sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: assonometria, proiezioni ortogonali, prospettiva, solidi regolari inscritti in una sfera, sezione aurea, area pentagono

IL TRATTATO D'ABACO DI PIERO DELLA FRANCESCA

Il manoscritto del *Trattato d'abaco* è diviso in quattro parti. La prima è dedicata all'*aritmetica* e la seconda all'*algebra*.

La terza parte è riservata alla *geometria* piana e solida e occupa i fogli da 80 *recto* a 120 *recto* per un totale di 81 pagine.

La quarta parte contiene un insieme di problemi non geometrici.

I disegni, autografi di Piero come il testo scritto, relativi ai solidi descritti nel Trattato, sono tracciati con uno dei seguenti metodi:

- assonometria cavaliera;
- assonometria isometrica;
- assonometria dimetrica;
- assonometria trimetrica;
- proiezioni ortogonali.

In questo Trattato, Piero non usò mai la *prospettiva* della quale fu un maestro e un teorico insigne: forse impiegò la *prospettiva invertita* nei fogli 108 *recto* e 108 *verso* per rappresentare il cubottaedro (vedere l'Appendice alla fine di questo articolo).

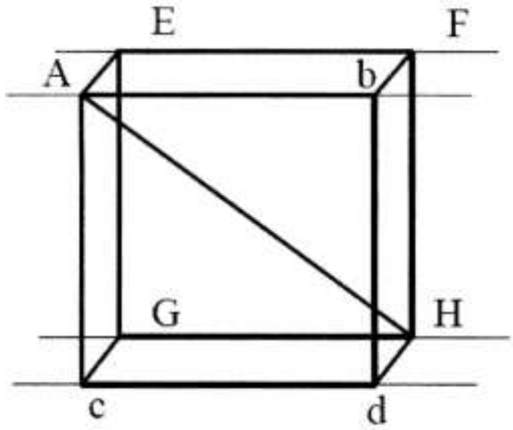
Grazie allo studio della grafia e delle filigrane delle carte che compongono il Trattato, la copia manoscritta conservata nella *Biblioteca Medicea Laurenziana* di Firenze è attribuita a data anteriore al 1480.

Esso precede le altre due opere di Piero della Francesca: il *Libellus de quinque corporibus regularibus* (nel quale sono nuovamente proposti diversi problemi geometrici già affrontati nel *Trattato d'abaco*) e il *De prospectiva pingendi*.

Anche nel *Libellus* i solidi sono rappresentati con differenti metodi di *geometria descrittiva* (come nel Trattato) e mai in prospettiva.

Il cubo in assonometria

Piero della Francesca disegnò nel *Trattato d'abaco* (foglio 106r-b) un cubo in assonometria quasi cavaliera, con spigolo lungo 4:

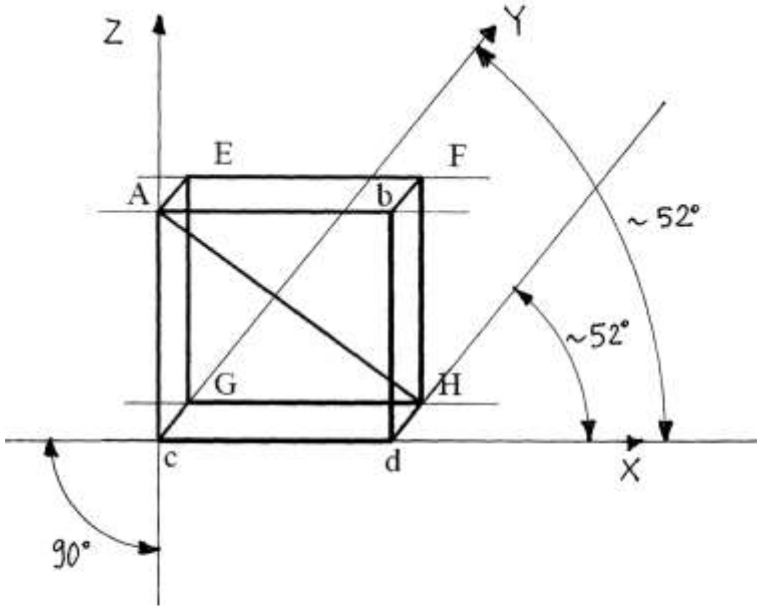


Come tutti i disegni contenuti nei suoi trattati, anche questo è autografo di Piero. Egli assegnò le lettere ai vertici del cubo (ed anche di altri poliedri) seguendo alcune semplici regole:

- le scrisse procedendo da sinistra verso destra;
- le appose dall'alto verso il basso;
- per prime scrisse le lettere sulla faccia anteriore, poi su quella posteriore;
- le lettere sono indifferentemente *minuscole* (b, c e d) e *maiuscole* (A, E, F, G e H).

Il cubo è visto come fosse di materiale trasparente (a telaio o a fil di ferro).

Il solido è disegnato in assonometria *quasi* cavaliera, con l'asse Y inclinato di circa 52° rispetto all'asse X. Gli assi X e Z formano un angolo di 90°:



Il *rapporto di fuga* è uguale a 0,23 e cioè gli spigoli obliqui – paralleli all'asse Y, cG, AE, bF e dH – sono lunghi 0,23 volte la lunghezza reale.

Piero indicò sul disegno la lunghezza dello spigolo in 4 e calcolò quella della diagonale del cubo (AH) in √48.

La diagonale AH è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AcH ed è data da:

$$AH = \sqrt{Ad^2 + dH^2}$$

A sua volta, la diagonale Ad è l'ipotenusa del triangolo rettangolo Acd ed è data da:

$$AD = \sqrt{Ac^2 + cd^2} = \sqrt{lato^2 + lato^2} =$$
$$= \sqrt{2} \cdot lato$$

Sostituendo nella prima espressione il valore di Ad, si ha:

$$AH = \sqrt{(\sqrt{2} \cdot lato)^2 + lato^2} =$$
$$= \sqrt{2\, lato^2 + lato^2} = \sqrt{2 \cdot 4^2 + 4^2} =$$
$$= \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48}$$

Piero non semplificò il suo risultato a:

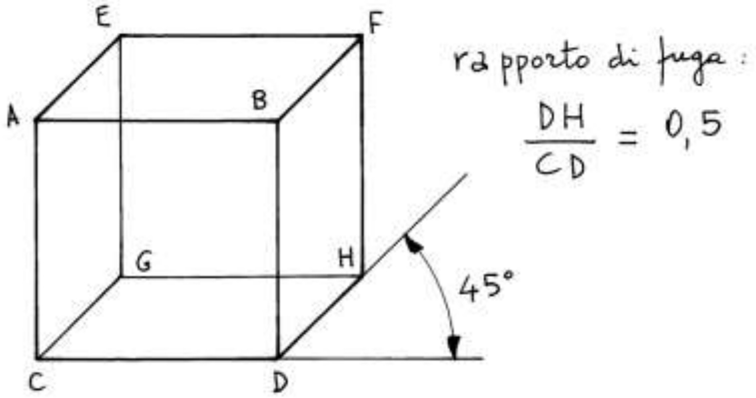
$$AH = \sqrt{48} = \sqrt{(3 * 16)} = \sqrt{(3 * 4^2)} = 4 * \sqrt{3}\ .$$

- APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

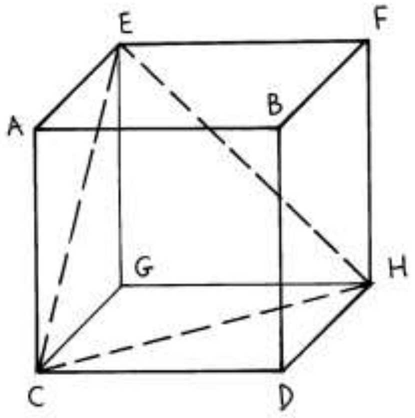
La costruzione della diagonale AH del cubo descritto nel precedente paragrafo fornisce l'occasione per determinare i poligoni generati dal sezionamento del cubo con piani verticali variamente inclinati rispetto a quelli nei quali giacciono le facce superiore AEFb e inferiore cGHd.

Nelle figure che seguono i vertici sono indicati soltanto con lettere maiuscole.

I cubi sono disegnati in assonometria cavaliera con spigoli inclinati di 45° e *rapporto di fuga* uguale a 0,5:

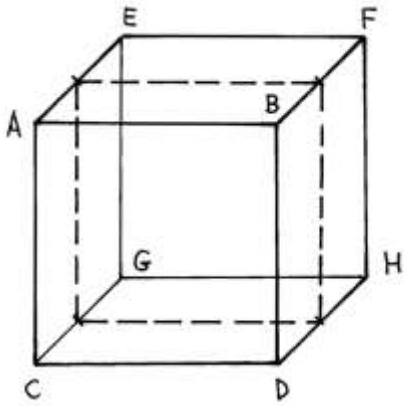


Nella figura che segue sono disegnate tre diagonali su tre facce quadrate del cubo: esse convergono due a due su tre spigoli del solido (C, E e H).



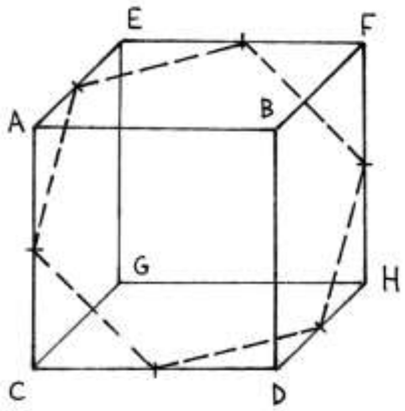
Le tre diagonali hanno la stessa lunghezza ($CE = CA * \sqrt{2}$) e formano il triangolo equilatero CEH che giace su un piano obliquo rispetto a tutte le facce del cubo.

Determinare i punti medi degli spigoli AE, BF, CG e DH e collegarli: la figura risultante è un quadrato con lati lunghi quanto uno spigolo del cubo:

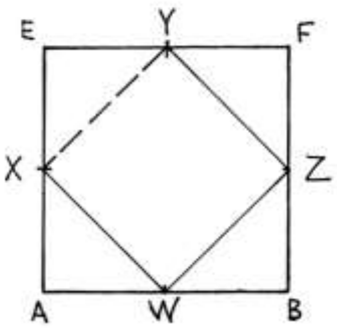


Il nuovo quadrato giace su di un piano parallelo o perpendicolare alle facce del cubo.

Fissare i punti medi di sei spigoli del cubo, come in figura, e collegarli. Si ottiene un esagono regolare che giace su di un piano obliquo rispetto a tutte le facce del solido:



Nella figura che segue è disegnata in pianta la faccia superiore AEFB: il segmento XY è un lato dell'esagono regolare contenuto nella precedente figura. Il lato XY giace sulla faccia AWFB:



Il segmento XY è un lato del quadrato WXYZ inscritto nel quadrato AEFB ed è un lato dell'esagono mostrato nella precedente figura.

