© Sergio Calzolani, Firenze, 2020
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: squadre fisse; squadre mobili; falsa squadra; Isidoro di Siviglia; squadre medievali; Massa Marittima; squadre Villard de Honnecourt; origine delle squadre; squadre gotiche; squadra pitagorica; squadra a doppio quadrato; poligoni costruibili con le squadre; squadra 36°-54°; Bertrand Boysset; pentagono secondo Villard de Honnecourt; lastre tombali; Saint Albains; pietra tombale Saint-Ouein; squadra decagonale; squadre Ottocento; squadre americane

Nota introduttiva

Questo articolo descrive alcune squadre e i loro usi: il periodo storico considerato va dall'Alto Medioevo (Isidoro) fino all'Ottocento negli Stati Uniti.

Sono descritti alcuni modelli di squadre e i loro usi nella costruzione di poligoni regolari, esatti o approssimati. Particolare attenzione è stata dedicata alle proprietà geometriche e alle figure piane che possono per così dire "circoscrivere" quegli strumenti.

Il contenuto non ha alcuna pretesa di organicità e non è rispettata una rigida scansione temporale.

I diversi tipi di squadre

Le squadre possono essere *fisse* o *mobili*.

Le *squadre fisse* sono le più comuni e vengono usate per disegnare linee e per tracciare o verificare angoli retti o di altra ampiezza predefinita (30°, 45° e 60°) e angoli da essi ricavati con l'uso congiunto di due squadre differenti (a 30-60° e a 45°): 15°, 75°, 105°, 120°, 135° e 150°.

Le *squadre mobili* hanno apertura variabile e per questo motivo sono chiamate *squadre zoppe* o *false squadre*:

Queste squadre sono formate da due aste incernierate che possono ruotare l'una rispetto all'altra.

La *falsa squadra* è usata in falegnameria e in carpenteria, ad esempio per effettuare i tagli obliqui delle cornici o dei battiscopa.

Una qualsiasi squadra fissa costituisce un'applicazione del cosiddetto *teorema di Pitagora* (o *teorema dell'ipotenusa*).

L'importanza delle squadre

Gli Antichi conoscevano la squadra e la sua diffusione sembrerebbe collegata alla necessità di tracciare e di verificare angoli retti.

Le squadre usate dai Romani erano formate da due sottili lame metalliche connesse ad angolo retto. Uno dei due lati aveva il bordo rialzato per migliorare l'aderenza alla superficie di appoggio. Numerosi reperti provengono dagli scavi effettuati nelle rovine di Pompei, città distrutta dall'eruzione del Vesuvio del 79 d.C.

Nel Medioevo gli strumenti da disegno più usati erano la squadra, il compasso e la riga: nei primi tempi la squadra era il più importante.

La squadra di Isidoro di Siviglia

Isidoro di Siviglia (circa 560-636) fu un vescovo spagnolo. Fra le sue opere, la più importante è costituita da un'enciclopedia in venti volumi, "*Etymologiae*" ("Etimologie"): in essa furono spiegate le etimologie dei termini usati in tutte le attività produttive esercitate all'epoca.

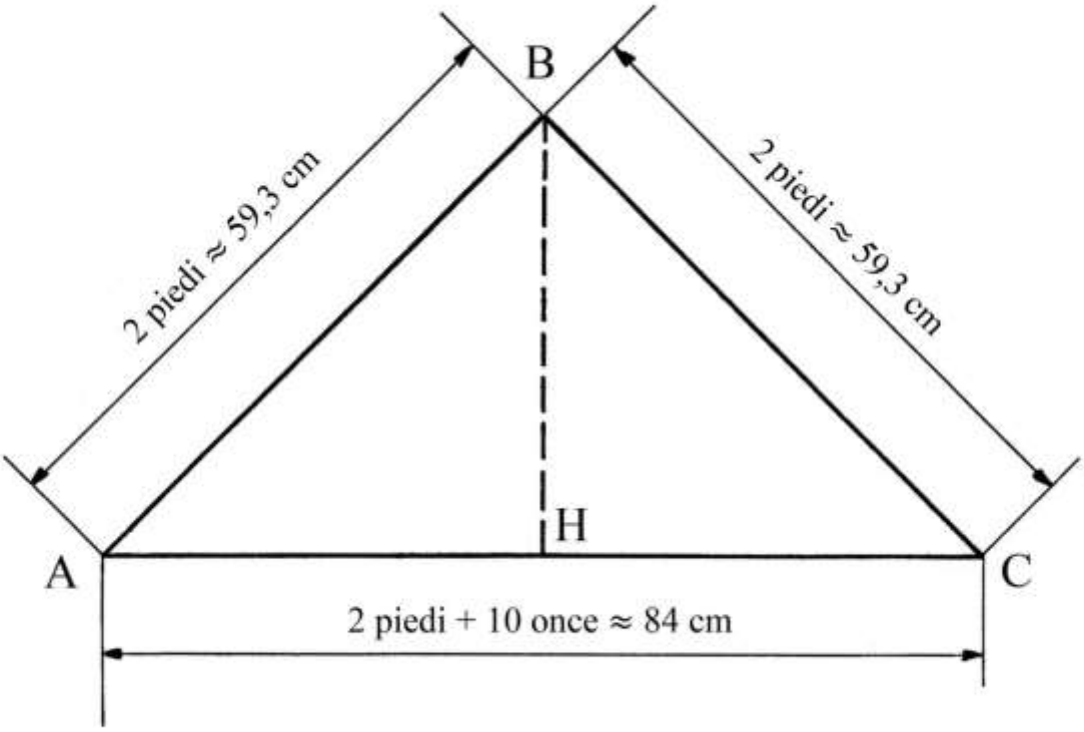
Fra gli strumenti, descrisse una *squadra* usata nei cantieri edili, chiamata *norma*, parola a suo dire di origine greca.

Prima di mostrare lo schema della *norma* è necessario ricordare due unità di misura di lunghezza dei Romani, ancora usate nell'Alto Medioevo:

- Il *piede*, lungo 29,65 cm;
- L'*oncia* (o *uncia*), lunga 2,47 cm e pari a 1/12 di *piede*.

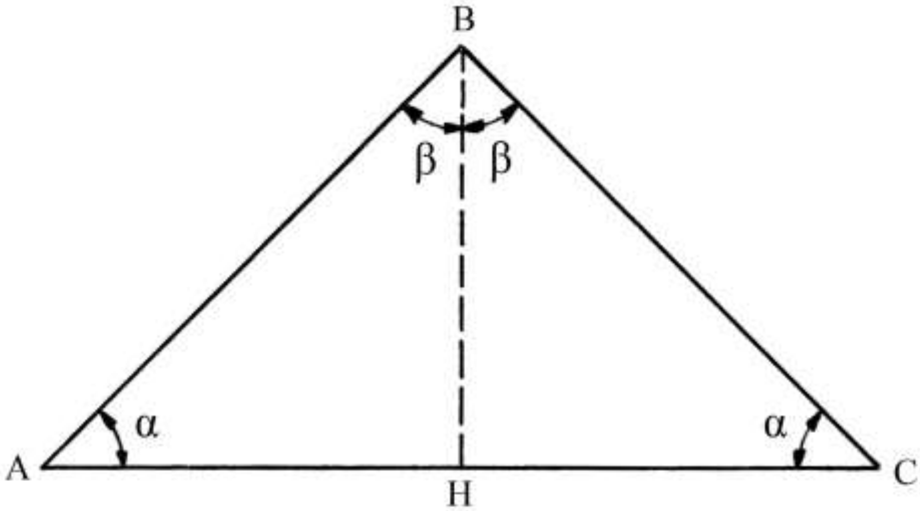
La squadra di Isidoro aveva la forma di triangolo isoscele, con i due lati uguali lunghi 2 piedi (≈ 59,3 cm) e il lato più lungo 2 piedi e 10 once (≈ 84 cm).

I tre lati erano costituiti da regoli dello stesso spessore ed uniti alle estremità:



AB e BC sono i due lati di uguale e AC è il terzo lato più lungo.

Gli angoli in A e in C hanno ampiezza di quasi 45° e l'angolo in B è ampio quasi 90°: la *norma* di Isidoro di Siviglia era praticamente un triangolo rettangolo isoscele, antesignano delle moderne squadre da 45°.



BH divide ABC in due triangoli rettangoli, ABH e HBC, che hanno uguali dimensioni.
Calcoliamo l'angolo α:

$$\cos \alpha = AH/AB = (AC/2)/AB \approx (84/2)/59,3 \approx 0,70826.$$

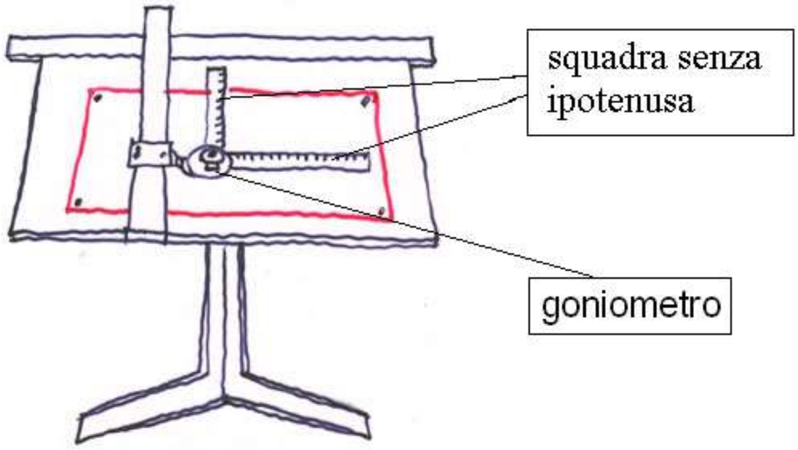
A questo valore corrisponde un angolo $\alpha \approx 44,90°$, quasi uguale all'angolo ampio 45°.
L'angolo complementare β è ampio:

$$\beta \approx 90° - 44,90° \approx 45,1° .$$

Le squadre medievali

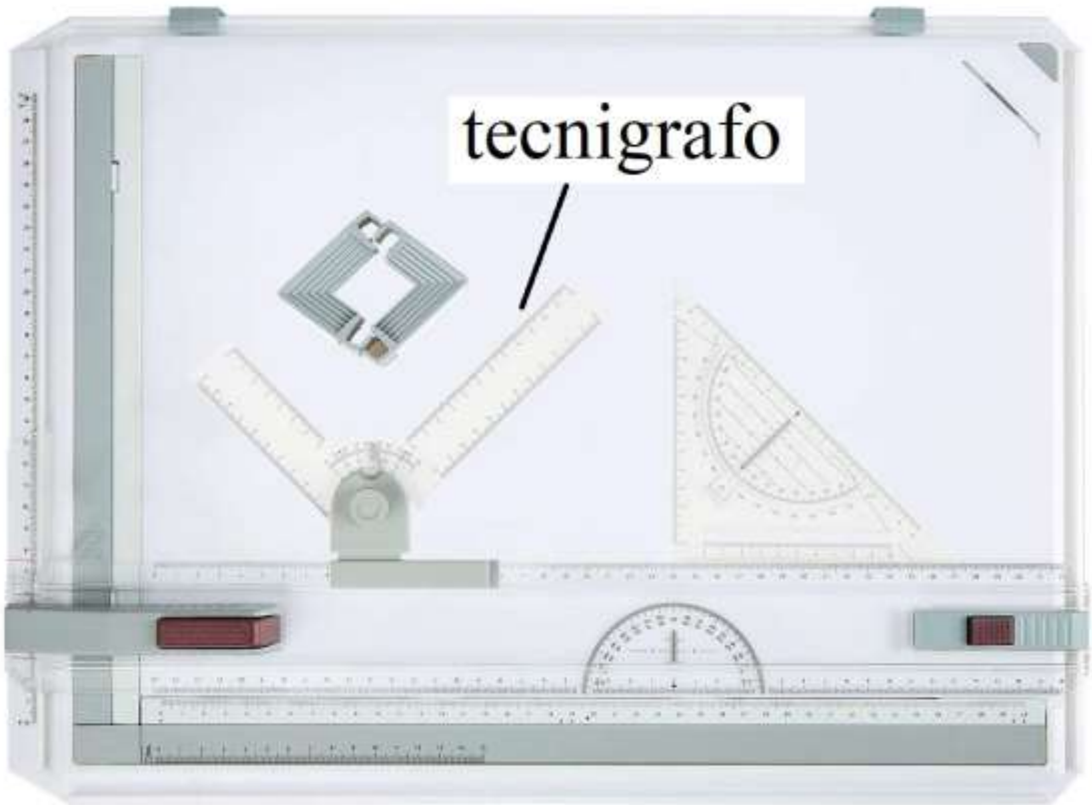
Le squadre medievali erano spesso prive dell'*ipotenusa*. È stato ipotizzato che l'ipotenusa non servisse perché la squadra veniva usata per verificare rapporti di proporzione. È inoltre probabile che le squadre venissero ricavate da una singola tavola di legno, in modo da ridurre al minimo gli incastri fra i pezzi: una squadra così realizzata doveva risultare più robusta.

Esempi di squadre senza ipotenusa sono comuni anche nei nostri tempi; il *tecnigrafo* ne contiene o utilizza una costituita da due lati collegati ad angolo retto e con un goniometro:



La squadra del tecnigrafo è conosciuta anche con l'espressione *squadra a L*.

La figura che segue presenta un moderno tavolo da disegno di formato A3 con alcuni accessori: la squadra indicata con il termine *tecnigrafo* è priva dell'ipotenusa:



Le squadre, i compassi e le righe medievali erano generalmente fatti di legno e ciò spiega la loro mancata conservazione nel tempo. Le limitate informazioni su di esse sono presenti in pochi codici manoscritti, in lastre tombali e in pochissimi altri documenti.

- APPROFONDIMENTO -

Le squadre di Massa Marittima

Il Comune di Massa Marittima si trovò nel Medioevo a gestire le importanti risorse minerarie del suo territorio, in particolare minerali di rame.

Nel periodo 1311-1325 il libero Comune elaborò lo “Statuto grosso” per la gestione delle miniere: è probabile che la prima stesura di questo *Codice minerario* risalga alla fine del XIII secolo.

Già a partire dal XII secolo in diverse località minerarie europee le consuetudini seguite sulla materia vennero accolte negli Statuti comunali: i relativi regolamenti sono conosciuti con l’espressione “Codici minerari”.

Il paragrafo 20 del Codice di Massa Marittima prevedeva:

“*Obbligo di costruire squadre di ferro per l’allineamento delle sezioni*

“Del pari stabiliamo che i proprietari di miniere di rame, a loro spese, per tutto il mese di febbraio siano tenuti a far costruire tre squadre di ferro, per i necessari allineamenti delle sezioni, che dovranno essere conservate dal Cancelliere del Comune e che potrà consegnarle a chiunque voglia effettuare allineamenti di sezioni…”.

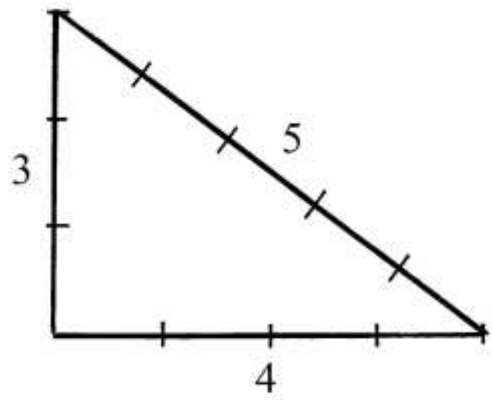
Quindi, a Massa Marittima erano in uso anche squadre di ferro.

- -

Gli angoli caratteristici

Le squadre offrivano un ampio ventaglio di angoli: 26°, 30°, 36°, 54°, 60°, 64°.

Altre squadre usate avevano cateti perpendicolari, lunghi 3 e 4 unità; per il teorema di Pitagora, l’ipotenusa sarebbe stata lunga 5 unità:



La terna 3-4-5 è una *terna pitagorica* perché

$3^2 + 4^2 = 5^2$ e cioè $9 + 16 = 25$.

In una terna pitagorica i numeri devono essere *naturali* e cioè *interi non negativi*.

A ogni terna pitagorica corrisponde un triangolo rettangolo e viceversa.

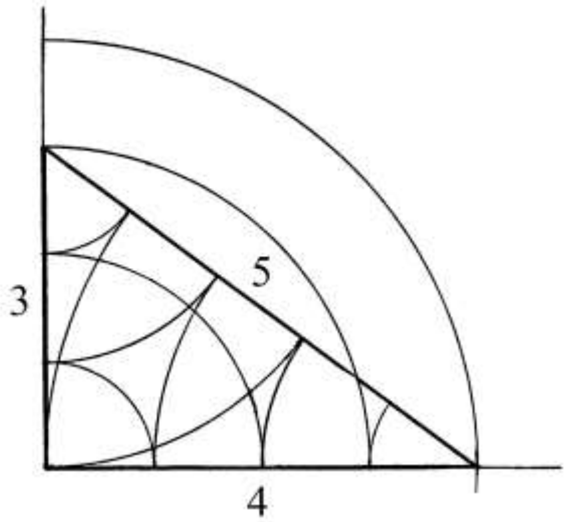
Le prime 18 terne pitagoriche sono indicate nella seguente tabella:

[3, 4, 5]	[5, 12, 13]	[7, 24, 25]
[8, 15, 17]	[9, 40, 41]	[11, 60, 61]
[12, 35, 37]	[13, 84, 85]	[16, 63, 65]
[20, 21, 29]	[20, 99, 101]	[28, 45, 53]
[33, 56, 65]	[36, 77, 85]	[39, 80, 89]
[48, 55, 73]	[60, 91, 109]	[65, 72, 97]

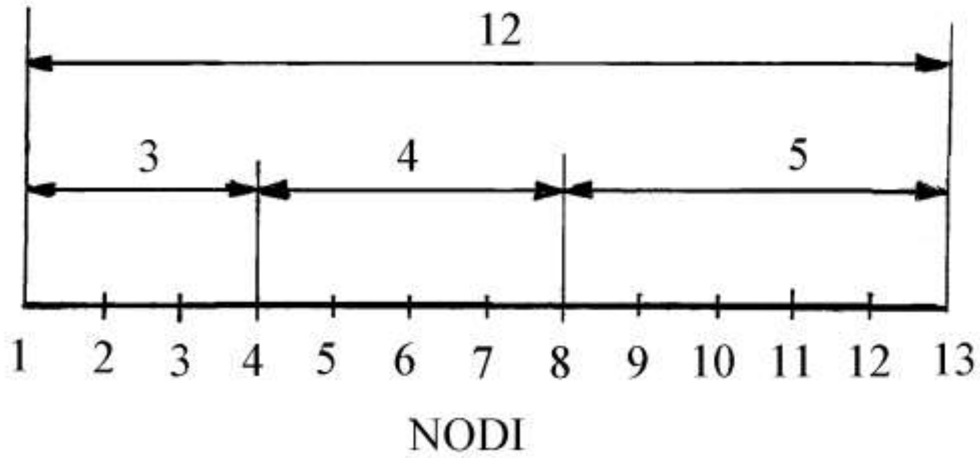
Il terzo valore che compare nelle terne è sempre inferiore a 100.
Le terne con il terzo numero compreso fra 100 e 300 sono le seguenti:

[20, 99, 101]	[60, 91, 109]	[15, 112, 113]
[44, 117, 125]	[88, 105, 137]	[17, 144, 145]
[24, 143, 145]	[51, 140, 149]	[85, 132, 157]
[119, 120, 169]	[52, 165, 173]	[19, 180, 181]
[57, 176, 185]	[104, 153, 185]	[95, 168, 193]
[28, 195, 197]	[84, 187, 205]	[133, 156, 205]
[21, 220, 221]	[140, 171, 221]	[60, 221, 229]
[105, 208, 233]	[120, 209, 241]	[32, 255, 257]
[23, 264, 265]	[96, 247, 265]	[69, 260, 269]
[15, 252, 277]	[160, 231, 281]	[161, 240, 289]
[68, 285, 293]		

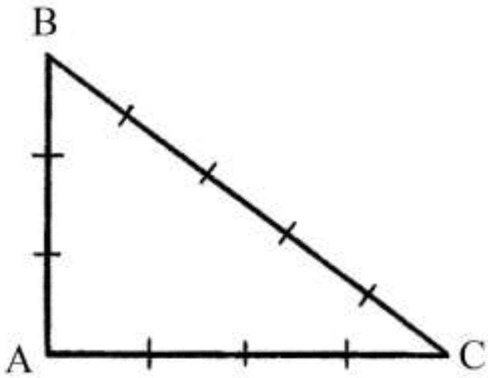
La figura che segue evidenzia la costruzione della terna 3-4-5 con la tracciatura di archi di circonferenza con centri nei tre vertici:



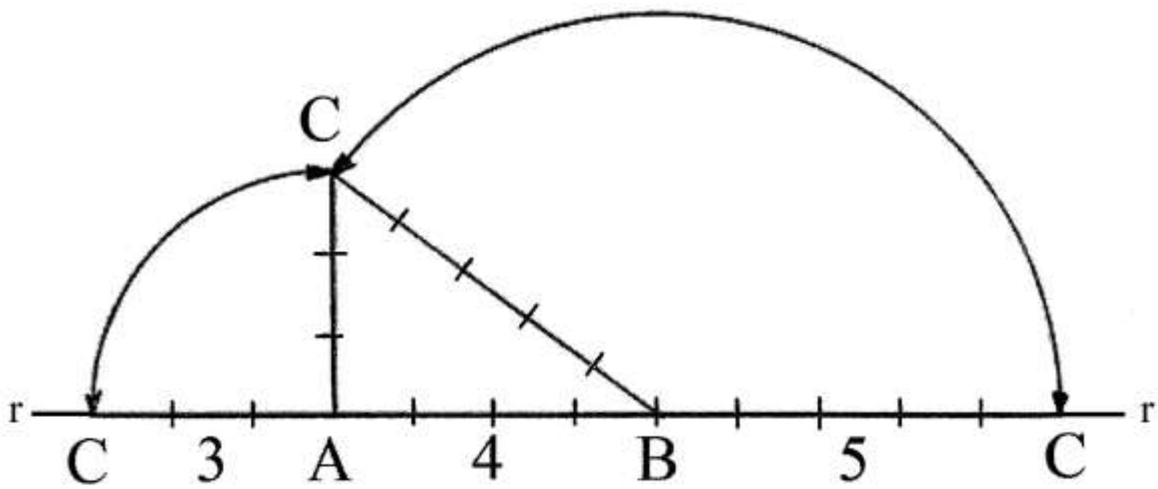
Il triangolo rettangolo 3-4-5 fu chiamato *egiziano* per la sua origine storica da parte di Vitruvio (Marco Pollio Vitruvio, architetto romano vissuto nel I secolo a.C., autore del trattato *De Architectura*). Una corda recante 13 nodi e divisa in 12 parti uguali dava origine al triangolo egiziano:



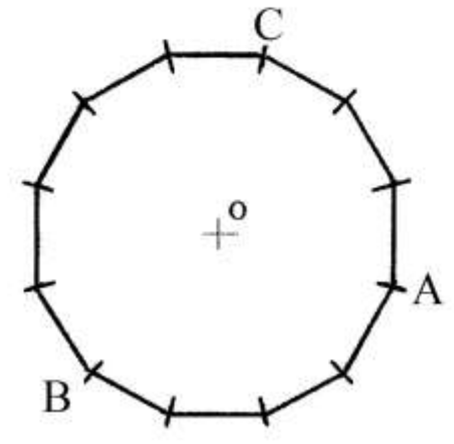
Con la corda veniva realizzato il triangolo rettangolo ABC:

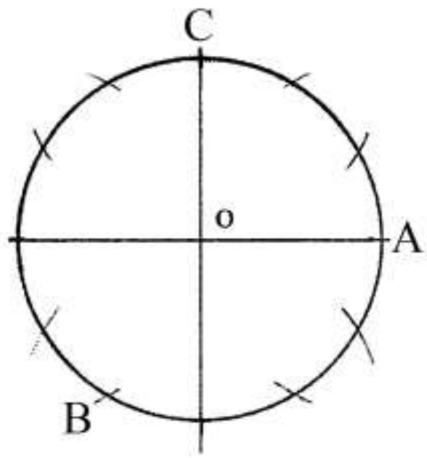


Il triangolo può essere aperto e i suoi tre lati allineati su di una retta orizzontale, *r*:

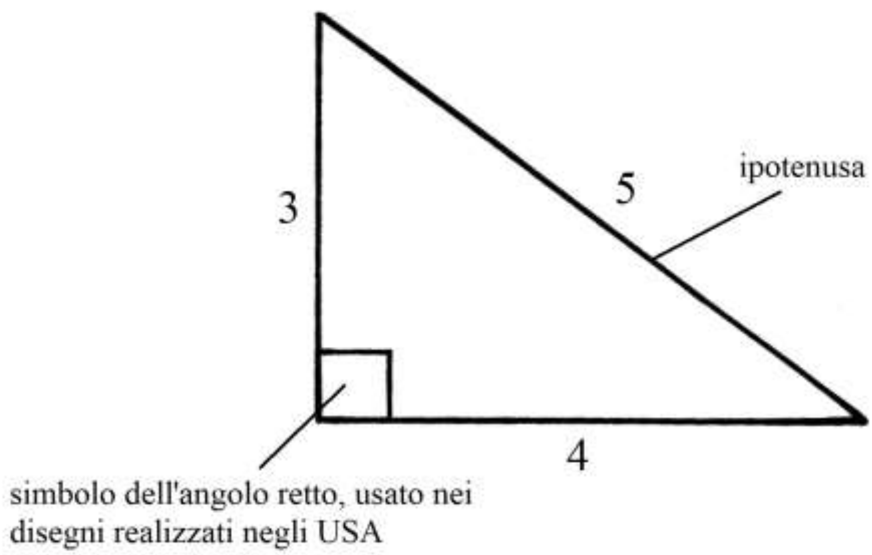


La stessa corda può essere disposta a formare un *dodecagono* regolare o una quasi circonferenza:





Nei disegni geometrici eseguiti negli Stati Uniti e in altri Paesi, l’angolo retto è indicato con il simbolo, un piccolo quadrato, mostrato nella figura che segue:



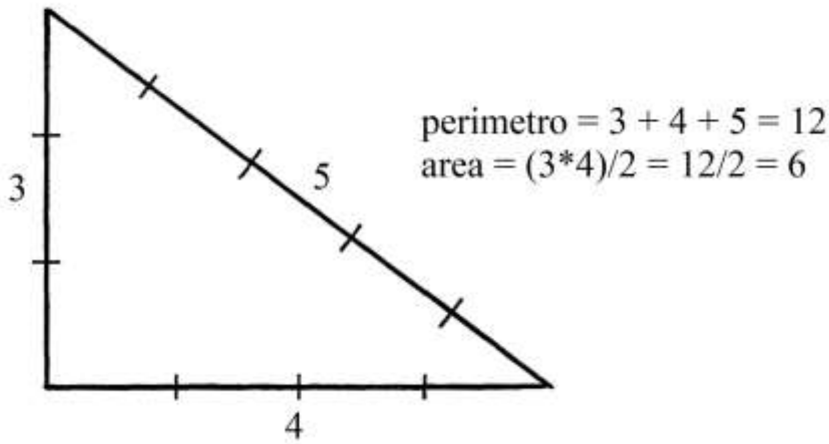
Nel foglio 9 *recto* del Taccuino di Villard de Honnecourt è contenuto il disegno qui riprodotto:

Sono rappresentati due giocatori di dadi: entrambi hanno in mano tre dadi che recano incisi – pur se in forme diverse – i numeri 3, 4 e 5.

