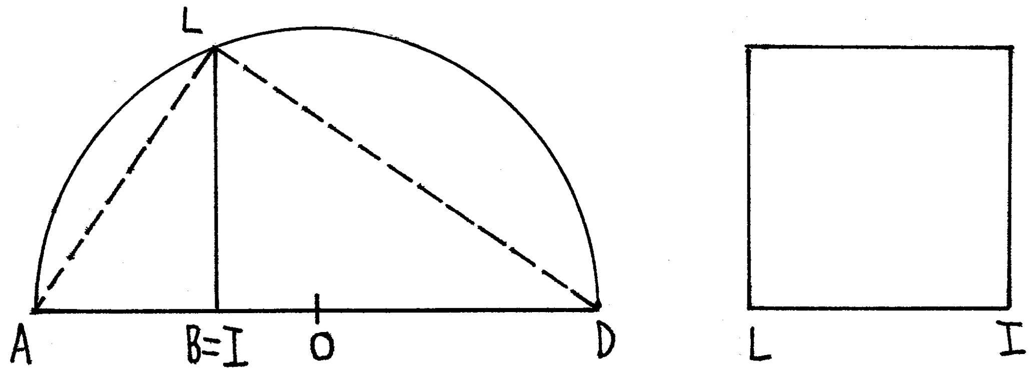
Disegnare la semicirconferenza di centro D e raggio DA: essa va da E a F.

Tracciare la corda EG passante per il punto C che, è utile ricordarlo, è a distanza 1/3 * AD dal punto D.

Posizionare il righello graduato sul punto F e disegnare una semiretta uscente da D e secante EG, AD e la semicirconferenza in tre punti allineati, H , I e K, legati dalla relazione

HI = IK .

Su di una retta orizzontale fissare la lunghezza di ID:



Da I verso sinistra riportare la lunghezza di AB e cioè quella dello spigolo di uno dei tre cubi da unire: O è il punto medio di AD.

ALD è un triangolo rettangolo inscritto e LI è l'altezza relativa all'ipotenusa AD. Vale la proporzione

AB : LI = LI : ID   da cui LI = √(AB * ID) .

Il segmento LI è lo spigolo del cubo di volume *triplo* ed è lungo:

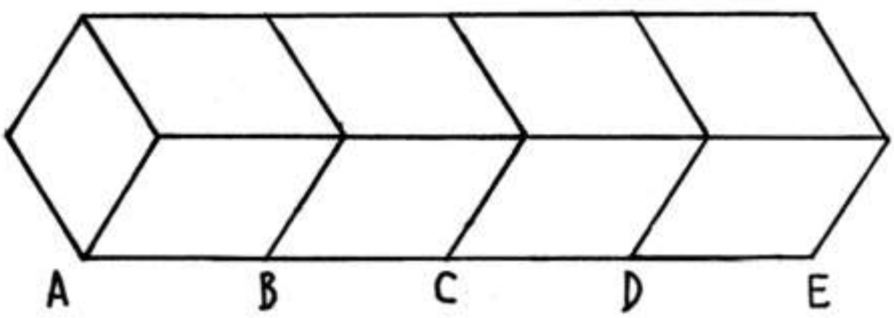
$$LI = AB * \sqrt[3]{3} \ .$$

La radice cubica di 3 vale:

$$\sqrt[3]{3} \approx 1{,}4422 \ .$$

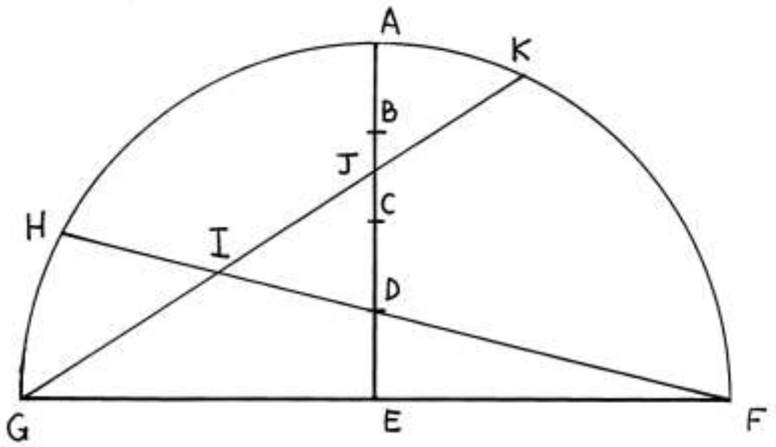
<u>Quadruplicare un cubo</u>

Quattro cubi di uguali dimensioni sono uniti come in figura:



Con un'apposita costruzione deve essere ricavata la lunghezza dello spigolo del cubo con volume uguale alla somma di quelli dei quattro.

Tracciare la consueta retta orizzontale e fissarvi il punto E da cui condurre la perpendicolare EA divisa in *quattro* parti uguali:



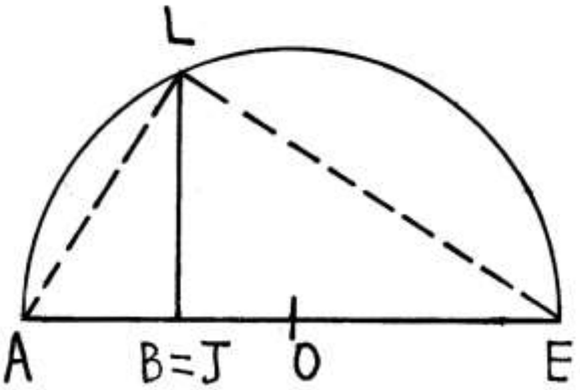
Come fatto in precedenza, disegnare una semicirconferenza di raggio EA e centro in E, da F a G.

Tracciare una corda da F e passante per D: è FDH.

Come già visto, posizionare un righello graguato nel punto G e ruotarlo fino a tracciare una semiretta che taglia FH, EA e la semicirconferenza in tre punti allineati, I-J-K, con il vincolo

IJ = JK.

Su di una retta orizzontale riportare in successione le lunghezze di JE e di AB:



Il punto O è medio di AE. Disegnare la semicirconferenza di centro O e raggio OA = OE.

Anche ALE è un triangolo rettangolo inscritto e LJ è è l'altezza relativa a AE.

Vale la proporzione:

AB : LJ = LJ : JE da cui LJ = √(AB * JE) .

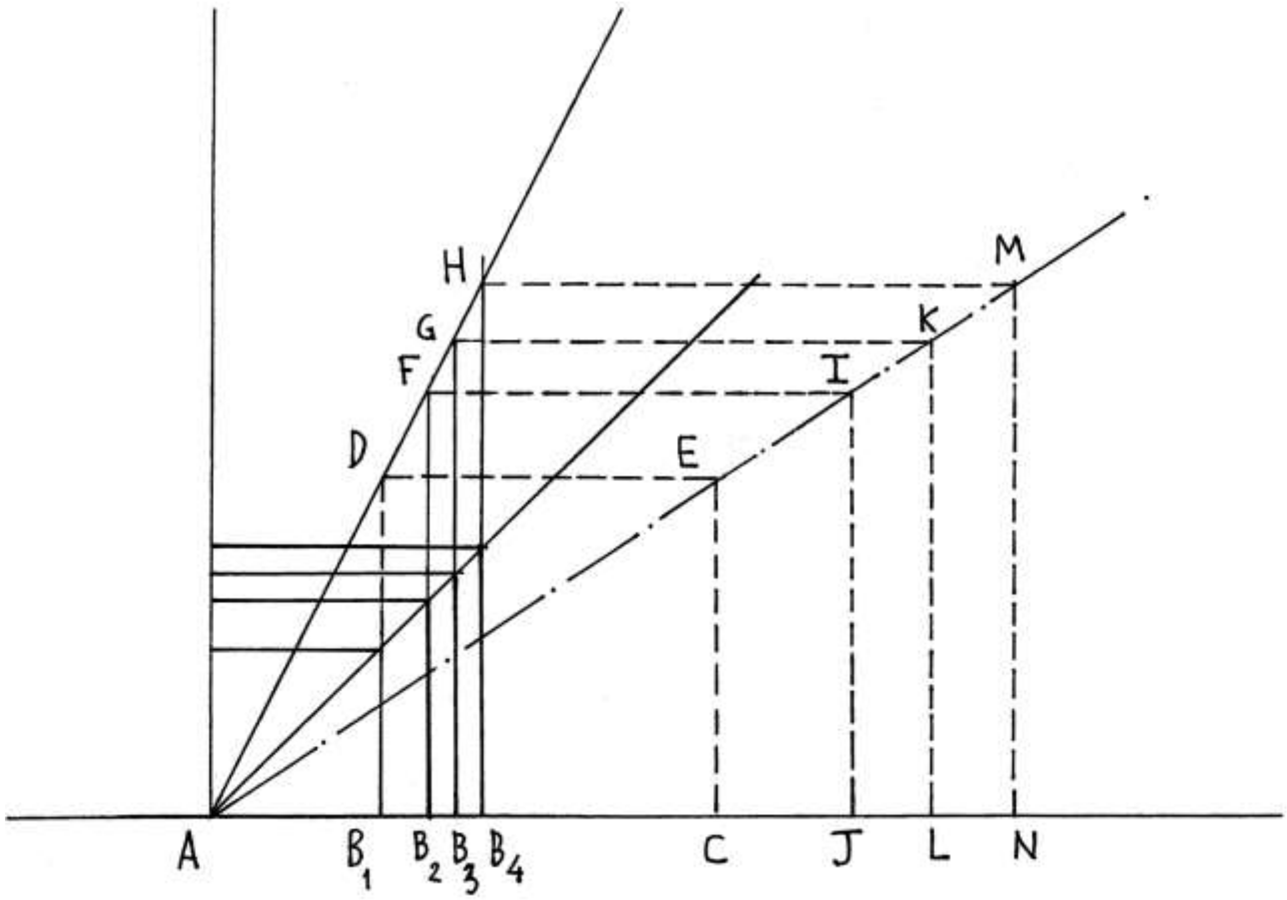
Il segmento LJ è lungo quanto lo spigolo del cubo quadruplicato:

$$LJ = AB * \sqrt[3]{4} \quad .$$

La radice cubica di 4 vale: $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}5874$.

Un ulteriore metodo grafico

Un ulteriore metodo grafico proposto da Albrecht Dürer per determinare la lunghezza degli spigoli di cubi doppi, tripli, quadrupli e via di seguito è presentato nello schema che segue:



Tracciare due assi perpendicolari con origine nel punto A.

A partire da A, sull'asse orizzontale riportare le lunghezze degli spigoli del cubo singolo (AB_1) e dei cubi doppio (AB_2), triplo (AB_3) e quadruplo (AB_4). Costruire i quattro quadrati con vertice comune in A.

Tracciare la semiretta uscente da A e coincidente con le diagonali di tutti e quattro i quadrati.

Prolungare verso l'alto i lati verticali di destra dei quattro quadrati..

Un altro cubo ha come spigolo il segmento B_1C, che è chiaramente più lungo di quello AB_1. Costruire il quadrato B_1DEC.

Disegnare la semiretta uscente da A e passante per il punto D. Essa interseca i prolungamenti dei lati del secondo, del terzo e del quarto dei quadrati iniziali nei punti F, G e H. Costruire i quadrati B_2FIJ, B_3GKL e B_4HMN.

B_2J è lo spigolo del *cubo doppio* di quello che ha spigolo B_1C.

B_3L è lo spigolo del *cubo triplo* di quello iniziale.

Infine, B_4N è la lunghezza dello spigolo del cubo che ha volume *quadruplo* di quello che ha spigolo B_1C,

Per i vertici E, I, K e M passa una terza semiretta uscente da A.