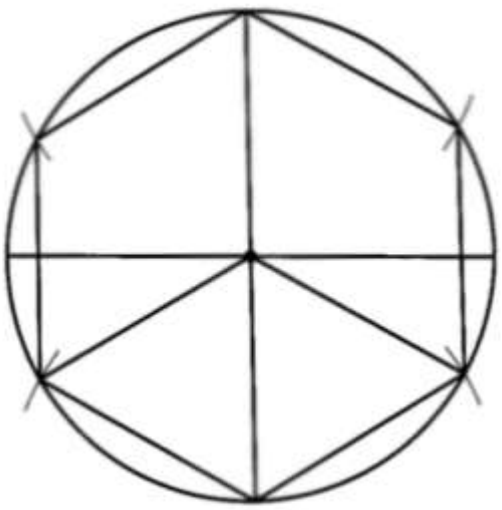
Esso è lungo:

$$XY = (\sqrt{2})/2 * AE .$$

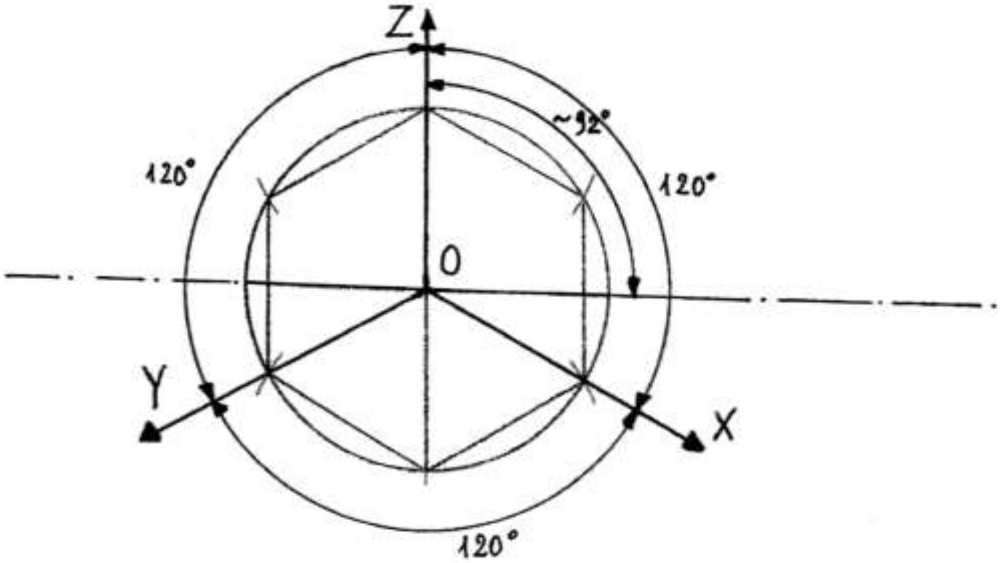
- -

Cubo inscritto in una sfera

Nel foglio 107r-b del *Trattato d'abaco* Piero disegnò in *assonometria isometrica* un cubo inscritto in una sfera:



Gli assi sono, con buona approssimazione, ruotati di 120° l'uno rispetto all'altro:

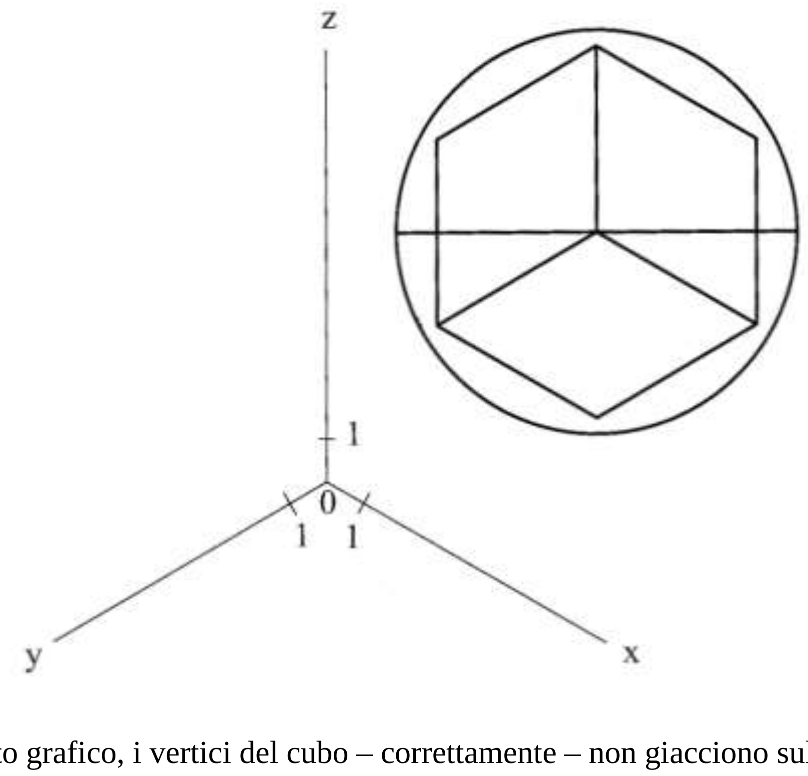


Per il centro O passa il diametro orizzontale che è leggermente ruotato in senso orario di circa 2°: esso forma un angolo di 92° con l'asse Z. L'ultima figura è stata opportunamente ruotata di 2° in senso orario intorno al centro O. L'asse Z è perfettamente verticale.

Gli spigoli del cubo coincidono con i tre assi.

Il profilo apparente del cubo è un esagono regolare con i vertici poggiati sulla circonferenza che rappresenta la proiezione della sfera.

Una corretta assonometria è presentata nella figura che segue che è un *disegno critico* contenuto nell'edizione del Trattato del 2012 (i *disegni critici* di questa edizione sono stati realizzati da Vladimiro Valerio con la collaborazione di Alessandra Sorci):



In questo grafico, i vertici del cubo – correttamente – non giacciono sulla circonferenza perché le lunghezze degli spigoli devono essere ridotte a 0,8165 perché essi sono tutti ugualmente inclinati rispetto al piano del disegno.

Piero posizionò i sei vertici sulla circonferenza per mettere in evidenza la loro appartenenza alla sfera.

Sul disegno Piero scrisse due dati:

- 7 quale diametro della sfera;
- $\sqrt{(16 + 1/3)}$ quale lunghezza dello spigolo.

Nel precedente paragrafo, il cubo disegnato in assonometria quasi cavaliera aveva gli spigoli lunghi 4, come nell'esempio del cubo inscritto in una sfera.

In entrambi i casi, la diagonale del cubo è lunga

$$\text{diagonale cubo} = 4 * \sqrt{3} \approx 6{,}928 \rightarrow 7$$

La lunghezza dello spigolo fornita da Piero per questo secondo cubo – $\sqrt{(16 + 1/3)}$ – è risolta come segue:

$$\text{spigolo cubo} = \sqrt{16 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{48+1}{3}} =$$
$$= \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{3} \cong 4{,}041$$

dato quest'ultimo, che è una buona approssimazione della lunghezza dello spigolo del precedente cubo (4).

Infine, è indispensabile mettere in evidenza un importante dato geometrico: *una diagonale del cubo è un diametro della sfera nella quale esso è inscritto.*

- APPROFONDIMENTO -

Le recenti edizioni nazionali di due trattati di Piero della Francesca (il *Libellus de quinque corporibus regularibus* e il *Trattato d'Abaco*) sono esemplari: i disegni sono stati studiati in maniera approfondita e riprodotti uno per uno. È utile ricordare che quei disegni sono *autografi* di Piero della Francesca.

Dall'*Introduzione* di Vladimiro Valerio nel volume II del *Trattato d'Abaco*, sono riprodotti alcuni passi essenziali (alle pp. XVII-XIX):

"La presente edizione dell'*Abaco* di Piero della Francesca si avvale dell'esecuzione di due tipi di disegni, uno *diplomatico*, l'altro *critico*, per ciascuna delle figure delineate dall'artista, secondo le scelte e i criteri seguiti nell'edizione nazionale del *Libellus de quinque corporibus regularibus*. Anche per l'*Abaco* il modello metodologico seguito è quello della filologia testuale…

"Il *disegno diplomatico* presenta la trascrizione delle particolarità formali dell'originale, migliorandone la leggibilità. Si è evitato di riproporre le sbavature dovute allo scorrimento del righello, o le doppie linee, o quelle divergenti per erroneo calcolo della direzione, così come non si è tenuto conto delle differenze di intensità del segno, dovute al maggiore o minore afflusso di inchiostro…

"A differenza della scelta che si era operata per l'edizione del *Libellus*, si è deciso di riprodurre il disegno diplomatico nella stessa dimensione dell'originale di Piero e di adottare la stessa dimensione anche per il disegno critico, per un'esigenza di fedeltà al testo trádito e di rigore storico-filologico, ma anche nella convinzione che la dimensione sia tra gli elementi caratterizzanti la figura…

“Un’altra caratteristica peculiare di questa edizione, diversa dalla scelta operata per le figure del *Libellus*, riguarda i tratti a secco, di cui Piero fa largo uso in corso d’opera. Tali segni, ottenuti con punta metallica, sono visibili soltanto a luce radente e si è deciso di rilevarli e fotografarli per proporli come parte integrante del disegno diplomatico…

“…, nel disegno diplomatico sono stati evidenziati con un leggero puntinato i pentimenti e le linee erase, …

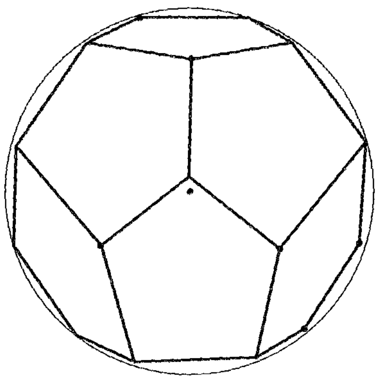
“Per concludere, il disegno autografo è stato continuamente interrogato affinché rivelasse quanti più indizi possibile sulla sua natura e sul procedimento esecutivo, per trasporli nel disegno diplomatico, senza mai intervenire né con integrazioni né con espunzioni, anche laddove la figura non seguisse tutte le prescrizioni del problema di riferimento.

“Il *disegno critico* riproduce il disegno diplomatico emendato degli errori e senza le tracce a secco, integrato con le linee e le lettere menzionate nella proposizione, ma omesse nella figura del manoscritto. Tali integrazioni sono state evidenziate in colore rosso. Viceversa, a differenza dell’edizione nazionale del *Libellus*, sono stati espunti i segni ritenuti pleonastici o non citati espressamente nel testo. Questi criteri rispondono all’esigenza di rispettare rigorosamente il dettato dei problemi, ma al tempo stesso di porre in evidenza, attraverso la comparazione con il disegno diplomatico, le mutevoli relazioni istituite da Piero tra il testo matematico e la sua trasposizione grafica. Come già detto, il disegno critico è eseguito nella stessa dimensione dell’originale e del disegno diplomatico, per facilitare un confronto diretto tra il disegno di Piero e la restituzione critica di esso…”.