Nel Taccuino la pagina è capovolta.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO -

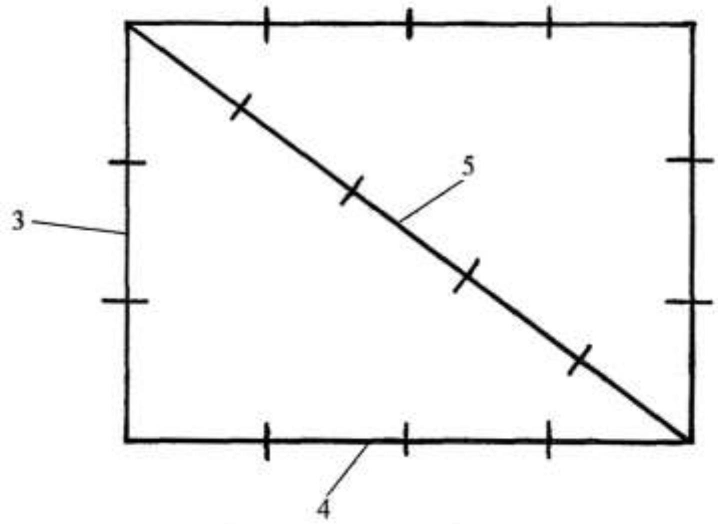
Il triangolo rettangolo 3-4-5 possiede una curiosa proprietà: il perimetro è lungo, in *valore assoluto* e cioè tralasciando l'unità di misura, 12: l'area (prodotto delle lunghezza dei due cateti, diviso per 2) è 6 e cioè la metà di 12 (sempre in valore assoluto):



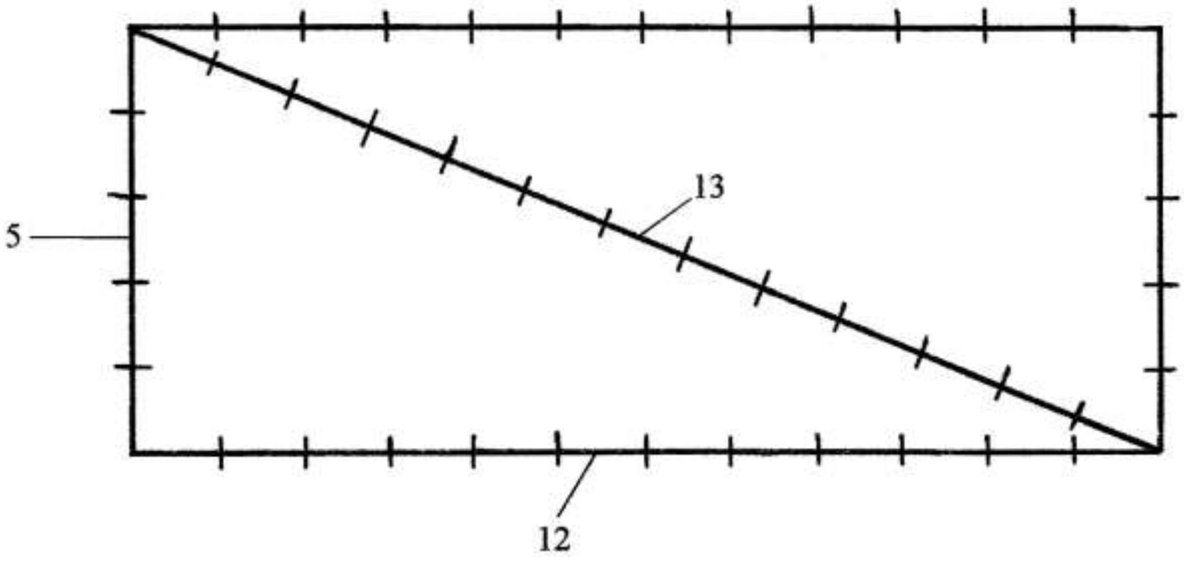
- -

Il rettangolo perfetto

Viene chiamato *rettangolo perfetto* un rettangolo che ha i lati e le diagonali formati da segmenti di lunghezza rappresentata da valori interi. Così, ad esempio, da un triangolo rettangolo costituito dalla più semplice *terna pitagorica* (3-4-5) deriva il rettangolo perfetto descritto nella figura che segue:



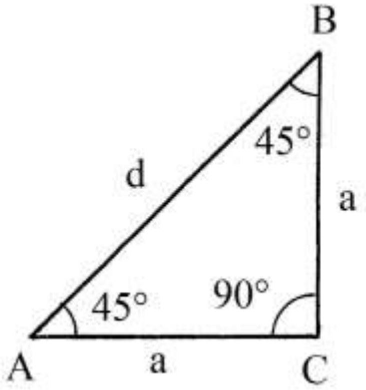
La figura che segue mostra il *rettangolo perfetto* che ha lati lunghi 5 e 12 e la diagonale lunga 13: i tre valori formano una terna pitagorica.

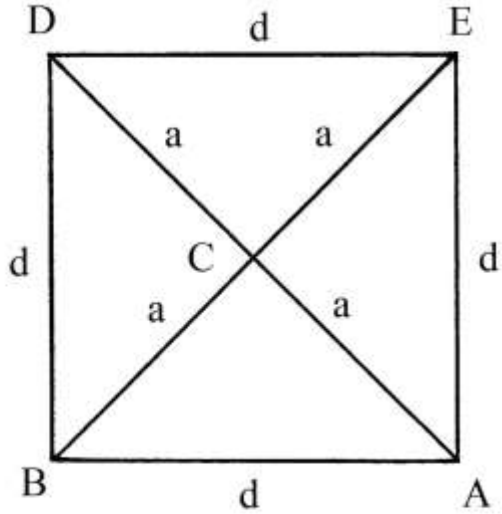


L'origine delle squadre

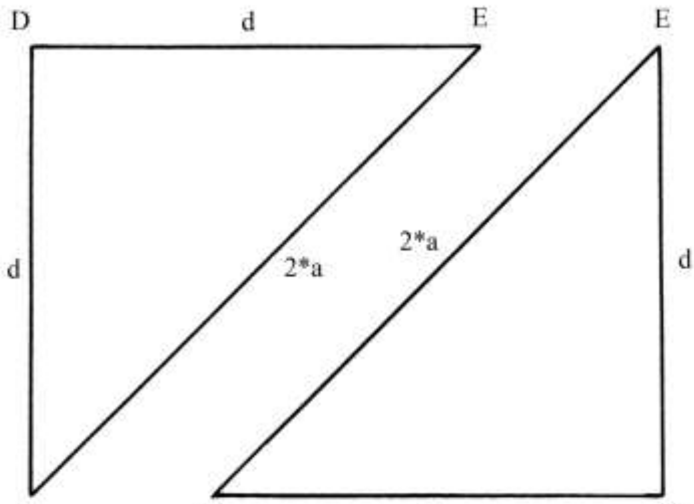
Nei tempi moderni i due modelli più usati di squadre hanno la forma di *triangoli rettangoli*: uno è isoscele e l'altro è metà di un triangolo equilatero.

Il triangolo rettangolo isoscele genera il quadrato (e viceversa), come mostra la figura: l'ipotenusa AB (*d*) è il lato del quadrato ABDE. I cateti del triangolo, AC e CB, sono lunghi *a* e equivalgono alle semi- diagonali del quadrato che, dalle diagonali, è scomposto in quattro triangoli rettangoli isosceli.

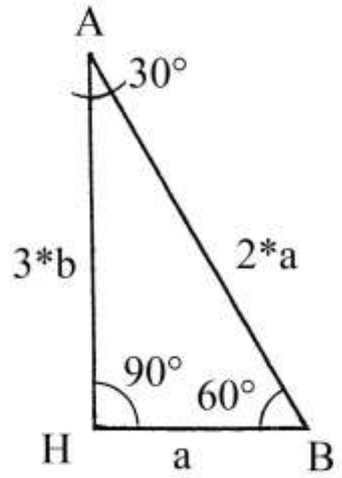


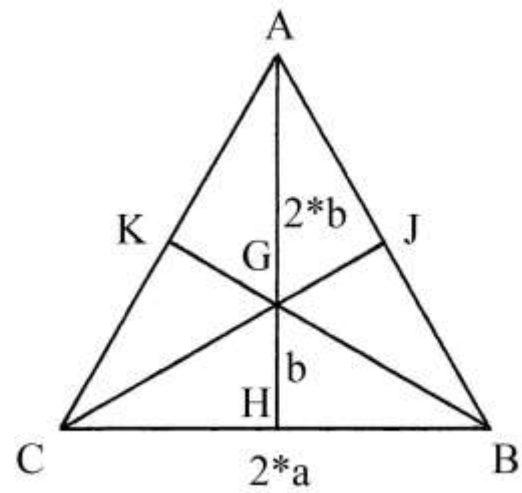


Utilizzando solo due triangoli rettangoli isosceli, ad esempio BDE e BEA, si ricavano due squadre a 45° di maggiori dimensioni (le lunghezze sono moltiplicate per √2):



Il triangolo rettangolo AHB è metà di un triangolo equilatero:





Infatti, il cateto HB è lungo *a* e l'ipotenusa AB è lunga *2*a*.

Nel triangolo equilatero ABC le tre *altezze* (coincidenti con le *mediane*, le *bisettrici* e gli *assi dei lati*) si intersecano nel punto G: esse si dividono in due parti proporzionali a 1 e a 2:

HG = b e GA = 2*b HG : GA = 1 : 2 .

All'interno di un triangolo qualsiasi sono tracciabili diversi segmenti. I più interessanti sono i seguenti *quattro*:

* Le *mediane* che collegano un vertice con il *punto medio* del lato opposto. Esse si incontrano nel *baricentro*.
* Le *altezze* si incrociano nell'*incentro* (che è il centro del cerchio inscritto).
* Le *bisettrici* degli angoli si intersecano nell'*ortocentro*.
* Infine, gli *assi* dei *lati* si tagliano nel *circocentro* (che è il centro del cerchio circoscritto al triangolo).

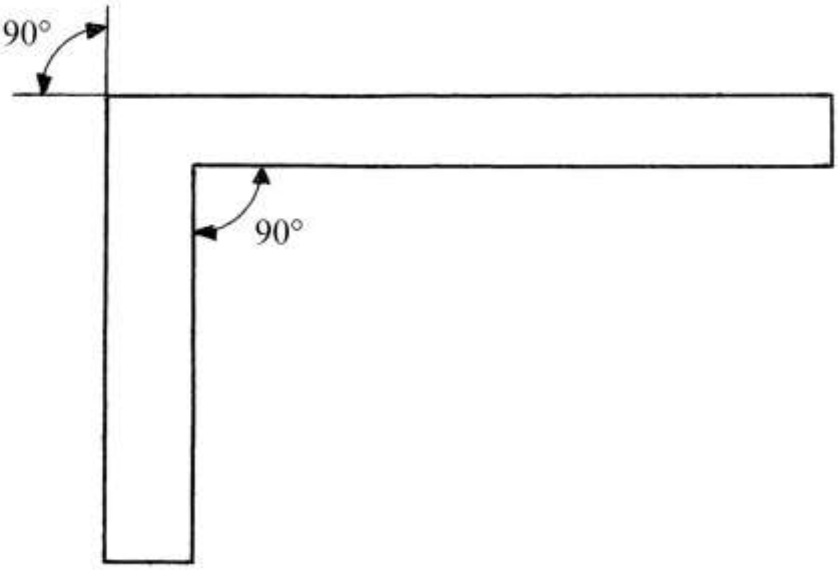
Nel triangolo equilatero i quattro segmenti coincidono e si incontrano nello stesso punto interno che è in pari tempo il *baricentro*, l'*incentro*, l'*ortocentro* e il *circocentro*.

Le squadre gotiche

Nel Medioevo, i costruttori delle cattedrali gotiche non possedevano strumenti confrontabili con i moderni *goniometri*: essi misuravano gli angoli con l'aiuto di squadre a forma di triangoli rettangoli. Perciò la misura degli angoli (in particolare quelli caratteristici dei poligoni regolari più utilizzati nelle costruzioni, dal triangolo equilatero in poi) può essere stata la causa che spinse quegli artigiani a dotarsi di squadre con angoli particolari.

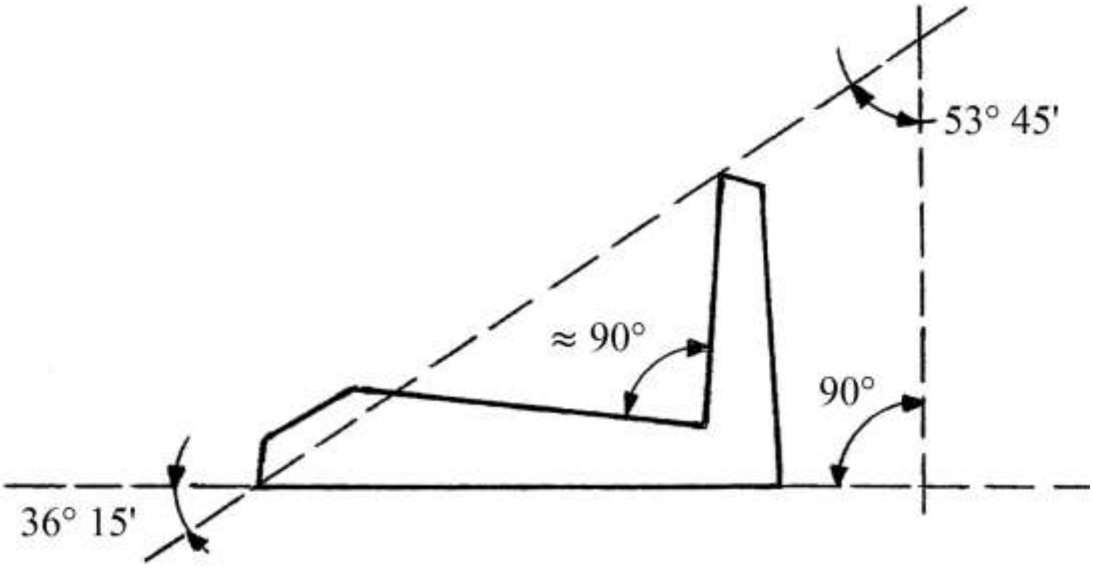
Nel Medioevo gli astrolabi portavano scale graduate in gradi e le frazioni sessagesimali erano utilizzate in astronomia, ma i gradi rimasero sconosciuti negli altri ambiti e quindi non erano disponibili dei goniometri per gli artigiani.

In antico le squadre erano dotate di due braccia perpendicolari, rigidamente collegate e formanti degli angoli retti (oppure no) sia all'interno che all'esterno, ma sempre prive dell'ipotenusa:



A partire dal XIII secolo furono introdotte squadre dette *a unghia* o *ugnate* con le braccia divergenti, con l'angolo esterno retto mentre quello interno non lo era più oppure accadeva l'opposto.

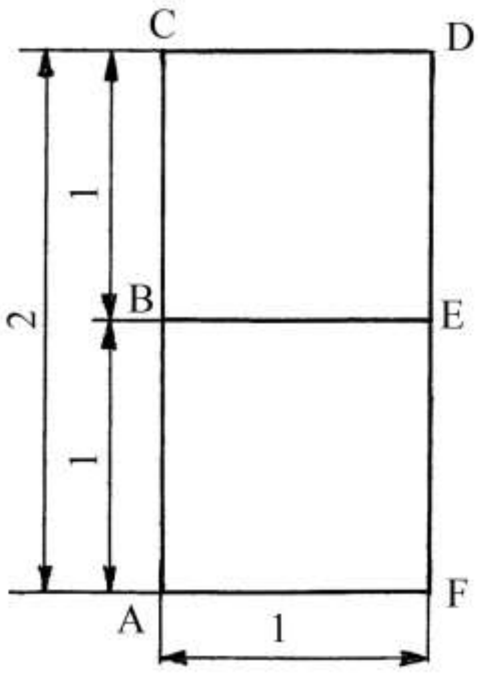
Nella figura che segue è riprodotta una squadra disegnata nel *Taccuino* di Villard de Honnecourt:



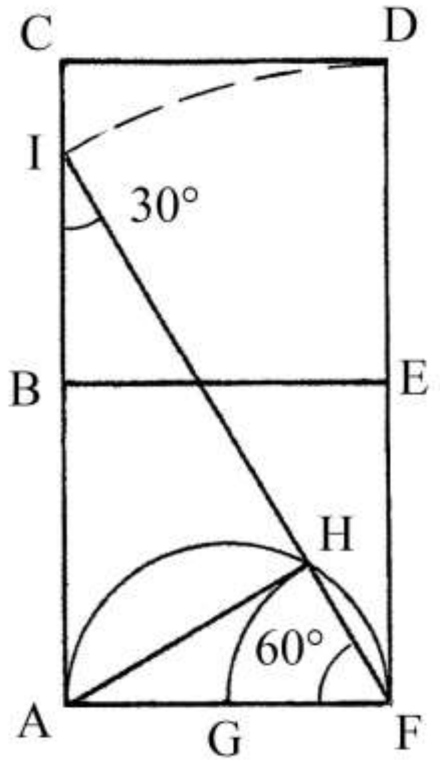
Essa aveva solo l'angolo interno alle due braccia ampio, con buona approssimazione, 90°. Gli altri due angoli costruibili con quella squadra erano quelli di circa 36° e di circa 54°, entrambi interessanti il pentagono e il decagono regolari: nel Medioevo era riposta maggiore fiducia nella squadra rispetto al compasso, perché quest'ultimo non garantiva la precisione richiesta: durante il loro impiego, i compassi medievali non erano stabili come lo sono quelli odierni, metallici e con viti di regolazione e di bloccaggio molte precise.

Esistevano diverse forme di squadre.

Le figure che seguono mostrano l'origine geometrica di alcune squadre basate su un doppio quadrato formante un rettangolo con il lato più corto disposto orizzontalmente: gli abacisti toscani del Medioevo e del Rinascimento chiamavano *bislungo* il doppio quadrato disposto con il lato maggiore orizzontale.



I lati del rettangolo hanno lunghezze *convenzionali* 1 e 2.
La squadra di Hugues Libergier serviva a tracciare angoli di 30° e di 60°:



La sua costruzione è ottenuta con il metodo che segue: il punto G è il medio di AF. Fare centro nel punto G e, con raggio GA = GF, disegnare una semicirconferenza. Con la stessa apertura fare centro in F e tracciare un arco da G fino a intersecare la semicirconferenza in H.

Per i punti F e H disegnare un segmento che taglia AC nel punto I: il segmento FI è lungo quanto FD, come conferma l'arco di circonferenza DI tracciato facendo centro in F con raggio FD.

Il segmento AI è lungo:

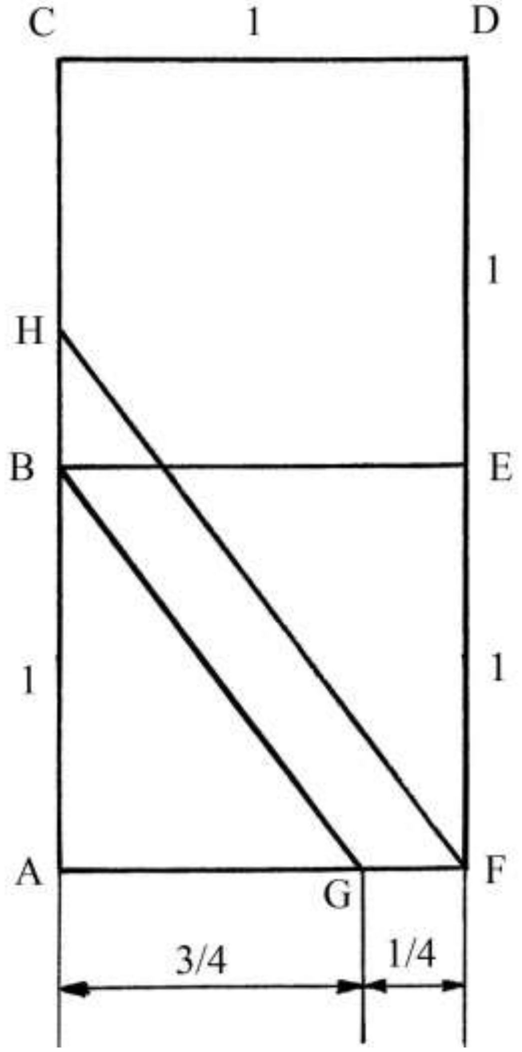
$AI = \sqrt{(FI^2 - AF^2)} = \sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

La squadra AIF ha angoli di ampiezza 30, 60 e 90°.

Il triangolo rettangolo AIF è metà di un triangolo equilatero con lati lunghi FI = FD.

<u>La squadra pitagorica</u>

Nel solito doppio quadrato, fissare un punto, G, a distanza da A uguale a ¾ di AF:



Tracciare il segmento GB.

La proporzione fra le lunghezze dei cateti AG e AB del triangolo rettangolo BAG è:

$AG : AB = (3/4) * AF : AB = (3/4) * AB : AB = 3 : 4$.

L'ipotenusa GB è lunga:

$GB = \sqrt{(AG^2 + AB^2)} = \sqrt{[(3/4)^2 + 1^2]} = \sqrt{[9 + 16)/16]} = \sqrt{(25/16)} = 5/4$.

Il triangolo BAG è *pitagorico*, perché i suoi lati hanno lunghezze in proporzione alla terna 3-4-5:

$AG : AB : GB = ¾ : 1 : 5/4 = 3 : 4 : 5$.

Dal punto F tracciare un segmento parallelo a BG: è FH.

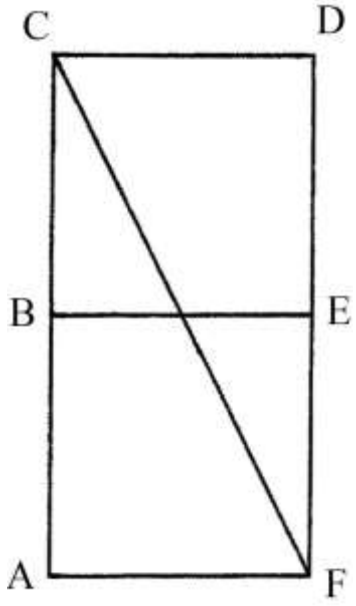
Il triangolo rettangolo HAF è simile a quello BAG e anch'esso ha lati le cui lunghezze stanno nella proporzione 3 : 4 : 5 .

L'angolo HFA è ampio 53,13° e quello AHF è 36,87°.

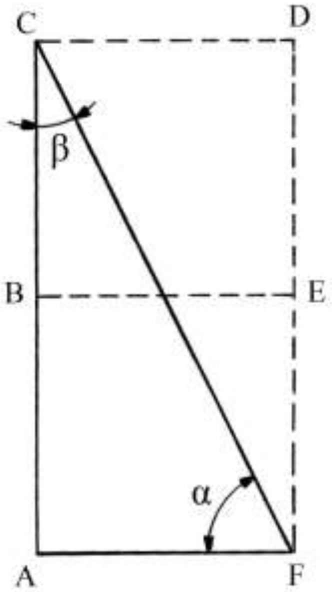
<u>Squadra a doppio quadrato e sue applicazioni</u>

La diagonale FC del doppio quadrato è lunga:

$FC = \sqrt{(AC^2 + AF^2)} = \sqrt{(2^2 + 1^2)} = \sqrt{5}$.



Nello schema che segue è disegnata la squadra CAF:



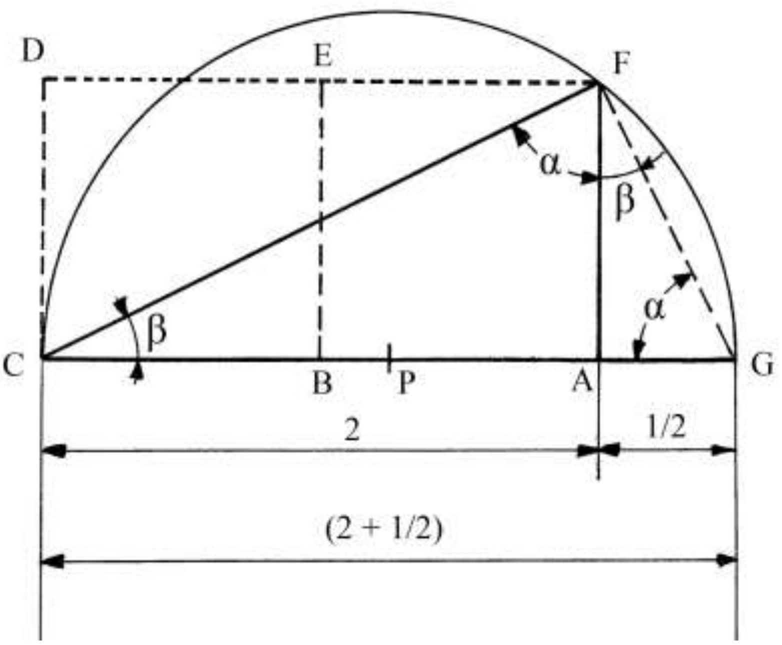
La tangente dell'angolo α è data da:

$tg\ \alpha = CA/AF = 2/1 = 2$. A questo valore corrisponde un angolo: $\alpha \approx 63{,}435°$ e il suo complementare β è:

$\beta \approx 26{,}565°$.

Con questa squadra è realizzata la costruzione che segue.

Disporre la squadra CAF con il cateto maggiore orizzontale:



Prolungare il cateto CA verso destra. A partire da A fissare il punto G a distanza

AG = ¼ * CA = ¼ * 2 = ½ .

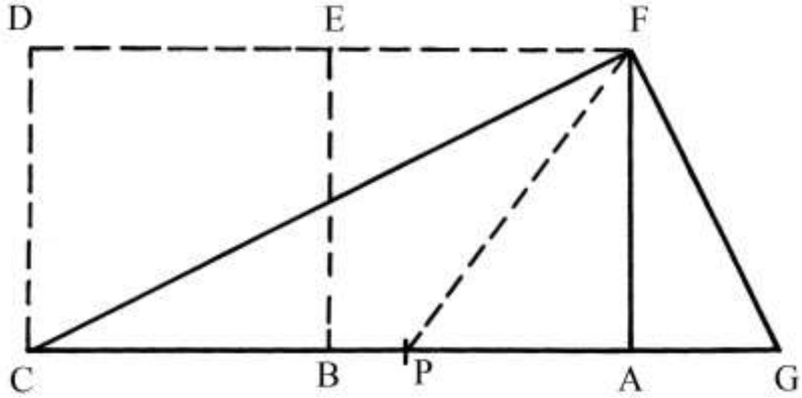
Determinare il punto medio di CG: è P.

Fare centro in P e con raggio PC=PG tracciare una semicirconferenza che passa anche per il punto F.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti vale la proporzione

CA : FA = FA : AG

2 : 1 = 1 : ½ .



PF è un raggio della semicirconferenza ed è l'ipotenusa del triangolo rettangolo PFA. AF è convenzionalmente lungo 1. Il cateto PA è lungo:

PA = PG – AG = cg/2 – AG = 2,5/2 – 0,5 = 1,25 – 0,5 = 0,75.

La lunghezza di PF è:

$PF^2 = PA^2 + AF^2 = 0{,}75^2 + 1^2 = 0{,}5625 + 1 = 1{,}5625$

$PF = \sqrt{1{,}5625} = 1{,}25$.

AFG è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dei due cateti:

* AF = 1.
* AG = ½.

L'ipotenusa FG è lunga:

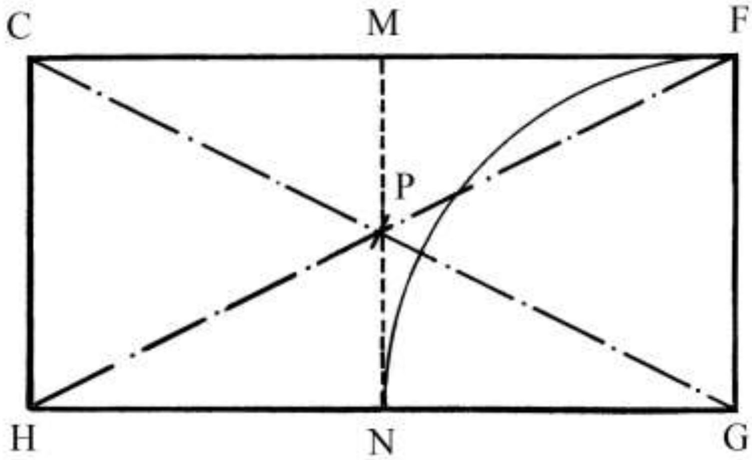
$FG^2 = AF^2 + AG^2 = 1^2 + (1/2)^2 = 1 + 0,25 = 1,25 = 5/4$.

$FG = \sqrt{(5/4)} = (\sqrt{5})/2$.

CFG è un triangolo rettangolo che ha lati lunghi:

* $CF = \sqrt{5}$.
* $FG = (\sqrt{5})/2$.
* $CG = 2,5$.

A sua volta, CFG è metà del rettangolo CFGH:



Anche questo rettangolo è un *doppio quadrato*; infatti vale la relazione

$CF = 2 * CH$.

LE SQUADRE IMPIEGABILI PER DISEGNARE POLIGONI

Nell'articolo citato in bibliografia, la matematica spagnola Antonia Redondo Buitrago descrive alcune squadre che sembrerebbero o potrebbero essere state usate dai tecnici medievali per disegnare alcuni poligoni.

Le *scale a chiocciola* hanno sempre permesso un notevole risparmio di spazi e di volumi, almeno nei confronti delle *scale diritte* o *a giorno*. La costruzione delle scale a chiocciola negli edifici medievali richiedeva la tracciatura di poligoni inscritti in un cerchio e con differenti numeri di lati: sono noti quelli con 10, 12, 15, 16, 18, 24 e 28 lati. Sono pure noti esempi di impiego del *tridecagono*, il poligono con 13 lati.

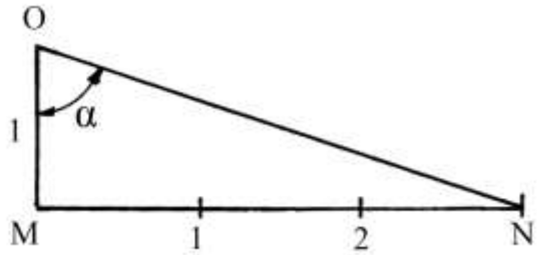
Tutti quei poligoni con alto numero di lati erano ricavabili a partire da quelli più semplici con l'impiego di costruzioni multiple o più comunemente con la tracciatura delle bisettrici degli angoli al centro del cerchio.

Ecco alcune derivazioni:

* Decagono (10 lati) dal pentagono.
* Dodecagono (12 lati) dall'esagono.
* Pentadecagono (15 lati) era ottenuto con la tracciatura del triangolo equilatero e del pentagono inscritti nello stesso cerchio.
* Esadecagono (16 lati) era basato sull'ottagono.
* Il tetraicosagono (24 lati) era ricavabile dal dodecagono e quindi dall'esagono.
* L'ottaicosagono (28 lati) era costruibile a partire dall'ettagono con due successive bisezioni degli angoli.