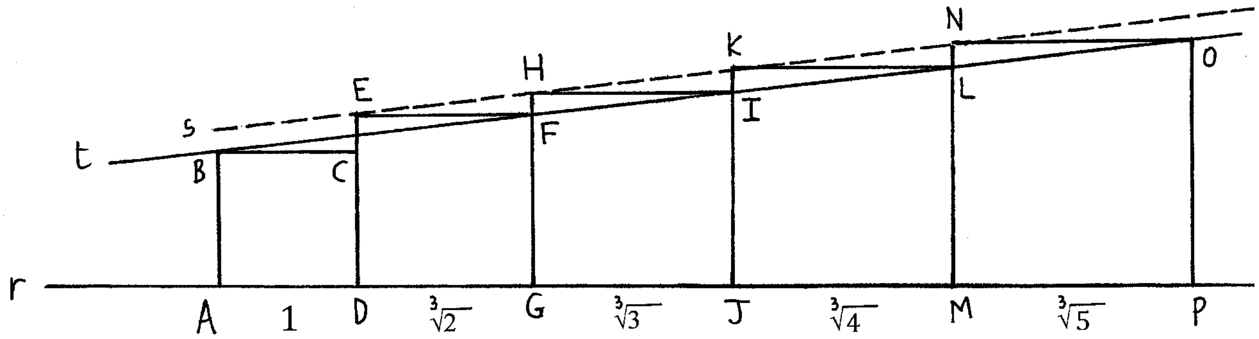
Un'altra costruzione

Albrecht Dürer propose due costruzioni utili per ricavare le dimensioni degli spigoli di cubi multipli o sottomultipli di un cubo dato.

Le precedenti costruzioni, dalla duplicazione alla quadruplicazione di un cubo, possono essere utilizzate per determinare graficamente le lunghezze degli spigoli di cubi di volumi cinque, sei, sette e oltre volte maggiori di un cubo con lo spigolo con lunghezza convenzionale uguale a 1.

Il limite che i metodi grafici manifestano è dovuto all'ineliminabile approssimazione del disegno.

Lo schema che segue si sforza di unire le due costruzioni di Dürer in un'unica soluzione:



Tracciare una retta orizzontale, *r*.

Tutti i quadrati che sono disegnati hanno il lato orizzonrale inferiore che giace sulla retta *r*.

Tutti i quadrati sono affiancati.

Riportiamo le dimensioni degli spigoli dei cubi già ricavate in precedenza.

ABCD è il quadrato con lato di lunghezza convenzionale AD = 1.

A fianco è disegnato il quadrato DEFG che ha lati lunghi DG = $\sqrt[3]{2}$.

Il quadrato GHIJ ha lati lunghi GJ = $\sqrt[3]{3}$.

Il successivo quadrato, JKLM, ha lati lunghi JM = $\sqrt[3]{4}$.

Tracciare due rette, *s* e *t*, passanti rispettivamente per i punti E, H e K e per i punti B, F, I e L. Esse risultano fra loro parallele.

Per costruire il successivo quadrato, MNOP, procedere come segue: prolungare verso l'alto il lato ML fino a incontrare la retta *s* in un punto, N; dal punto N condurre la parallela alla retta *r* fino a tagliare la retta *t* in un punto, O: se la costruzione è sufficientemente precisa si ha MN = NO e MNOP è l'ultimo quadrato. I suoi lati sono lunghi MP = $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$.

Un'applicazione alle palle di cannone

Una palla di cannone di forma sferica ha volume dato dalla formula:

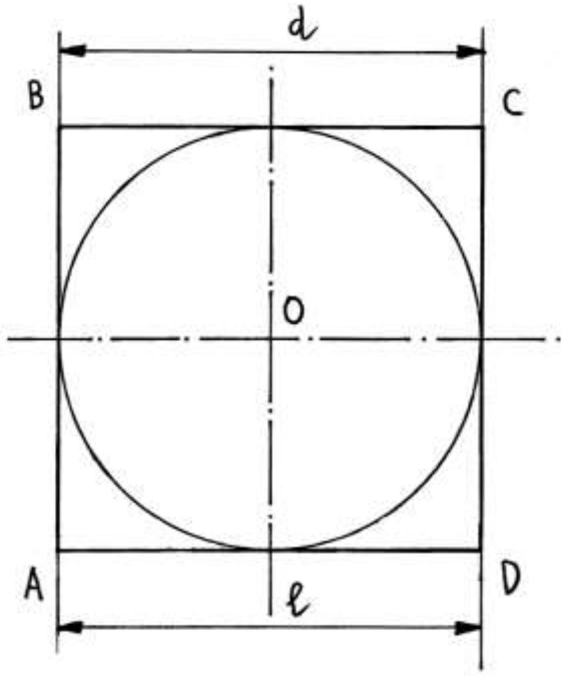
$$\text{Volume}_{\text{SFERA}} = 4/3 * \pi * R^3$$ nella quale R è il raggio.

Nel Rinascimento, secondo l'insegnamento di Archimede, il valore di π era approssimato a $\pi \approx 22/7$ per cui la precedente formula diviene:

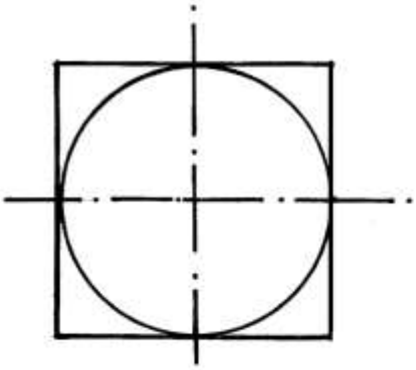
$$\text{Volume}_{\text{SFERA}} \approx 4/3 * 22/7 * R^3 \approx 88/21 * R^3 .$$

Il *peso* – o *massa* – di un solido è dato dal prodotto del suo volume per la *densità* del materiale di cui è fatto.

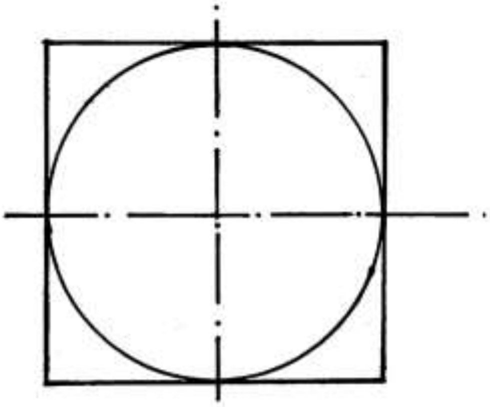
Una sfera è inscrivibile in un cubo che abbia spigolo ℓ lungo quanto il diametro *d*:



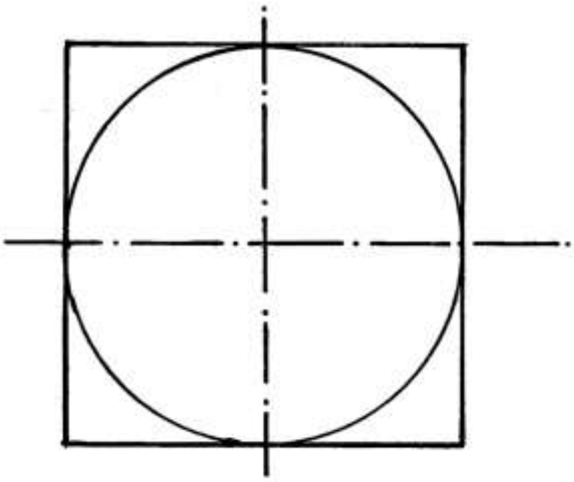
L’efficacia distruttiva di una palla da cannone è grosso modo proporzionale al suo peso. Dürer calcolò e rappresentò graficamente le sfere con volumi (e quindi pesi) doppio, triplo e quadruplo di una palla data. Le cifre scritte accanto ai quattro cerchi indicano le lunghezze convenzionali dei diametri delle sfere e degli spigoli dei cubi nei quali esse sono inscritte:



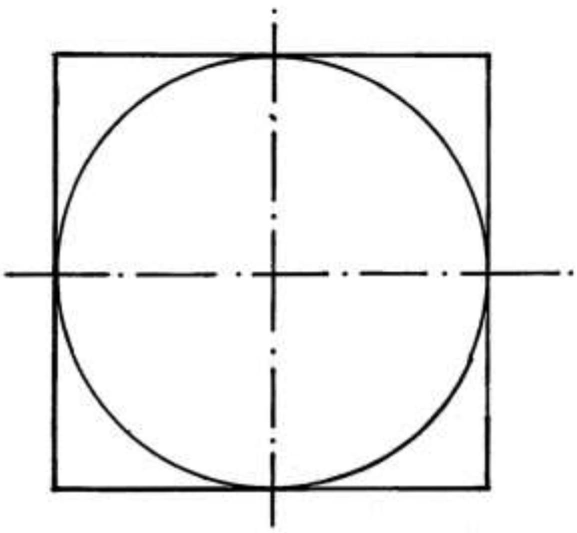
1



$\sqrt[3]{2}$



$\sqrt[3]{3}$

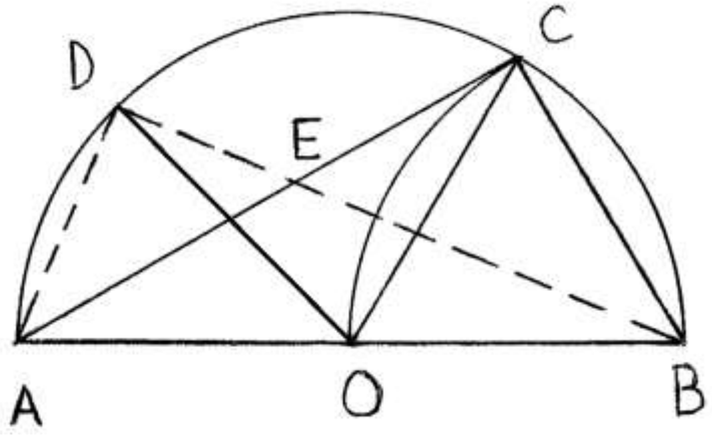


$\sqrt[3]{4}$

<u>La costruzione di Huygens</u>

Christiaan Huygens (1629 – 1695) è stato un matematico olandese.

Un cubo ha spigolo lungo OA e deve essere costruito un secondo cubo di volume doppio.



Disegnare una semicirconferenza AB con raggio OA. Facendo centro in B con lo stesso raggio tracciare un secondo arco che va da O fino a fissare il punto C.

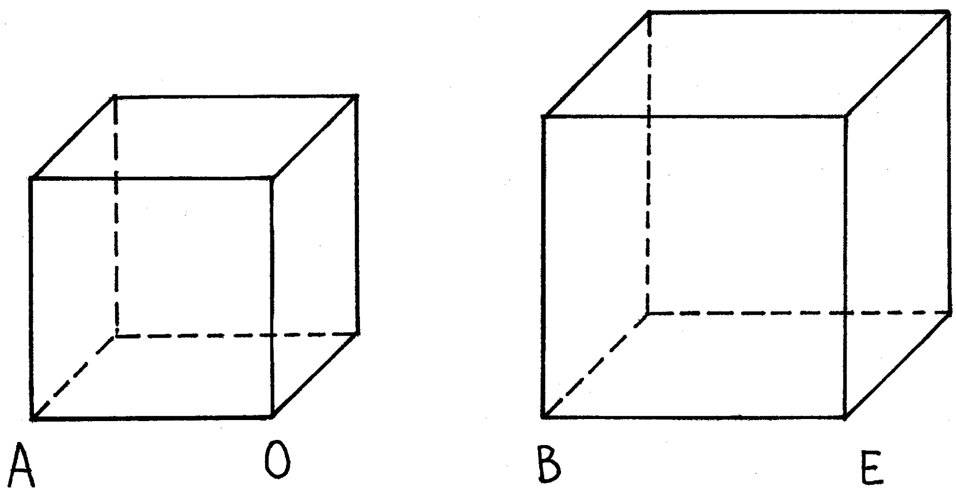
Disegnare le corde AC e CB, cateti del triangolo rettangolo ACB.