- -

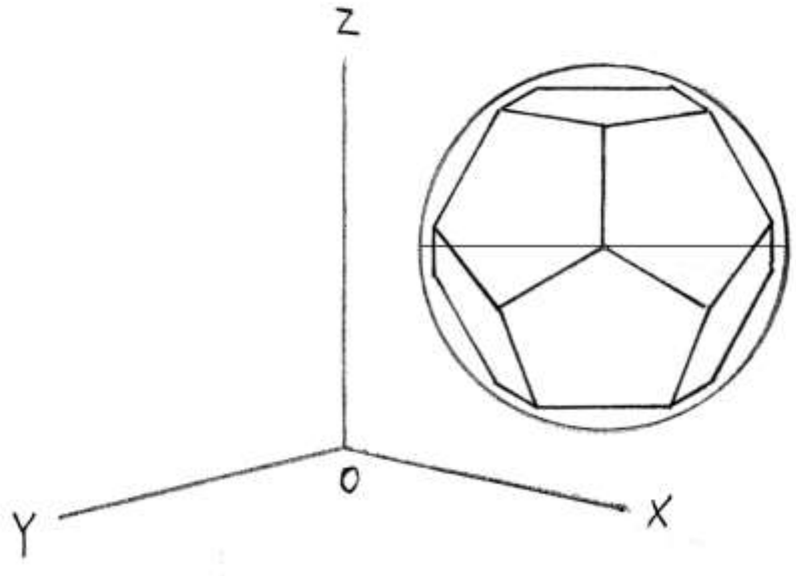
<u>Dodecaedro inscritto in una sfera</u>

Nel foglio 110 *recto* del *Trattato d’abaco* di Piero della Francesca è disegnato in assonometria *dimetrica* un *dodecaedro* regolare inscritto in una sfera:



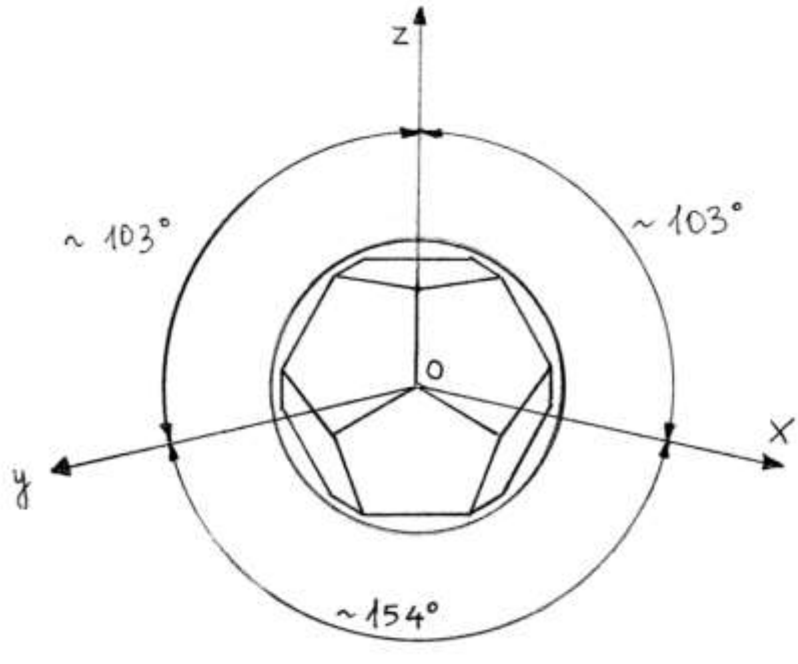
Il centro della circonferenza che rappresenta la proiezione della sfera è indicato da un punto.

La figura che segue è il *disegno critico* tratto dall’edizione del 2012:



Piero disegnò il solido di fronte e leggermente dall'alto in modo da mettere in evidenza la faccia superiore e far coincidere lo spigolo comune alle due facce anteriori con il centro della sfera.

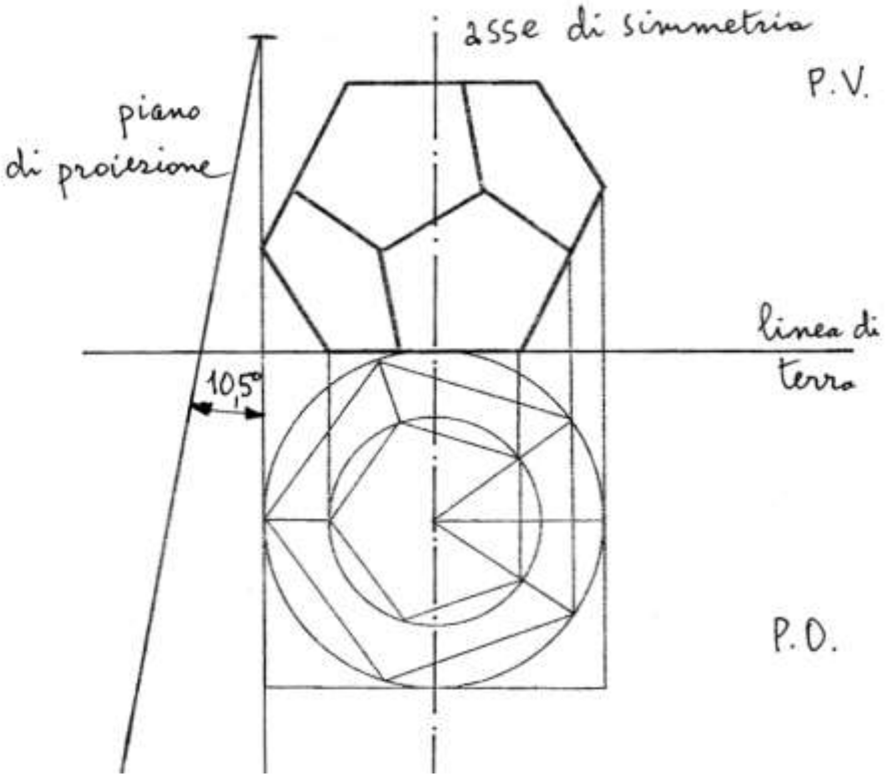
Nel grafico che segue sono riportate le ampiezze degli angoli di questa assonometria *dimetrica*:



Nel grafico l'asse Z coincide con lo spigolo verticale che esce dal punto O.

Nel *disegno critico*, molto correttamente, i vertici del dodecaedro non giacciono sulla circonferenza che rappresenta la sfera: invece, Piero ha poggiati alcuni vertici sulla circonferenza per rendere più chiaro il senso del disegno.

Il piano di proiezione usato da Piero è *inclinato* di 10,5° rispetto all'asse verticale del dodecaedro, come spiega lo schema seguente (costruito su di una doppia proiezione ortogonale, tratta da Bernecoli – Tomasi):



Come già spiegato nel paragrafo dedicato al cubo inscritto nella sfera, esiste una relazione fra la lunghezza dello spigolo del cubo (*lato*) e il *diametro* d della sfera:

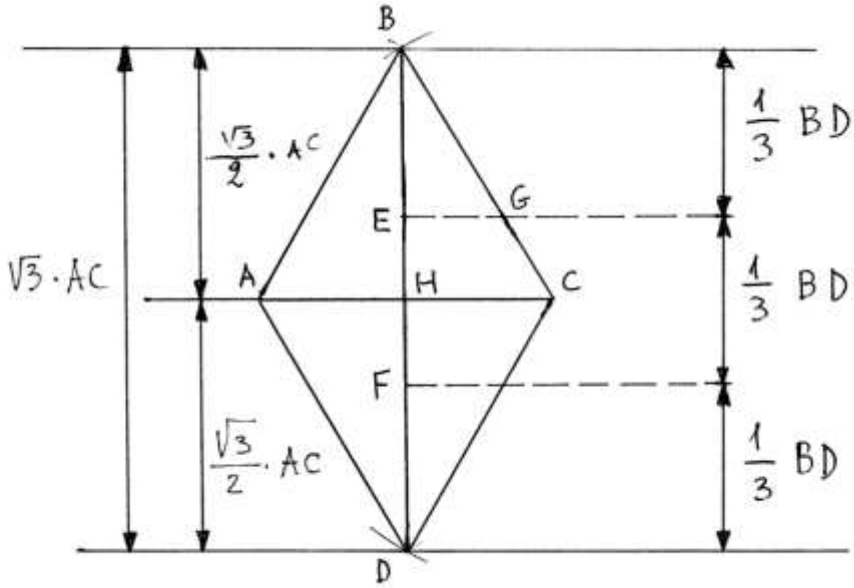
$d = \sqrt{3} * \text{lato}$, formula da cui discende la relazione inversa

$$\text{lato} = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot d}{3}$$

Nella figura che segue è disegnato un *doppio triangolo equilatero* con lato AC lungo quanto il diametro d della sfera e con la doppia altezza BD lunga

$BD = \sqrt{3} * AC = \sqrt{3} * d$

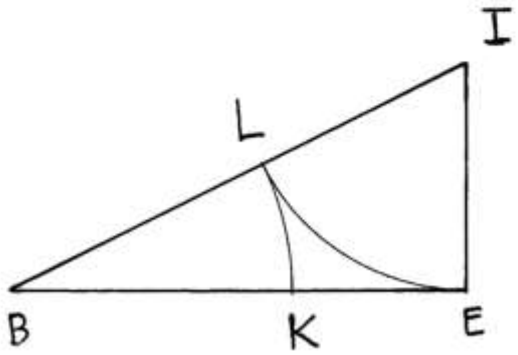
La costruzione serve a determinare per via grafica la lunghezza dello spigolo del cubo. Euclide stabilì nel XIII libro degli *Elementi* che la parte maggiore della *sezione aurea* dello spigolo del cubo inscritto nella stessa sfera era il lato (o spigolo) del dodecaedro.



Il segmento BD è diviso in tre parti uguali:

BE = EF = FD = 1/3 * BD .