L'ottadecagono, il poligono con 18 lati, è un caso a parte: in teoria deriva dall'ennagono, ma non sono conosciuti esempi di squadre impiegate per disegnare l'ennagono. Forse l'ottadecagono era ricavato per tentativi a partire dal pentadecagono o dall'esadecagono diminuendo la lunghezza del lato di uno di questi due poligoni.

La figura che segue descrive una squadra a forma di triangolo rettangolo con cateti lunghi in proporzione a 1 e a 3:

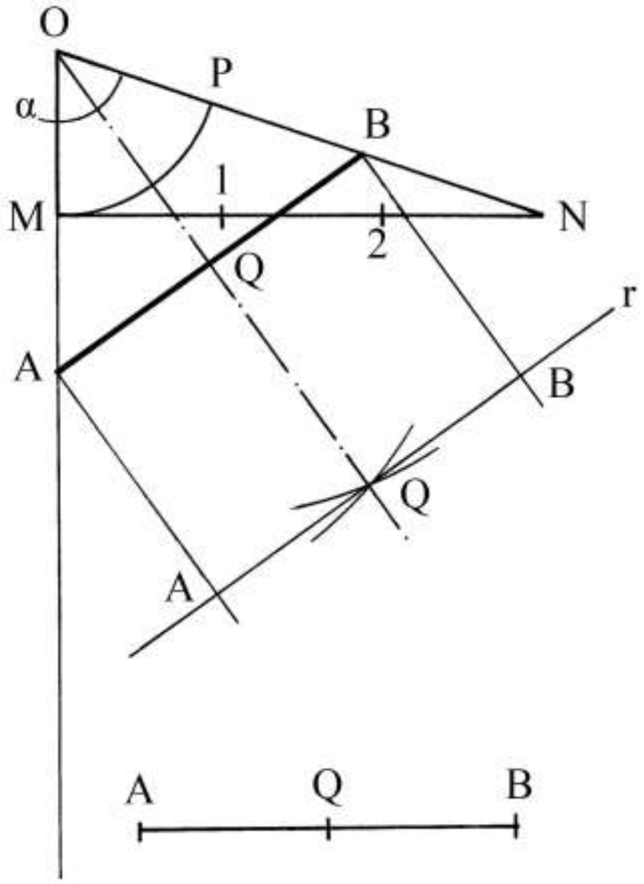


L'angolo α ha tangente:

$tg\ \alpha = MN/OM = 3/1 = 3$. A questo valore corrisponde un angolo:

$\alpha \approx 71{,}6°$, valore assai prossimo all'angolo di 72° che è caratteristico del pentagono regolare.

Utilizziamo questa squadra per disegnare un pentagono approssimato:



Prolungare verso il basso il cateto OM.

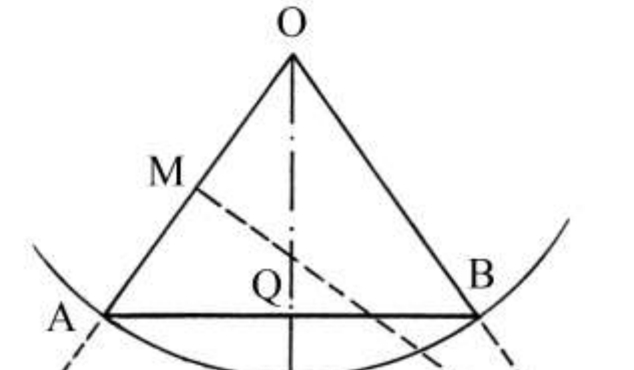
Fare centro in O e con raggio OM tracciare un arco da M fino incontrare ON in un punto, P. Costruire la bisettrice dell’angolo MOP: essa passa per il punto Q.

È data la lunghezza del lato del pentagono: è AB. Il suo punto medio è Q.

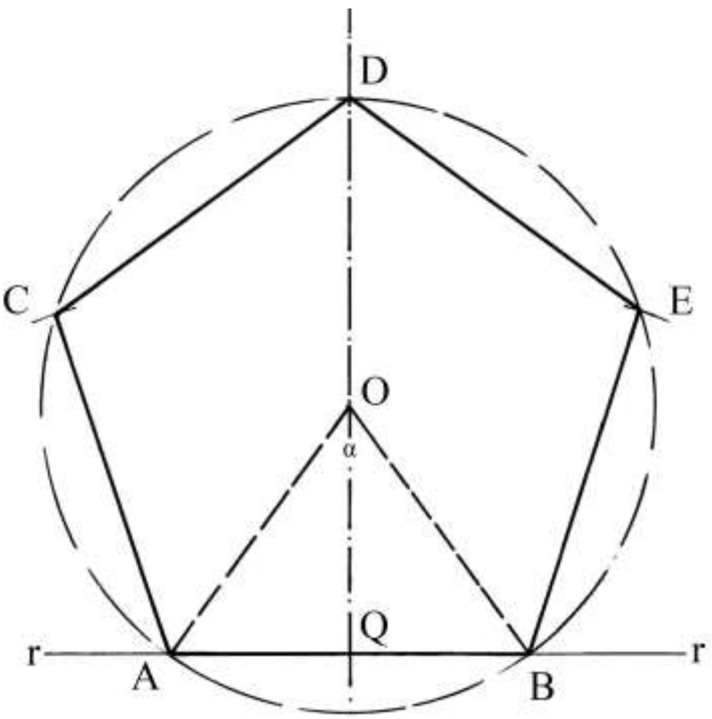
Tracciare la retta *r* passante per Q e perpendicolare alla bisettrice OQ. Sulla retta riportare la lunghezza di AB facendo coincidere il suo punto medio con Q.

Dai punti A e B appena fissati sulla retta *r* proiettare le perpendicolari alla stessa retta fino a incontrare il prolungamento di OM e l’ipotenusa ON.

OAB è uno dei cinque triangoli rettangoli isosceli che compongono il pentagono:



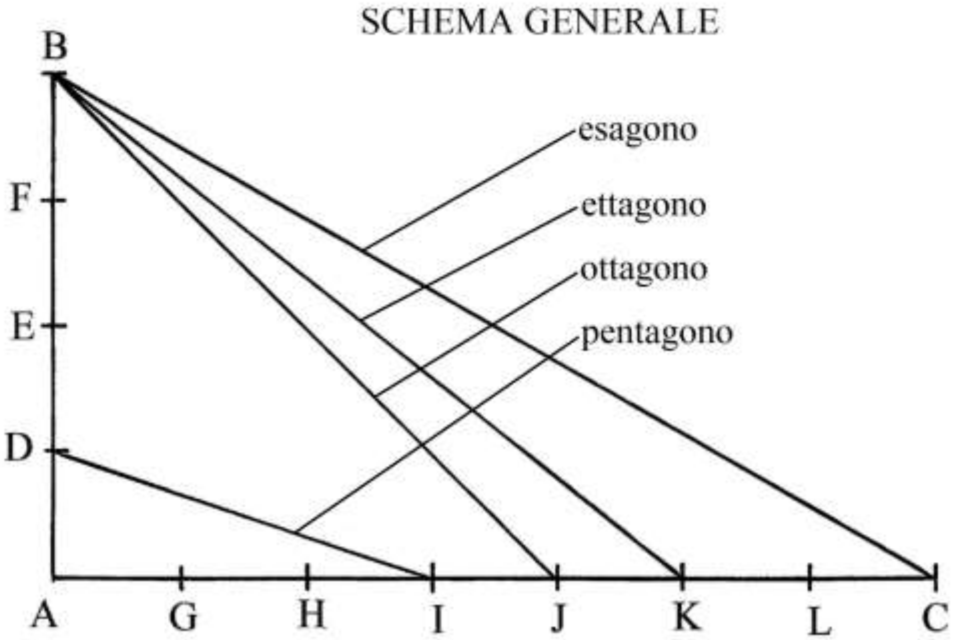
Ruotando il triangolo AOB *quattro* volte in senso antiorario intorno al punto O si ricava il pentagono approssimato ACDEB:



Gli artigiani medievali ottenevano lo stesso risultato facendo ruotare la squadra 3-1.

Altre squadre

Lo *SCHEMA GENERALE* che segue, anch'esso rielaborato dal citato articolo della Redondo Buitrago, offre numerose alternative, oltre al caso del pentagono descritto nel precedente paragrafo:



ABC è un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi in proporzione 4 a 7:

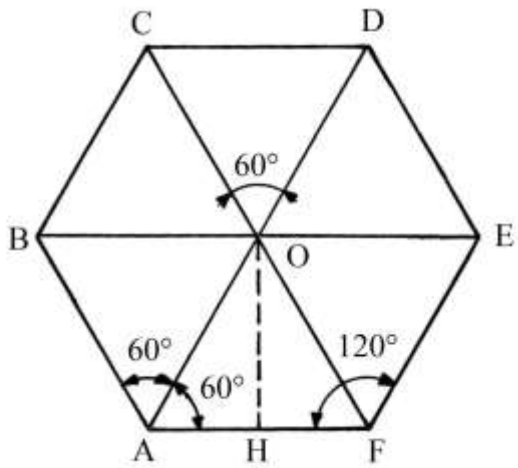
AB : AC = 4 : 7 .

Utilizzando gli altri rapporti presenti al suo interno, sono generate squadre utili per costruire tre diversi poligoni approssimati: l'esagono, l'ettagono e l'ottagono.

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC. L'angolo ABC ha tangente che è data da:

tg ABC = AC/AB = 7/4 = 1,75. A questo valore corrisponde un angolo

ABC ≈ 60,255°, che è leggermente più ampio di quello di 60°, caratteristico dell'esagono. Collocando la squadra 7/4 è disegnato il triangolo *quasi* equilatero AOF e ruotandola intorno al punto O, in senso antiorario, per *cinque* volte, viene completato l'esagono *quasi* regolare.



In figura gli angoli sono indicati di ampiezza uguale a 60°, con una leggera approssimazione per difetto rispetto al valore calcolato di 60,255°.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABK è un triangolo rettangolo che ha cateti AB e AK, lunghi in proporzione a 4 e a 5 (rivedere lo *SCHEMA GENERALE*).

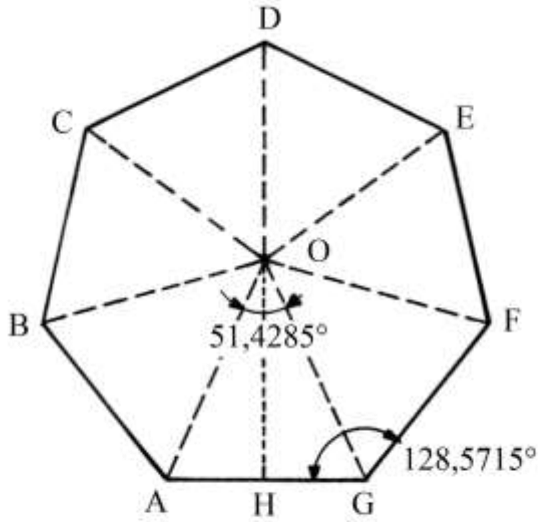
L'angolo ABK ha tangente uguale a:

tg ABK = AK/AB = 5/4 = 1,25 al quale corrisponde un angolo

ABK ≈ 51,34°.

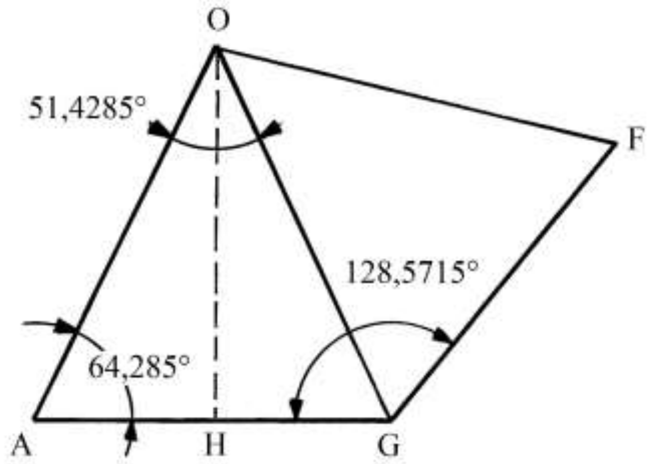
Un ettagono regolare è scomponibile in sette triangoli isosceli che al vertice hanno angoli di ampiezza uguale a:

AOG = 360/7 ≈ 51,4285°.



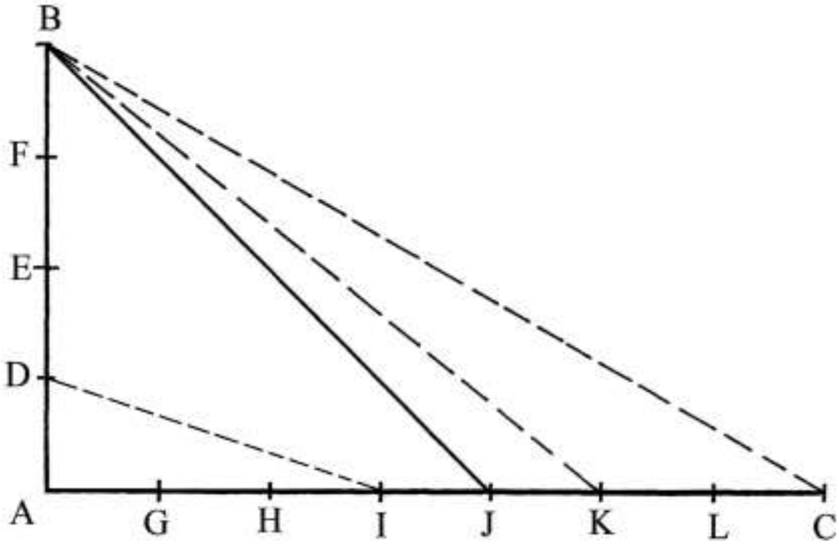
L’angolo interno dell’ettagono è ampio:

OAG = AGO = (180° - AOG)/2 = (180° - 51,4285)/2 ≈ 64,285°.



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nello *SCHEMA GENERALE* prendiamo in considerazione il triangolo rettangolo ABJ: esso è *isoscele* perché i cateti AB e AJ hanno uguale lunghezza e gli angoli BAJ e AJB hanno la stessa ampiezza di 45°:



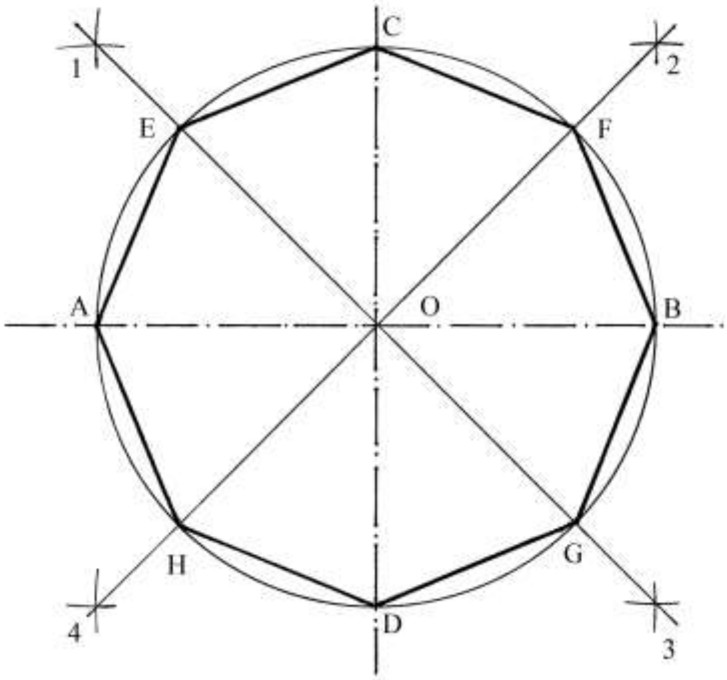
La tangente dell’angolo ABJ è:

tg ABJ = AJ/AB = 4/4 = 1 alla quale corrisponde un angolo ABJ = 45°.

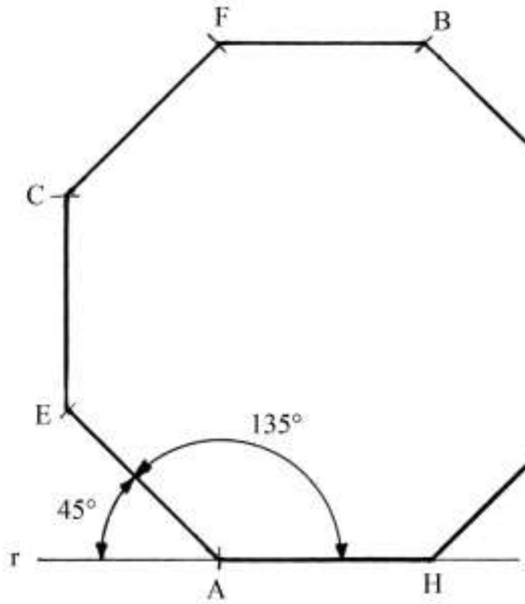
Anche la tangente di AJB vale 1:

tg AJB = AB/AJ = 4/4 = 1 e pure l’angolo AJB è ampio 45°.

Un ottagono è inscrivibile in un cerchio di cui sono noti i diametri AB e CD fra loro perpendicolari. Costruendo le bisettrici dei quattro angoli retti generati dall’intersezione dei diametri si ottengono in totale otto vertici del poligono:

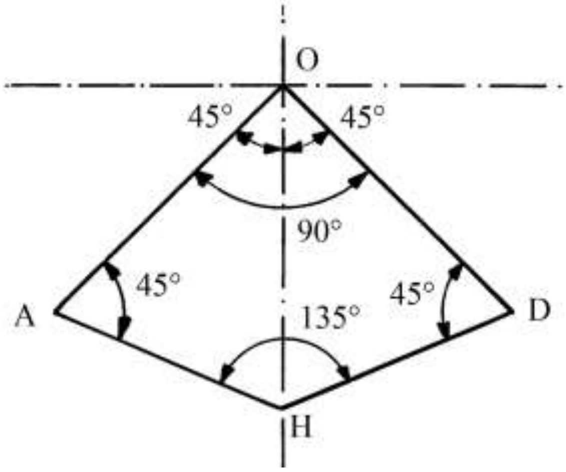


Il poligono può essere creato con l’ausilio di una squadra a forma di *triangolo isoscele*:



Gli angoli interni dell'ottagono hanno ampiezza 135° e l'*angolo esterno* formato dal lato EA con la retta *r* è ampio 45°.

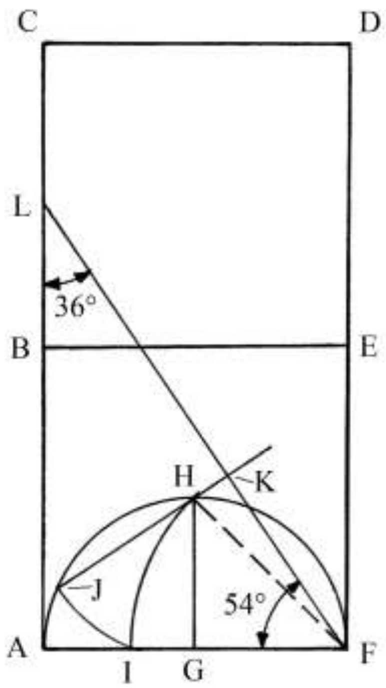
Gli angoli caratteristici degli otto triangoli isosceli che formano un ottagono regolare sono riassunti nello schema che segue:



ALTRE SQUADRE

La squadra da 36° e da 54°

La costruzione di una squadra con questi due angoli caratteristici del pentagono e del decagono regolari è ottenuta con il metodo descritto nella figura che segue:



ABEF e BCDE sono due quadrati di uguali dimensioni uniti lungo il lato comune BE.

Fissare il punto medio di AF: è G. Da questo punto elevare la perpendicolare a AF.

Fare centro nel punto G e con raggio GA = GF tracciare una semicirconferenza: essa interseca la perpendicolare nel punto H.

Con centro in F e raggio FH, disegnare un arco da H fino a incontrare AF in un nuovo punto, I.

Fare centro nel punto H e con raggio HI tracciare un arco da I fino a tagliare la semicirconferenza nel punto J.

Per i punti J e H condurre una linea: dal punto F tracciare un segmento perpendicolare al prolungamento di JH fino a incontrare AC nel punto L.

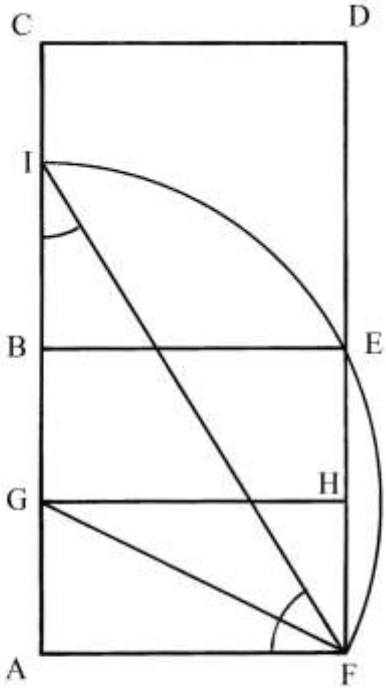
L'angolo LAF è ampio 54° e quello ALF è 36°.

Nota: in un successivo paragrafo è mostrato un esempio di uso della squadra con angoli di 36° e di 54° nella costruzione del decagono e del pentagono.

Triangolo della sezione aurea

Un squadra che ha cateti lunghi in proporzione a 1 e a Φ è costruibile con il metodo descritto di seguito.

Utilizziamo il solito doppio quadrato ABCDEF:



Tracciare la mediana GH nel quadrato ABEF e la diagonale GF.

Fare centro nel punto G e con raggio GF disegnare un arco passante per i punti F e E, fino a tagliare AC nel punto I.

AIF è un triangolo rettangolo che ha angoli di ampiezza: AFI = 58,28° e AIF = 31,72°.

La lunghezza *convenzionale* di AF è 1 e quella di AG è ½.

La diagonale GF è lunga:

$$GF = \sqrt{(AF^2 + AG^2)} = \sqrt{[1^2 + (½)^2]} = \sqrt{(5/4)} = (\sqrt{5})/2 .$$

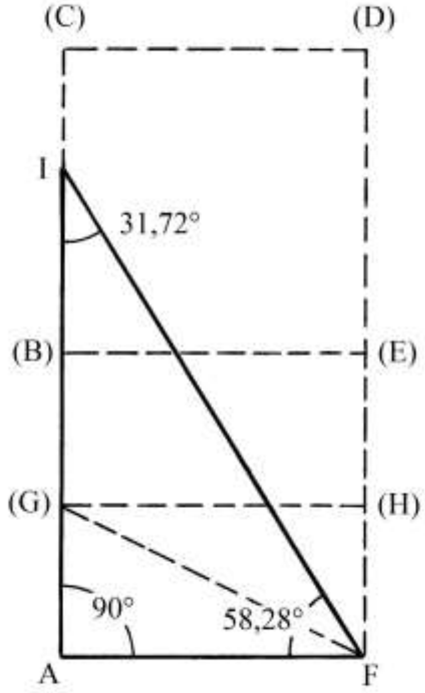
A sua volta, il segmento AI è lungo:

$$AI = AG + GI = AG + GF = ½ + (\sqrt{5})/2 = (\sqrt{5} + 1)/2 = \phi \approx 1{,}618\ldots$$

La lunghezza di FI è:

$$FI = \sqrt{(AI^2 + AF^2)} = \sqrt{(\phi^2 + 1^2)} \approx 1{,}902\ldots$$

Il triangolo AIF è rettangolo e *aureo*. I suoi angoli hanno le ampiezze riportate nella figura:

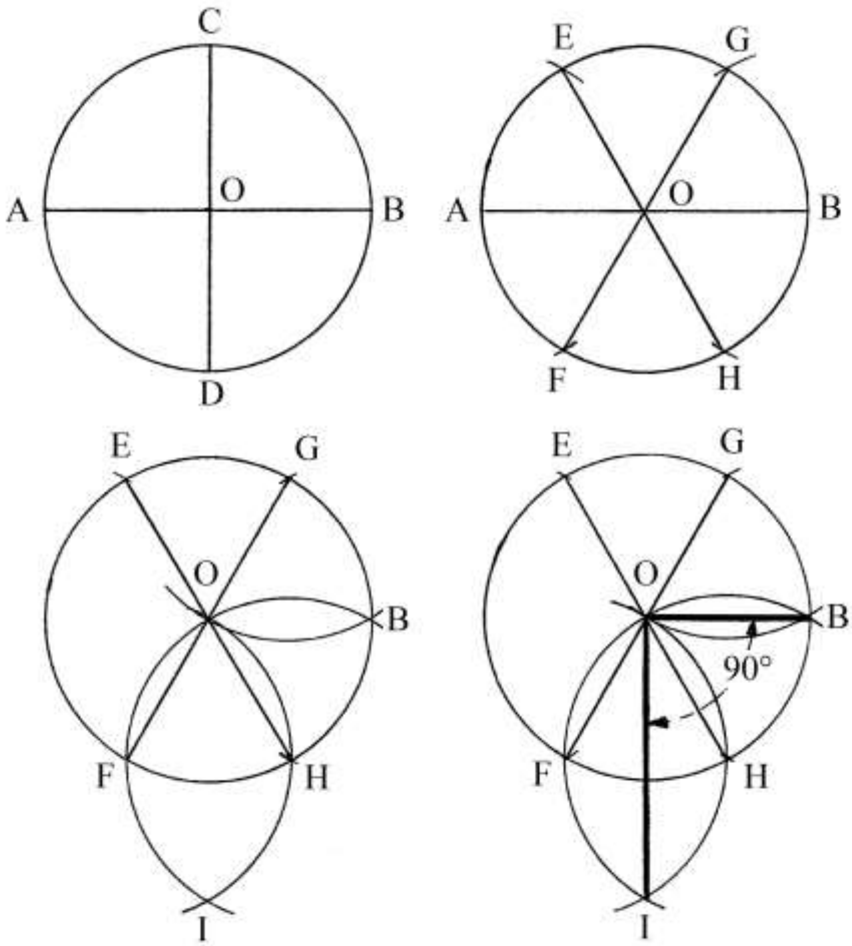

(C)
(D)
I
31,72°
(B)
(E)
(G)
(H)
90°
58,28°
A
F

LA SQUADRA DI BERTRAND BOYSSET

Nel suo trattato *La siensa de destrar* (circa il 1406), l'agrimensore provenzale Bertrand Boysset descrive un metodo per la costruzione di una squadra con un angolo retto, utilizzando una riga e un compasso, come mostrano le tre figure che seguono, tratte dal suo testo:

In particolare, la prima figura è contenuta nel foglio 216 *verso* del manoscritto custodito a Carpentras e contenente i due trattati che egli scrisse.

Secondo la ricostruzione che ne ha fatta lo studioso catalano Josep Lluis i Ginovart, la costruzione di Boysset sarebbe basata su quella di un esagono inscritto in un cerchio di centro O e diametri AB e CD:



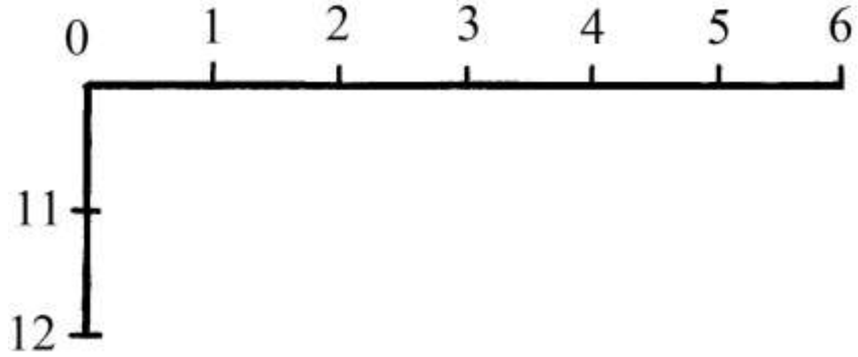
A, E, G, B, H e F sono i vertici dell'esagono (che non è disegnato per non appesantire la figura).

Facendo centro nei punti G, F e H sono tracciati gli archi di circonferenza che si intersecano nei punti B e I.

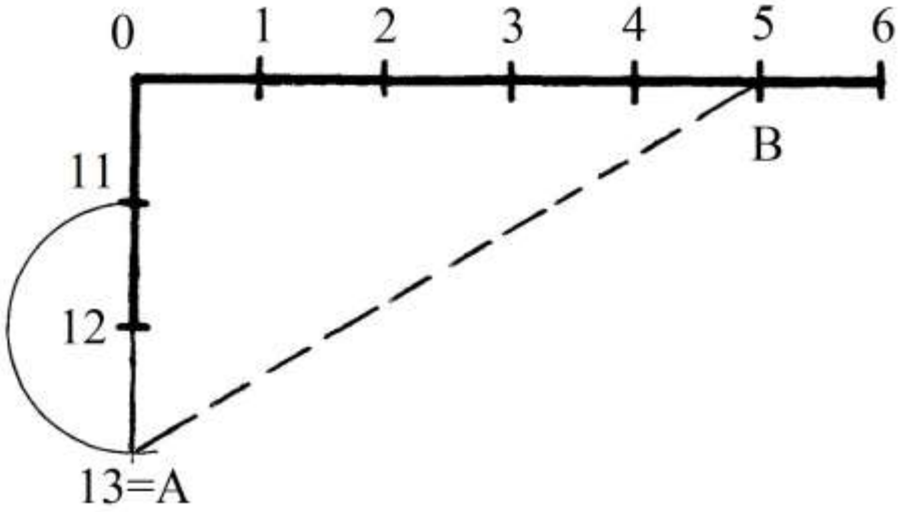
La squadra ad angolo retto ha i bracci OI e OB.