OCB è un triangolo equilatero.

Per tentativi, con la riga tracciare la corda DB che risponda alla seguente condizione: la corda AD deve essere lunga quanto EC: anche questa costruzione è un'applicazione del metodo *neusis*.

L'angolo DOA è ampio ≈ 44,90° e cioè soltanto un decimo di grado meno di 45°.

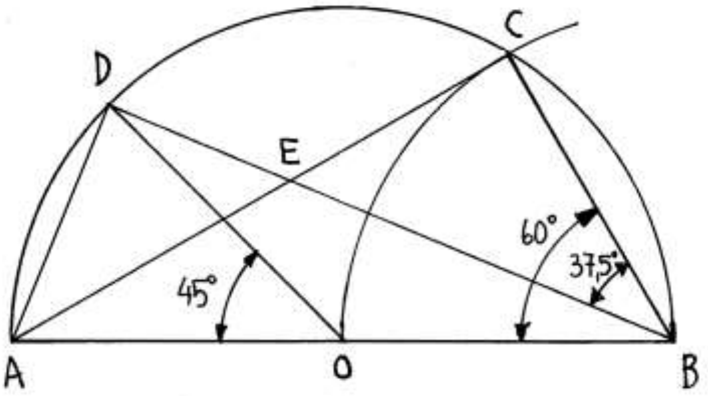
Il segmento BE è lungo quanto lo spigolo del cubo di volume doppio di quello con spigolo OA:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del metodo di Huygens semplifica la costruzione e fa a meno del *neusis*.

Tracciare la semicirconferenza con centro O e raggio OA = OB (di lunghezza uguale allo spigolo del cubo da duplicare) e il diametro AB:



Fare centro in B e con raggio BO disegnare un arco da O fino a tagliare la semicirconferenza in un punto, C: l'angolo CBO è ampio 60°.

Dal punto O tracciare il raggio OD, inclinato di 45° rispetto al diametro AB.

Disegnare le corde AC e DB: esse si intersecano nel punto E e il segmento EB è la lunghezza dello spigolo del cubo di volume doppio.

La differenza fra le lunghezze dello spigolo del cubo doppio ottenute con i due differenti metodi è minima.

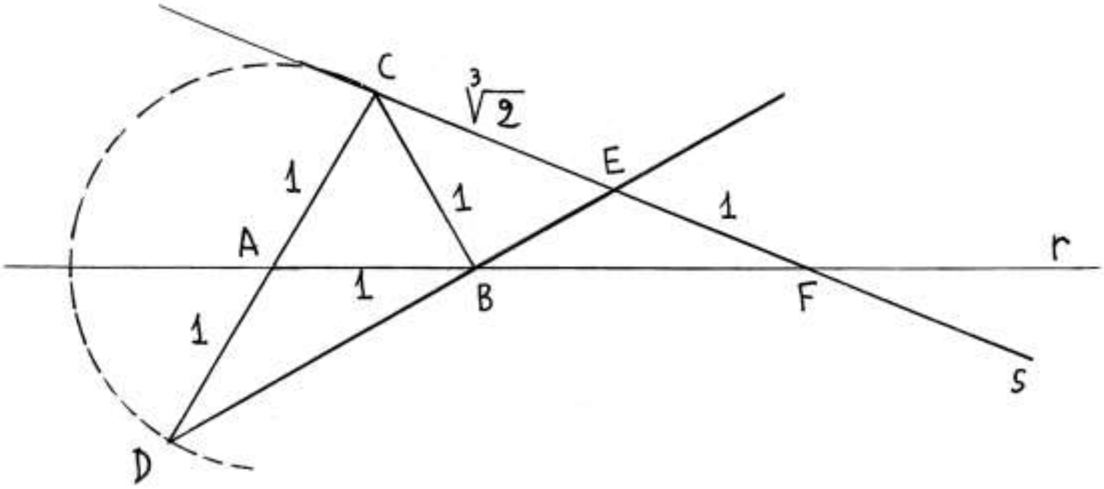
Gli angoli DOA e DBA sono sottesi dalla stessa corda AD: il primo è un angolo al centro (perché il suo vertice è nel centro O) e il secondo è un angolo sulla circonferenza (perché il vertice B giace sulla semicirconferenza): pertanto DBA è ampio la *metà* di DOA e cioè 45/2 = 22,5°. Ne consegue che l'angolo CBD vale:

CBD = CBO – DBO = 60 – 22,5 = 37,5° .

Il metodo di Newton

Anche il grande matematico inglese Isaac Newton (1642 – 1727) si interessò al problema della duplicazione del cubo.

La figura che segue presenta la sua costruzione approssimata:



Tracciare la retta orizzontale *r* e riportarvi la lunghezza convenzionale dello spigolo del cubo da duplicare: è AB = 1 .

Fare centro nel punto A e con raggio AB disegnare un ampio arco di circonferenza. Completare il triangolo equilatero ABC e prolungare il lato CA fino a fissare il punto D.

Tracciare una passante per D e per B.

Per tentativi, disegnare una retta, *s*, passante per C, fino a quando non determina il segmento EF lungo quanto il lato AB e cioè di lunghezza convenzionale 1.

Il segmento CE è con buona approssimazione lungo

$\sqrt[3]{2}$ ed è la lunghezza convenzionale dello spigolo del cubo di volume doppio.

Anche Newton impiegò il metodo *neusis*.

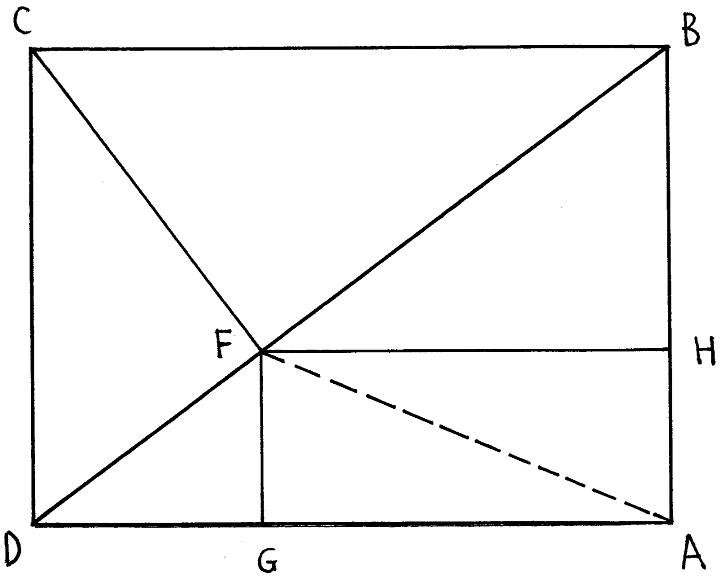
La costruzione di Enrico Montucci

Il matematico Enrico Montucci era di origini senesi. Nacque a Berlino nel 1808.

Visse poi a Siena fino a quando si trasferì a Parigi per motivi olitici, dove morì nel 1877.

Nello scritto inedito "*Di alcune non osservate proprietà del rettangolo*", risalente al 1841, e conservato in sei fogli custoditi nell'Archivio dell'Accademia dei Fisiocritici di Siena, Enrico Montucci volle dare un contributo alla soluzione geometrica del problema dell'inserzione di due medie proporzionali fra due lunghezze date.

È dato un generico rettangolo ABCD:



DB è una delle sue due diagonali. Dal vertice C abbassare la perpendicolare a DB: è CF. Dal punto F condurre le parallele ai lati di ABCD: sono FG e FH. FA è la diagonale del rettangolo GFHA.

Indichiamo le lunghezze dei segmenti che interessano:

* DB è *d*.
* FG è *p*.
* FH è *q*.

Montucci dimostrò la seguente relazione:

$$CF = \sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2}$$

.

Da questa regola egli dedusse due corollari:

I. La perpendicolare CF abbassata verso la diagonale DB è *radice cubica* del prodotto delle lunghezze della diagonale per le lunghezze dei segmenti uscenti da F e cioè:

$$CF = \sqrt[3]{DB * FG * FH}$$

e di conseguenza

$$CF^3 = DB * FG * FH .$$

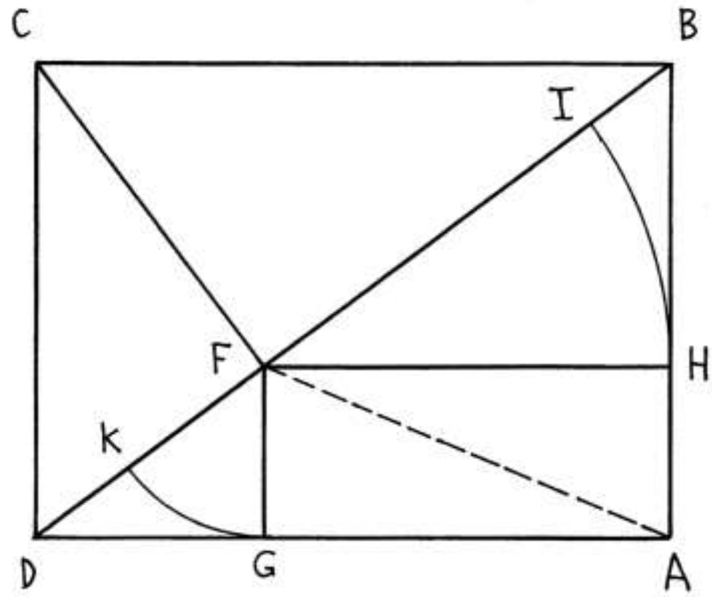
II. Il quadrato della lunghezza della perpendicolare CF è medio proporzionale fra la differenza fra le lunghezze della diagonale DB e della diagonale AF e un terzo della somma delle lunghezze di DB e AF:

$$(BD - AF) : CF = CF : (BD + AF)/3 .$$

Infine, Montucci elaborò il seguente teorema:

"Date tre rette [segmenti], una delle quali maggiore della somma delle altre due, con la Geometria elementare potranno costruirsi due medie geometriche fra la maggiore e una qualunque delle altre, quando la maggiore possa essere la diagonale di un rettangolo e le altre due siano le parallele condotte ai lati dal piede della perpendicolare calata dall'angolo opposto".