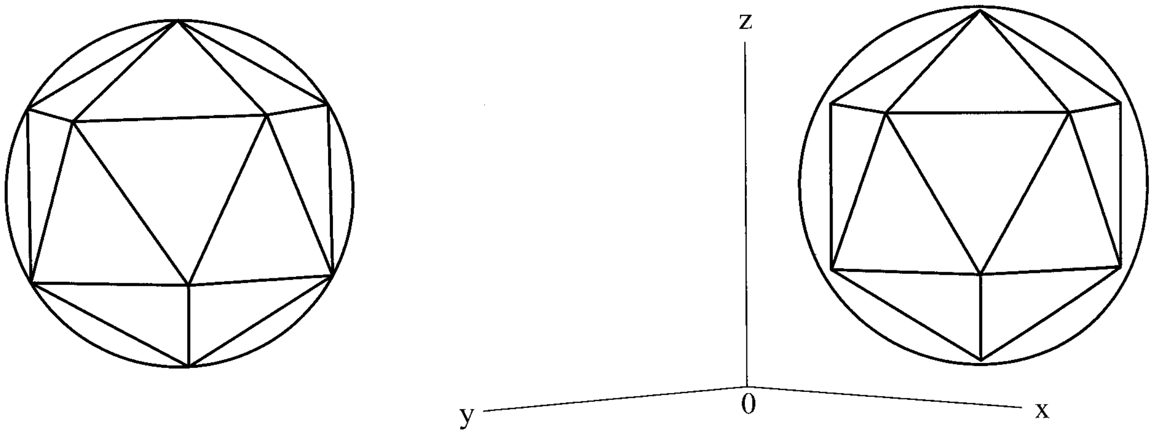
Ciascuna di queste parti è lunga quanto lo spigolo del cubo inscritto nella stessa sfera.
Occorre ora determinare la sezione aurea di BE. Il grafico che segue contiene un triangolo rettangolo, BEI, con il cateto BE che riproduce il segmento BE della precedente figura e il cateto EI lungo la *metà* di BE:



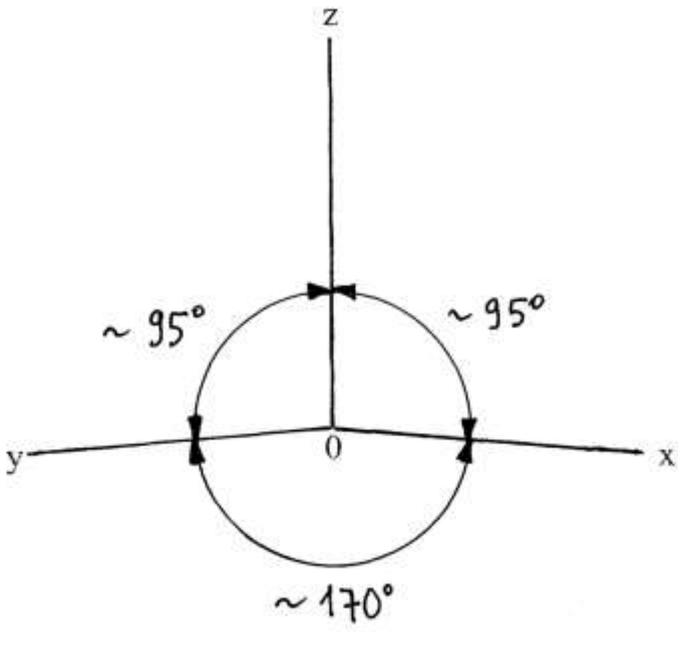
Con la nota costruzione della sezione aurea, si ricava il segmento BK, sezione aurea di BE e lunghezza dello spigolo del dodecaedro inscritto nella sfera.
Questo schema servirà per la determinazione della lunghezza dello spigolo dell'*icosaedro* inscritto.

Icosaedro in assonometria

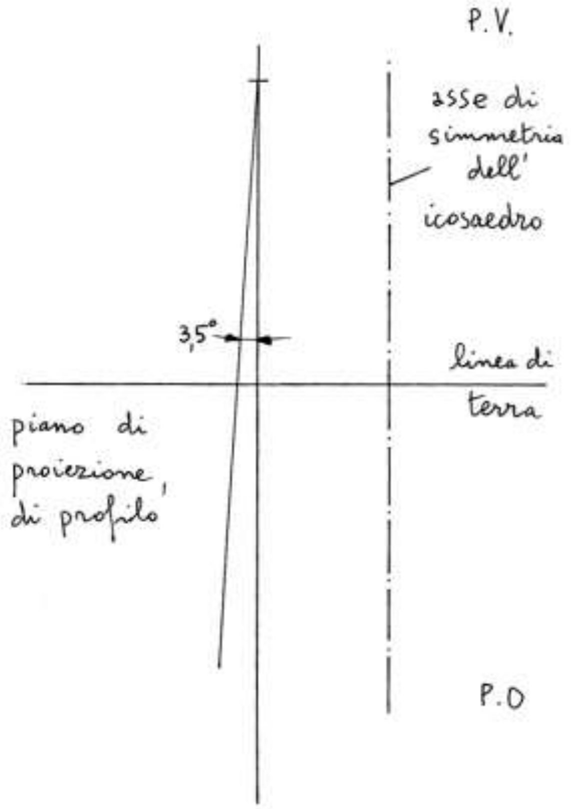
Piero della Francesca disegnò l'icosaedro in assonometria *dimetrica* inscrivendolo in una sfera, nel foglio 112 *verso* del suo "*Trattato d'abaco*": a sinistra è la riproduzione del disegno originale e a destra il *disegno critico* contenuto nel volume II dell'edizione del 2012.



L’assonometria è *dimetrica* perché due degli angoli fra gli assi tracciati sul piano di proiezione sono praticamente uguali e ampi ~ 95°:

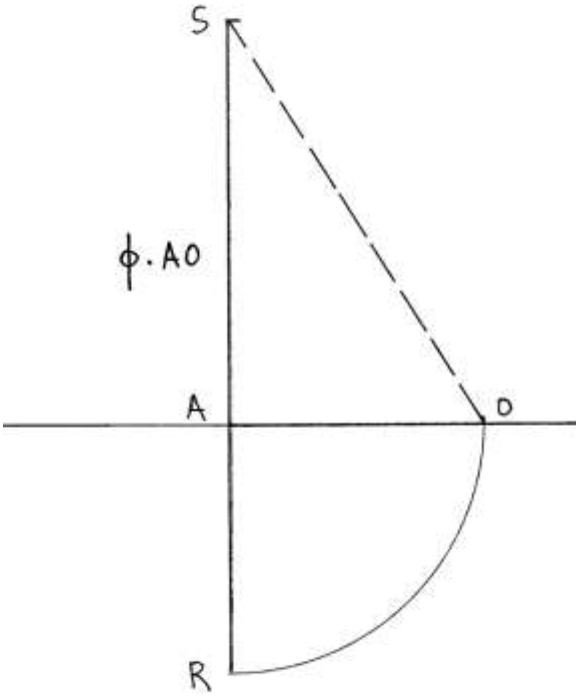


Il piano di proiezione è ruotato di circa 3,5° rispetto all’asse verticale del solido:



Per determinare la lunghezza dello *spigolo* dell'icosaedro, Piero propose una costruzione che richiedeva l'uso della *sezione aurea*.

OA è il raggio della sfera. Per il punto A tracciare la perpendicolare a AO e, con centro nel punto A, un quarto di circonferenza da O fino a fissare il punto R:



Per determinare il punto S, Piero impiegò un triangolo rettangolo (ASO) con i cateti in proporzione aurea:

(AO + AS) : AS = AS : AO

Il cateto maggiore è *medio proporzionale* fra la somma dei due cateti e il cateto minore

Chiamando k il cateto maggiore AS e h il cateto minore AO e sostituendo nella precedente formula si ha:

$(k + h) : k = k : h$ da cui
$h * (k + h) = k^2$ e
$k^2 - h*k - h^2 = 0$

La lunghezza del cateto minore h è nota perché è il raggio della sfera. Pertanto, l'ultima espressione è un'equazione di secondo grado con una sola incognita, k. Applicando la formula generale per la risoluzione delle equazioni di 2° grado, si ottiene

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si ottengono le due possibili soluzioni:

$$k = \frac{-(-h) \pm \sqrt{(-h)^2 - (-4 \cdot h^2)}}{2} = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 4 \cdot h^2}}{2} =$$

$$= \frac{h \pm h \cdot \sqrt{5}}{2} = h \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} h \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ h \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

La seconda soluzione è da scartare perché è negativa.

La soluzione accettabile è la prima:

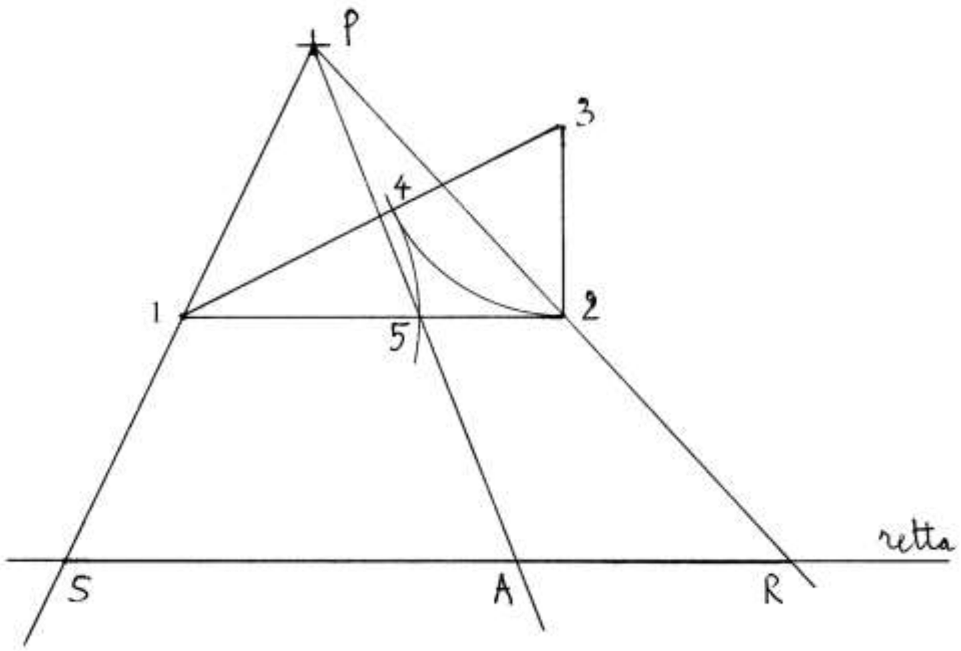
$$k = h * (1 + \sqrt{5})/2 = h * \Phi \approx 1{,}618\ldots * h\,.$$

La frazione $(1 + \sqrt{5})/2$ è la *sezione aurea* $\Phi \approx 1{,}618\ldots$

Sostituendo questo ultimo valore si ricava la lunghezza di AS:

$$AS = AR * (1 + \sqrt{5})/2 = AR * \Phi$$

Con una costruzione ausiliaria viene determinata l'esatta lunghezza del cateto maggiore AS:



Tracciare un segmento di lunghezza a piacere, 1-2. Dal punto 2 elevare la perpendicolare a 1-2: il segmento 2-3 è lungo la *metà* di 1-2.

1-3-2 è un triangolo rettangolo.

Fare centro nel punto 3 e, con raggio 3-2, tracciare un arco da 2 fino a incontrare l'ipotenusa 1-3 nel punto 4.

Fare centro nel punto 1 e, con raggio 1-4, disegnare un arco da 4 fino a tagliare 1-2 nel punto 5.

Il segmento 1-5 è la *parte maggiore* della sezione aurea di 1-2:

$$\overline{1-2} : \overline{1-5} = \overline{1-5} : \overline{5-2}$$
$$(\overline{1-5}) + (\overline{5-2}) : \overline{1-5} = \overline{1-5} : \overline{5-2}$$

La costruzione usata è il classico metodo per tracciatura grafica della sezione aurea.

Fissare un punto, P, esterno alla costruzione e da esso condurre tre semirette passanti per i punti 1, 5 e 2.

Tracciare una serie di rette parallele al segmento 1-2 e scegliere la retta che, fra le semirette passanti per P-5 e P-2, determina una lunghezza AR uguale a quella del raggio della sfera.