LA COSTRUZIONE DEL PENTAGONO SECONDO VILLARD DE HONNECOURT

Stando a un'ipotesi avanzata dalla Sarrade e da Lluis i Ginocart, per disegnare un pentagono Villard avrebbe impiegato una squadra ad angolo retto con braccia lunghe 6 e 2 unità:



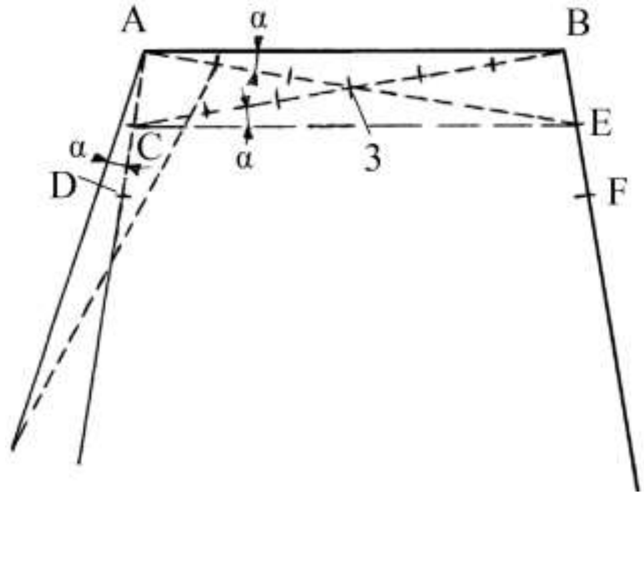
AB è il primo lato del pentagono: la sua lunghezza può essere ricavata con una certa approssimazione impiegando la squadra 6-12, con la costruzione che segue:



La lunghezza *convenzionale* dell'ipotenusa AB, equivalente al segmento 13-5, è:

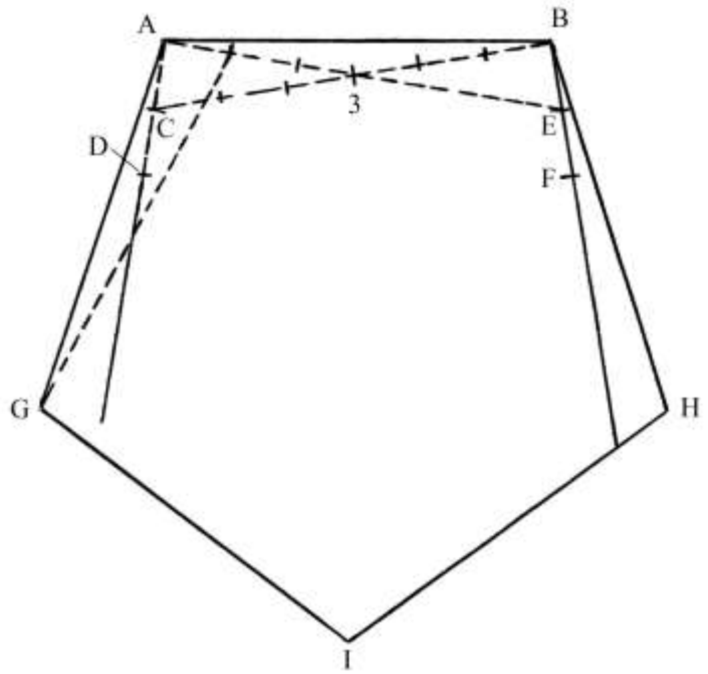
$$AB = \sqrt{[(0-13)^2 + (0-5)^2]} = \sqrt{(3^2 + 5^2)} = \sqrt{34} .$$

La squadra 6-12 viene collocata in due posizioni differenti: la prima è quella indicata dai segmenti AE e AD. La seconda è quella rappresentata dai segmenti BC e BF.



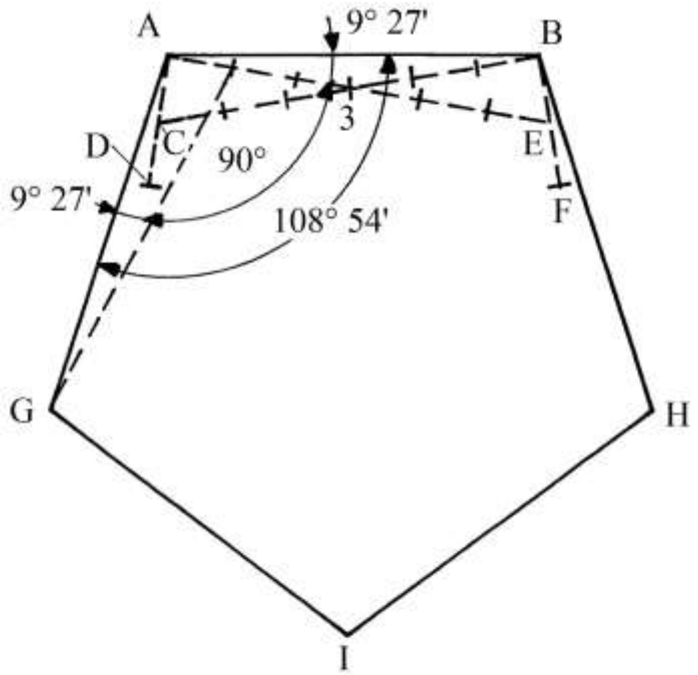
Le due posizioni si incontrano nel punto 3.

Muovendo successivamente la squadra e riportando la lunghezza di AB sono determinati i lati AG e BH:



Con il compasso viene stabilita la posizione del quinto vertice, I.

Stando alla Sarrade, due degli angoli già indicati con α nella penultima figura hanno ampiezza di 9° 27’:

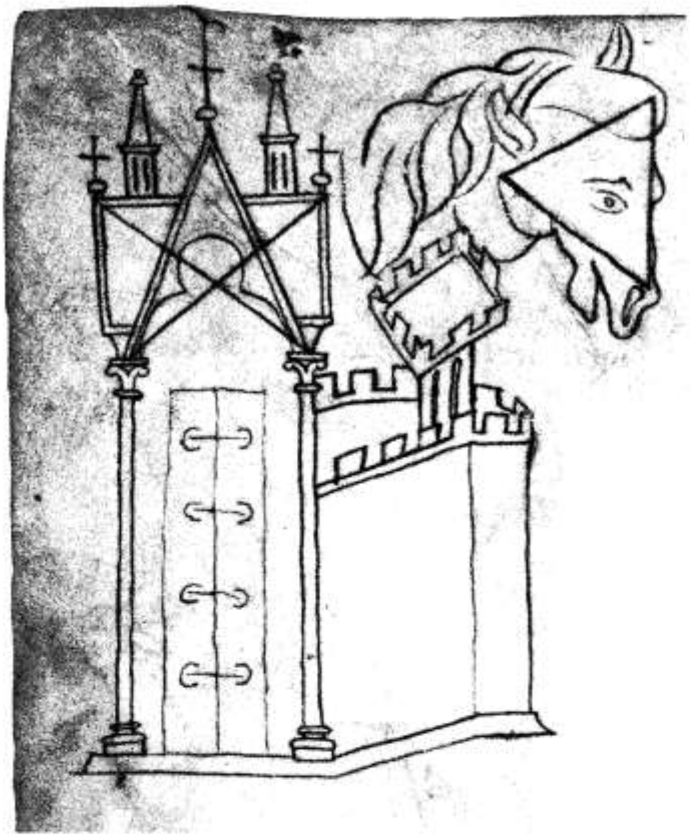


L’angolo interno di un pentagono regolare è ampio 108°: sul grafico l’angolo interno del pentagono, BAG, è dato da:

BAG = α + 90° + α = 90° + 2 * α = 90° + 2 *(9° 27’) = 108° 54’, leggermermente più ampio dell’angolo corretto di 108°.

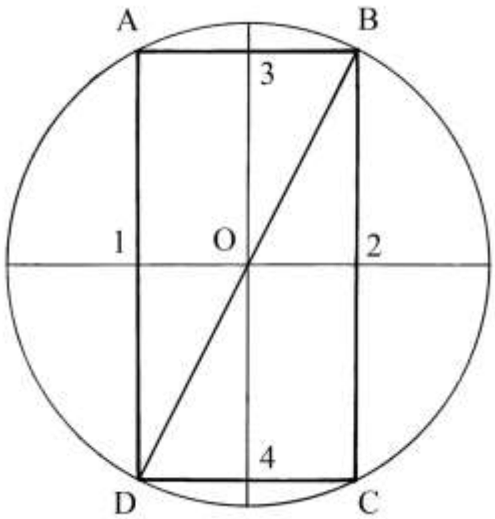
La costruzione del pentagono secondo Villard de Honnecourt - Ipotesi Bartoli

Nel Taccuino di Villard de Honnecourt è contenuto, al foglio 18 *verso,* uno schema su "*come fare una torre di cinque punte*":



In un contributo pubblicato nel volume "Matematica e architettura" (Firenze, Alinea, 2001, pp. 25-32), Maria Teresa Bartoli suggerisce una spiegazione della costruzione geometrica probabilmente impiegata da Villard e basata sulla ripetuta rotazione di un rettangolo con le lunghezze dei lati nel rapporto 1:2 (*doppio quadrato*).

Il rettangolo ABCD ha lati lunghi proporzionalmente a 1 (AB e CD) e a 2 (AD e BC). Disegnare la diagonale BD e determinare il suo punto medio, O. Fare centro in O, con raggio OB, e tracciare la circonferenza circoscritta al rettangolo ABCD:



Determinare i punti medi dei quattro lati: sono 1, 2, 3 e 4.

AB-2-1 e 1-2-CD sono due quadrati identici, con lati lunghi proporzionalmente a 1.

Per il teorema di Pitagora, la diagonale DB ha lunghezza determinata dalle seguenti relazioni:

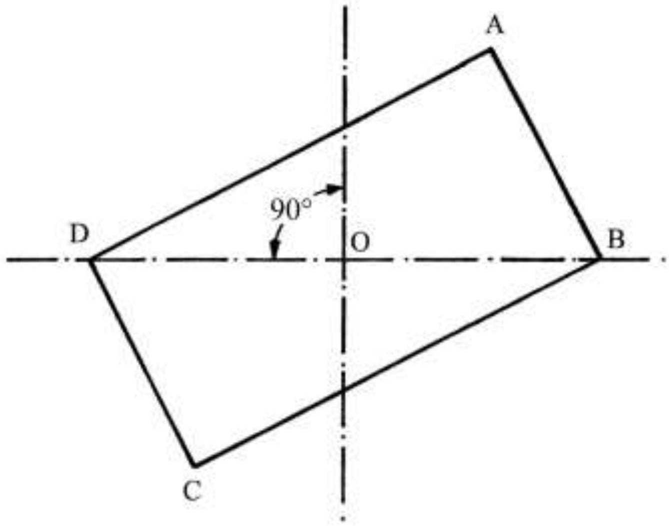
$DB^2 = BC^2 + CD^2$. Ne consegue:

$DB = \sqrt{BC^2 + CD^2}$

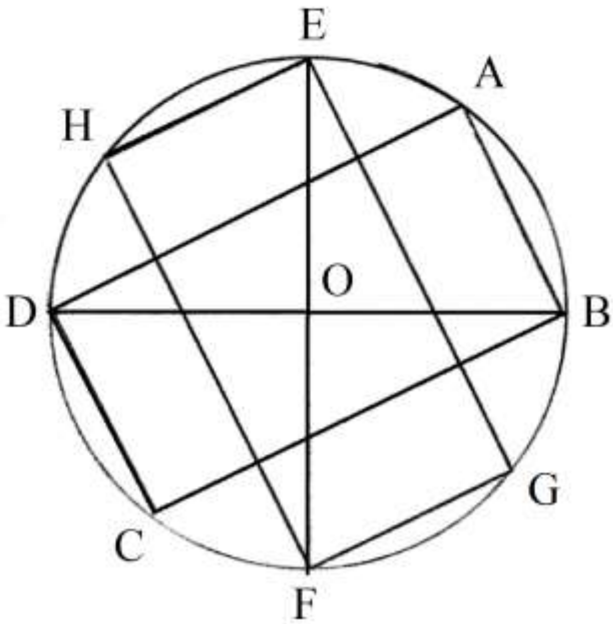
Ma BC = 2 e CD =1 e sostituendo questi valori nella formula precedente si ha:

$DB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Ruotare in *senso orario* il rettangolo ABCD fino a disporre orizzontalmente la diagonale DB. Per il punto O, condurre la perpendicolare a DB:

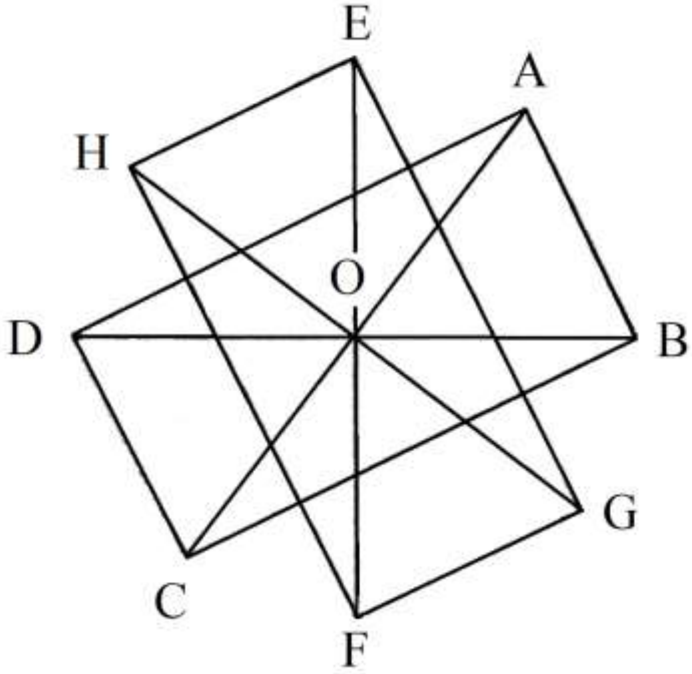


Fare centro nel punto O e ridisegnare una circonferenza con raggio OD: sono determinati i punti E e F:

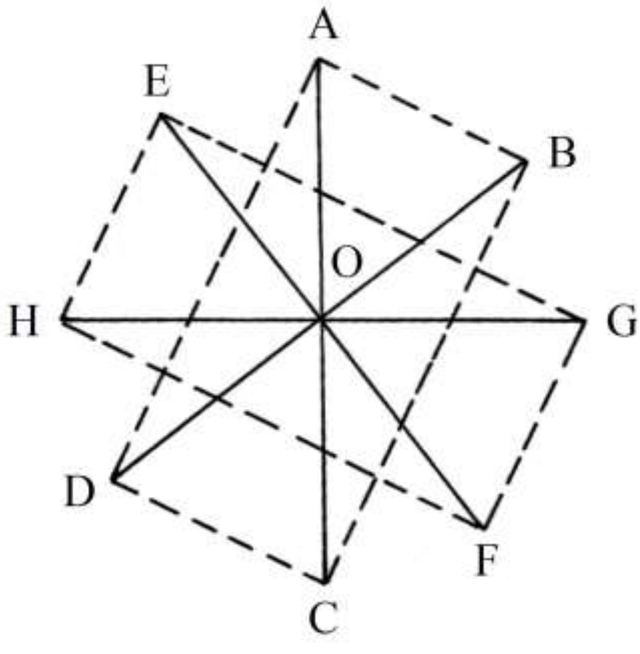


All'interno della circonferenza, costruire un secondo rettangolo di dimensioni uguali a quelle di ABCD e con diagonale EF (che per costruzione è *perpendicolare* a DB): è EGFH.

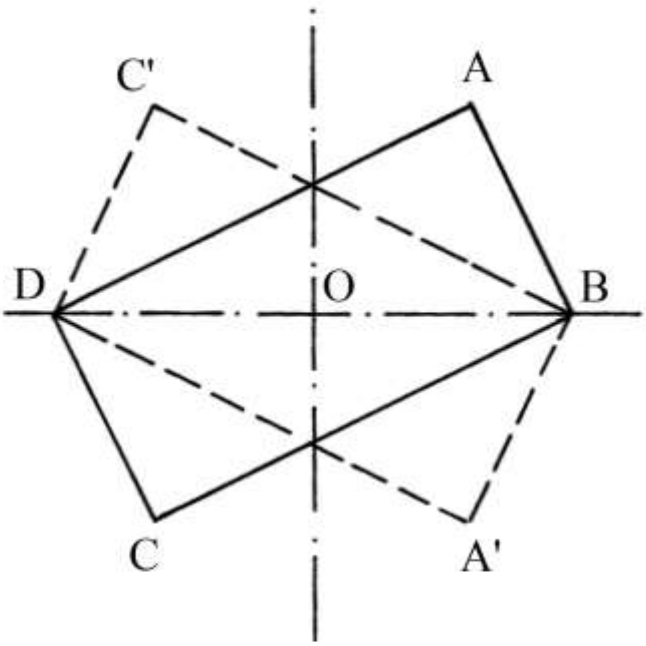
Disegnare le due diagonali mancanti, AC e GH:



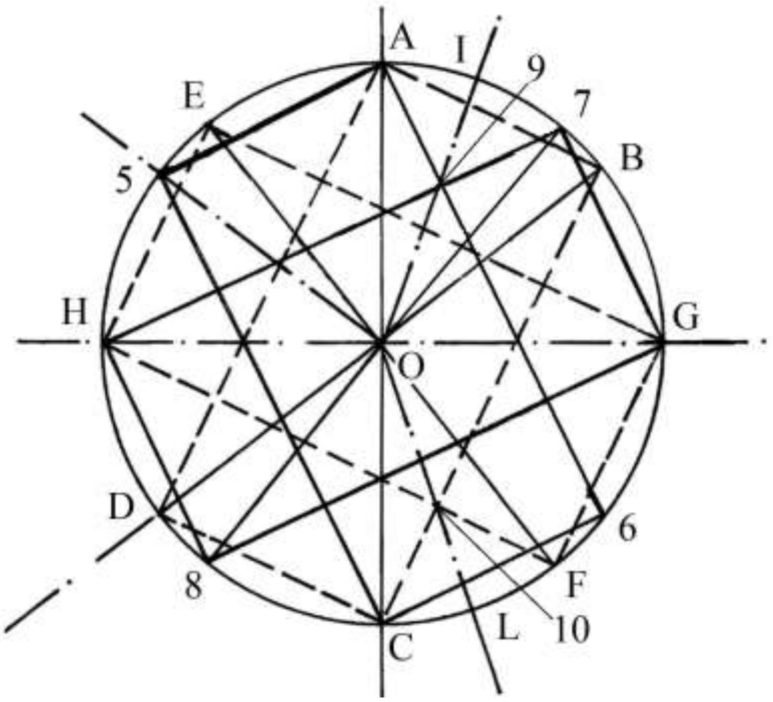
Ruotare la figura precedente *in senso antiorario*, fino a disporre verticalmente la diagonale AC e orizzontalmente la diagonale HG; disegnare a tratti i lati dei due rettangoli:



La diagonale di un rettangolo (come quella DB) è comune a *due* rettangoli fra loro simmetrici rispetto alla diagonale stessa; nella figura che segue ABCD e BA'DC' sono simmetrici rispetto a DB:



Considerare le *quattro* diagonali dei rettangoli ABCD e EGFH e su di esse costruire i rettangoli *simmetrici* A-6-C-5 e H-7-G-8:

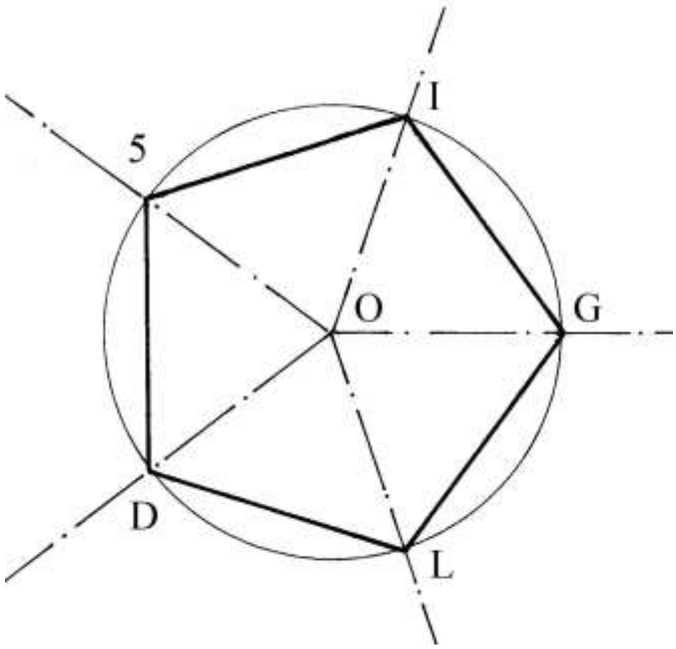


I lati dei due nuovi rettangoli si intersecano in alcuni punti: fra di essi sono utili i punti 9 e 10.

Tracciare con linee *a tratti e punti* cinque semirette uscenti da O e passanti per i punti 5, 9, G, 10 e D.

Le semirette passanti per i punti 9 e 10 tagliano la circonferenza circoscritta nei punti I e L.

Collegando in successione i punti 5, I, G, L e D si ottiene il pentagono *approssimato* 5-IGLD, che potrebbe corrispondere al metodo impiegato da Villard de Honnecourt:

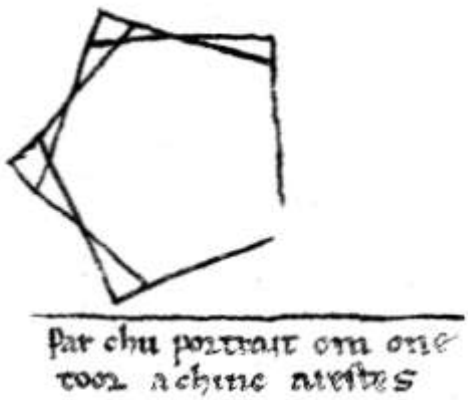


Costruzione approssimata del pentagono secondo Villard – altra soluzione

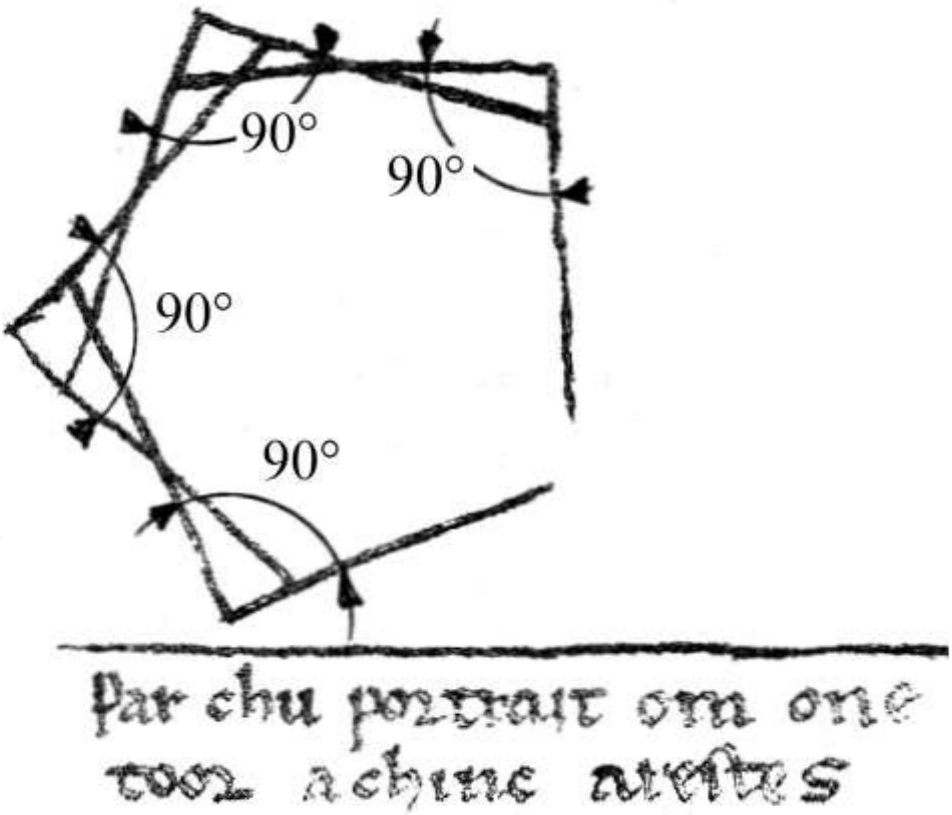
Un secondo esempio di costruzione approssimata del pentagono è proposta dallo stesso architetto medievale.

Il foglio 21 *recto* del Taccuino di Villard de Honnecourt contiene alcuni procedimenti e tracciati da usare in edilizia e, fra di essi, suggerisce una costruzione per disegnare un pentagono, con la seguente dicitura:

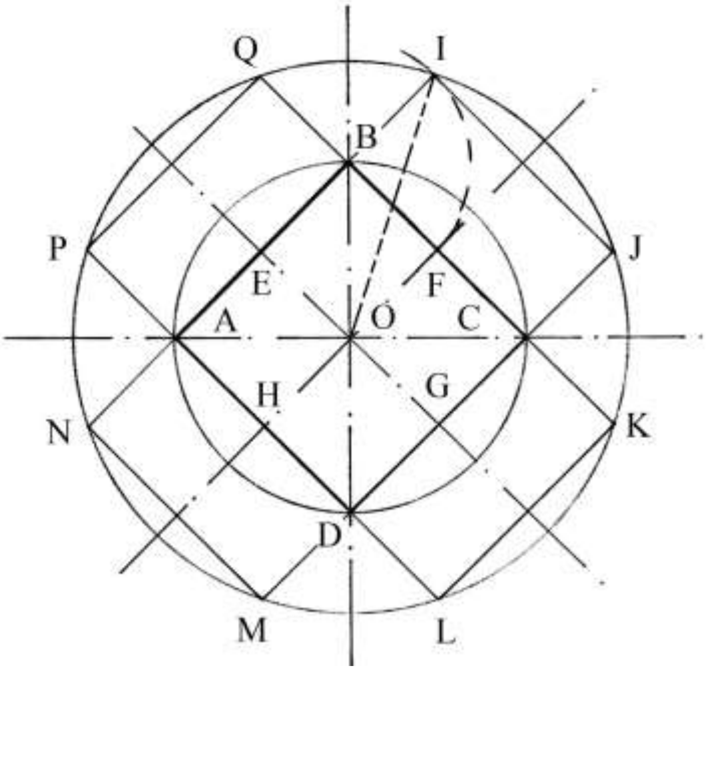
"*In questo modo si disegna una torre con cinque spigoli*".



Villard disegnò almeno due quadrati fra di loro ruotati, come spiega lo schema che segue:



Riguardo al metodo usato da Villard, Maria Teresa Bartoli (in "*Le ragioni geometriche del segno architettonico*", Firenze, Alinea Editrice, 1997) ha avanzato l'ipotesi descritta con le costruzioni geometriche che seguono:



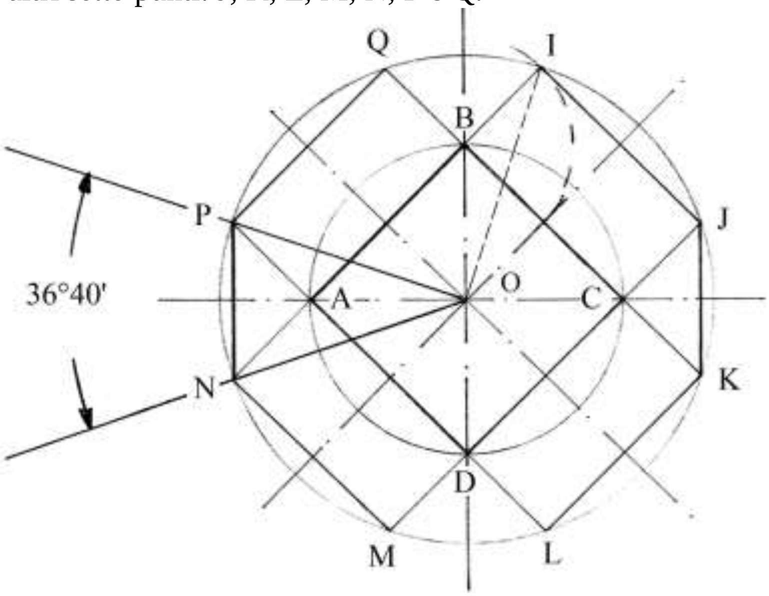
ABCD è un quadrato disposto con le diagonali, orizzontale (AC) e verticale (BD), che si intersecano nel punto O. Il quadrato è inscritto in una circonferenza di raggio OA e quindi di lunghezza uguale a metà di quella della diagonale: OA =AC/2.