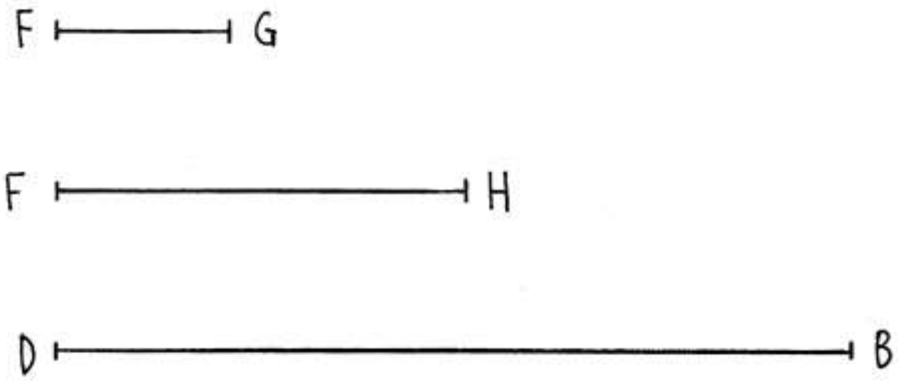
Il teorema è verificato nel caso del rettangolo precedente:



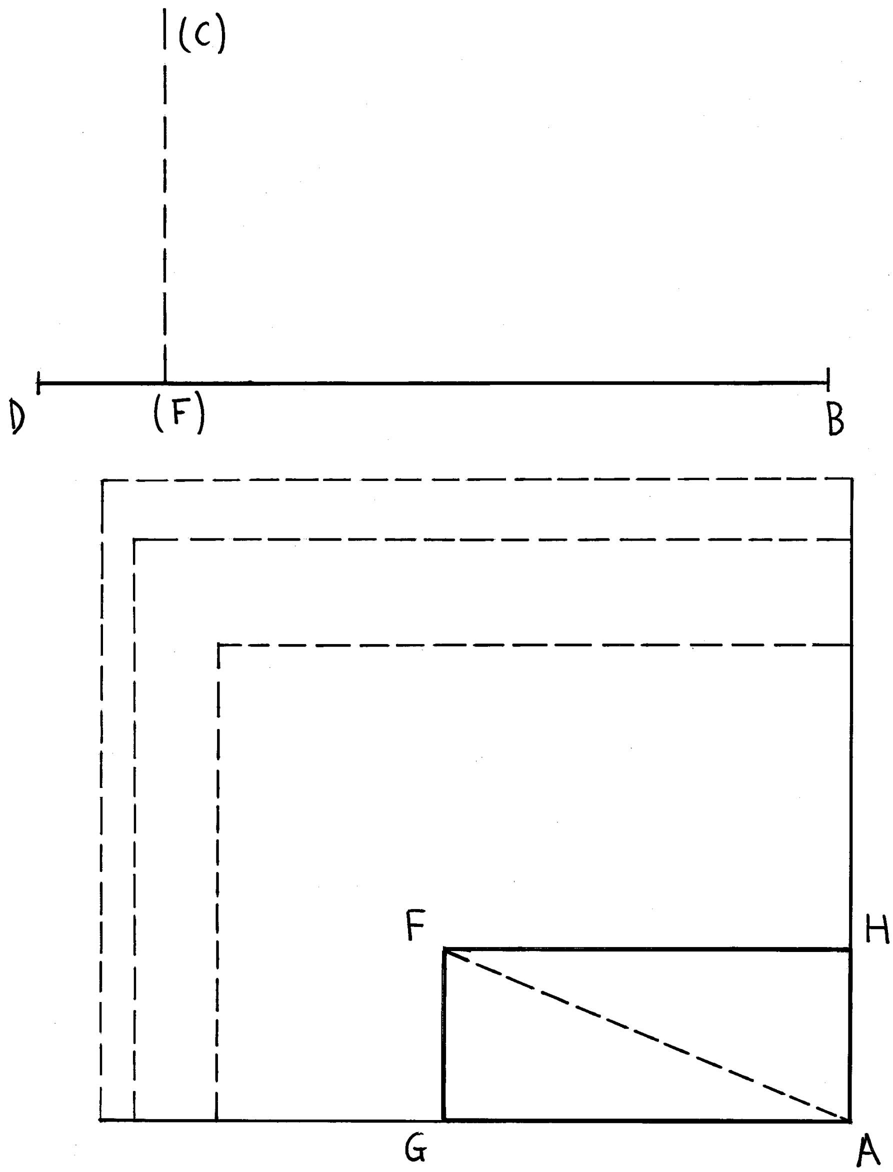
Facendo centro in F sono state ribaltate in I e in K le lunghezze di FH e di FG: il segmento KI è più corto della diagonale DB. Esso è lungo:

KI = KF + FI = GF + FH.

Dati tre segmenti quali sono DB, FG e FH occorre procedere *per tentativi* alla costruzione del rettangolo ABCD:



La ricostruzione di ABCD è presentata nella figura che segue:

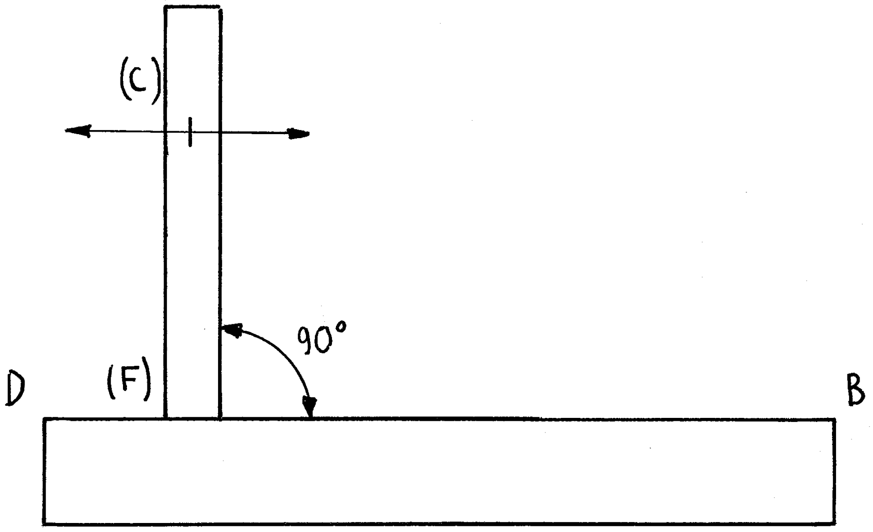


Le lunghezze di DB, FG e FH sono note: sono sconosciute le posizioni dei punti B, C e D e quella di F. La stessa lunghezza di CF è ignota.

La costruzione per tentativi segue alcuni passi. In primo luogo occorre tracciare due lati di un angolo retto con vertice in A e poi costruire il rettangolo FHAG.

Disegnare una serie di rettangoli con la stessa origine nel vertice A e lati posizionati sui prolungamenti di AG e di AH.

L’esatto posizionamento del segmento DB può ottenersi con un righello di materiale plastico, lungo almeno quanto questa diagonale al quale poter applicare uno scorrevole perpendicolare, che può essere ricavato dagli accessori di un tecnigrafo portatile di formato A3 o A4:

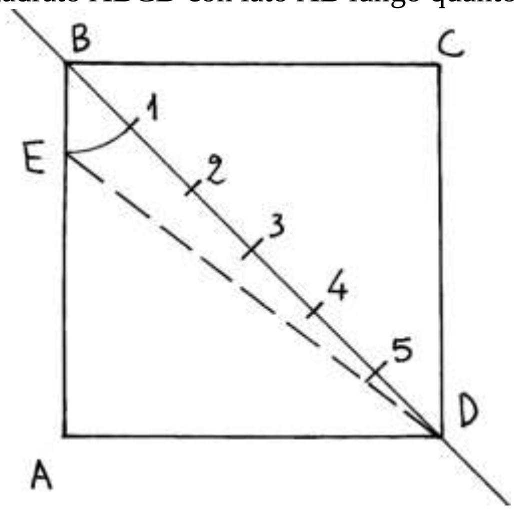


Le costruzioni di Buonafalce

Il matematico pisano Gaetano Buonafalce pubblicò nel 1876 alcune costruzioni *approssimate* per risolvere il problema della duplicazione del cubo.

La prima costruzione qui spiegata è descritta nella figura che segue.

Costruire il quadrato ABCD con lato AB lungo quanto lo spigolo del cubo da duplicare:



Tracciare la diagonale BD e dividerla in *sei* parti uguali: sono fissati i punti 1, 2, 3, 4 e 5.

Fare centro nel punto B e, con raggio B-1, disegnare un arco dal punto 1 fino a incontrare AB in un nuovo punto, E.

Collegare i punti E e D. La corda ED è la lunghezza dello spigolo del cubo di volume doppio, con un errore *per difetto* di 2 : 1 000.

Risulta

$$2 * AD^3 \approx ED^3$$

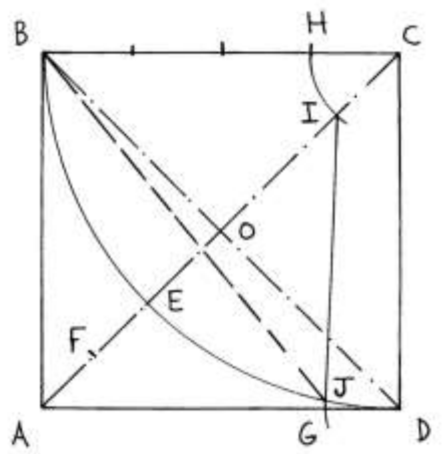
e

$$ED \approx AD * \sqrt[3]{2}\ .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda costruzione di Buonafalce è ancora più precisa della precedente.

ABCD è un quadrato con lato AB lungo quanto lo spigolo di un cubo che deve essere duplicato:



Tracciare le diagonali AC e BD.

Fare centro nel punto O e, con raggio OB = OD, disegnare un arco di circonferenza da B a D: esso incontra la diagonale AC nel punto E.

Determinare il punto medio di AE: è F.

Con il compasso, misurare la lunghezza di AF e riportarla dal punto D per determinare il punto G sul lato AD:

AF = DG.

Dividere in *quattro* parti uguali il lato BC. HC è lungo ¼ del lato BC.

Fare centro nel punto C e con apertura CH tracciare un arco da H fino a tagliare la diagonale AC nel punto I.

Collegare I con G: il segmento incontra l'arco BD nel punto J.

Tracciare il segmento BJ: la sua lunghezza è quella dello spigolo del cubo di volume doppio:

$$2 * AD^3 \approx BJ^3$$

Il segmento BJ è *approssimato per difetto*: l'errore è soltanto pari a 2 : 100 000.

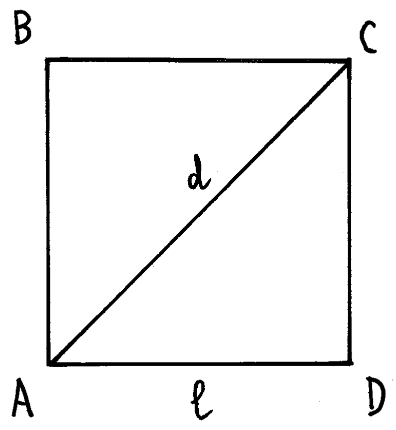
Il metodo di Vargiù

Giuseppe Ignazio Vargiù pubblicò nel 1877 a Oristano la descrizione di un suo metodo geometrico approssimato per la duplicazione del cubo.

Un'ampia descrizione dell'argomento è contenuta nell'articolo di Alberto Conti, citato in bibliografia: l'intero volume che lo comprende è reperibile sul sito www.archive.org .

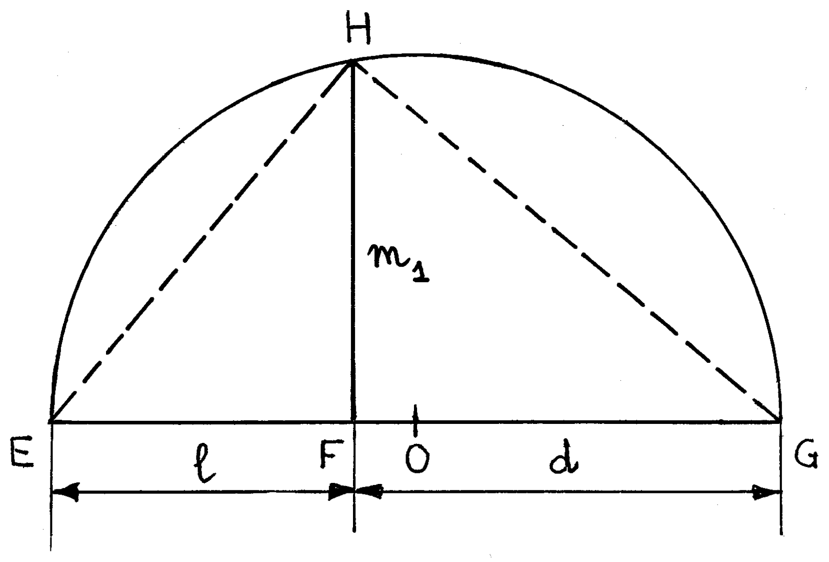
La procedura di Vargiù è un po' lunga.