Il segmento SR è formato da SA (sezione aurea di SR) e da AR (cateto minore del triangolo rettangolo ASO:

SR : AS = AS : AR

(SA + AR) : AS = AS : AR

ASO è un triangolo rettangolo che ha i lati in proporzione:

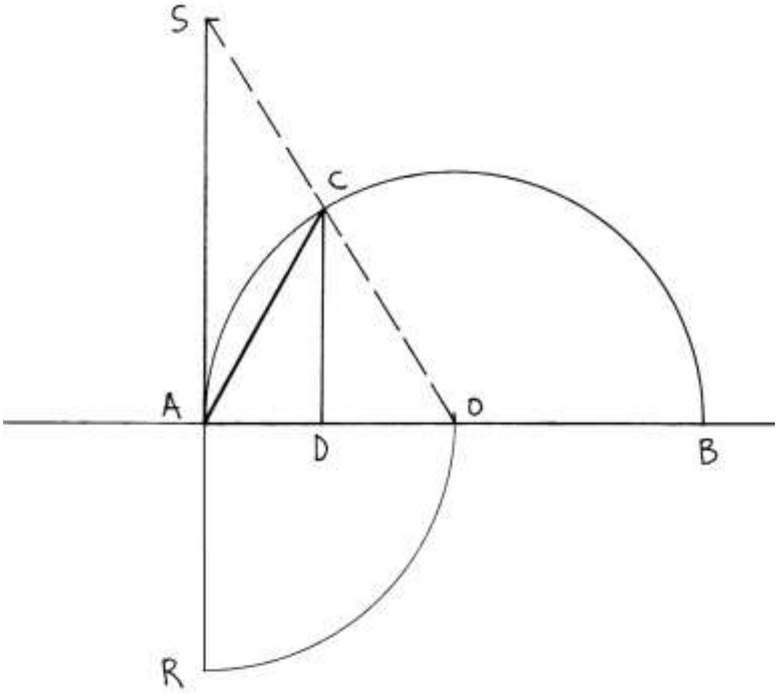
AR = AO e AS = AO * Φ

La lunghezza dell'ipotenusa OS è data da

$$OS = \sqrt{AO^2 + AS^2} = \sqrt{AO^2 + \phi^2 \cdot AO^2} =$$
$$= AO \cdot \sqrt{1 + \phi^2} \cong AO \cdot \sqrt{1 + 2{,}618...} =$$
$$\cong AO \cdot 1{,}902...$$

Riprodurre la precedente figura con il triangolo ASO e prolungare verso destra il raggio AO. Fare centro in O e, con raggio OA, tracciare una semicirconferenza da A fino a fissare il punto B.

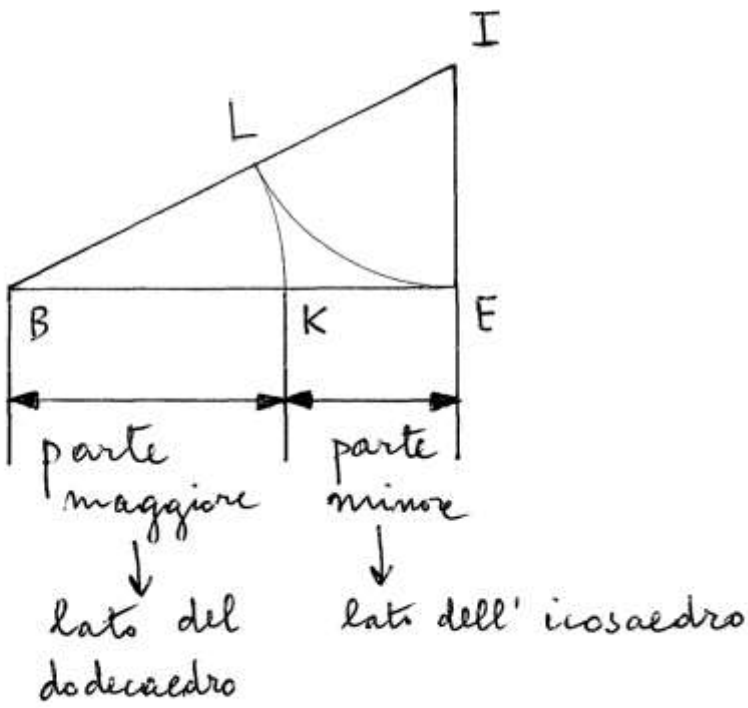
Il segmento SO interseca la semicirconferenza in un punto, C: da questo ultimo abbassare la perpendicolare CD al diametro AB.



I triangoli rettangoli ASO e DCO sono *simili*.

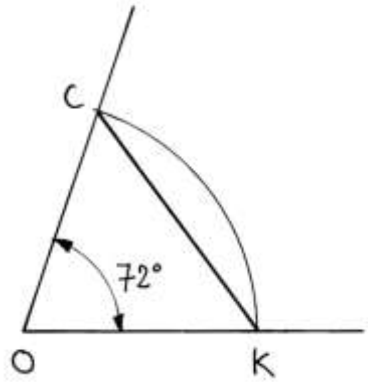
La corda AC è la lunghezza del *lato* dei triangoli equilateri che formano le facce dell'icosaedro.

Vi è un altro modo per determinare per via grafica la lunghezza dello spigolo. Per la costruzione del dodecaedro (vedere il precedente paragrafo) è stata usata la *sezione aurea*. La parte minore della divisione del segmento BE, KE, è la lunghezza dello spigolo dell'icosaedro inscritto nella stessa sfera circoscritta al dodecaedro:



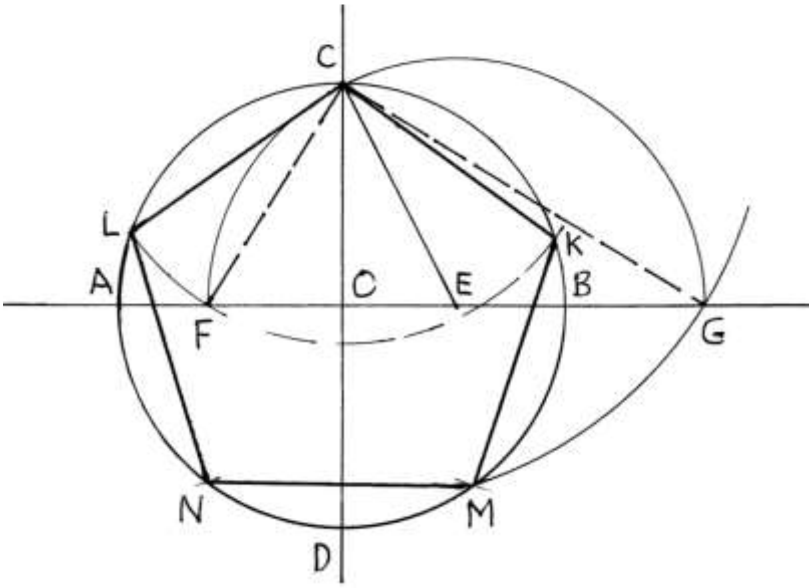
La costruzione del pentagono

Nell'*Almagesto* di Claudio Tolomeo vi è la costruzione della *corda* sottesa da un angolo di 72° (un quinto dell'angolo giro) che è la lunghezza del lato di un pentagono regolare:



Tolomeo non si era riproposto la costruzione del pentagono inscritto.

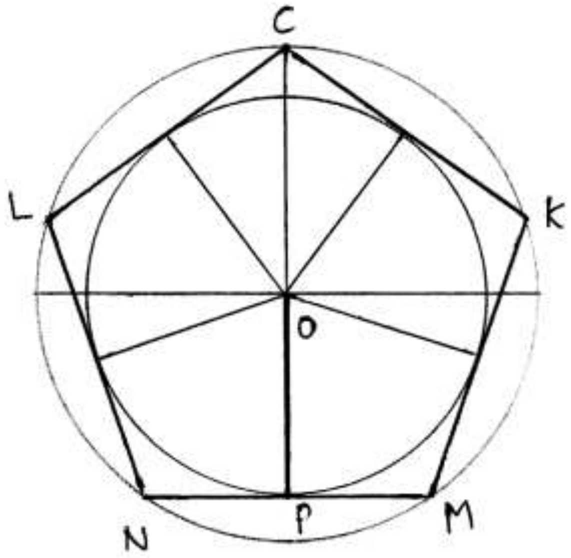
Nella figura che segue è riprodotto il metodo, attribuito a Tolomeo, usato per disegnare il pentagono regolare inscritto:



Area del pentagono regolare

Il pentagono NLCKM è *inscritto* nella circonferenza di centro O e raggio ON.

Dal centro O abbassare la perpendicolare al lato NM che interseca nel suo punto medio P:

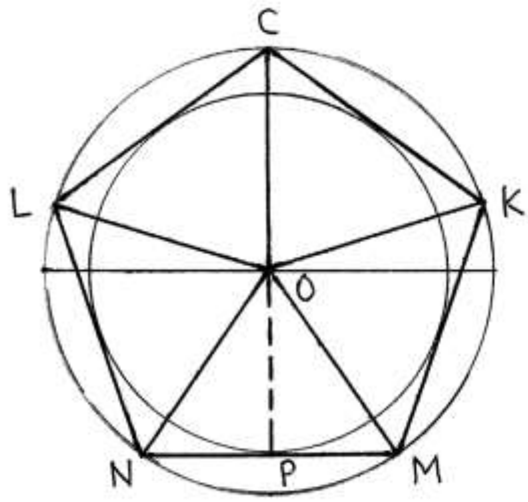


Dallo stesso punto O condurre le perpendicolari agli altri quattro lati.

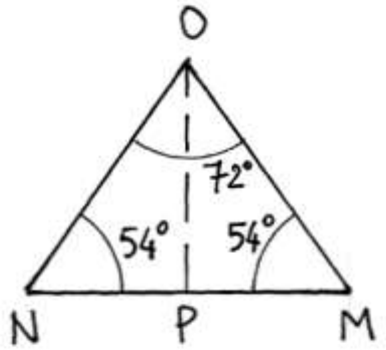
Il segmento OP è il raggio della circonferenza *inscritta* nel pentagono e tangente nei punti medi dei suoi lati.

Il segmento OP è chiamato *apotema* del pentagono.

Collegare il centro O con i cinque vertici del pentagono: il poligono risulta diviso in cinque *triangoli isosceli* con altezza lunga quanto OP:



Il triangolo NOM è isoscele perché i suoi due lati obliqui (NO e MO) sono due raggi della circonferenza circoscritta al pentagono e OP è l'altezza:



L'angolo al vertice O è ampio 72° e i due angoli in N e in M sono di uguale ampiezza e valgono 54°.