Per i punti medi dei quattro lati (E, F, G e H) sono tracciate le mediane che sono qui disegnate sotto forma di assi di simmetria.

Prolungare i lati del quadrato ABCD in entrambe le direzioni.

Fare centro nel punto B e, con raggio BF, tracciare un arco che determina il punto I.

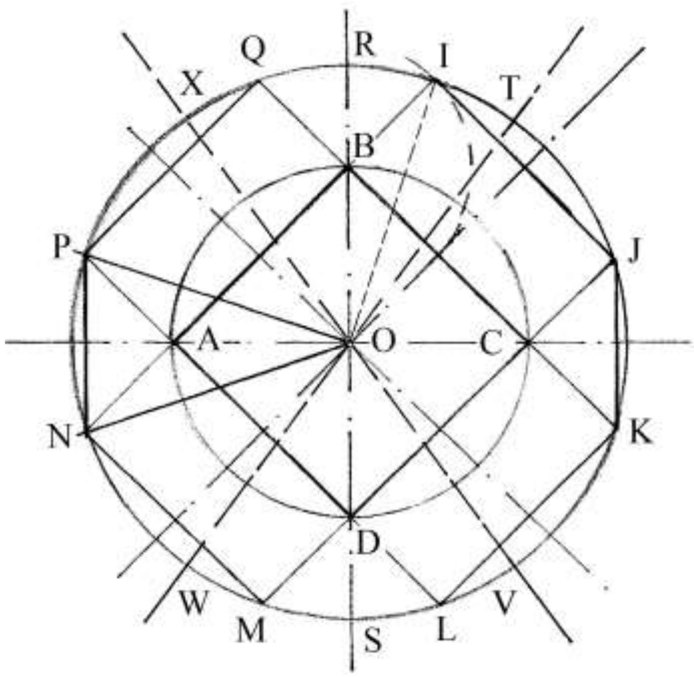
Con centro in O e raggio OI, disegnare una circonferenza che taglia i prolungamenti dei lati del quadrato in altri *sette* punti: J, K, L, M, N, P e Q.



L'angolo PON è ampio 36° 40' (36,67°) e questo valore è vicinissimo a quello dell'angolo al centro di un decagono regolare (360°/10 = 36°).

Pertanto, la corda PN è una buona approssimazione della lunghezza del lato del decagono inscritto nella circonferenza di centro O e raggio OI = OP = ON. Lo stesso vale per la corda JK, simmetrica a quella PN.

Costruire le bisettrici – tratteggiate nella figura che segue – degli angoli POR, ROJ, KOS e SON:



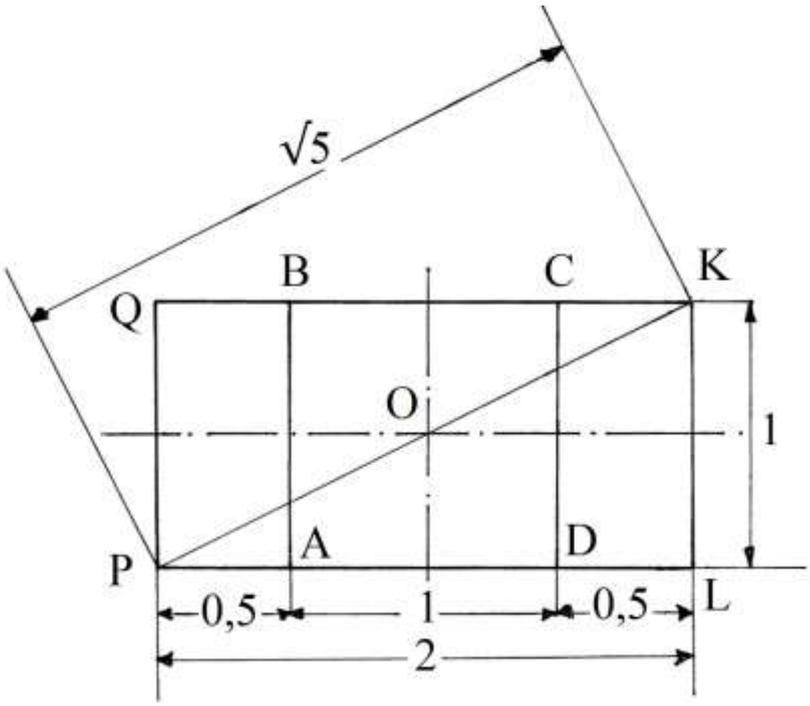
Esse intersecano la circonferenza esterna nei punti T, V, W e X.

Il poligono NPXRTJKVSW è un *decagono approssimato*.

Dal decagono deriva il pentagono approssimato semplicemente collegando alternativamente i vertici fissati sulla circonferenza.

Villard di Honnecourt usava forse una particolare squadra di legno per disegnare il pentagono e il decagono approssimati?

Essa poteva avere la forma di un telaio con le dimensioni convenzionali descritte nello schema che segue:

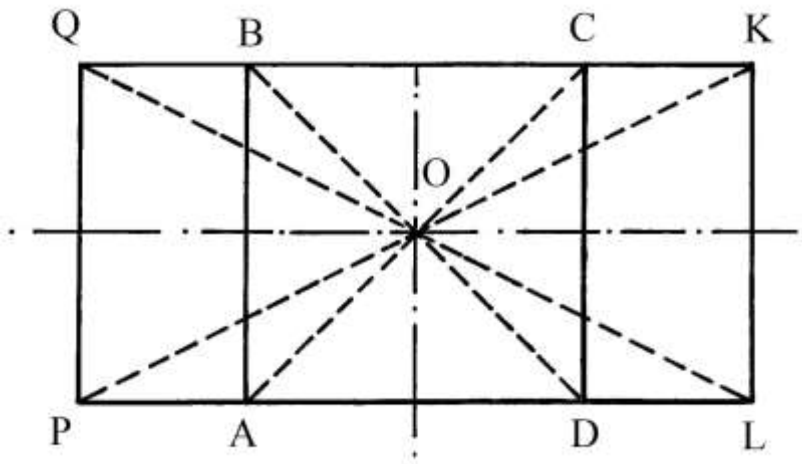


ABCD è un quadrato con lati lunghi *convenzionalmente* 1. Ad esso sono uniti due rettangoli (PQBA e CKLD) con lati lunghi 1 e 0,5.

Il rettangolo PQKL è un *doppio quadrato* (un bislungo secondo la terminologia usati dagli abacisti toscani dal Medioevo in poi) con lati lunghi 2 e 1: la sua diagonale (PK) è lunga $\sqrt{5}$.

L'ipotetico telaio di Villard era facilmente costruibile con dei listelli di legno da parte dei numerosi carpentieri che operavano nei cantieri delle cattedrali gotiche.

Il telaio doveva ruotare sul terreno intorno al punto O: erano necessari almeno due listelli disposti lungo le diagonali AC e BD (o quelle PK e QL), anche per rinforzare la struttura:

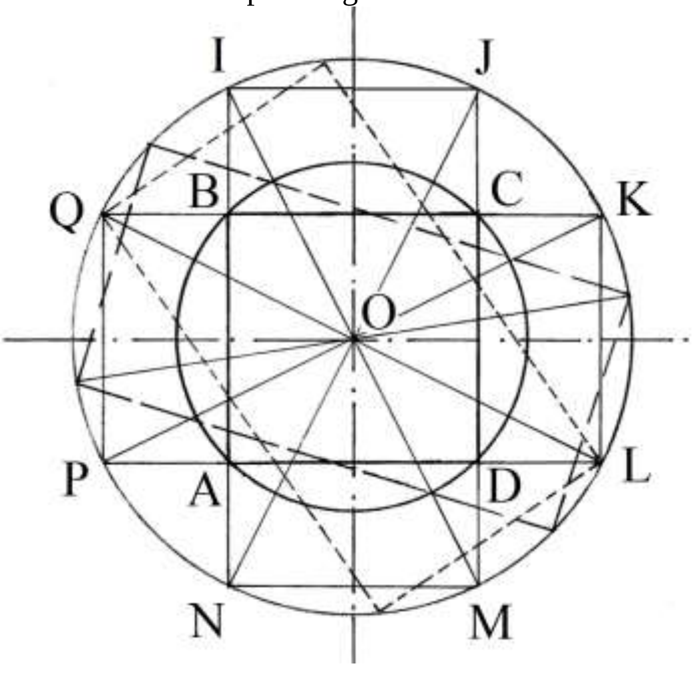


La rotazione del telaio disegnava *due* circonferenze concentriche, rispettivamente di raggio OA e OP e quindi, *convenzionalmente*:

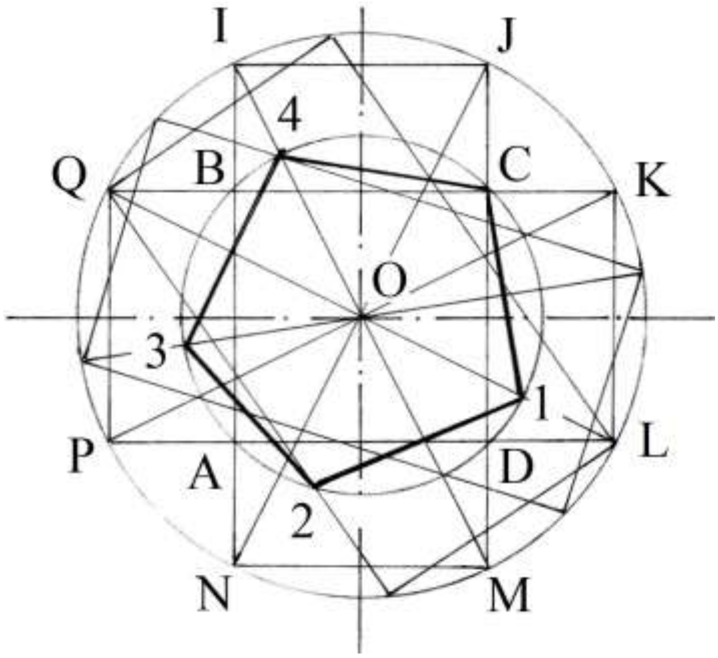
$OA = \sqrt{(0,5^2 + 0,5^2)} = \sqrt{(0, 25 + 0,25)} = \sqrt{(0,5)} = \sqrt{(1/2)} = 1/(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})/2$ e quindi

$OP = (\sqrt{5})/2$.

Le intersezioni fra le varie posizioni assunte dai vertici delle diagonali del telaio e quelle dei vertici dei lati lunghi determinano alcuni punti significativi sulla circonferenza interna:



Nella figura che segue sono presi in considerazione *cinque* punti significativi: C, 1, 2, 3 e 4, vertici del pentagono approssimato:


I
J
4
Q
B
C
K
O
3
1
P
A
D
L
2
N
M

LE INFORMAZIONI FORNITE DALLE LASTRE TOMBALI

Le informazioni sulla forma e sulle dimensioni degli strumenti e degli utensili usati dagli artigiani e dai costruttori medievali sono spesso fornite da raffigurazioni incise su lastre tombali o su pareti di pietra degli edifici costruiti.

Nella maggior parte dei casi gli strumenti di lavoro rappresentati non servivano solo a onorare il personaggio sepolto perché essi erano tracciati con la massima cura per riprodurre le esatte dimensioni e forme.

Molto più rare sono le rappresentazioni stilizzate e quindi non utilizzabili per la ricostruzione delle dimensioni e della forma degli utensili.

La precisione di alcune riproduzioni di utensili sulle pietre tombali fa pensare che esse siano state realizzate disponendo gli attrezzi sulle pietre per ricavare una rappresentazione la più realistica possibile.

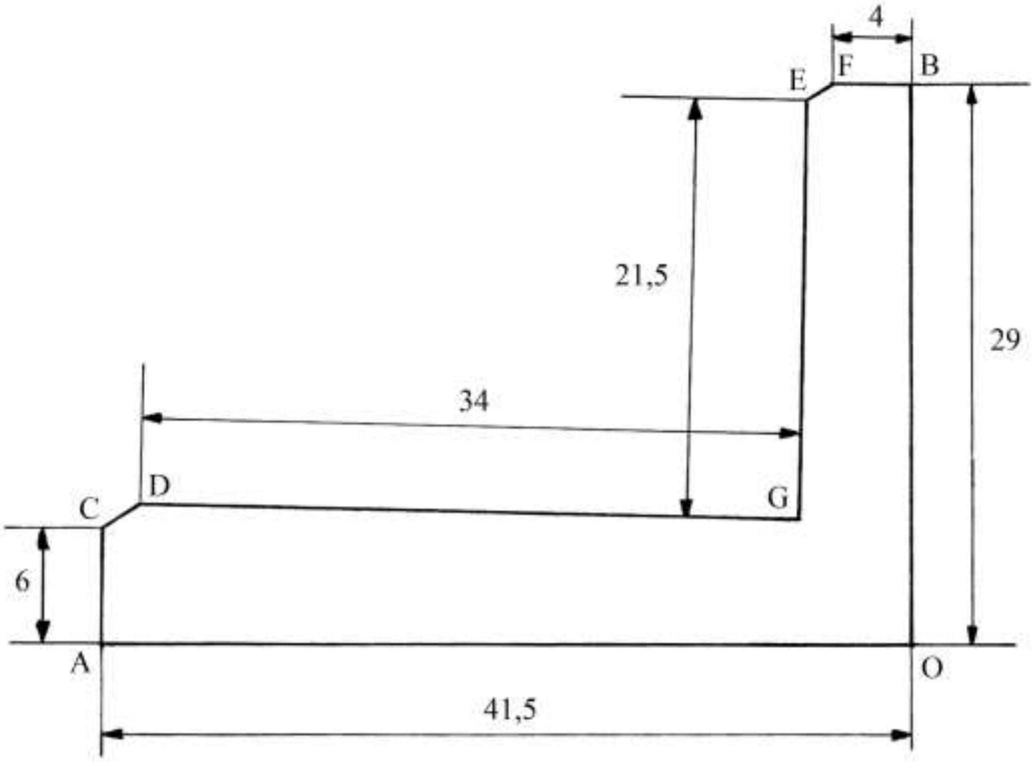
Gli strumenti medievali più rappresentati sono: la squadra, il compasso, il filo a piombo, il martello, la canna, la livella e le forbici.

Fino al XII secolo dominava la presenza della squadra per poi successivamente essere associata al compasso. Nei secoli che seguirono, questo ultimo strumento assunse maggiore importanza rispetto alla squadra.

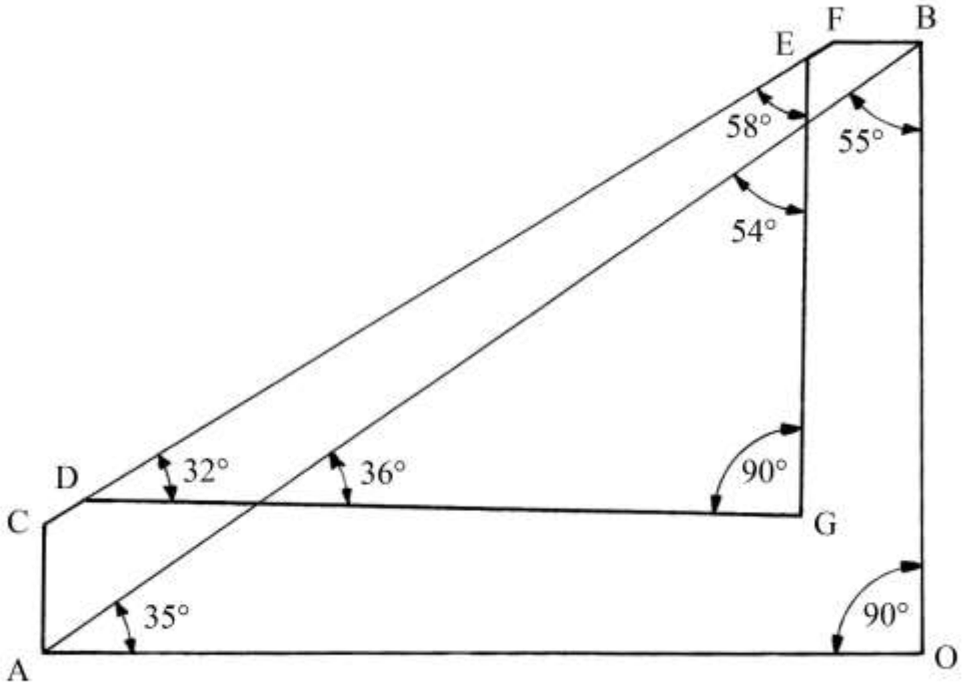
La lastra tombale di Bon Repos

Nei resti dell'abbazia Notre-Dame di Bon Repos in Francia, nel 1990 fu ritrovata una pietra tombale lunga 2,5 m e larga 0,8 m. Essa è stata attribuita al periodo 1330-1380.

Sulla lastra è incisa una squadra con bordi divergenti e con le dimensioni in centimetri riportate nella figura:



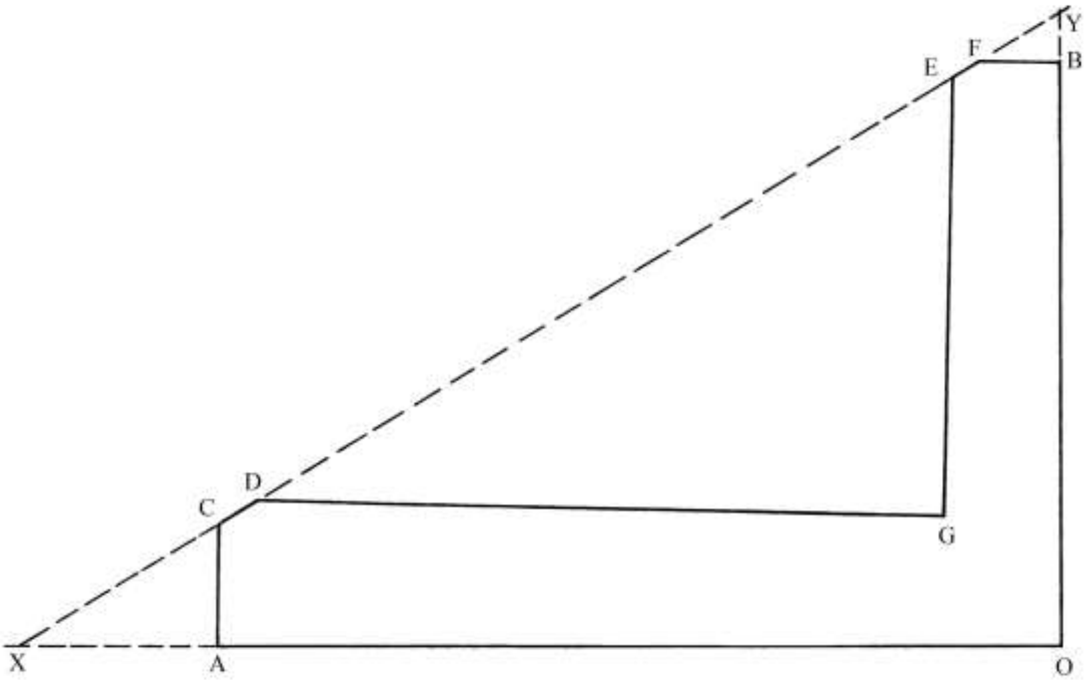
La squadra ha bordi divergenti ma presenta due angoli retti sia nel vertice B che in quello interno G:



Due angoli richiamano l’attenzione: quelli di 36° e di 54° sono tipici del pentagono e del decagono.

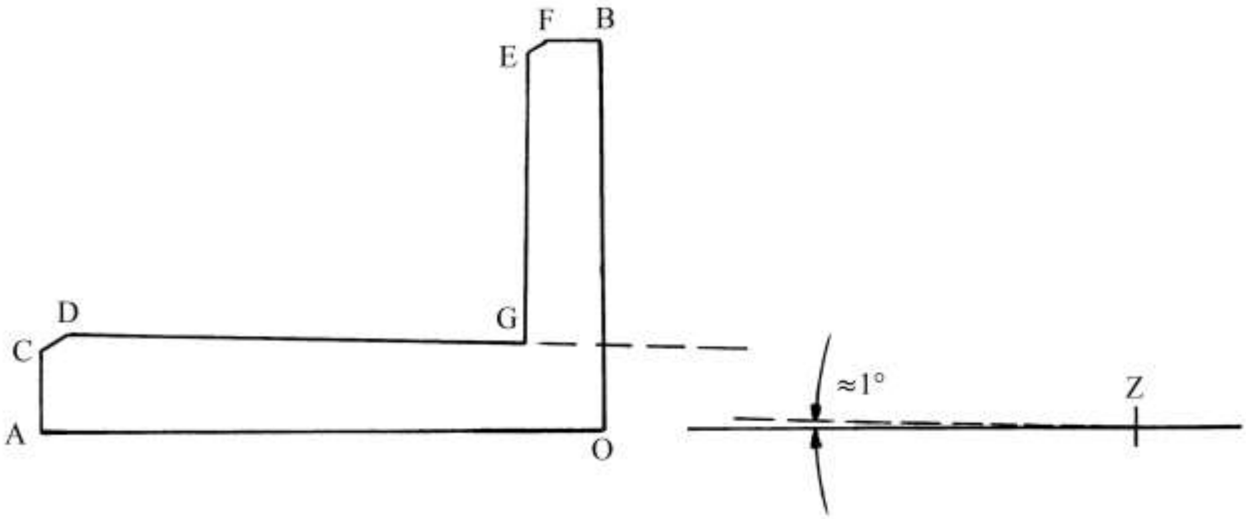
La squadra è ricavata da un ipotetico triangolo rettangolo XYO dal quale sono asportati tre triangoli rettangoli:

* XCA.
* FYB.
* DEG.



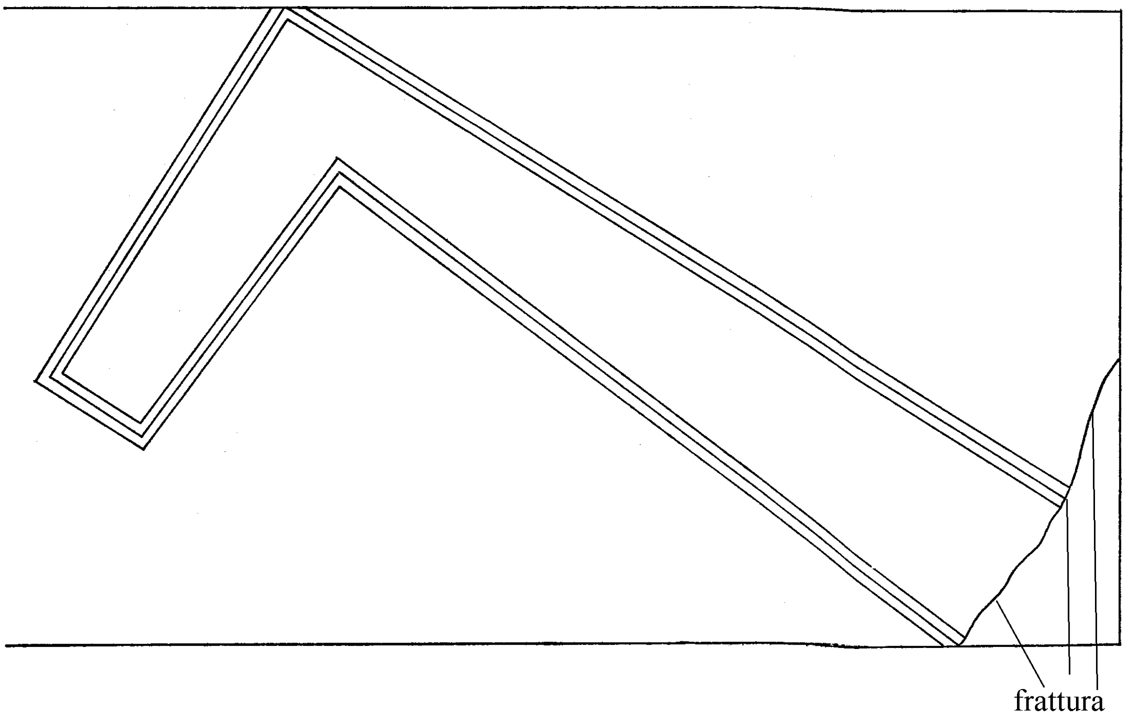
I cateti DG e EG del triangolo DEG non sono paralleli ai corrispondenti cateti XO e YO dell’ipotetico triangolo rettangolo originario.

La convergenza dei prolungamenti degli spigoli DG e AO è su di un punto, Z, posto sulla retta sulla quale giace AO: l'angolo che essi formano in Z è ≈1°.



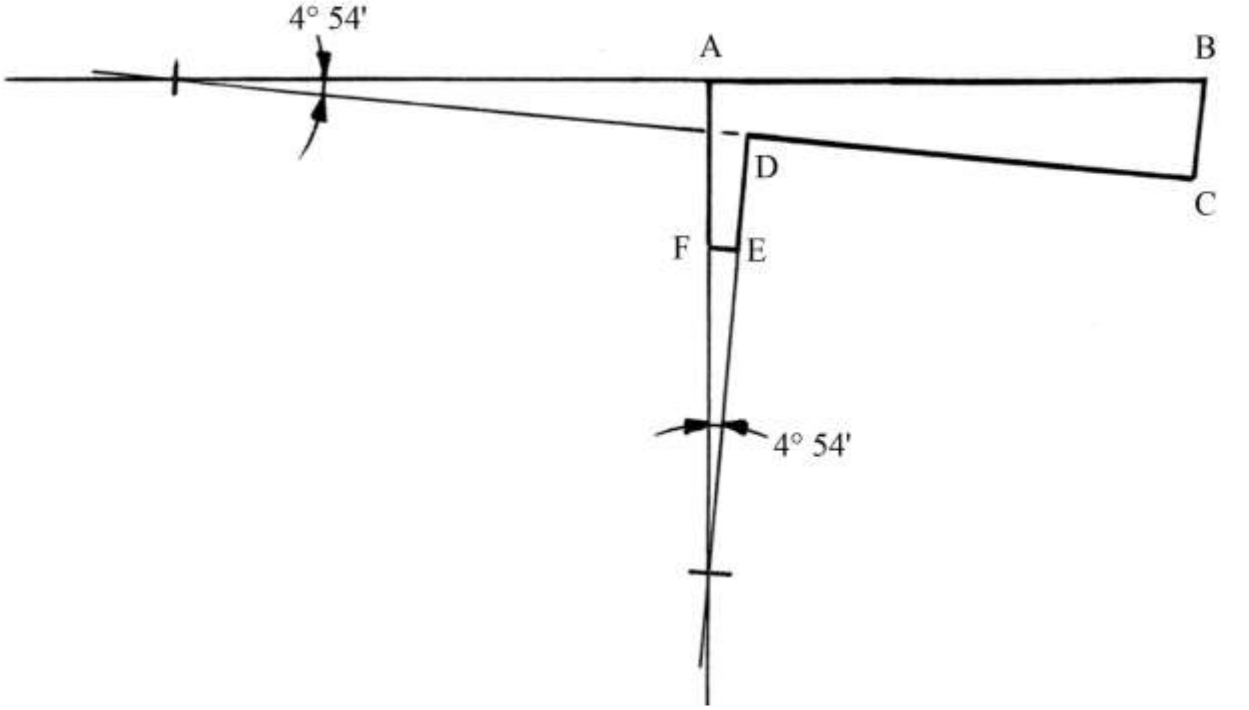
La squadra di Ligne-des-Bois

La figura che segue presenta la ricostruzione, operata da Marie-Thérèse Sarrade, di una squadra tracciata su di una lastra tombale del XII secolo da Ligne-des-Bois in Charente:

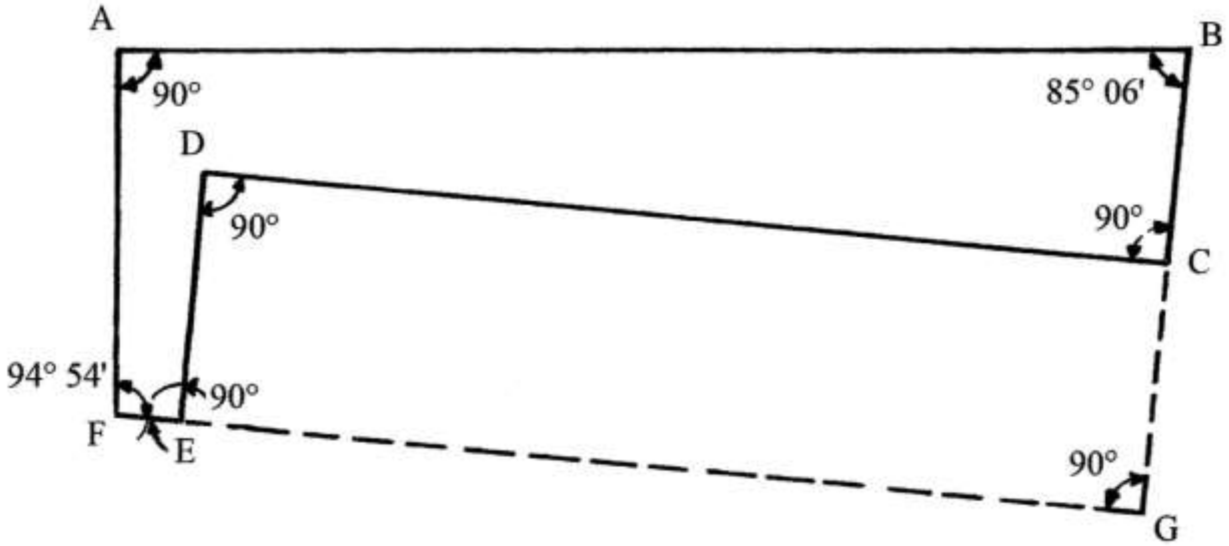


La lastra è fratturata.