Il quadrato ABCD ha lati lunghi ℓ che è lo spigolo del cubo da duplicare.



AC è una diagonale ed è indicata con d.

Il primo passo della procedura determina la *media proporzionale* fra la lunghezza di ℓ e quella di d: a ciò provvede lo schema mostrato nel grafico che segue:

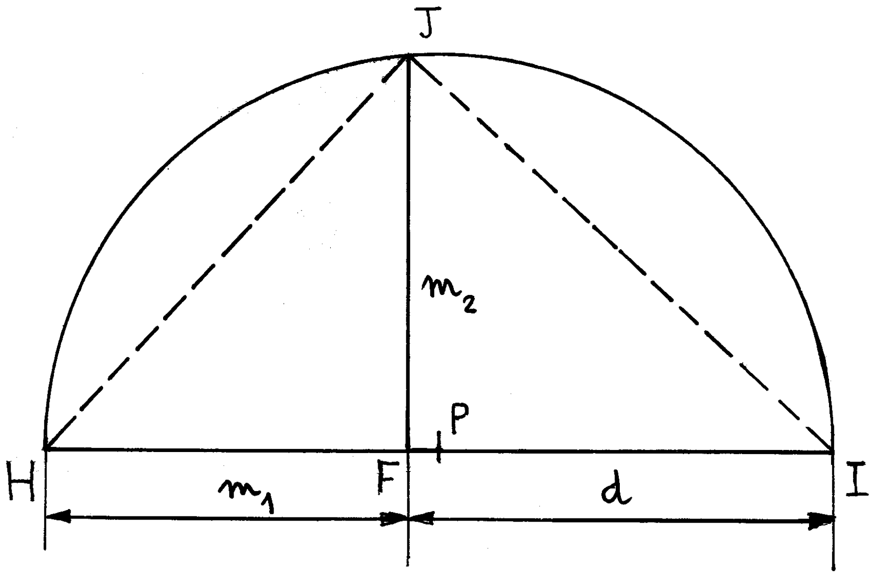


Si tratta dell'applicazione del 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti e EHG lo è. Vale proporzione:

EF : FH = FH : FG o

$\ell : m_1 = m_1 : d$ da cui $m_1 = \sqrt{(\ell * d)}$.

Il secondo passo è dato dalla determinazione della media proporzionale fra la lunghezza di m_1 e quella di d:

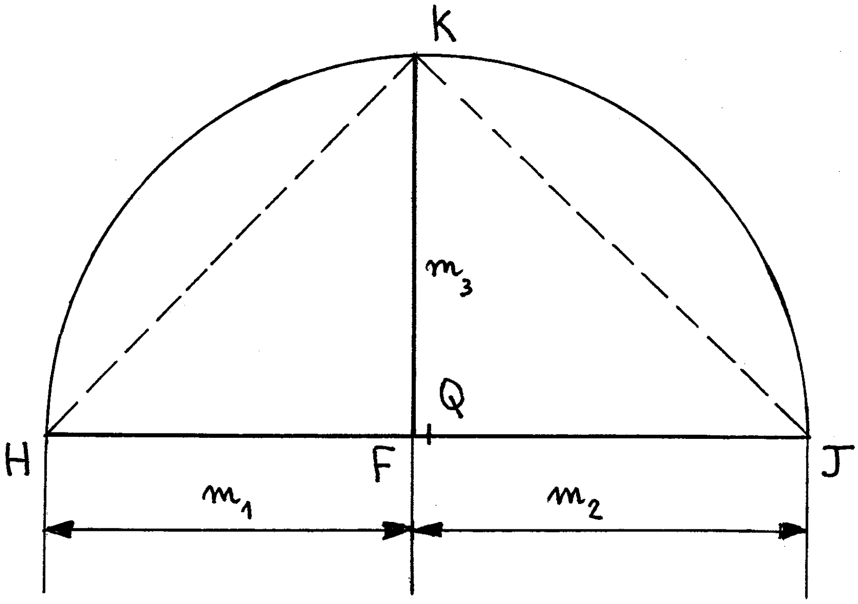


La proporzione è:

HF : FJ = FJ : FI o

$m_1 : m_2 = m_2 : d$ da cui $m_2 = \sqrt{(m_1 * d)}$.

La procedura prosegue con una modifica poiché le successive medie proporzionali sono calcolate fra le due precedenti, come spiegato qui di seguito:



* $m_1 : m_3 = m_3 : m_2$
* $m_2 : m_4 = m_4 : m_3$
* $m_3 : m_5 = m_5 : m_4$
* $m_4 : m_6 = m_6 : m_5$
* $m_5 : m_7 = m_7 : m_6$.

Ipotizzando una lunghezza convenzionale dello spigolo del cubo da duplicare $\ell = 1$, la lunghezza di m_7 vale:

$$m_7 = \sqrt{m_5} \; * \; \sqrt{m_6} = 2^{\frac{85}{256}} \approx 1{,}2588133 .$$

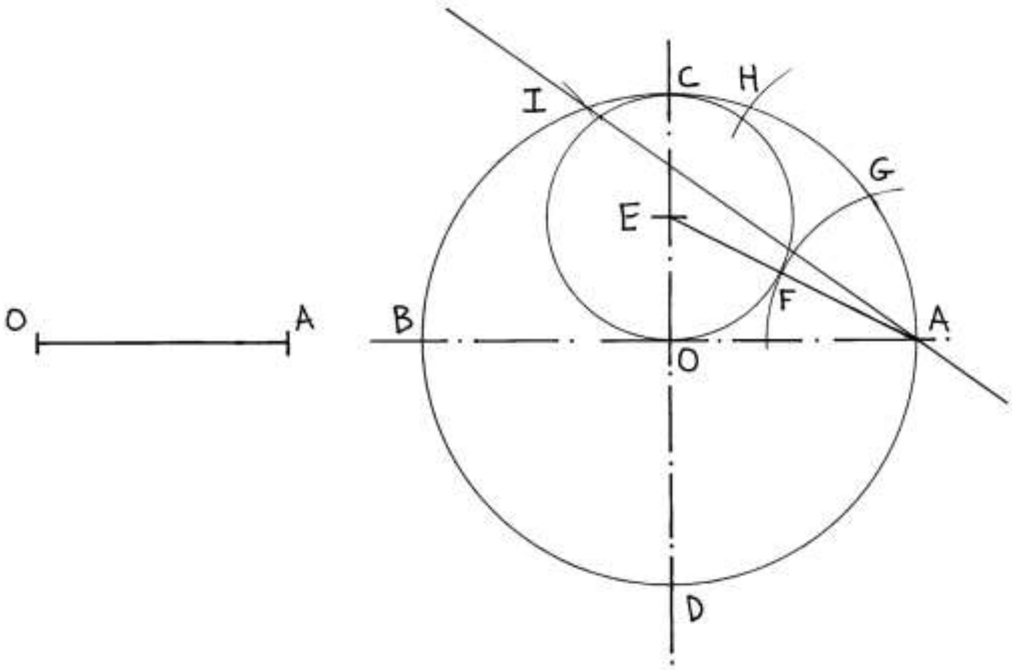
Vargiù calcolò l'ultimo risultato con l'aiuto dei logaritmi. Il valore calcolato è assai prossimo alla radice cubica di 2:

$$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599209 .$$

La duplicazione del cubo secondo Boccali

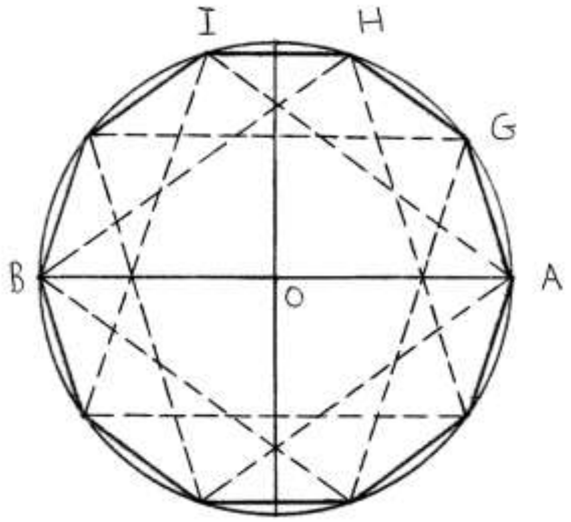
Gaetano Boccali propose nel 1884 un altro metodo approssimato.

OA è la lunghezza dello spigolo del cubo da duplicare.



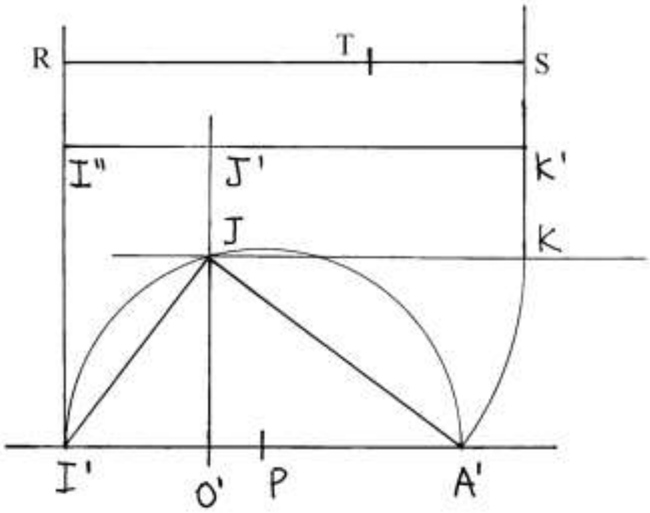
Costruire il decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio OA: nella figura il decagono non è disegnato, ma sono visibili i suoi vertici A, B, G, H e I.

In realtà la costruzione che serve è quella del *decagono stellato*:



Nella figura i lati del decagono stellato sono *tratteggiati*.

Su di una retta orizzontale riportare la lunghezza del raggio OA in O'A':



Con il compasso prendere la lunghezza del lato del decagono stellato IA e riportarla sulla retta dal punto A' verso sinistra fino a stabilire il punto I':

IA = I'A'.

Determinare il punto medio di I'A': è P.

Con centro in P e raggio PI' = PA' tracciare una semicirconferenza da I' a A'.

Dal punto O' elevare la perpendicolare al diametro I'A' fino a incontrare la semicirconferenza nel punto J.

Disegnare le corde I'J e JA': esse sono i cateti del triangolo rettangolo I'JA'.

Per il punto J condurre la parallela alla retta passante per I' e A'.

Fare centro nel punto J e *ribaltare* la lunghezza di JA' fino a fissare il punto K.

Dai punti I' e K innalzare due linee parallele a O'J e perpendicolari alla retta passante per I' e A'.

Disegnare due linee orizzontali parallele a I'A': sulla prima sono fissati i punti I'', J' e K' e sulla seconda i punti R e S.