L'area del triangolo isoscele NOM è

Area NOM = NM * OP/2

La lunghezza del lato NM è legata a quella del raggio r (ON), che è un lato del triangolo isoscele ONM:

$$\text{lato NM} = \text{raggio} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cong \text{raggio} \cdot 1{,}1755$$

NM ≈ 1,1755 * ON

Anche la lunghezza dell'apotema è legata a quella del raggio:

$$\text{apotema} = \text{raggio} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cong 0{,}8090 \cdot \text{raggio}$$

Valgono le seguenti proporzioni:

$$ON : OP = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cong 1 : 0{,}8090$$

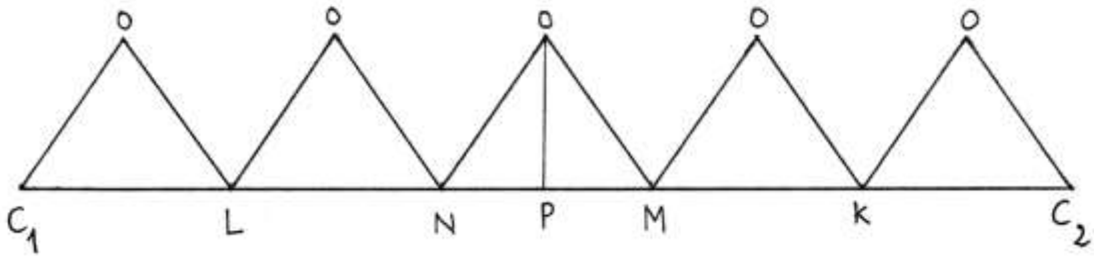
La lunghezza dell'apotema OP è collegata a quella del lato (NM):

$$\text{apotema} = \text{lato} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{4}} \cong \text{lato} \cdot 0{,}68819 \cong$$
$$\cong (\text{raggio} \cdot 1{,}1755) \cdot 0{,}68819 \cong$$
$$\cong \text{raggio} \cdot 0{,}8090$$

L'area del triangolo isoscele NOM è:

$$\text{Area}_{NOM} = \frac{\text{lato} \cdot \text{apotema}}{2} \cong \frac{1{,}1755 \cdot r \cdot 0{,}8090 \cdot r}{2} \cong$$
$$\cong 0{,}4755 \cdot r^2$$

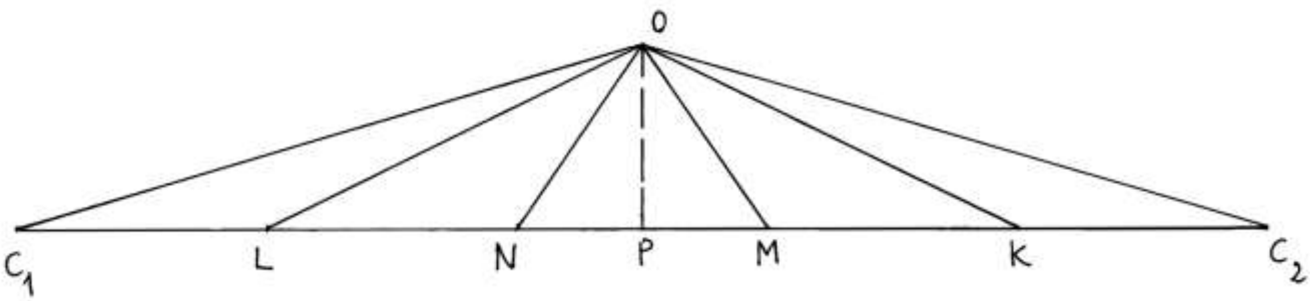
La figura che segue contiene lo sviluppo del pentagono nei suoi cinque triangoli isosceli uguali, allineati sul perimetro del poligono C_1C_2:



L'area del pentagono è uguale alla somma delle aree dei cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni:

$$\text{area pentagono} = 5 \cdot \frac{NM \cdot OP}{2} \cong$$
$$\cong 5 . 0{,}4755\, r^2 \cong 2{,}3774 \cdot r^2$$

Lo sviluppo del pentagono può essere rappresentato nel modo descritto nella figura che segue:



Il segmento C_1C_2 è lungo quanto il perimetro del pentagono regolare e OP è la sua altezza, che è anche l'apotema del pentagono.

Il triangolo isoscele C_1OC_2 ha superficie

$$Area_{C_1OC_2} = \frac{C_1C_2 \cdot OP}{2} = 5 \cdot \frac{NM \cdot OP}{2}$$

Questo triangolo ha la stessa superficie del pentagono NLCKM.

I cinque triangoli della precedente figura che formano C_1OC_2 hanno basi di uguale lunghezza ($C_1L = LN = NM = MK = KC_2$) e la stessa altezza (OP) per cui hanno uguale superficie.

Il triangolo NOM è *isoscele* e gli altri quattro sono *scaleni*.

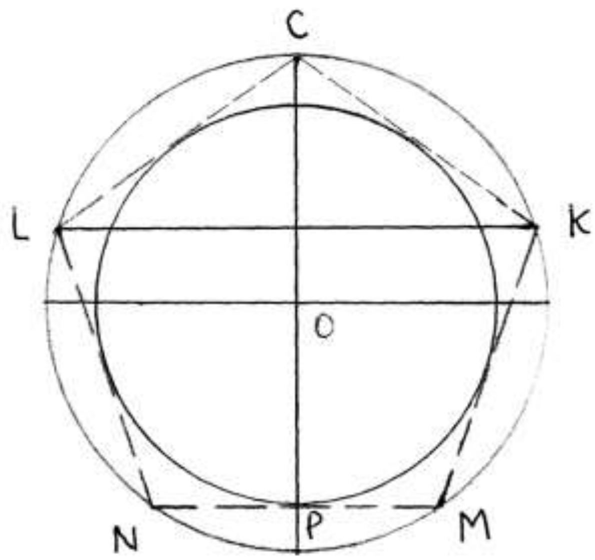
I triangoli LON e MOK sono simmetrici rispetto all'asse OP. Anche i triangoli C_1OL e KOC_2 sono fra loro simmetrici sempre rispetto a OP.

Euclide e il pentagono

Euclide calcolò l'area del pentagono regolare con la seguente formula:

Area pentagono = ¾ * diametro circonferenza circoscritta * 5/6 * corda pentagonica =
= ¾ * 2 * r * 5/6 * corda pentagonica = 5/4 * r * corda pentagonica .

La *corda pentagonica* è una diagonale del pentagono, ad esempio il segmento LK nella figura che segue:



La formula di Euclide diviene:

Area pentagono = 5/4 * r * LK

La diagonale LK è, come noto, in un rapporto dato con il lato:

LK = Φ * NM

Ma il lato NM è legato alla lunghezza del raggio r:

$$LK \cong \phi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cong$$

$$\cong 1{,}618 \cdot r \cdot 1{,}1755 \cong$$
$$\cong 1{,}91314 \cdot r$$

Sostituendo questi valori nella formula di Euclide si ha:

Area Euclide = 5/4 * r * corda pentagonica ≈ 5/4 * r * 1,91314 * r ≈
≈ 2.391425 * r^2 .

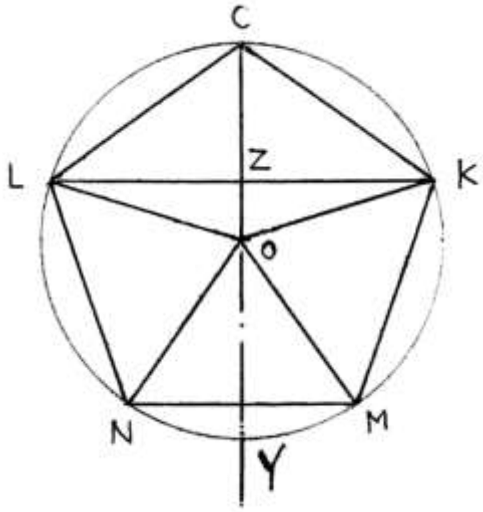
Il risultato di Euclide è leggermente errato per eccesso perché l’area del pentagono è:

Area pentagono ≈ 2,3774 * r^2 .

L’area del pentagono secondo Piero della Francesca

Piero della Francesca propose diversi metodi per calcolare l’area del pentagono regolare.

Il primo metodo usato da Piero per calcolare l’area del pentagono impiega lo schema della figura che segue:



Il pentagono è diviso in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni.
Prolungare il raggio CO fino a fissare il diametro CY.
Tracciare la diagonale LK (la *corda pentagonica*): essa interseca il raggio CO nel punto Z.
I segmenti LZ e ZK sono lunghi la metà della diagonale LK.
Il triangolo OLC ha LZ come altezza rispetto al lato OC; la sua area è:

Area OLC = OC * LZ/2

I triangoli isosceli OLC e OCK sono uniti per formare il quadrilatero OLCK; l’area di questa figura è:

Area OLCK = 2 * Area OLC = OC * LZ .

Piero calcolò l’area di *quattro* dei *cinque* triangoli isosceli:

Area 4 triangoli = 2 * Area OLCK = 2 * OC * LZ = OC * LK .

A questo punto, Piero applicò la *regola del tre* per calcolare con una semplice proporzione l’area dei cinque triangoli (la cui somma dà l’area del pentagono):

(OC * LK) : 4 = (x * LK) : 5

L'incognita *x* indica la lunghezza per la quale occorre moltiplicare la diagonale LK per calcolare l'area del pentagono:

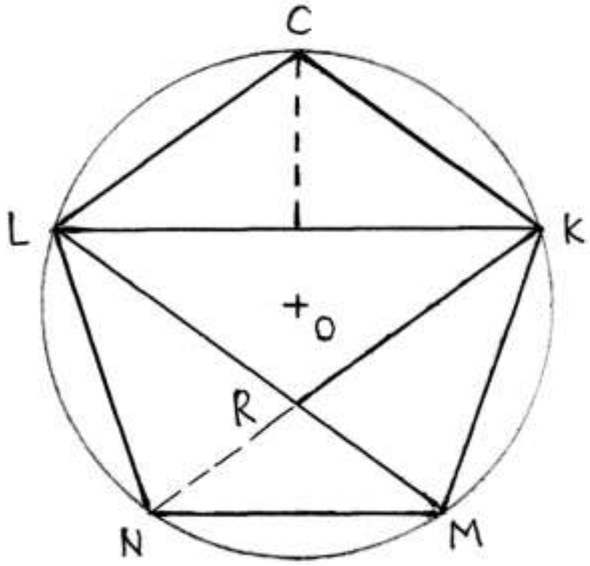
$$x = 5/4 * (OC * LK/2) = 5/4 * OC = 5/8 * CY .$$

L'area dei cinque triangoli (e del pentagono) è quindi:

Area pentagono = $5/4 * OC * LK \approx 5/4 * r * 1{,}91314 * r \approx 2{,}391425 * r^2$.
che è lo stesso risultato al quale era giunto Euclide.

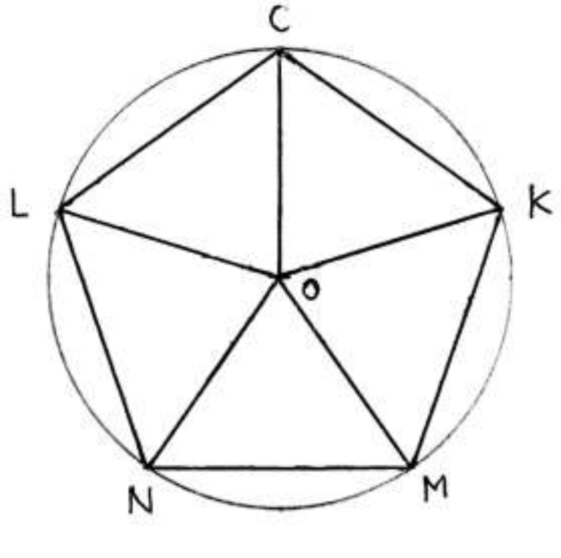
Un secondo metodo pratico è descritto da Piero della Francesca alle pagine 89 *verso* – 90 *recto* del *Trattato d'abaco*.