Secondo la Sarrade, una squadra simile serviva a determinare la *radice quadrata di 2*. La squadra ha i bordi dei bracci convergenti che formano un angolo di 4° 54' (e cioè circa 5°):



La squadra ha gli angoli interni indicati nella figura che segue:



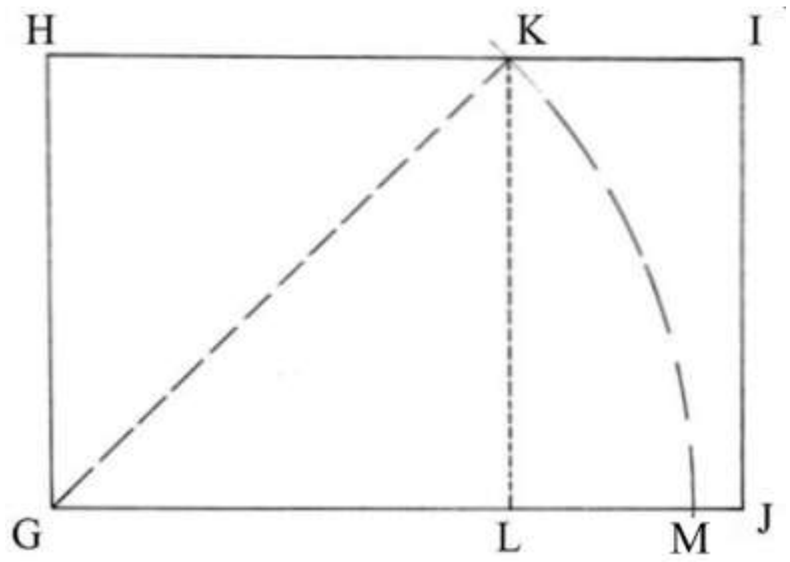
La squadra presenta angoli retti fra i bordi esterni (in A) e fra quelli interni (in D).

Il quadrilatero immaginario DCGE è un *rettangolo*: esso è generato dai prolungamenti dei lati FE e BC.

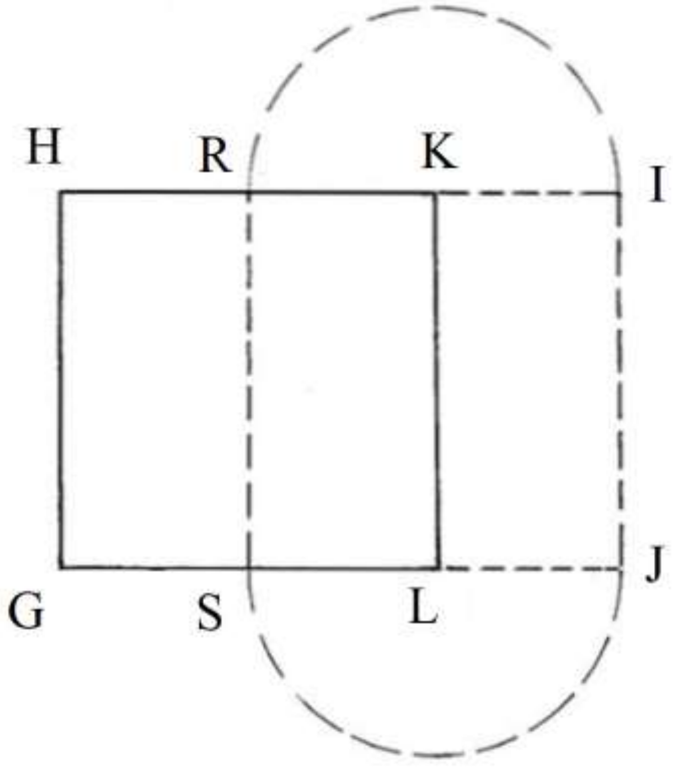
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

GHIJ è un rettangolo con le lunghezze dei lati in proporzione 3 : 2 e cioè:

GJ : GH = 3 : 2



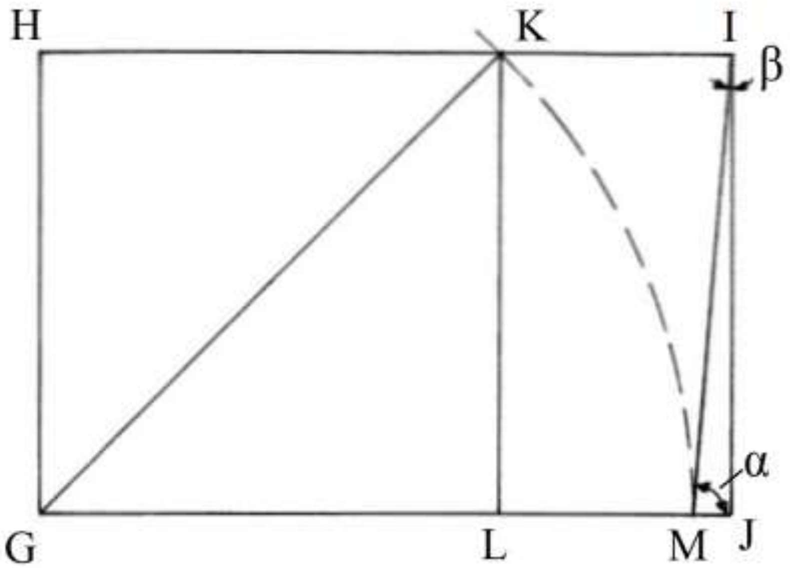
GHKL è un quadrato.
I punti I e J sono fissati con la semplice costruzione che è mostrata nella figura che segue:



Prolungare verso destra i lati HK e GL.
Fissare i punti medi dei lati orizzontali HK e GL: sono R e S.
Fare centro nei punti K e L e con raggio KR = LS tracciare due semicirconferenze che determinano i punti I e J.

Dato che GL = GH, il segmento KL divide la figura in un quadrato (GHKL) e in un rettangolo (LKIJ).

GK è una diagonale del quadrato GHKL. Fare centro nel punto G e con raggio GK tracciare un arco da K fino a fissare il punto M:



I segmenti GK e GM hanno la stessa lunghezza pari a:

$GK = GM == GH * \sqrt{2}$.

Il segmento MJ è lungo:

$MJ = GJ – GM = 3/2 * GH - \sqrt{2} * GH = GH * (3/2 - \sqrt{2}) \approx 0{,}08578643 * GH$.

MIJ è un triangolo rettangolo con due angoli *complementari*: α e β. La tangente di α è data da:

$tg\ \alpha = IJ/MJ = GH/[GH * (3/2 - \sqrt{2})] = 1/(3/2 - \sqrt{2}) \approx 1/0{,}08578643 \approx 11{,}65685529$.

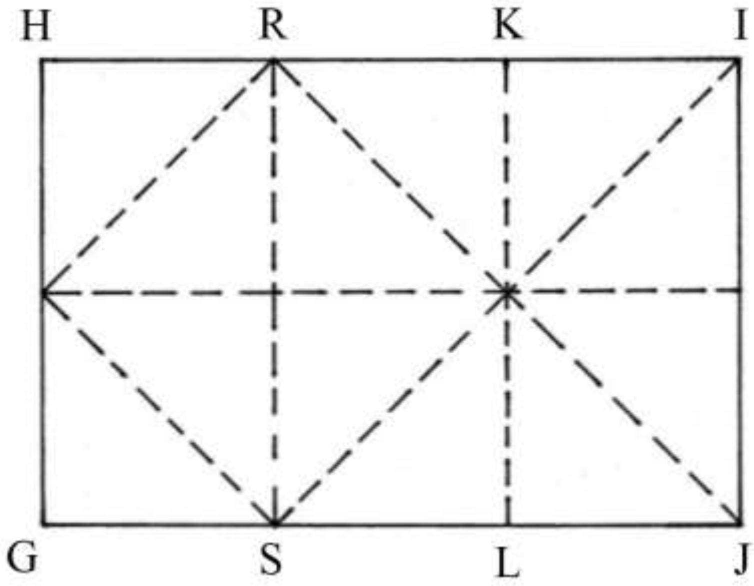
A questo valore della tangente corrisponde un angolo: $\alpha \approx 85° 06'$.

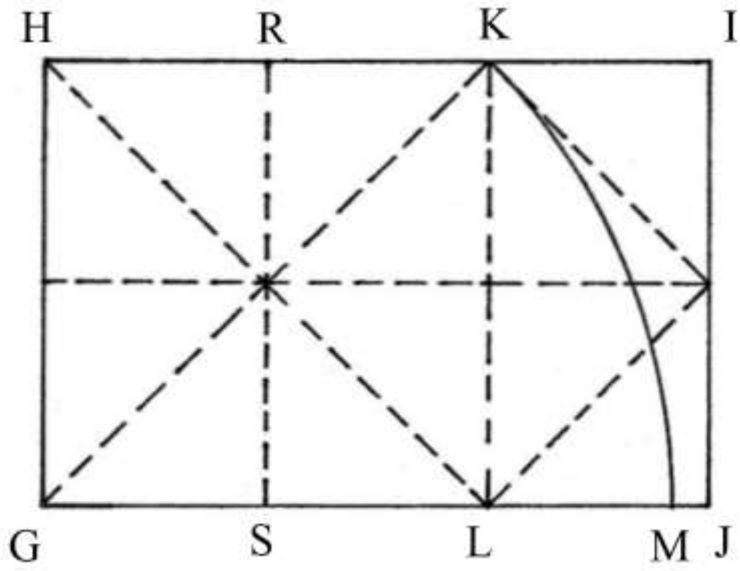
A sua volta, la Sarrade ha calcolato l'ampiezza dell'angolo $\beta \approx 4° 54'$ e quella dell'angolo complementare $\alpha \approx 90° - \beta \approx 90° - 4° 54' \approx 85° 06'$.

I due risultati coincidono.

Le ampiezze dei due angoli possono essere approssimate a $\alpha \approx 85°$ e $\beta \approx 5°$.

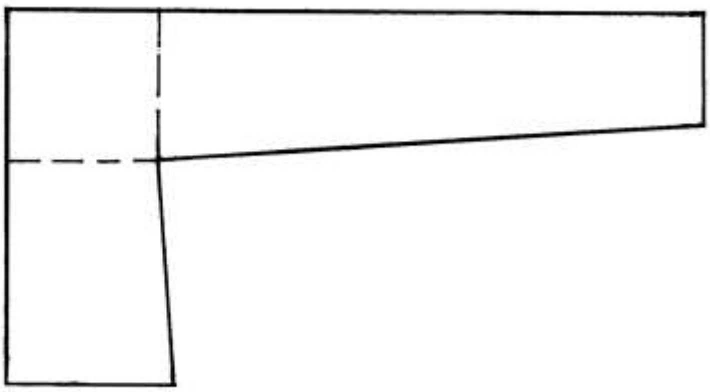
Nota: i due precedenti grafici possono essere costruiti tracciando alcune diagonali dei sei quadrati che formano il rettangolo GHIJ, come spiegano i due schemi che seguono:





%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

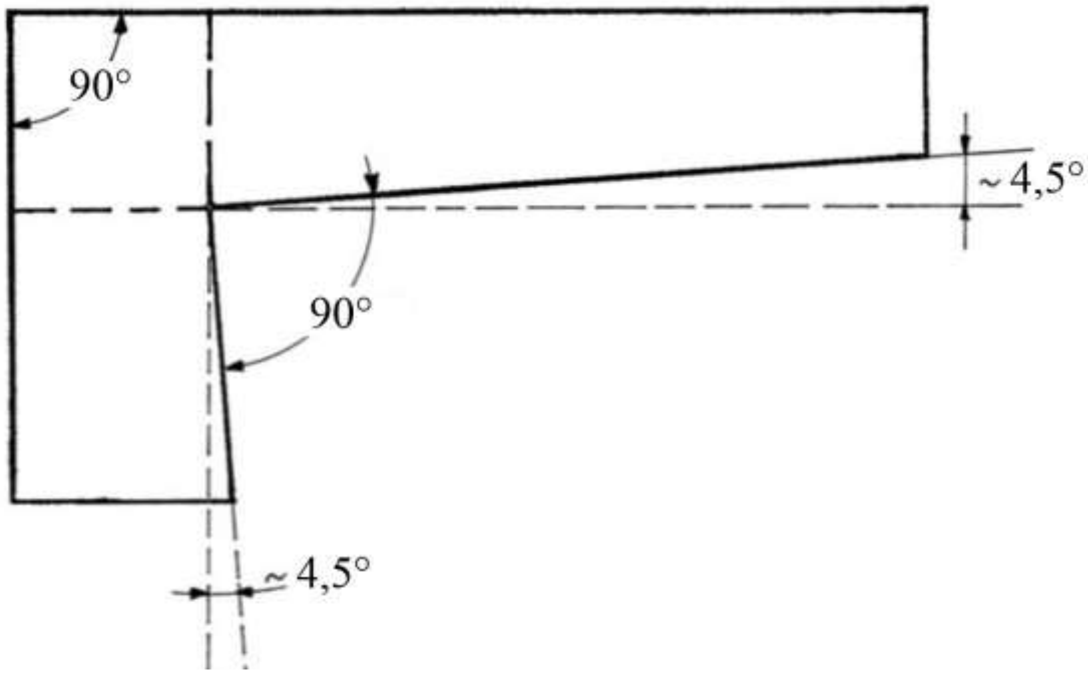
Un altro esempio di questo tipo di squadre è descritto nell’articolo di Bessac e Codou citato in bibliografia.



Si tratta del rilievo di una squadra incisa insieme ad altri strumenti su di un muro del chiostro dell'Abbazia di Saint-Honorat nell'isola di Sant'Onorato (Isole di Lerino, arcipelago di piccole isole di fronte alla costa di Cannes, in Costa Azzurra).

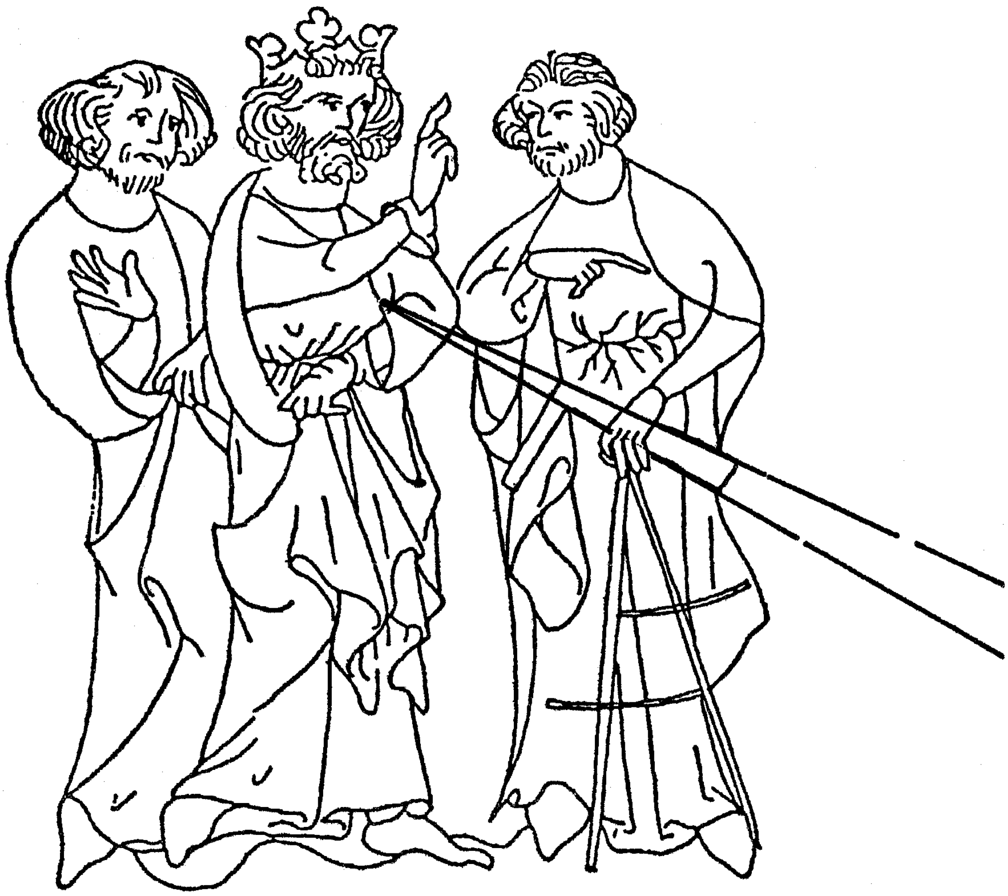
Secondo la ricostruzione fatta dai due autori, la squadra avrebbe avuto due braccia con i rispettivi bordi *divergenti*: all'interno e all'esterno, erano presenti due angoli retti.

Come mostra la figura che segue, i bordi divergenti formano angoli di circa 4,5°, compatibili con quelli determinati dalla Sarrade per la squadra di Ligne-des-Bois:



La squadra di Saint Albains

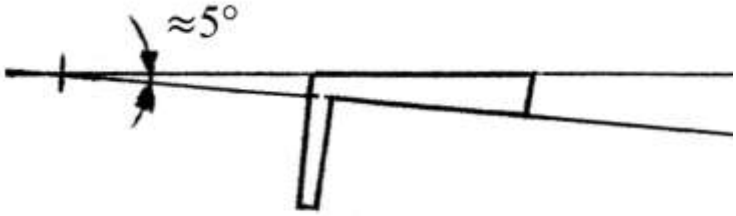
La squadra raffigurata nell'immagine che segue, contenuta in un manoscritto inglese risalente a circa il 1250 e dedicato alla vita del re anglosassone Offa di Mercia (vissuto nell'VIII secolo), fa parte di un evento relativo alla costruzione della Chiesa di Saint Albains: essa, ovviamente, non fu incisa su di una lastra tombale.



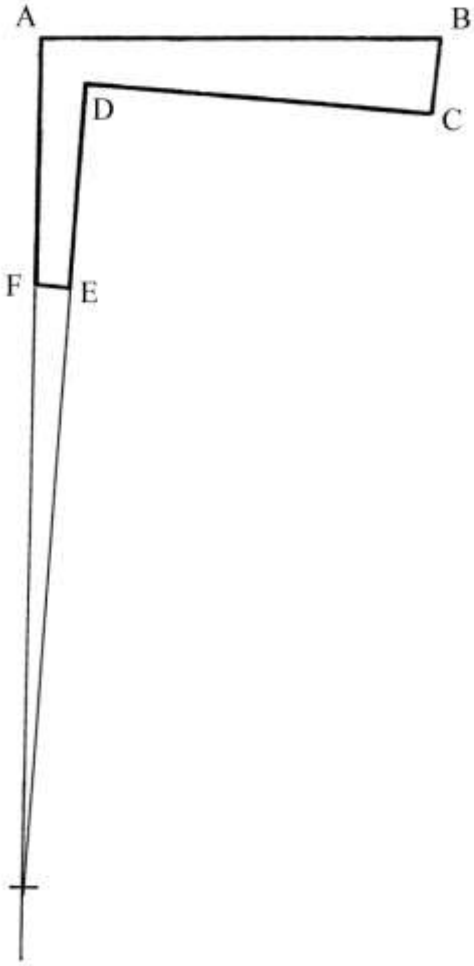
Il personaggio a destra è un capomastro raffigurato con due tipici strumenti di lavoro: una *squadra* e un grande *compasso* con due settori orientati in sensi opposti.

Anche questa squadra sembra essere stata impiegata per la costruzione di √2, come cercheremo di dimostrare.

I bordi del braccio più lungo convergono verso sinistra formando un angolo di circa 5°:



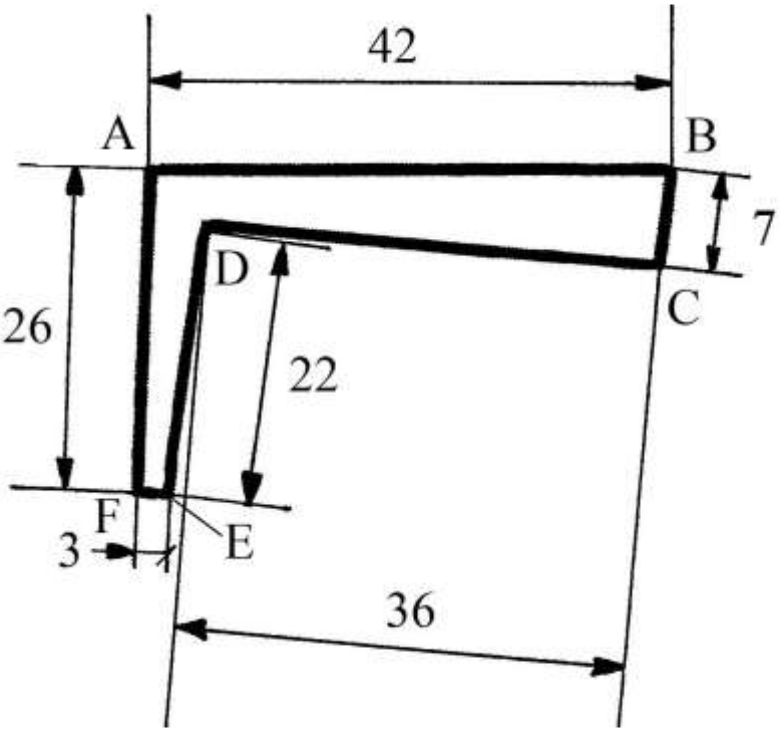
I due bordi del cateto verticale convergono anch'essi di un angolo abbastanza piccolo:



L’immagine si presta a alcune considerazioni: benché essa sia stata creata alcuni secoli dopo gli eventi ai quali si riferisce, la figura è sicuramente realistica e descrive il personaggio e i due strumenti che impugna, come visti di fronte.

Stimando l’altezza del capomastro in 170 cm, possiamo tentare di fornire un’ipotesi sulle dimensioni approssimate dei due strumenti.

La squadra ha braccia diseguali, come accade a questo strumento medievale:

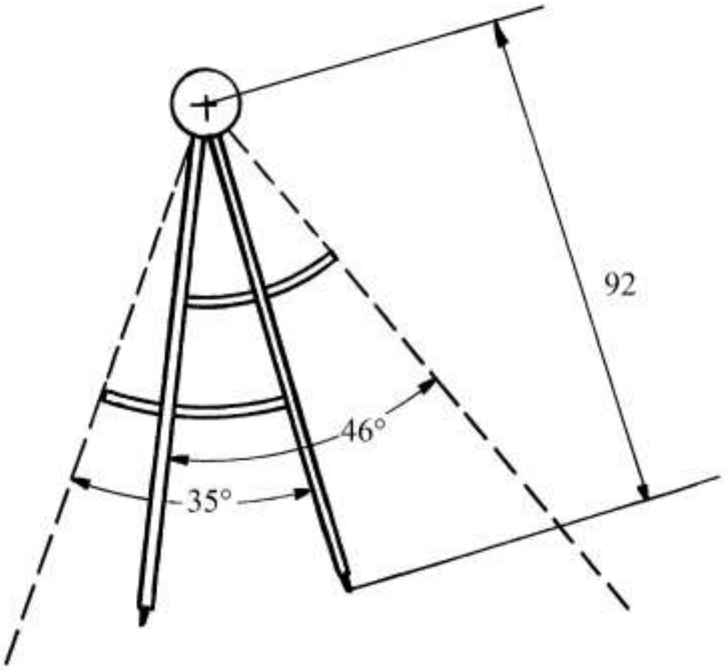


Le sue notevoli dimensioni, 42*26 cm, portano a ritenere che essa fosse fatta di legno.

Una squadra di legno era molto più leggera e assai più maneggevole di una squadra metallica di uguali dimensioni: i materiali metallici erano più costosi e più difficili da lavorare rispetto ai legnami.

Le squadre metalliche erano di più piccole dimensioni e venivano impiegate dai progettisti e dagli orafi.

Una stima delle dimensioni del compasso ne mostra la grandezza:



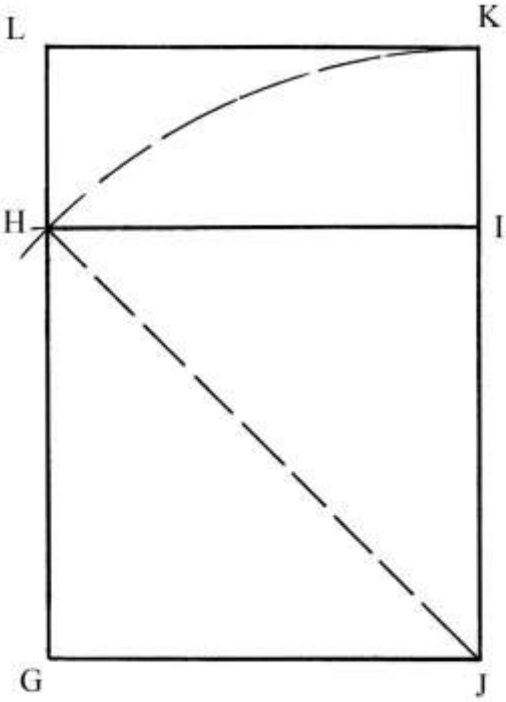
La lunghezza delle aste è stimata in 92 cm. La stabilità dello strumento durante il suo uso era assicurata dalla presenza di due *settori*, simili a quelli impiegati nei compassi metallici utilizzati nelle officine meccaniche per disegnare su superfici dure:

I due settori del compasso di Offa permettevano aperture di 35° e di 46°.

Possiamo calcolare le dimensioni percentuali dei due strumenti rispetto all'altezza del capomastro, stimata in 170 cm:

* Lunghezza cateto maggiore squadra/altezza = 42/170 ≈ 24,7 %.
* Lunghezza cateto minore squadra/altezza = 26/170 ≈ 15,3 %.
* Lunghezza asta compasso/altezza = 92/170 ≈ 54 %.

Costruire il quadrato GHIJ e prolungare verso l'alto i lati verticali: GH e JI.

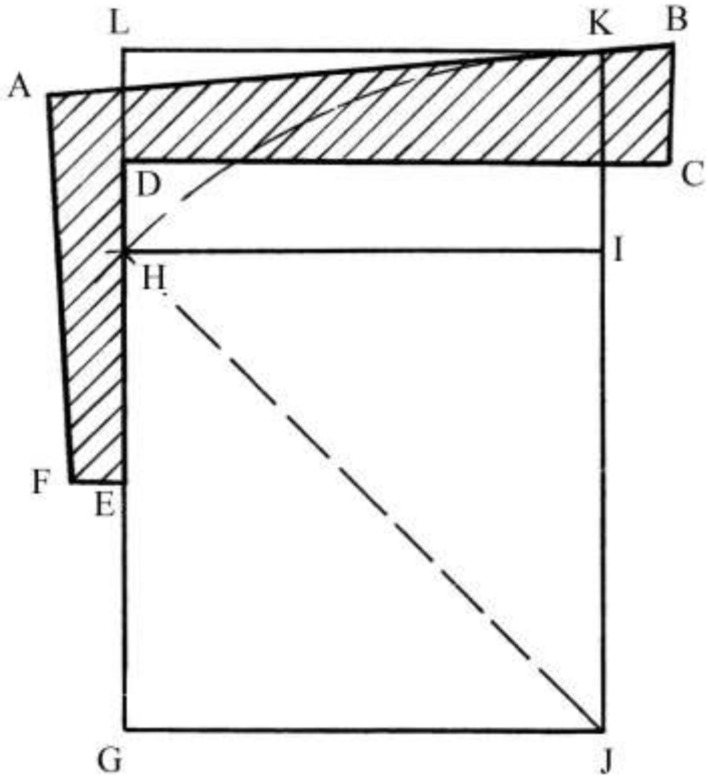


Tracciare la diagonale JH; fare centro in J con raggio JH per disegnare l’arco HK. Completare il rettangolo GLKJ.