Dividere il segmento RS in due parti tali che

$$RT : 2 = RS : 3$$

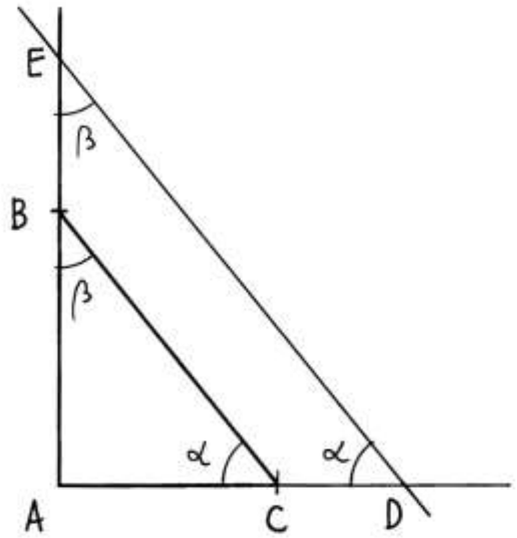
Il segmento RT è la lunghezza dello spigolo del cubo di volume doppio:

$$RT^3 \approx 2 * OA^3$$

RT è *approssimato per eccesso* di 1 : 10 000. L'errore è minimo.

Metodi grafici approssimati

Il triangolo ABC è rettangolo. Il cateto AC è *convenzionalmente* lungo 1 ed è il lato del cubo da duplicare e quello AB è lungo quanto lo spigolo del cubo di volume doppio:



$AB^3 = 2 * AC^3 = 2 * 1^3 = 2$.

La proporzione fra le lunghezze dei due cateti è:

$$AB : AC = \sqrt[3]{2} : 1$$

Per via trigonometrica è facile calcolare l'ampiezza dei due angoli complementari α e β:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt[3]{2} * AC}{AC} = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599 .$$

Ne consegue che

$$\alpha \approx 51{,}56° \approx 51{,}5° .$$

L'angolo β è ampio:

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 51{,}56° = 38{,}44° \approx 38{,}5°$$

Sia AD la lunghezza dello spigolo di un cubo da duplicare: dal punto D condurre una retta parallela all'ipotenusa BC fino a fissare il punto E; il segmento AE è la lunghezza dello spigolo del cubo di volume doppio:

$$AE : AD = \sqrt[3]{2} : 1$$

I triangoli rettangoli ABC e AED sono *simili*:

$$AE : AD = AB : AC = \sqrt[3]{2} : 1$$

Il grafico può essere usato anche in senso inverso: data la lunghezza dello spigolo AE del cubo doppio, è facile ricavare la lunghezza dello spigolo del cubo di volume metà, uguale a AD.

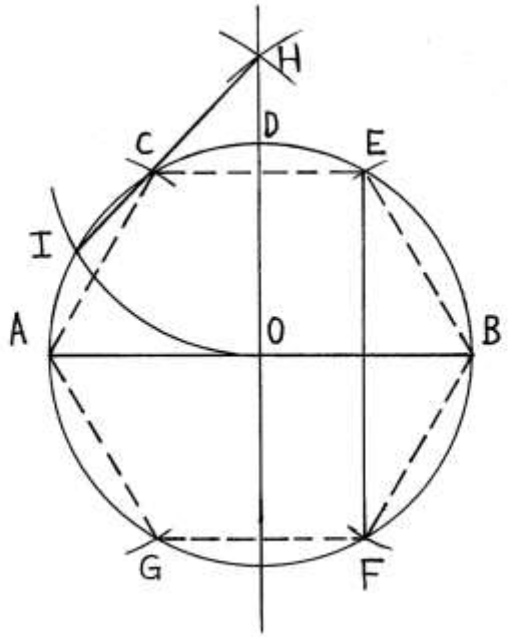
La costruzione grafica, suggerita dal Rivelli (nel volume citato in bibliografia), è impiegabile per determinare con accettabile approssimazione la lunghezza dello spigolo di un cubo che sia doppio o metà di uno dato.

Il metodo di Daniele

Il matematico Ermenegildo Daniele nel contributo citato in bibliografia ha proposto un metodo geometrico approssimato per ricavare la lunghezza dello spigolo di un cubo di volume doppio di uno dato.

In realtà la costruzione risale a Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) che la descrisse nel suo celebre trattato "*La geometria del compasso*" (Pavia, 1797).

OA è il lato del cubo da duplicare.



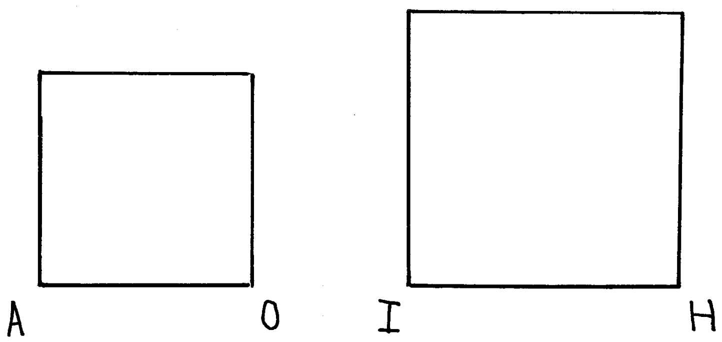
Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA e i suoi diametri perpendicolari AB e OD.

Con lo stesso raggio OA fare centro in A e in B e tracciare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti C, E, F e G. Disegnare l'esagono inscritto ACEBFG e la corda EF.

Con raggio EF fare centro nei punti A e B e tracciare due archi che si incontrano in H.

Fare centro in D e con raggio DO = OA disegnare un arco che incontra la circonferenza in I.

Infine, collegare i punti H e I: HI è la lunghezza approssimata dello spigolo del cubo doppio:



Per la precisione, il vertice C *non* giace sul segmento HI.

Con l'aiuto della trigonometria, Daniele ha determinato il rapporto fra le lunghezze di HI e di OA:

$$HI \approx 1{,}25928 * OA .$$

La radice cubica di 2 è:

$$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599209$$

Le costruzioni di Ghersi

Italo (Antonio Clelio Italo) Ghersi (Genova 1862 - Chiavari 1925), *ingegnere,* è stato un prolifico autore di manuali tecnici per il benemerito editore milanese Ulrico Hoepli.

Uno dei testi più famosi è la "*Matematica dilettevole e curiosa*", pubblicato per la prima volta nel 1913: la *quinta* edizione è stata ristampata nel 2004, sempre a cura dell'editore Hoepli, e consta di VIII-776 pagine con 660 figure originali.

Il titolo può trarre in inganno: il testo è una vera piccola enciclopedia matematica che affronta moltissimi problemi aritmetici, geometrici (prevalentemente di geometria piana), tracciamento di curve, sistemi articolati, probabilità, giochi. Ghersi descrive numerose costruzioni geometriche *approssimate* di poligoni regolari inscritti.

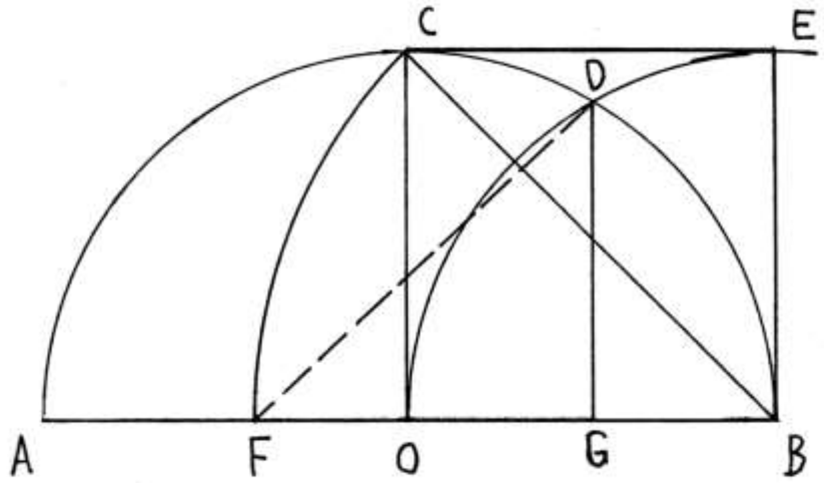
L'unico difetto che si può imputare al libro è di natura *tipografica*: ha dimensioni di 11,9x16,8 cm e i caratteri usati hanno un *corpo* assai piccolo. Sarebbe auspicabile che l'editore Hoepli lo ristampasse in formato più grande.

Ghersi dedica una trentina di pagine al problema della duplicazione del cubo usando le *coniche* (in questo articolo non considerate) e descrivendo altri metodi geometrici quali la cosiddetta squadra di Platone. Alcune soluzioni sono originali del Ghersi.

Qui di seguito sono descritte due soluzioni: la prima è attribuita a un certo Péraux e la seconda ricalca quella del Daniele, incontrata nel precedente paragrafo.

Il metodo Péraux

La costruzione approssimata di Péraux è presentata nella figura che segue:



Un cubo da duplicare ha lo spigolo lungo quanto i raggi OA = OB di una semicirconferenza.

Tracciare il raggio perpendicola al diametro AB: è OC.

Fare centro in B e in C e con apertura OB disegnare due archi che tagliano la semicirconferenza in D e si intersecano nel punto E.

OCEB è un quadrato e BC è una sua diagonale che è lunga:

$$BC = \sqrt{2} * OB .$$

Fare centro in B e con raggio BC tracciare un arco da C fino a incontrare AB in un punto, F.

Disegnare il segmento FD. Dal punto D abbassare la perpendicolare al diametro AB: è DG.

FDG è un triangolo rettangolo. Il cateto DG è lungo quanto l'altezza del triangolo equilatero ODB (non evidenziato in figura) ed è lungo:

$$DG = \sqrt{(3)}/2 * OB.$$

L'altro cateto, FG è lungo:

$FG = FB - GB = BC - GB = \sqrt{2} * OB - OB/2 = OB * (2 * \sqrt{2} - 1)/2$.

L'ipotenusa FD è data da:

$FD^2 = DG^2 + FG^2 = [\sqrt{(3)}/2 * OB]^2 + [OB * (2 * \sqrt{2} - 1)/2]^2 = OB2 * (3 - \sqrt{2})$.

Ne consegue:

$$FD = OB * \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

L'espressione

$$\sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

vale ≈ 1,25928012, mentre

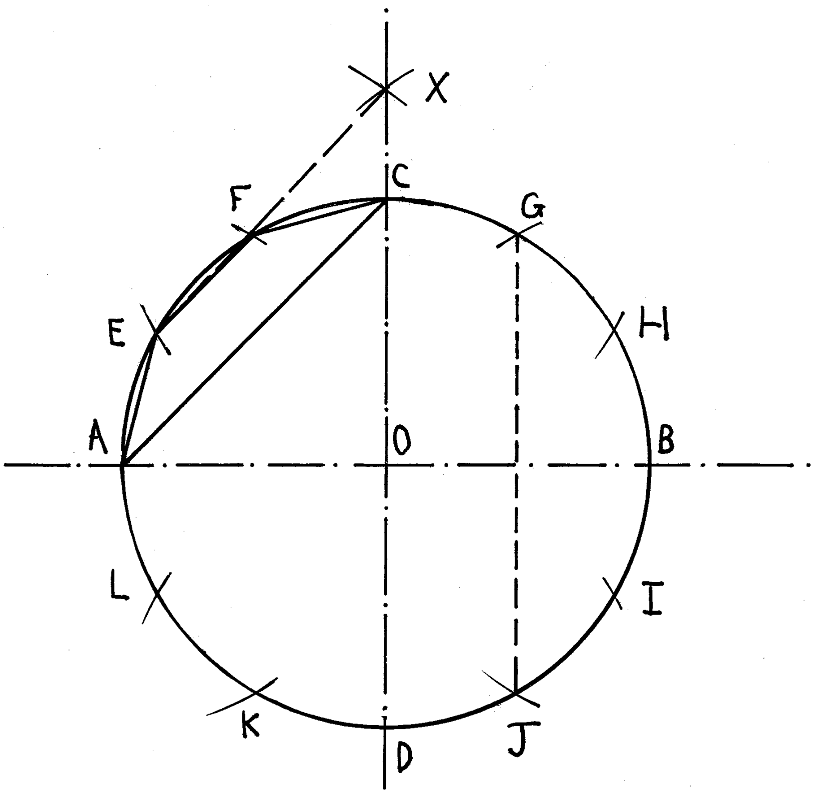
$$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992.$$

Il segmento FD è, con accettabile approssimazione, la lunghezza dello spigolo del cubo che ha volume doppio di quello con spigolo lungo OA.