Piero tracciò le diagonali LK, LM e KP (quest'ultima limitatamente al tratto KR):

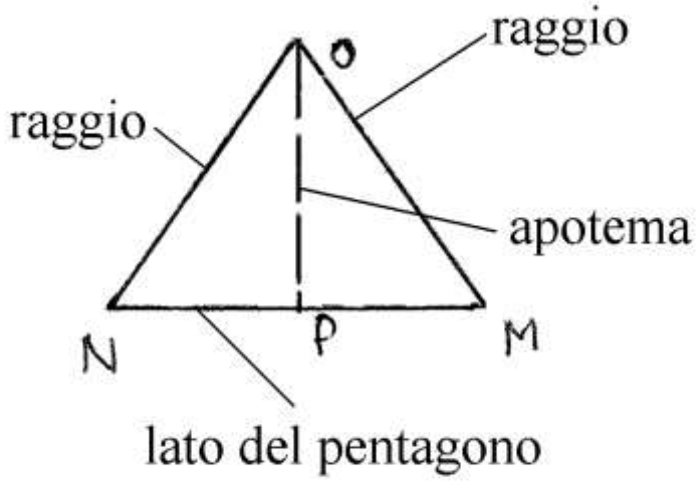


Egli ricavò tre triangoli isosceli di uguali dimensioni: LCK, LRK e LNM e un quarto differente triangolo isoscele – RKM – dei quali era facile calcolate le aree che, sommate, fornivano l'area del pentagono NLCKM.

Un terzo metodo è descritto nella figura che segue:

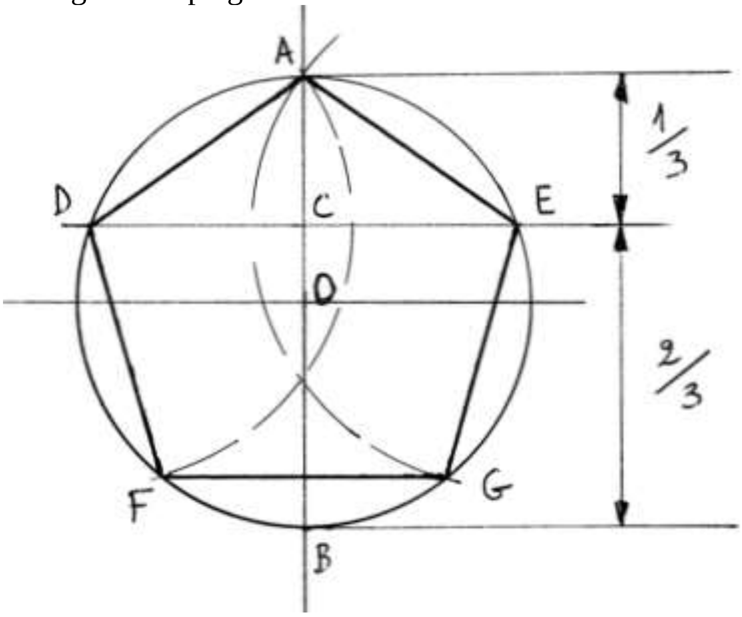


Il pentagono venne diviso in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni. Ciascun triangolo ha la base lunga quanto il lato del pentagono, i lati obliqui sono lunghi quanto il raggio della circonferenza circoscritta e l’altezza (OP) è l’apotema del pentagono:



Pentagono approssimato

Nel *Libellus*, Piero propose una costruzione approssimata del pentagono inscritto. Eccone di seguito la spiegazione:



Tracciare una circonferenza con centro in O e il diametro verticale AB.

Dividere AB in due parti proporzionali a 1 e a 2:

$$AC : 1 = CB : 2$$

Per il punto C disegnare la corda DE, perpendicolare al diametro AB.

Fare centro nei punti D e E, e con raggio AD = AE, tracciare due archi che tagliano la circonferenza nei punti F e G.

AEGFD è il pentagono *approssimato*.

I lati AE, EG, FD e Da hanno la stessa lunghezza; il quinto lato, FG, è più lungo degli altri quattro dell’8,7%.

- APPENDICE -

Una curiosità: nel foglio 108 *recto*, Piero disegnò un *cubottaedro*.

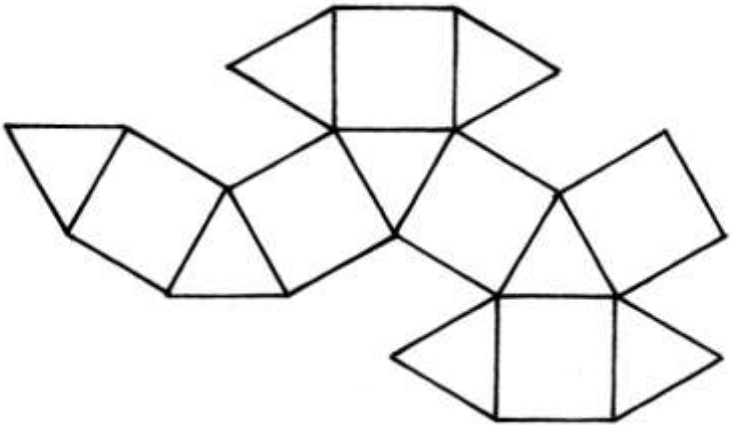
Questo è uno dei *tredici* solidi archimedei, tutti inscrivibili in una sfera.

È ottenuto tagliando le otto cuspidi di un cubo oppure le sei cuspidi di un ottaedro regolare.

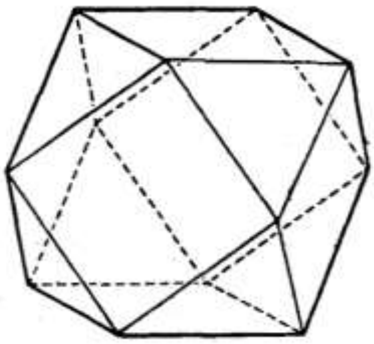
L'origine di questo solido è la seguente: nel caso del cubo sono determinati i *punti medi* degli spigoli e questi sono collegati. Il risultato è un solido formato da 14 facce, 24 spigoli e 12 vertici.

Delle 14 facce, 6 sono quadrati e 8 triangoli equilateri.

La figura che segue presenta lo sviluppo del cubottaedro:

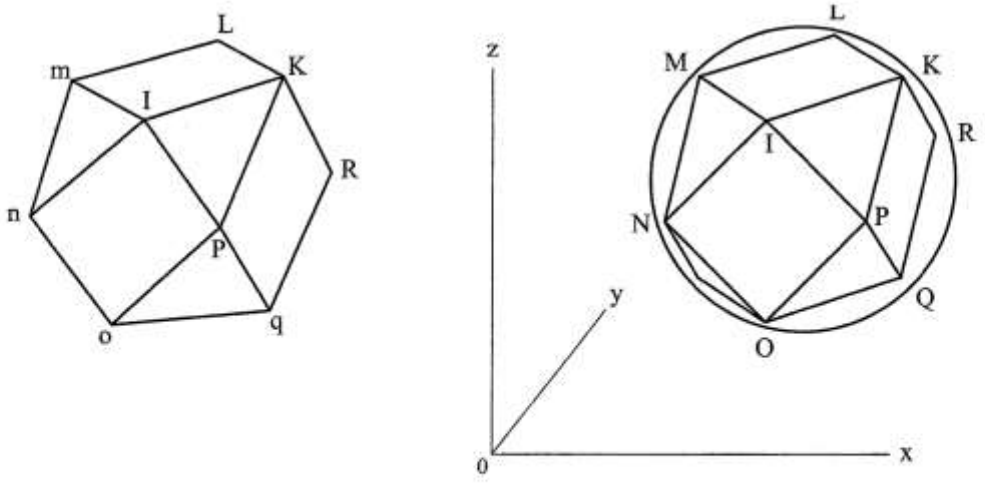


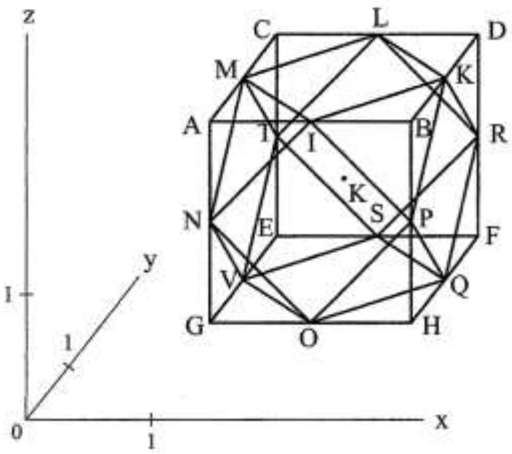
La figura che segue è tratta da Cundy – Rollett (pagina 102) e mostra il solido:



Il grafico che segue è la pagina 126 del II volume dell'Edizione Nazionale del *Trattato di Abaco*:

108r

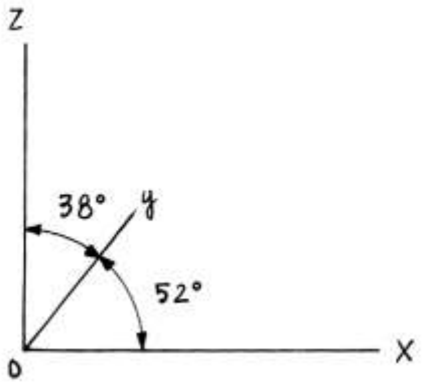




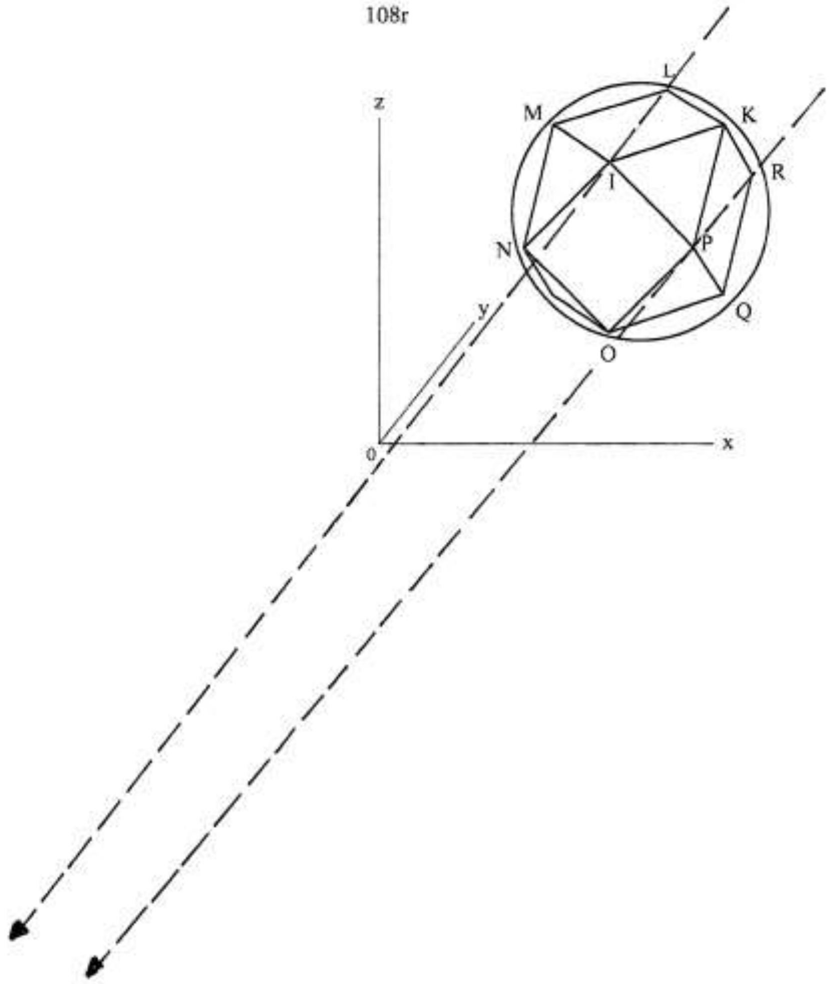
In alto a sinistra è riprodotto il disegno originale di Piero, privo della circonferenza rappresentante la sfera sulla quale giacciono gli spigoli del solido.