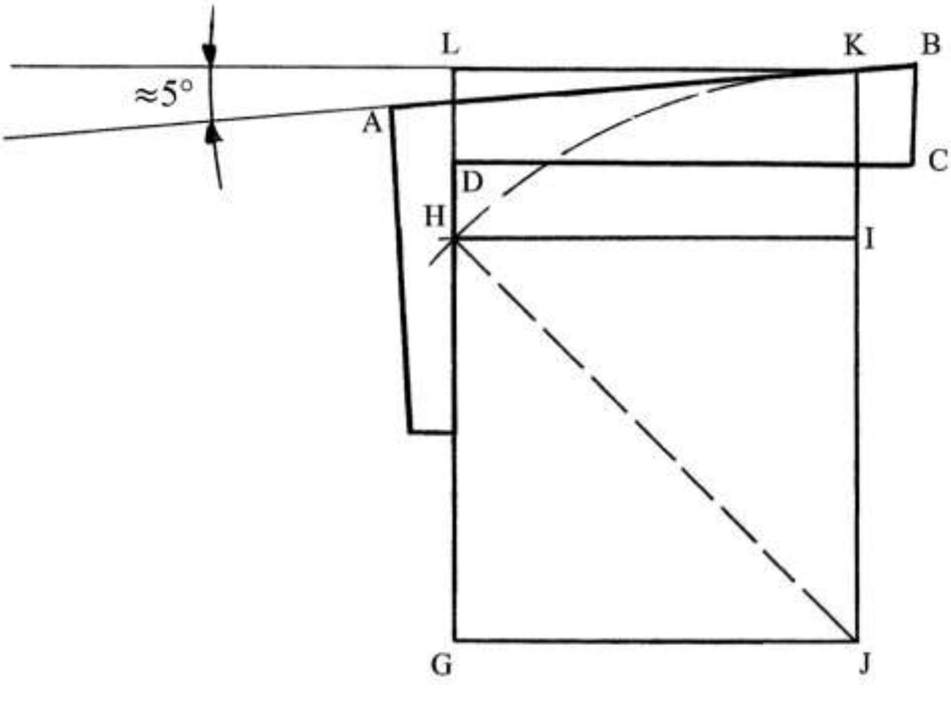
JK è lungo quanto la diagonale e cioè:

$JK = JH = GJ * \sqrt{2}$.

Sovrapporre la squadra ABCDEF al rettangolo GLKJ facendo in modo che lo spigolo DE della squadra combaci con il lato LG e lo spigolo AB passi per il vertice B:



Prolungare verso siniustra gli gli spigoli LB e AB: essi formano un angolo di circa 5°:



Ciò conferma che la squadra disegnata nella miniatura di Offa poteva essere usata per costruire la *radice di 2*.

<u>La pietra tombale di Saint-Ouein</u>

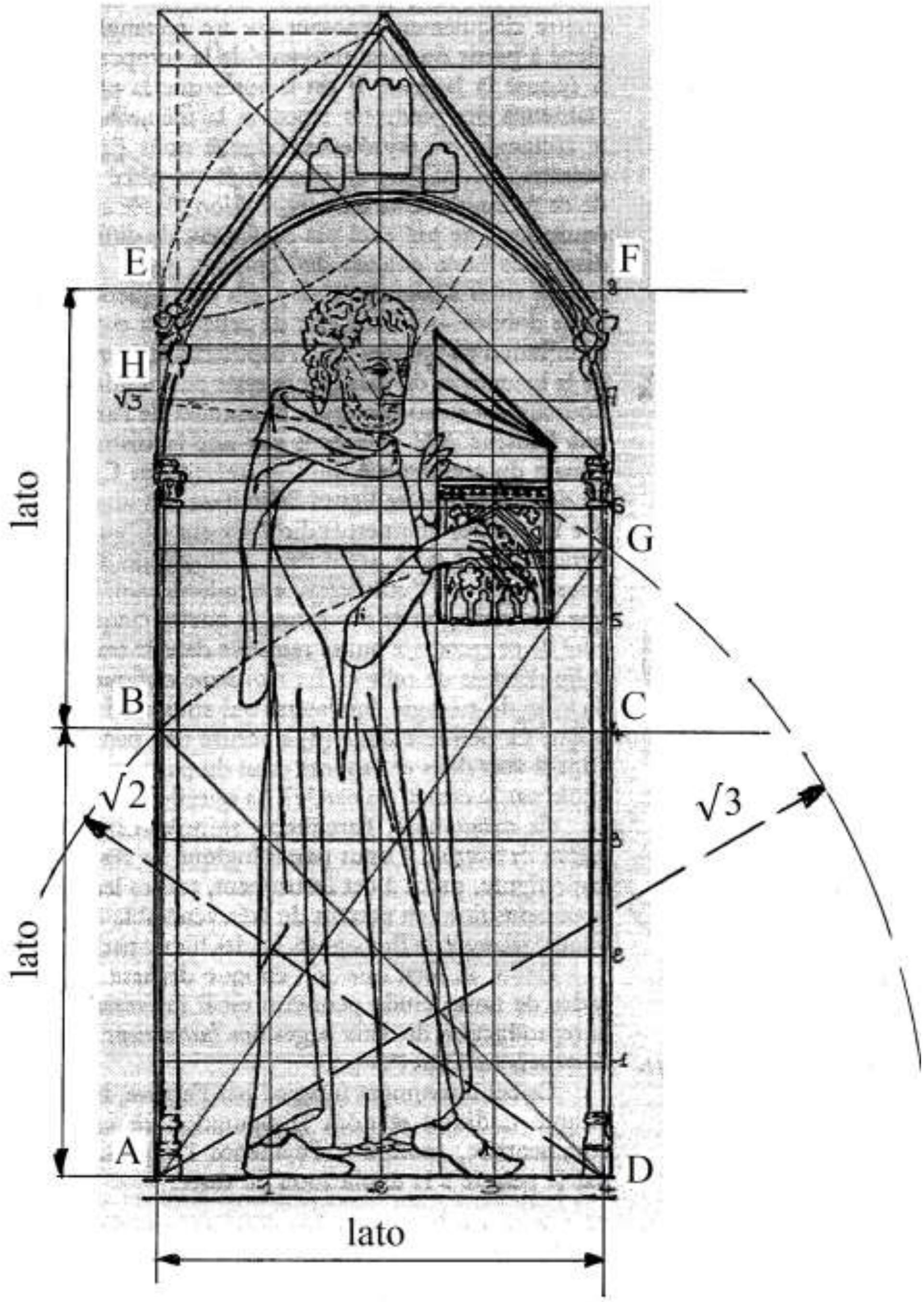
In due differenti occasioni Marie-Thérèse Sarrade e Josep Lluis i Ginovart hanno studiato una pietra tombale che rappresenta uno sconosciuto maestro costruttore (forse il primo architetto dell’edificio): essa si trova nella medievale chiesa abbaziale di Saint-Ouein a Rouen, in Francia. Secondo Lluis i Ginovart essa è databile al 1300 circa.

La figura è riprodotta dal testo della Sarrade.

L’architetto è rappresentato in piedi e con la mano sinistra impugna un compasso con il quale sembra misurare un pannello.

Per ricostruire la struttura dell’immagine incisa sulla pietra tombale, la Sarrade ha tracciato un reticolato.

Il personaggio rappresentato è interamente racchiuso in un *doppio quadrato* con il lato più corto disposto orizzontalmente:



Se la lunghezza *convenzionale* del lato del quadrato ABCD è 1, il segmento AE è il lato del doppio quadrato ed è lungo 2.

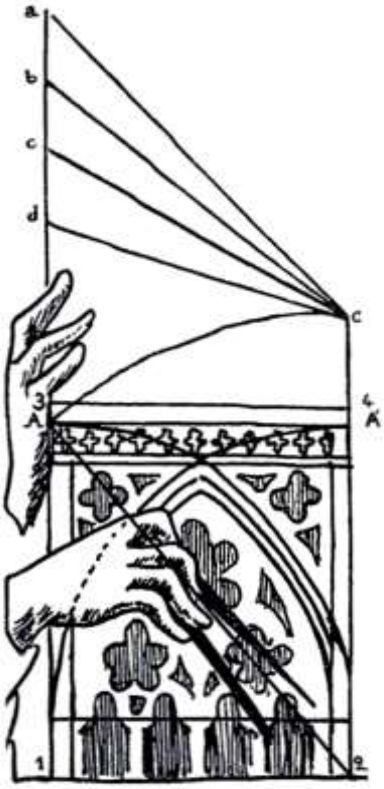
DB è una diagonale del quadrato ABCD ed è lunga DB = $\sqrt{2}$.

Il punto G è stabilito dall'arco di circonferenza di raggio DB tracciato facendo centro nel punto D e quindi DG è lungo quanto DB e cioè $\sqrt{2}$.

Il segmento AG è la diagonale di un rettangolo che ha la base AD lunga 1 e il lato DG che è lungo $\sqrt{2}$ e vale:

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 = AD^2 + BD^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$$, da cui consegue: $AG = \sqrt{3}$.

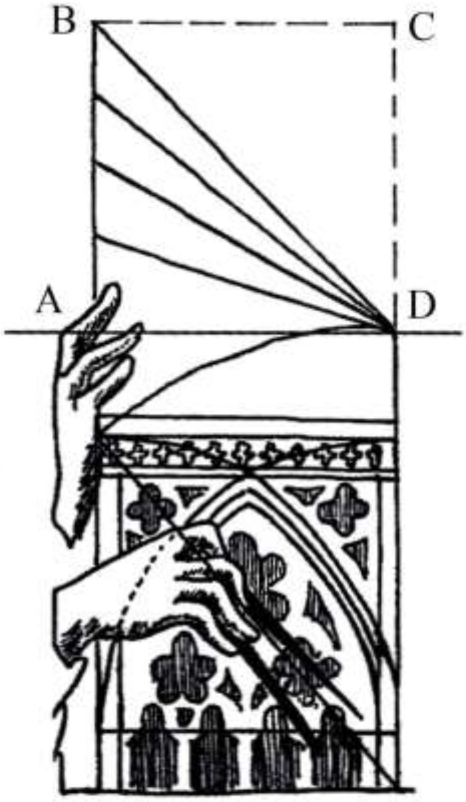
La figura che costituisce la cornice del pannello è formata da un rettangolo 1-2-3-4 che ha lati in proporzione 4 : 5 :



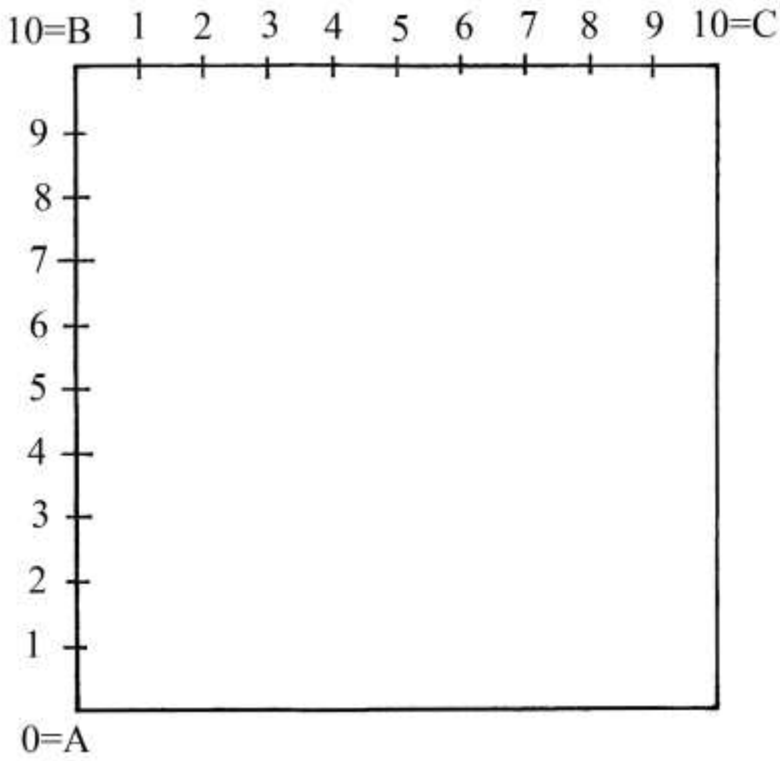
Infatti

$$(1\text{-}2) : (1\text{-}3) = 4 : 5 .$$

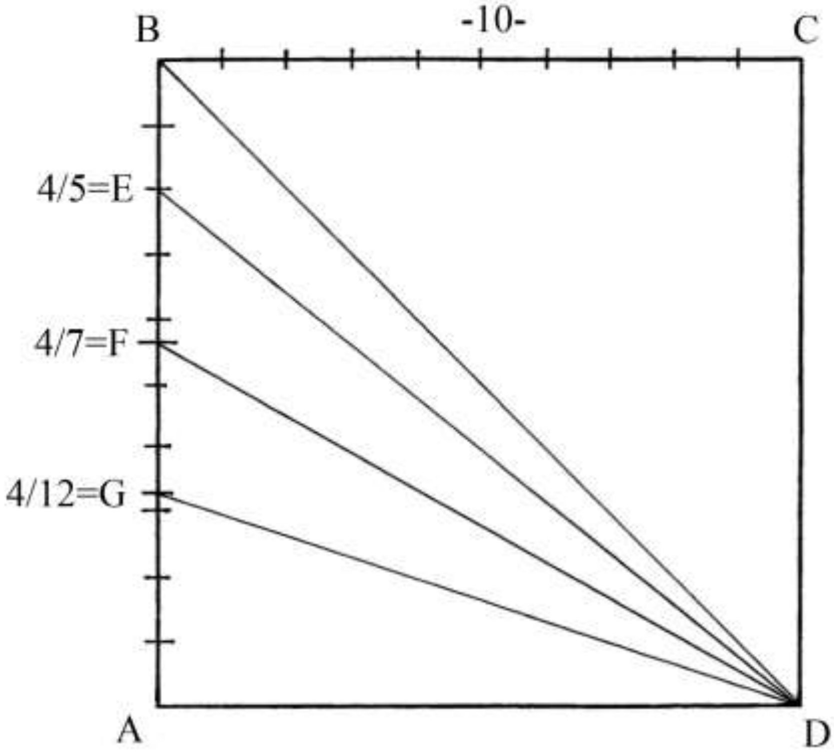
Il pannello è sovrastato da un grafico a forma di più triangoli rettangoli tutti inscritti in un ipotetico quadrato ABCD:



Stando alle ricostruzioni fattene dalla Sarrade e da Lluis i Ginovart, il grafico è stato interpretato come un quadrato con i lati divisi in 10 parti uguali:



Oltre al punto B, sul lato AB sono fissati alcuni punti, E, F e G, e tutti e quattro sono collegati al vertice D per formare quattro triangoli rettangoli inscritti in ABCD e con il cateto AD in comune.



La struttura così ipotizzata era probabilmente costruita in legno e serviva come una squadra multipla?

Il quadrato ABCD permette di costruire facilmente alcuni poligoni.

Il vertice D è il riferimento in cui convergono tutte le ipotenuse dei diversi triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto AD e l'angolo retto in A.

Il segmento BD è una diagonale del quadrato ABCD.

Il segmento AE è lungo 4/5 di AB: la posizione di E permette di costruire un rettangolo con lati lunghi in proporzione 4 : 5 (quadrilatero già incontrato):

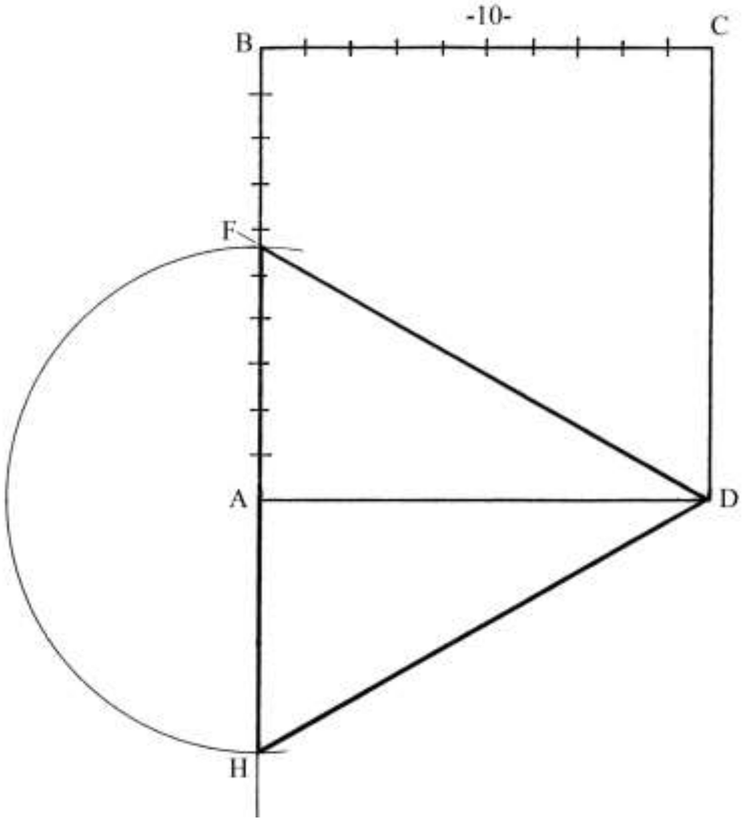
AE : 4 = AD : 5 .

I lati del quadrato hanno lunghezza convenzionale uguale a 10 unità.

Il punto F serviva a tracciare un triangolo equilatero quasi esatto. Questo punto si trova a distanza di 4/7 della lunghezza di AB e quindi

AF = (4/7) * AB = (4/7) * 10 = 40/7 ≈ 5,714 unità.

Con l'ausilio del grafico che segue verifichiamo la costruibilità del triangolo equilatero:



Prolungare verso il basso il lato BA.

Fare centro nel punto A e con raggio AF tracciare una semicirconferenza da F fino a fissare il punto H.

Disegnare il segmento HD. FDH è un triangolo equilatero *approssimato* che ha altezza AD lunga 10 unità.

In un triangolo equilatero l'altezza *h* è data da:

$h = \sqrt{[lato^2 - (lato/2)^2]} = (\sqrt{3})/2 * lato$.

Da questa formula è possibile ricavare la lunghezza del lato conoscendo soltanto l'altezza *h*:

$lato = 2/(\sqrt{3}) * h = [(2 * \sqrt{3})/3] * h$.

Dato che l'altezza AD è lunga 10 unità, ne consegue che la lunghezza del lato FH è:

$FH = (2 * \sqrt{3})/3 * 10 \approx 11{,}54$ unità, valore di poco più grande di quello della lunghezza di FH determinata con la costruzione geometrica:

$FH = 2 * AF = 2 * (40/7) \approx 11{,}429$ unità.

Il triangolo FDH ha due lati (FD e HD) leggermente più lunghi di quello FH. Come appena visto vale la relazione:

$AF = 4/7 * AB = 4/7 * 10 = 40/7$.

FD e HD sono lunghi:

$FD = HD = \sqrt{(AD^2 + AF^2)} = \sqrt{[10^2 + (40/7)^2]} = \sqrt{[(4900 + 1600)/49]} =$
$= 10/7 * \sqrt{65} \approx 11{,}5175$ unità.

La Sarrade ha determinato il rapporto fra le lunghezze del lato e dell'altezza come segue:

$FH : AD = (2 * 4/7) : 1 = 8/7 : 1 = 8 : 7$.

Il rapporto inverso fra l'altezza e il lato vale:

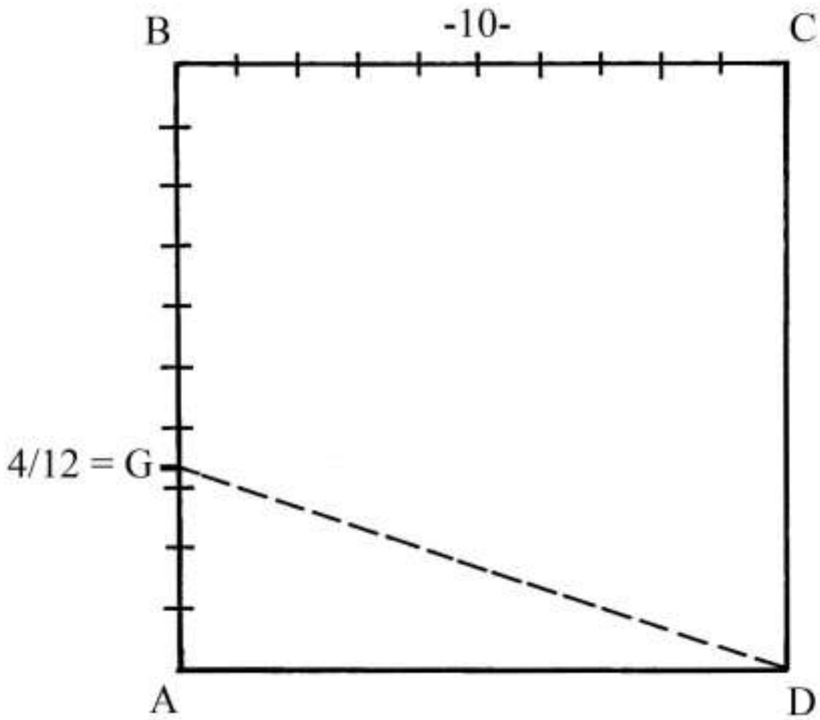
$AD : FH = 7 : 8$ che è 0,875, un'accettabile approssimazione del valore corretto uguale a $(\sqrt{3})/2 \approx 0{,}866$.

È noto che nel Medioevo il rapporto 0,866, caratteristico del triangolo equilatero e dell'esagono regolare, veniva comunemente approssimato alla frazione $6/7 \approx 0{,}57142$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

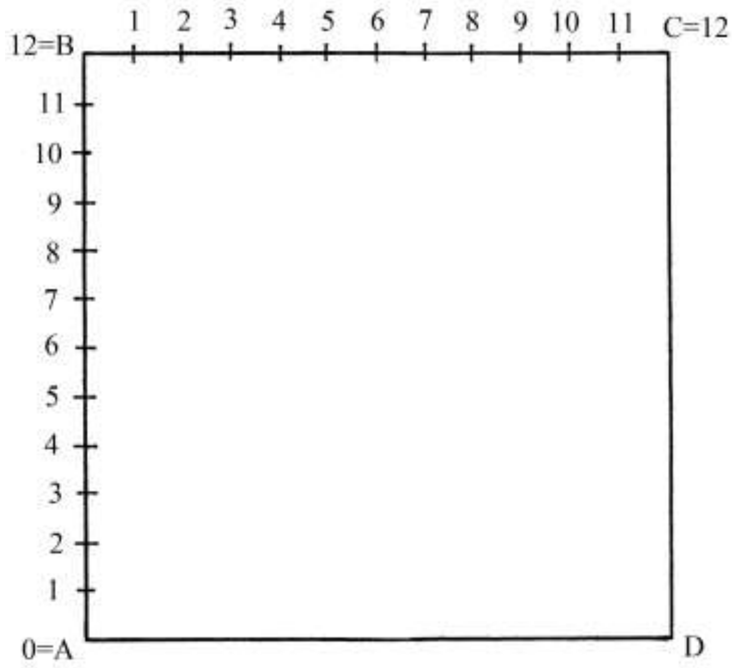
Il segmento AG del penultimo grafico è lungo 4/12 e cioè 1/3 del lato AB: il triangolo rettangolo AGD ha i cateti in proporzione 1 : 3 :

$AG : AD = 4 : 12 = 1 : 3 = (10/3) : 10$.

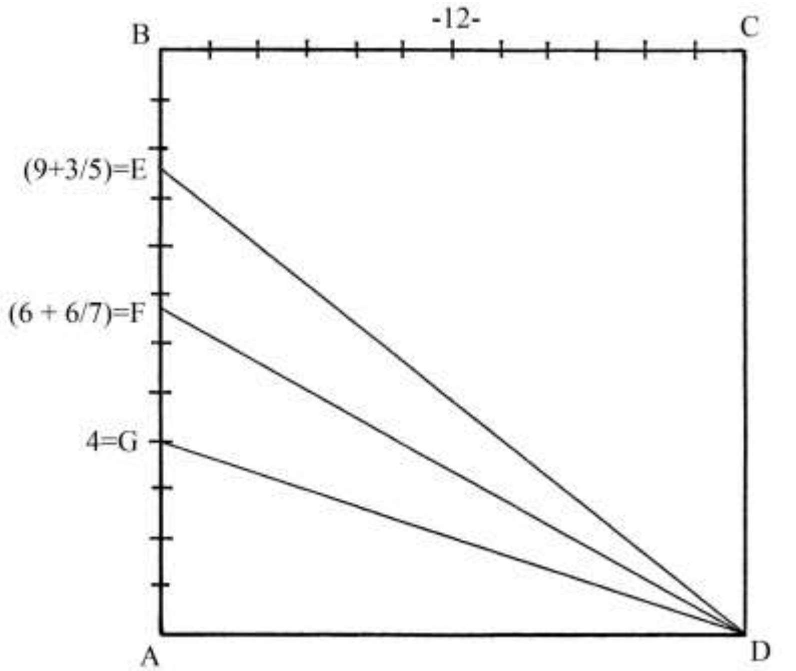


La soluzione ipotizzata da Lluis i Ginovart

Il ricercatore catalano ha modificato la struttura del quadrato ABCD dividendo i lati in 12 parti uguali anziché in 10 parti uguali:



Pur mantenendo le loro proporzioni rispetto alla lunghezza di AB, le posizioni dei punti E, F, G assumono nuove coordinate:



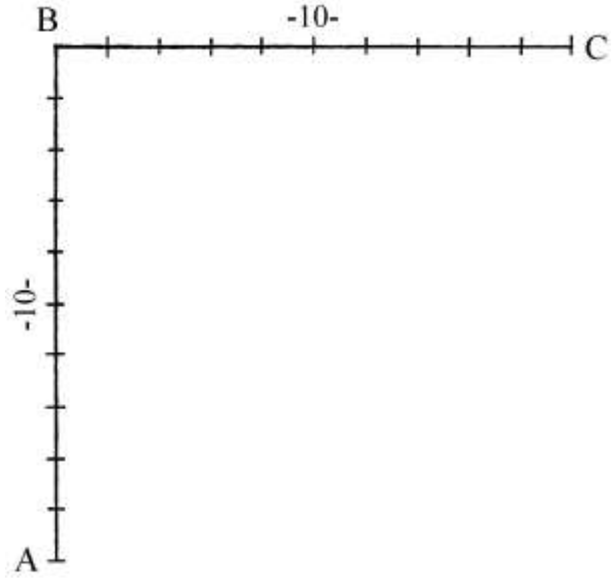
Il punto E è a distanza di 4/5 da A e in questo nuovo quadrato sta a distanza

EA = (4/5) * 12 = 9 + 3/5.

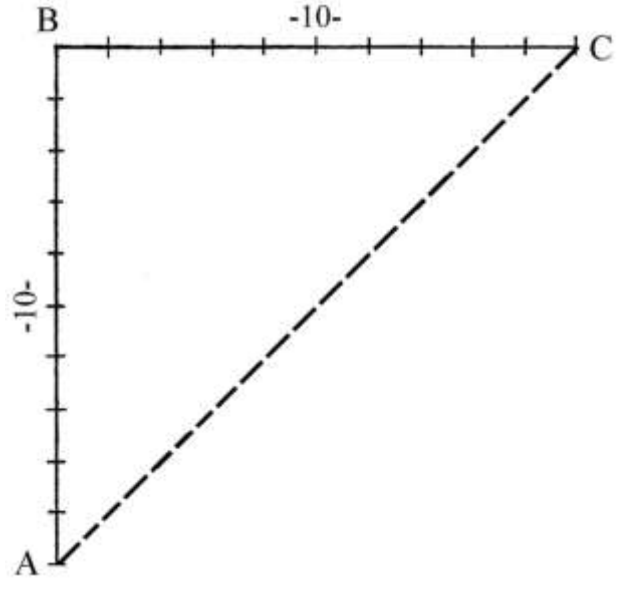
Il punto F è a 4/7 di AB e cioè FA = (4/7) * 12 = 6 + 6/7.

Infine, il punto G è a distanza GA = (4/12) * 12 = 4 dal vertice A.