Il metodo Daniele – Ghersi

La seconda costruzione di Ghersi è ricalcata su quella di Daniele, incontrata in precedenza. Ghersi vi ha aggiunto qualche complicazione e, come Daniele, ha utilizzato la trigonometria.

OA è la lunghezza dello spigolo del cubo da duplicare:



Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA e i diametri AB e CD fra loro perpendicolari.

Ghersi cita il quadrato inscritto di cui in figura è tracciato solo un lato, AC.

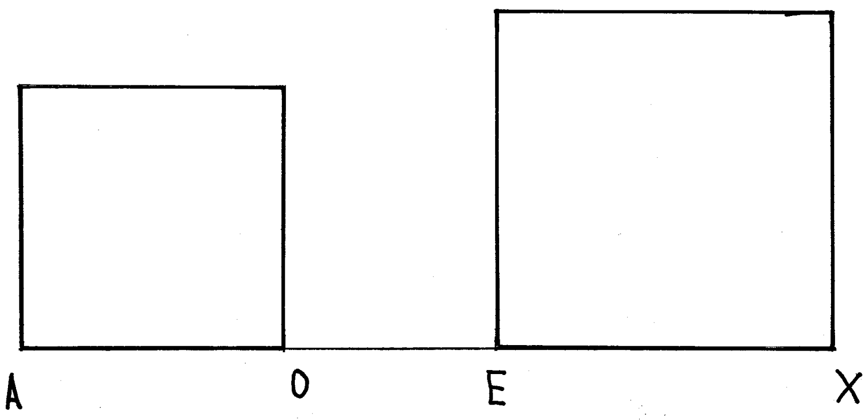
Con apertura OA fare centro in A, B, C e D e disegnare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti E, F, G, H, I, J K e L: essi sono i vertici del *dodecagono* regolare inscritto.

Tracciare la corda GJ e con questa apertura fare centro in A e in B per disegnare due archi che si intersecano in X, punto collocato sul prolungamento di CD.

Il segmento EX è la lunghezza approssimata dello spigolo del cubo di volume doppio:

$$EX \approx 1{,}25928 * OA .$$

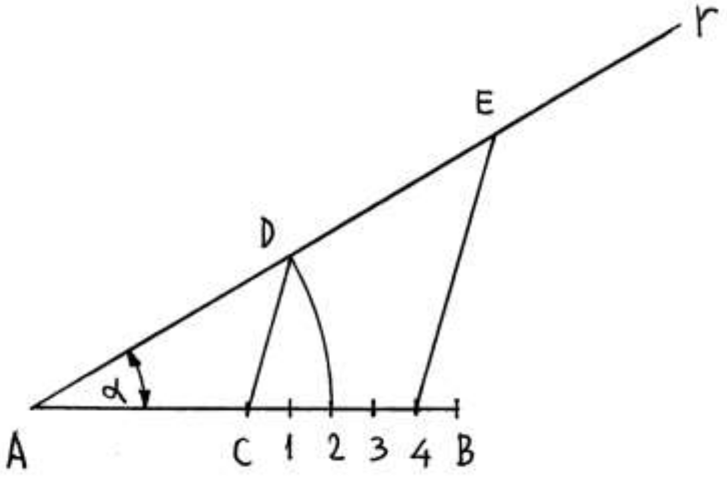
Lo schema che segue mette a confronto le facce dei due cubi:



Il metodo di Bartolo

In un articolo del 1947 (citato in bibliografia), M. Bartolo ha descritto un metodo grafico approssimato per ricavare la lunghezza dello spigolo del cubo di volume doppio di uno dato.

Su di una linea orizzontale riportare la lunghezza AB dello spigolo del cubo da duplicare:



Determinare il punto medio di AB: è C. Dividere in *cinque* parti uguali il segmento CB: sono fissati i punti 1, 2, 3 e 4.

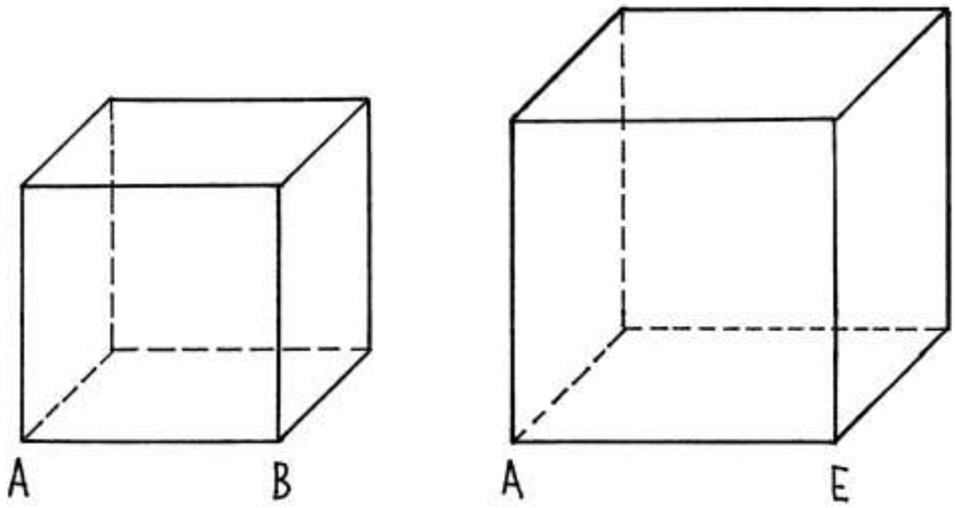
Dal punto A tracciare la semiretta *r* inclinata a piacere di un angolo α minore di 90° (per evitare complicazioni costruttive).

Fare centro in A e con raggio A-2 disegnare un arco dal punto 2 fino a incontrare la semiretta *r* in un punto, D.

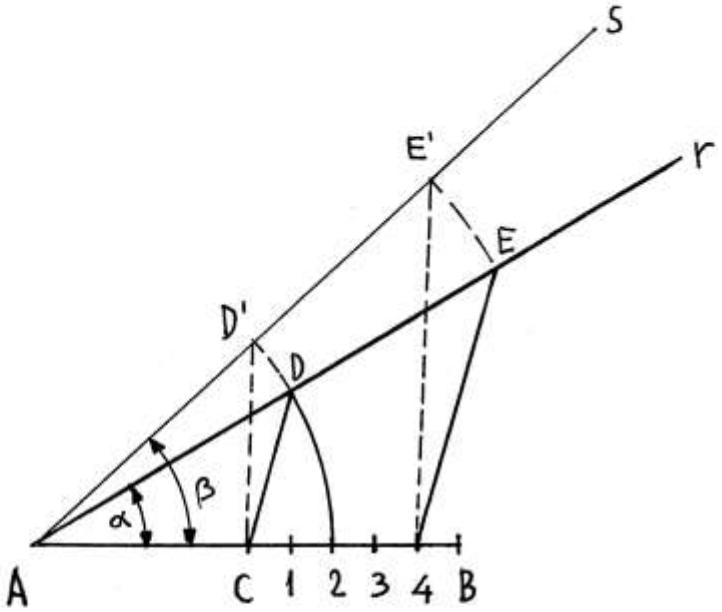
Collegare i punti C e D.

Dal punto 4 condurre una linea parallela a CD fino a tagliare la semiretta *r* in un nuovo punto, E.

Il segmento AE è *lunghezza approssimata* dello spigolo del cubo doppio:



La costruzione è valida anche con una diversa inclinazione della semiretta uscente da A, come è il caso di quella *s* nella figura che segue:



Ecco la dimostrazione del Bartolo.

Lo spigolo AB è lungo ℓ.

I triangoli ADC e AE-4 sono simili per cui vale la seguente proporzione:

AC : AD = A-4 : 4-E, da cui

(4-E) = AD * (A-4)/AC .

Ma :

* AC = $\ell/2$;
* (A-2) = AD = 7/10 * ℓ ;
* (A-4) = 9/10 * ℓ .

Sostituendo questi valori nella precedente formula si ha:

$$(4\text{-}E) = (7/10 * \ell)*(9/10 * \ell)/(1/2 * \ell) = 63/100 * \ell = 1{,}26\ \ell.$$

Il valore di 1,26 così calcolato è assai vicino alla radice cubica di 2:

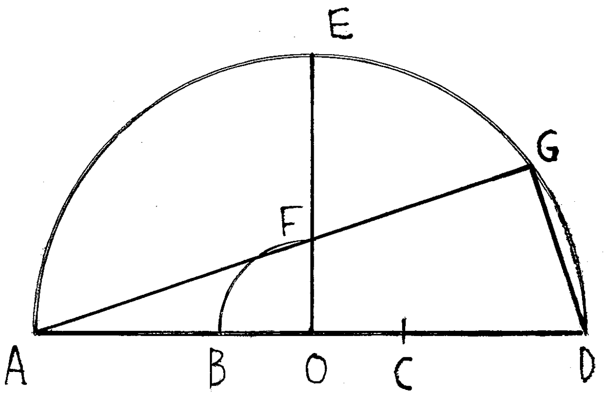
$$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$$

La costruzione di Bartolo è finalizzata alla soluzione di problemi relativi agli strumenti musicali a corda.

Altre costruzioni approssimate

Le costruzioni che seguono sono riprese dal sito di Vanni Gori http://xoomer.virgilio.it/vannigor/index.htm , visitato il 4 ottobre 2018.

Il primo metodo risale al 1825:



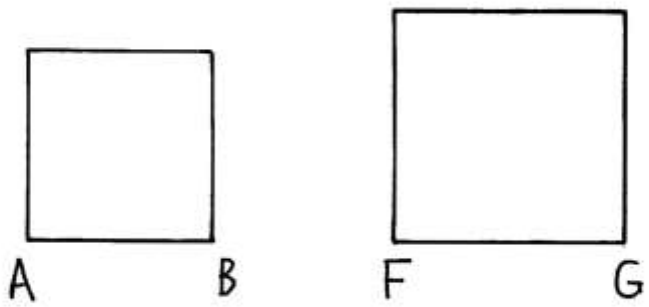
Tracciare il diametro AD e dividerlo in *tre* parti uguali: i segmenti AB, BC e CD hanno lunghezza uguale a quella dello spigolo del cubo da duplicare.

O è il punto medio di AD. Innalzare il raggio OE perpendicolare a AD.

Fare centro in O e con raggio OB tracciare un arco da B fino a intersecare OE in un punto, F. Disegnare la corda da A passando per F fino a incontrare la semicirconferenza in G.

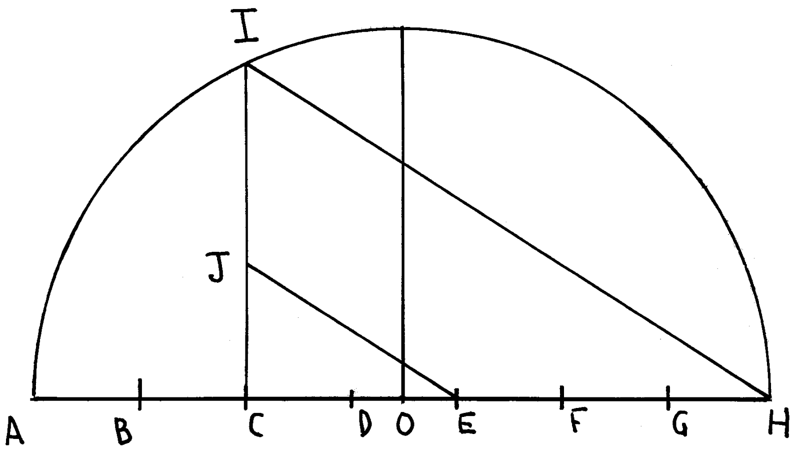
AGD è un triangolo rettangolo inscritto.