Gli altri schemi rappresentano il cubottaedro in assonometria.

I tre assi, X, Y e Z, formano gli assi ruotati come nella figura:



L'interpretazione che Vladimiro Valerio ha dato di questo disegno di Piero (a pagina XXIII dell'*Introduzione* al volume II dell'edizione del *trattato di Abaco*) è molto interessante: due rette, non disegnate nel *Trattato*, e cioè quelle passanti per le coppie di punti L-I e R-P, se prolungate verso il basso a sinistra *non sono* parallele (come dovrebbero essere nel caso dell'assonometria cavaliera), ma tendono verso un punto comune:



I prolungamenti delle due rette possono essere un esempio di *prospettiva invertita* o *inversa*, tipica delle immagini sacre del mondo bizantino. Piero della Francesca pittore ne era certamente a conoscenza. La prospettiva invertita fu da lui usata intenzionalmente?

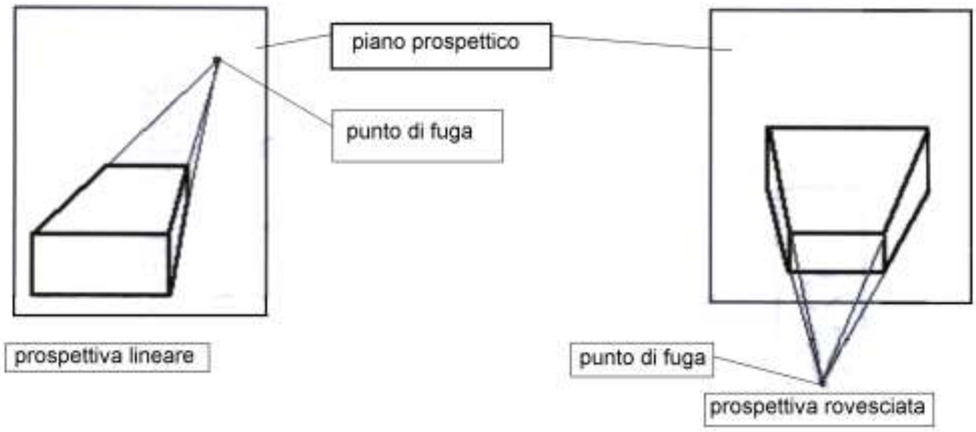
Anche nel successivo foglio 108 *verso* è rappresentato un cubottaedro che mostra la stessa particolarità.

<u>La prospettiva rovesciata</u>

La *prospettiva rovesciata* è un metodo grafico largamente usato nella pittura dai cristiani Ortodossi.

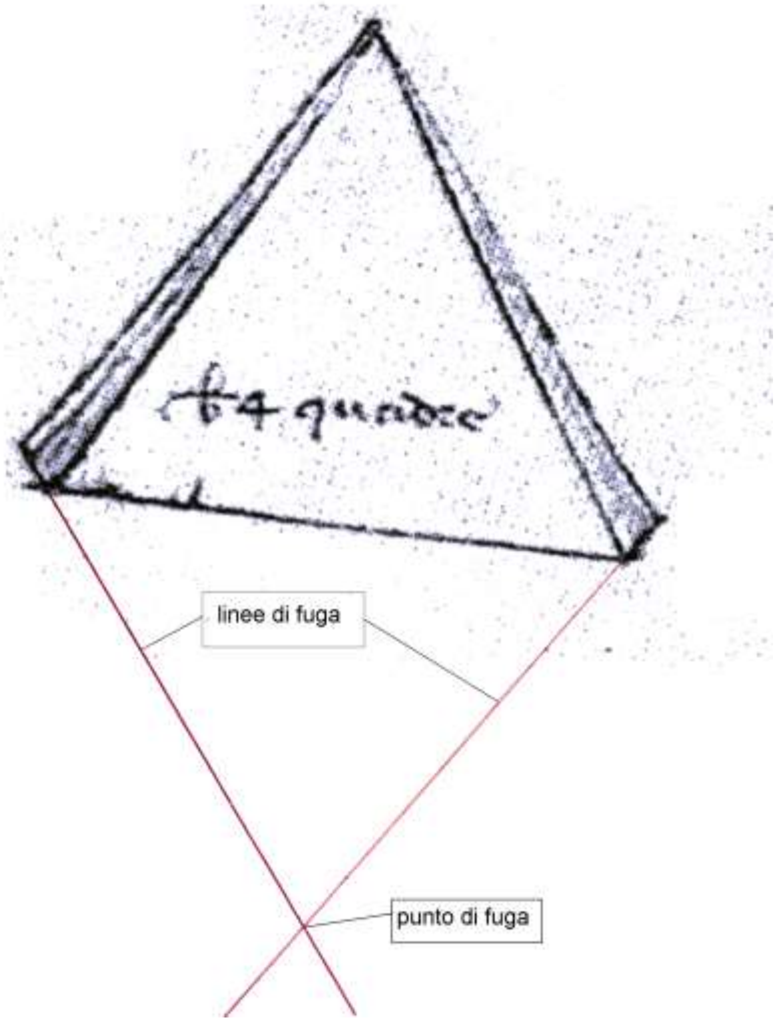
È pure chiamato *prospettiva inversa*.

La figura che segue mette a confronto la prospettiva lineare e la prospettiva inversa:



Il principio di questa seconda forma di prospettiva è semplice: il punto di fuga è posto davanti, all'esterno del *piano prospettico*, vicino all'osservatore.

La figura che segue è tratta dalla carta 145 *verso* del manoscritto Ashburnham n. 1308 (conservato nella Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze), risalente a circa il 1440 e contenente copia di un *Trattato di Abbaco* di *Maestro Paolo Dagomari*: il codice cartaceo risale al XIV secolo.



La piramide è disegnata in prospettiva rovesciata: le linee di fuga degli spigoli delle facce convergono in un punto di fuga vicino all'osservatore.

Con una certa approssimazione si può affermare che in questo metodo il *punto di vista* e il *punto di fuga* coincidono.

In questo caso, la prospettiva rovesciata può essere stata usata intenzionalmente per le sue migliori capacità illustrative.

- -

Bibliografia su Piero della Francesca

1. Cundy H. M. e Rollett A. P. "I modelli matematici", trad. it., Feltrinelli, Milano,1974, pp. 292.
2. Daly Davis Margaret, "Piero della Francesca's Mathematical Treatises" (The "*Trattato d'abaco*" and "*Libellus de quinque corporibus regularibus*"), Ravenna, Longo Editore, 1977, pp. 192 con 36 ill.
3. Piero della Francesca, "De prospectiva pingendi", edizione critica a cura di G. Nicco-Fasola, con una lettura di Eugenio Battisti, Firenze, Casa editrice Le Lettere, 2005, pp. LXX-219, con XLIX tavole fuori testo.
4. Piero della Francesca, "Trattato d'abaco", 3 voll., (Stampa anastatica del codice ashburnham 359* della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze), volume I (testo e note) pp. LXXI-250 e vol. II (Disegni) pp. XXIII-189, Roma, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, 2012.
5. Field J.(udith) V(eronica), "Piero della Francesca". *A Mathematician's Art*, New Haven – Londra, Yale University Press, 2005, pp. xii-420.
6. Field J.(udith) V(eronica), "The invention of Infinity". *Mathematics and Art in the Renaissance*, New York, Oxford University Press, 1997 (ristampa 2005), pp. xii-250.
7. Florenskij Pavel, "La prospettiva rovesciata e altri scritti", a cura di Nicoletta Misler, Roma, Gangemi Editore, 1990, prima ristampa 2003, pp. XII-153.
8. Gamba Enrico – Montebelli Vico, """Piero della Francesca matematico", in "Le Scienze", Milano, n. 331, marzo 1996, pp. 70-76.
9. Mancini Girolamo, "L'opera '*De corporibus regularibus*' di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da fra Luca Pacioli", Roma, Memorie della R. Accademia dei Lincei – Classe di Scienze morali, storiche e filologiche – anno CCCXII, serie quinta, volume XIV, fascicolo VII^{B}, Roma, 1915, pp. da 441 a 580, con 4+VIII tavole fuori testo.
10. Mussini Massimo – Grasselli Luigi, "Piero della Francesca - *De prospectiva pingendi*", edizione italiana e inglese, Sansepolcro, Aboca Museum Edizioni, 2008, pp. 269.
    Sorci Alessandra, "La forza de le linee". *Prospettiva e stereometria in Piero della Francesca*, Galluzzo (Firenze), SISMEL – Edizioni del Galluzzo, 2001, pp. 213 con 46 figure fuori testo.
11. Picutti Ettore, "Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli", in "Le Scienze", Milano, n. 246, febbraio 1989, pp. 72-79.
12. "Piero della Francesca tra arte e scienza", a cura Di Marisa Dalai Emiliani e Valter Curzi, Venezia, Marsilio, 1996, pp. 611 con tavole fuori testo.
13. Salvemini Francesca, "La visione e il suo doppio". La prospettiva tra arte e scienza, Roma-Roma, Laterza, 1990, pp. VIII-182.
14. Scolari Massimo, "Il disegno obliquo". Una storia dell'antiprospettiva, Venezia, Marsilio, 2005, pp. 348.
15. Sinisgalli Rocco, "Piero della Francesca per gioco – La geometria al servizio delle arti", Certaldo (Firenze), Federighi Editore, 2012, pp. 48.
16. The Cambridge Companion to "Piero della Francesca", a cura di Jeryldene M. Wood, Cambridge, Cambridge University Press, 2002, pp. xvi-268, con tavole fuori testo.

Altri materiali

1. Bernecoli Sandra – Tomasi Luigi, "I poliedri regolari: un tema di geometria dello spazio rivisitato con Cabri-géomètre", Bologna, 1997, Quaderni di CabrIRRSAE, n. 12, pp. 43.