Il segmento FG è, con accettabile approssimazione, la lunghezza dello spigolo di volume doppio:



%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda costruzione è presentata nella figura che segue:



Su di una retta orizzontale riportare per *sette* volte la lunghezza AB dello spigolo del cubo da duplicare: sono stabiliti i punti C, D, E, F, G e H.

O è il punto medio di AH.

Fare centro in O e con raggio OA = OH tracciare una semicirconferenza da A a H.

Dal punto C elevare la perpendicolare a AH fino a incontrare la semicirconferenza in I. Disegnare la corda IH e parallelamente ad essa un segmento da E fino a tagliare CI in un punto, J.

Il segmento JC è con buona approssimazione la lunghezza dello spigolo del cubo di volume doppio.

Il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo inscritto AIH (non interamente disegnato) fornisce la seguente proporzione:

AC : CI = CI : CH da cui

$$CI = \sqrt{AC \cdot CH}.$$

Chiamando ℓ la lunghezza dello spigolo AB, la formula precedente diviene:

$$CI = \sqrt{2\ell \cdot 5\ell} = \ell \cdot \sqrt{10}.$$

I triangoli rettangoli CIH e CJE sono simili per cui vale la seguente proporzione:

CJ : CI = CE : CH da cui

$$CJ = \frac{CI \cdot CE}{CH} = \frac{\ell \cdot \sqrt{10} \cdot 2\ell}{5 \cdot \ell} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \cdot \ell.$$

Nell'ultima espressione, il valore numerico è:

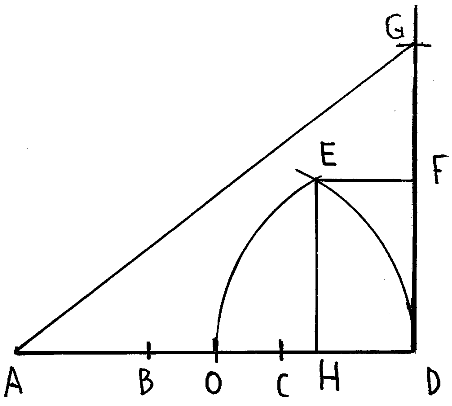
$$\frac{2\sqrt{10}}{5} \approx 1{,}2649$$

che è un'accettabile approssimazione di $\sqrt[3]{2}$.

Il segmento CJ è lungo quanto lo spigolo del cubo di volume quasi doppio di quello che ha spigolo AB = ℓ .

%%%%%%%%%%%%%%%%%

La terza costruzione è stata pubblicata nel 1872 a Londra.



AD è la lunghezza dello spigolo del cubo da duplicare. Dividere in *tre* parti uguali il segmento AD e dal punto D innalzare la perpendicolare.

Fissare il punto medio di AD: è O.

Fare centro in D e in O con raggio DO e disegnare due archi di circonferenza che si incrociano nel punto E: OED è un triangolo equilatero e EH è una sua altezza.

Dal punto E condurre la parallela a AD fino a intersecare in F la perpendicolare.

Con il compasso misurare la lunghezza di CD e riportarla da F fino a stabilire il punto G.

Tracciare AG: questo segmento è la lunghezza approssimata dello spigolo del cubo di volume doppio.

APPENDICE

Un importante studio dello storico della matematica Enrico Gamba sull'affresco della *Scuola di Atene* fornisce uno spunto per descrivere un ulteriore metodo per la duplicazione del cubo. Il documento è citato in *bibliografia*.

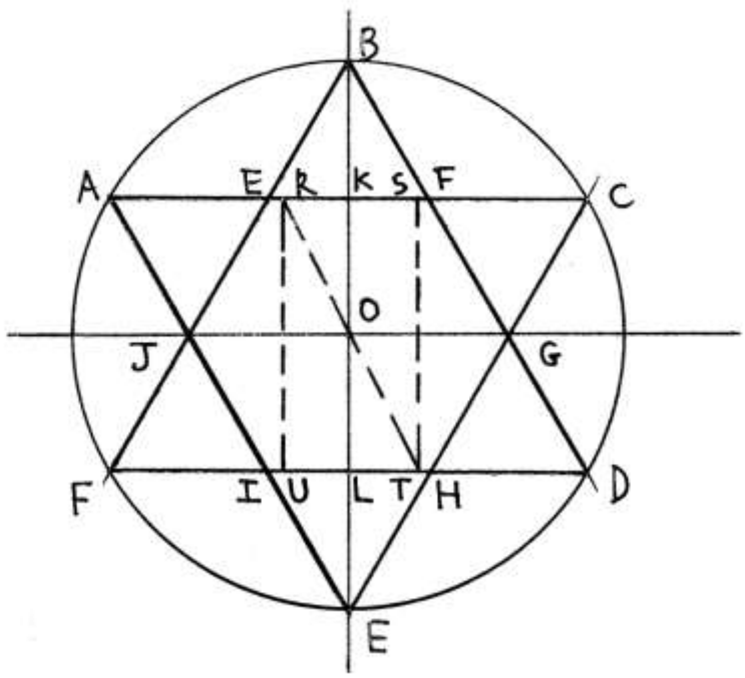
L'affresco fu dipinto da Raffaello Sanzio fra il 1509 e il 1511, misura circa 770x500 cm ed è collocato in Vaticano nella *Stanza della Segnatura*.

Nell'affresco sono disegnate 58 figure. Gli studiosi hanno identificato alcuni personaggi: così, ad esempio, al centro Leonardo da Vinci impersona Platone e nel gruppo di destra Donato Bramante raffigura Euclide.

Euclide impugna un compasso per spiegare il significato di una costruzione geometrica tracciata su una piccola lavagna e basata sull'intreccio di due triangoli equilateri di uguali dimensioni:

Enrico Gamba ha studiato questa figura: qui di seguito è descritta la ricostruzione della stessa che egli ne ha fatto.

Nella circonferenza di centro O sono tracciati due diametri fra loro perpendicolari e due triangoli equilateri inscritti (ACE e FBD): i loro lati si intersecano formando l'esagono regolare EFGHIJ:



Inoltre, nella figura sono presenti sei più piccoli triangoli equilateri, di uguali dimensioni: essi sono costruiti sui lati dell'esagono EFGHIJ; i loro vertici sono collocati sulla circonferenza e coincidono con quelli dei triangoli ACE e FBD.

Uno dei triangoli è EBF; i suoi lati sono lunghi:

$$EF = 1/3 * AC .$$

Il lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r è dato:

$$AC = r * \sqrt{3} = OA * \sqrt{3} .$$

Ne consegue che:

$$EF = 1/3 * AC = 1/3 * \sqrt{3} * OA = (\sqrt{3})/3 * r .$$

I punti medi delle corde AC e FD sono rispettivamente K e L.

Il segmento KL è lungo quanto il raggio r della circonferenza, OB.

Dal punto K fissare due punti sulla corda AC a distanza da K uguale a $\frac{1}{4} * r$.

Sono stabiliti i punti R e S e il segmento RS è lungo $\frac{1}{2} * r$. Ripetere la stessa operazione a partire dal punto L sulla corda FD: sono acquisiti i punti U e T.

Tracciare i segmenti RU e ST e la diagonale RT; i lati del rettangolo RSTU hanno lunghezze in proporzione:

$$ST : RS = r : r/2 = 2 : 1 .$$

Il rettangolo RSTU è un *doppio quadrato* e la sua diagonale RT è lunga $\sqrt{5} * r$.

Il rettangolo RSTU e la sua diagonale RT sono alla base della costruzione della *sezione aurea*.

Bibliografia

1. Agostini Amedeo, “I problemi geometrici elementari e i problemi classici”, in “Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementi”, vol. II – parte 1[a], Milano, Hoepli, ristampa anastatica del 1964, pp. 483 – 539.
2. Barbieri Patrizio, “Il mesolabio e il compasso di proporzione: le applicazioni musicali di due strumenti matematici”, in “Musica, Scienza e Idee nella Serenissima durante il Seicento”, Edizioni Fondazione Levi, Venezia, 1996, pp. 201-220.
3. Bartolo M., “Il problema di Delo ed una sua applicazione acustica”, Bollettino Unione Matematica Italiana, serie 3, vol. 2, 1947, n. 3, Bologna, Zanichelli, pp. 235-238.
4. Cataneo Pietro, “L’architettura di Pietro Cataneo, Senese, Alla quale, oltre al essere stati dall’istesso autore rivisti, meglio ordinati et di diversi desegni e discorsi arricchiti i primi quattro libri per l’adietro stampati, Sono aggiunti di più il Quinto, Sesto, Settimo, e Ottavo libro”, Venezia, Manuzio, 1567, pp. 220.
5. Cherubini Donatella (a cura di), “Di padre in figlio”. Antonio ed Enrico Montucci senesi europei tra ‘700 e ‘800, Milano, Franco Angeli, 2018, pp. 113.
6. Conti Alberto, “Problemi di 3.° grado: Duplicazione del cubo – Trisezione dell’angolo”, in “Questioni riguardanti la geometria elementare”, a cura di Federigo Enriques, Bologna, Zanichelli, 1900, pp. 415 – 470.
7. Daniele Ermenegildo, “Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso”, in “Questioni riguardanti la geometria elementare”, a cura di Federigo Enriques, Bologna, Zanichelli, 1900, pp. 247 – 277.
8. Dürer Albrecht, “Institutiones Geometricæ”. “I geometrici elementi di Alberto Durero”, traduzione di Cosimo Bartoli, a cura di Giovanni Maria Fara, Torino, Nino Aragno Editore, 2008, pp. XV-546.
9. Duvernoy Sylvie, “Leonardo and Theoretical Mathematics”, in “Nexus Network Journal”, vol. 10, n. 1, 2088, pp. 39 – 50.
10. Franci Raffaella – Toti Rigatelli Laura, “Scritti inediti di Enrico Montucci”, LLULL, vol. 4, 1981, pp. 71-85.
11. Gamba Enrico, “Scuola di Atene: *Note sulla lavagnetta di Euclide-Bramante*”, 2015, pp. 13, in “altre note SCUOLA ATENE.pdf” (http://urbinoela prospettiva.uniurb.it).
12. Gessner Samuel, “Le “per numero” et le “per linea” dans les écrits d’architecture du Cinquecento”, Scholion, Bulletin 3/2004, pp. 61-81.
13. Gessner Samuel, “Savoir manier le instruments: la géométrie dans les écrits italiens d’architecture (1545-1570)”, “Revue d’Histoire des Mathématiques”. Tome 16 Fascicule 1, 2010, pp. 1-62.
14. Ghersi Italo, “Matematica dilettevole e curiosa”, Milano, Hoepli, 5.a ed., 1988, pp. VIII-778.
15. Knorr Wilbur Richard, “The ancient tradition of geometric problems”, New York, Dover Publications, 1993, pp. vi-410.
16. Rivelli Alfonso, “Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi ed alla loro costruzione in carta”, Milano Hoepli, 1897, pp. 90 + 41 tavv. f.t. (ristampa anastatica, Milano, Lampi di stampa, 2000).
17. Soedel Werner e Foley Vernard, “Le antiche catapulte”, “*Le Scienze*”, maggio 1979, n. 129, pp. 86 – 95.