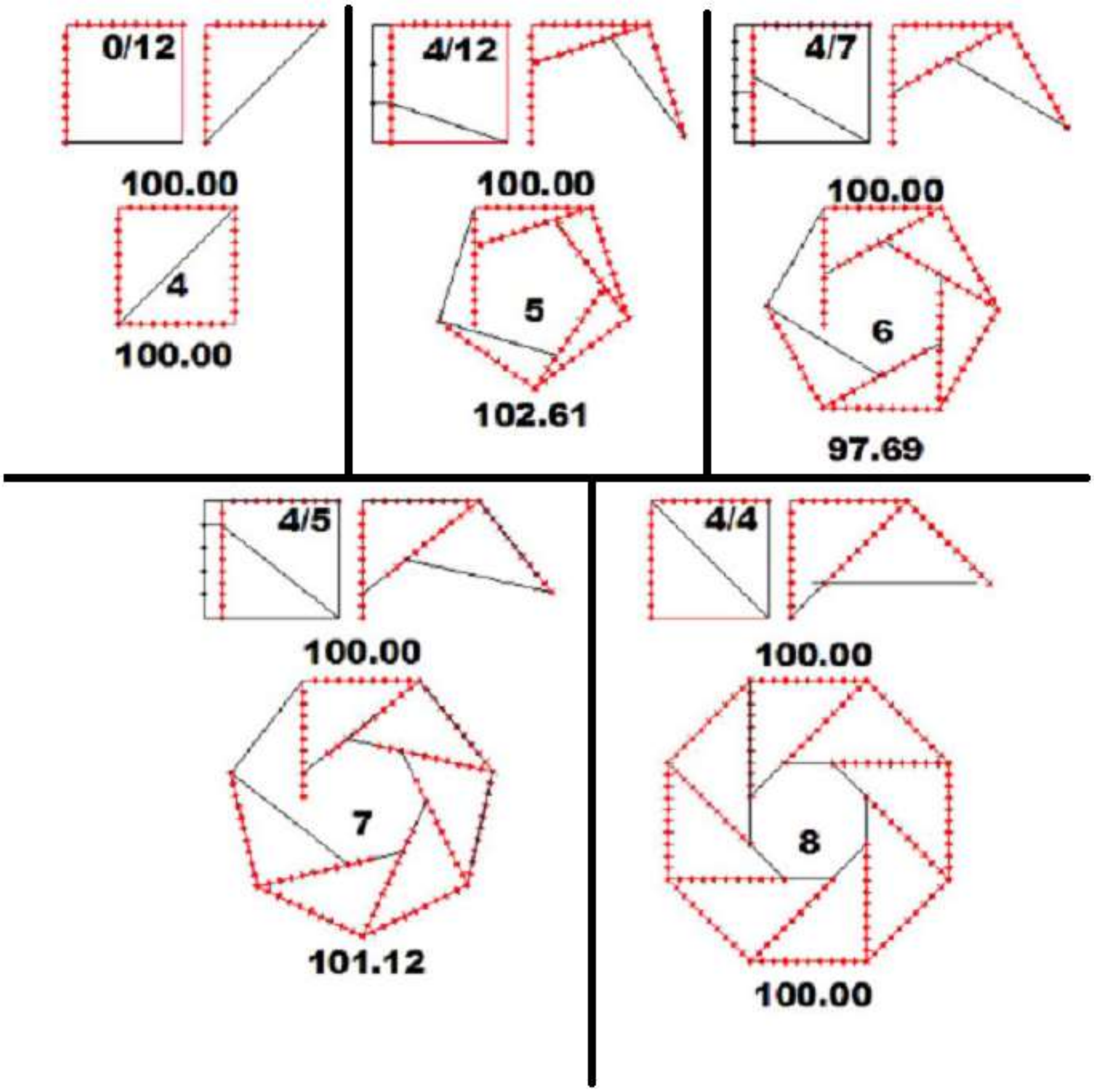
Sempre secondo Lluis i Ginovart, la squadra a braccia uguali divisa in 10 oppure in 12 parti uguali poteva essere impiegata per disegnare alcuni poligoni regolari esatti o con approssimazioni accettabili.



Collocando la squadra isoscele ABC (con l'ipotenusa AC *immaginaria*) su posizioni successive, a partire dai punti definiti sul braccio AB (10/10, 4/5, 4/7 e 4/12), sono disegnati nell'ordine il quadrato, il pentagono, l'esagono, l'ettagono e l'ottagono regolari (o quasi).

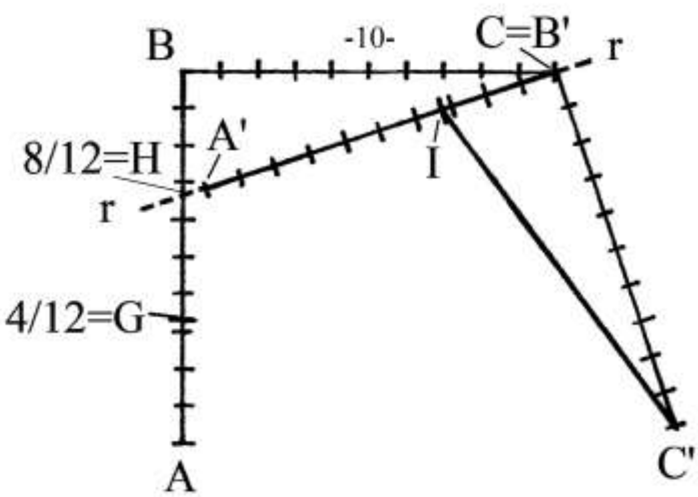


Nel grafico che segue, riprodotto dall'articolo di Lluis i Ginovart, sono riportate le lunghezze *convenzionali* dei lati dei poligoni lunghi 100 unità.



Alcuni lati dei poligoni hanno lunghezze leggermente diverse da quella base di 100 unità.

Per approfondire l'ipotesi dello studioso catalano, facciamo l'esempio della costruzione del pentagono usando la squadra ABC con i cateti lunghi convenzionalmente 10 unità:



La squadra ABC è in posizione: sul braccio AB è fissato il punto H a distanza di 8/12 (= 2/3) da A:

AH = (8/12) * AB .

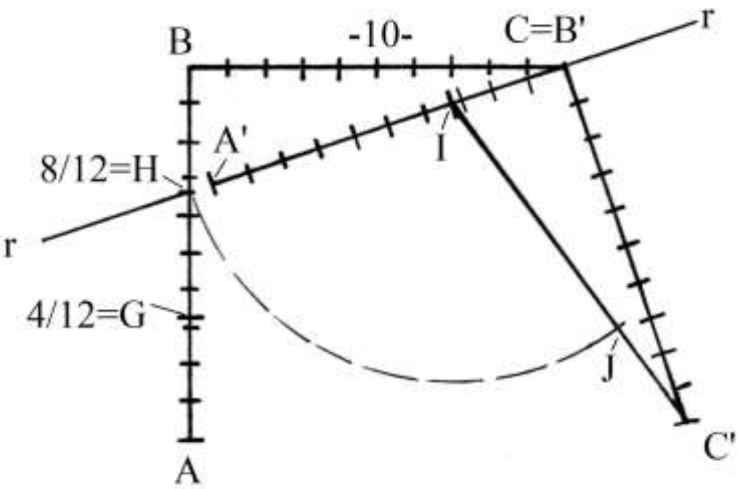
Il braccio AB viene ruotato e spostato fino a portare B in C: C=B’.

Il lato AB viene allineato su una retta, r, passante per i punti H e C e diviene A’B’.

La squadra ABC assume la nuova posizione che è indicata con A’B’C’.

Sul braccio A’B’ fissare il punto I a distanza uguale a 8/12 da A’.

I punti H, I e C’ sono i primi tre vertici del pentagono e HI e IC’ sono due lati:



Su A’B’ riportare da A’ la lunghezza di AH e stabilire il punto I: HA = A’I.

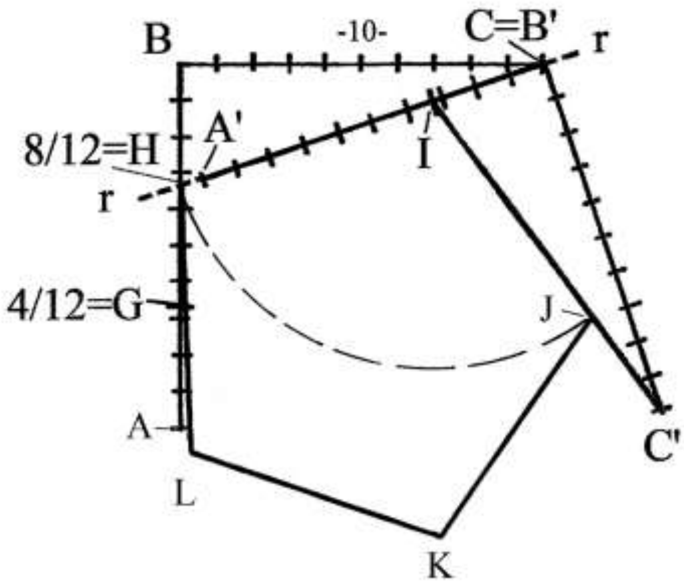
Il segmento HI è il primo lato del pentagono.

Collegare I e C’: A’IC’ è un angolo interno del pentagono.

Muovendo la squadra ABC in senso orario, oppure facendo centro in I e ribaltando su IC’ la lunghezza di IH, viene fissato il punto J che è il terzo vertice del pentagono.

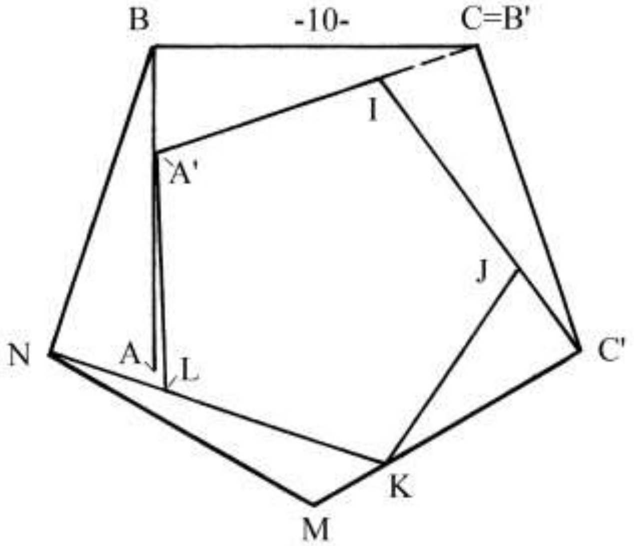
Per determinare la posizione di J i costruttori e gli artigiani medievali preferivano usare la squadra perché da essi ritenuta più affidabile del compasso.

Procedendo con lo stesso metodo sono poi determinati i vertici mancanti del pentagono approssimato, K e L:



HIJKL è il pentagono approssimato.

I segmenti BC e CC’ sono due lati di un secondo pentagono, conm lunghezze convenzionali di 10 unità, che contiene al suo interno HIJKL: è BCC’MN:

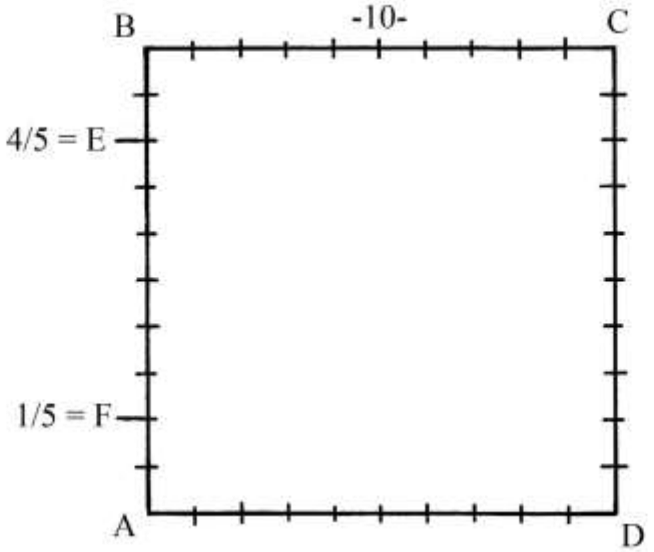


La stessa tecnica è applicabile alla costruzione degli altri poligoni.

La posizione della retta *r* lungo la quale viene allineato il braccio A’B’ varia in relazione al numero dei lati del poligono da costruire.

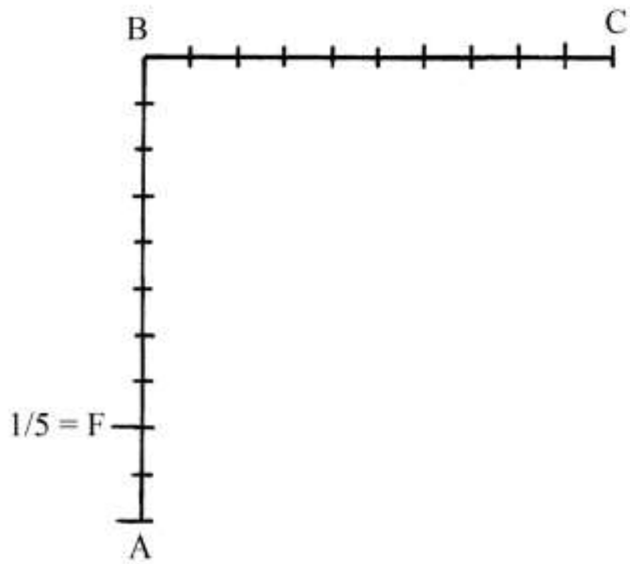
%%%%%%%%%%%%%%%%

Concludiamo con l’esempio dell’*ettagono*:

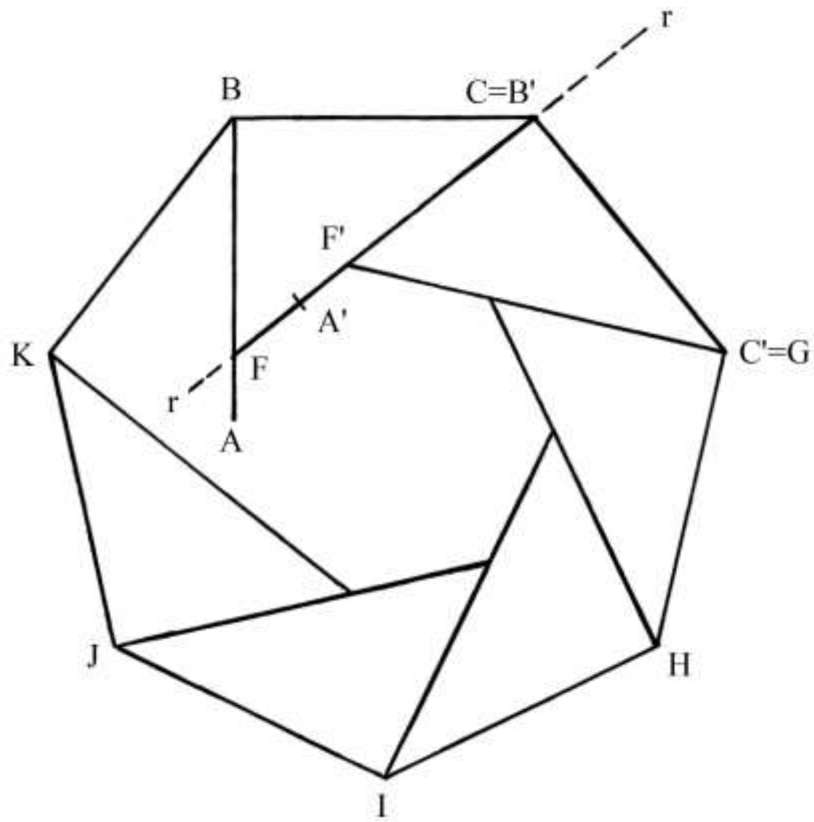


Il punto E a distanza di 4/5 da A e a 1/5 da B: il punto F è simmetrico rispetto a E perché è a 4/5 da B e a 1/5 da A.

Per la costruzione dell’ettagono usiamo il punto F:



Per i punti F e C tracciare la retta *r*.
Ruotare la squadra ABC e posizionare il punto B in C: C=B'.



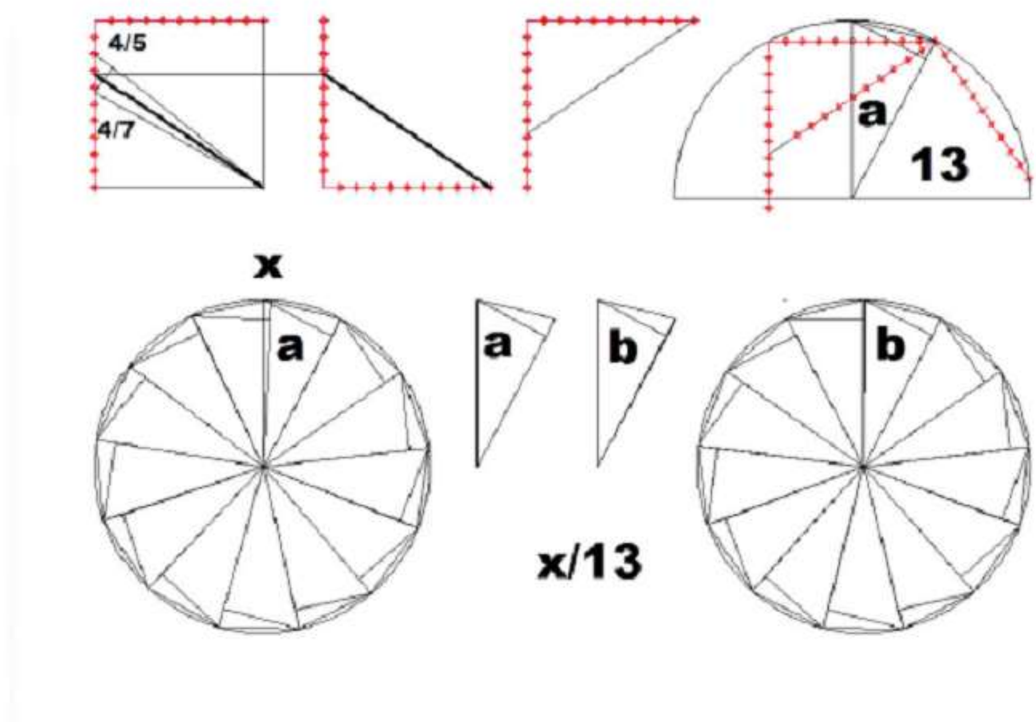
Allineare AB sulla *r*. Il punto A si sposta in A' e l'estremo C si muove in C'=G.
Con il metodo già impiegato nel caso del pentagono, ruotare in senso orario la squadra ABC. Il risultato finale è l'ettagono approssimato BCGHIJK.

Nota: sia nel caso del pentagono che in quello dell'ettagono il primo lato del poligono approssimato è sempre il segmento BC.

La costruzione del tridecagono

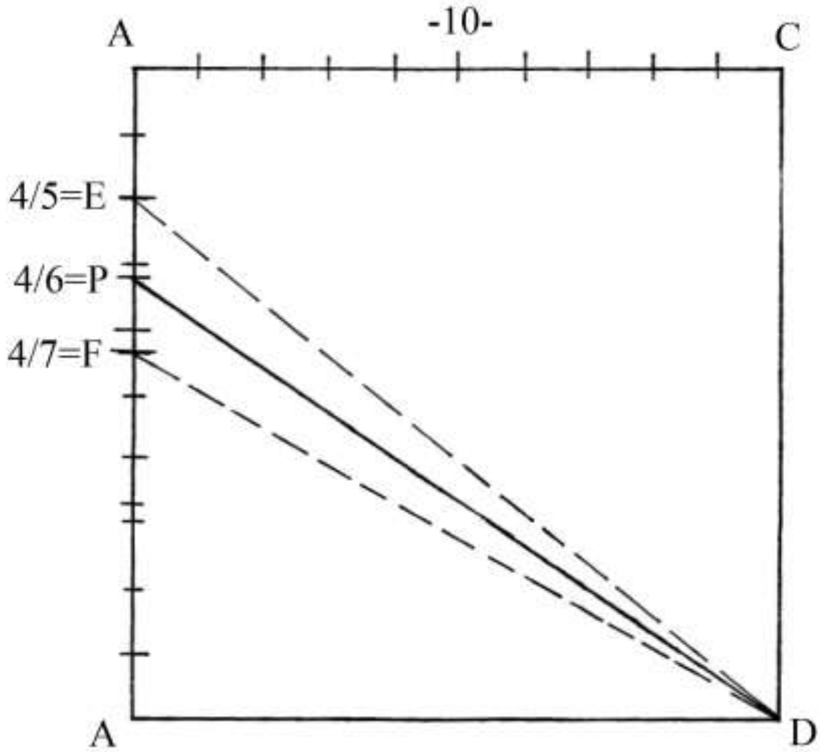
Il tridecagono è il poligono formato da 13 lati: quello regolare non è costruibile con riga e compasso.

Lluis i Ginovart avanza l'ipotesi che il grafico inciso sulla pietra tombale di Saint-Ouein (grafico che egli chiama *abaco* ma sarebbe meglio *nomogramma*) possa essere stato usato per costruire il tridecagono approssimato.

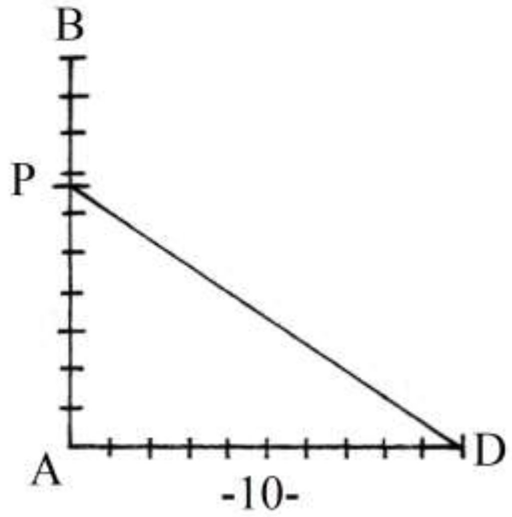


L'ipotesi dello studioso catalano fissa sul segmento AB il *punto medio* fra E (4/5 di AB) e F (4/7 di AB); con una certa approssimazione egli ne stabilisce la distanza dal vertice A uguale a 4/6 di AB: il punto P dovrebbe invece trovarsi a *24/35* da A, infatti:

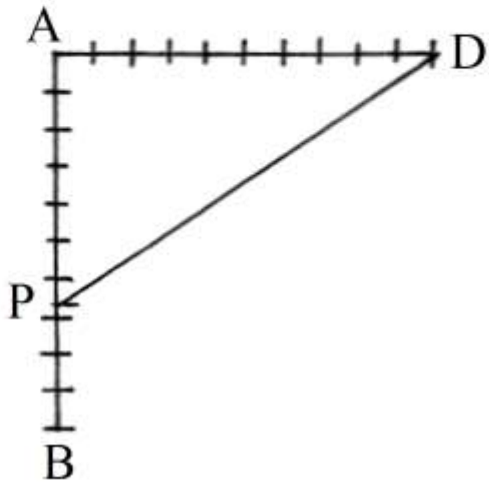
$$(4/5 + 4/7)/2 = [(28 + 20)/35]/2 = (48/35)/2 = 24/35 = (4*6)/(5*7) .$$



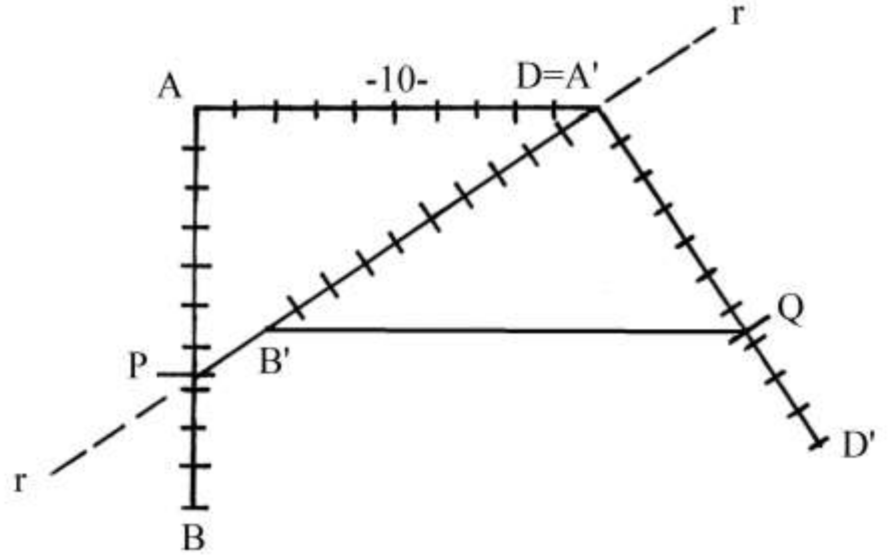
È opportuno ricordare che il punto E e il segmento AE sono stati usati per la costruzione dell’ettagono approssimato e il punto F e il collegato segmento AF sono serviti per la tracciatura dell’esagono approssimato.



La squadra ABD viene poi riflessa di 180° rispetto al lato AD:



Posizionare la squadra nella posizione indicata con ADB con AD orizzontale:



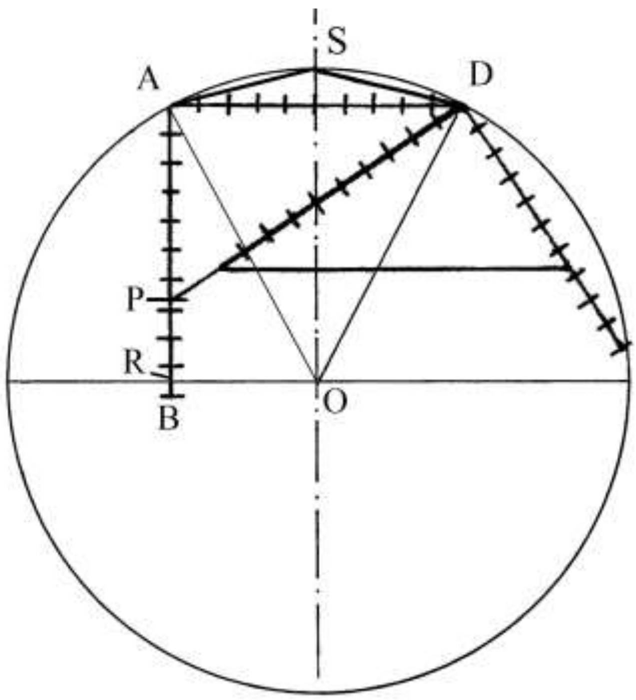
Tracciare la retta *r* passante per P e per A.

Allineare il cateto AD sull'ipotenusa PD: la nuova posizione comporta la coincidenza dei vertici D e A'.

La seconda posizione della squadra è indicata con i punti B', A' e D'.

Dal punto B' condurre la parallela a AD fino a stabilire il punto Q.

Sul cateto AB determinare un punto, indicato con R, collocato a distanza di 1/20 di AB dal vertice B:



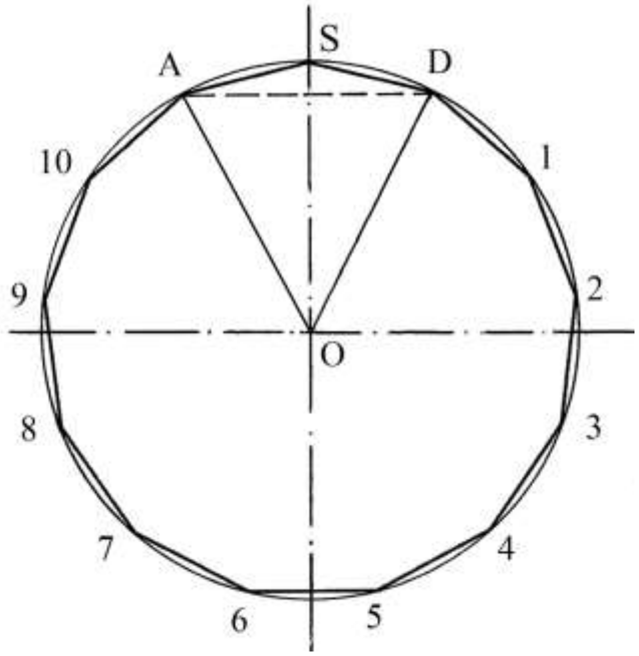
Per il punto medio di AD tracciare il suo asse; per il punto R condurre la perpendicolare a questo ultimo asse: le due linee si intersecano nel punto O.

Collegare O con A e con D: OA e OD sono due raggi della circonferenza nella quale sarà inscritto il tridecagono.

Fare centro nel punto O e con raggio OA = OD disegnare una circonferenza: essa taglia l'asse verticale in un punto, S.

Le corde AS e SD sono i primi due lati del tridecagono.

La figura che segue presenta il tridecagono approssimato inscritto:



La squadra decagonale

La somma S degli angoli interni di un poligono regolare è data dalla seguente formula:

$$S = (\text{numerolati} - 2) * 180°$$

Dal numero dei lati dobbiamo sottrarre l'equivalente dell'*angolo giro* al centro di un poligono.

Un angolo giro equivale a due *angoli piatti*:

$$360° = 2 * 180° .$$

L'ampiezza degli angoli interni di un poligono regolare è data dalla formula

$$\frac{S}{\text{numero lati}}$$

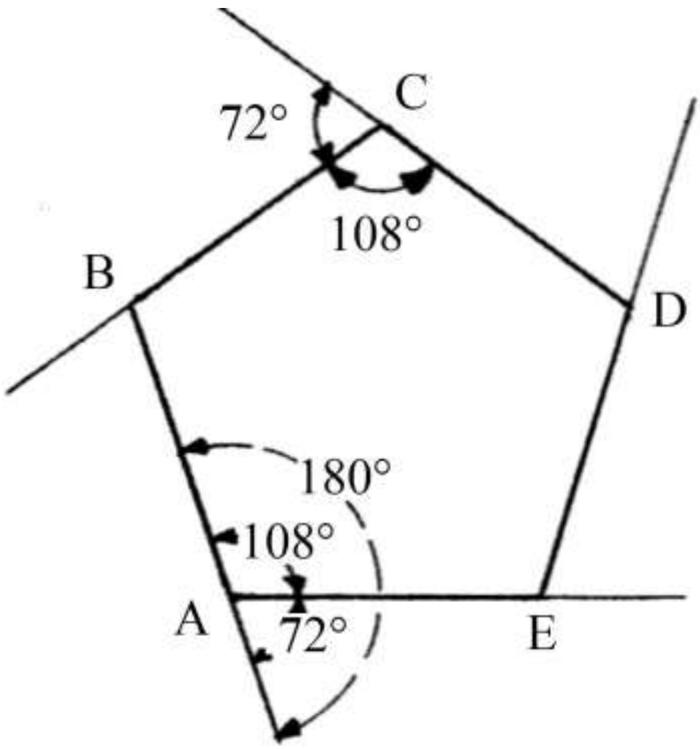
e cioè:

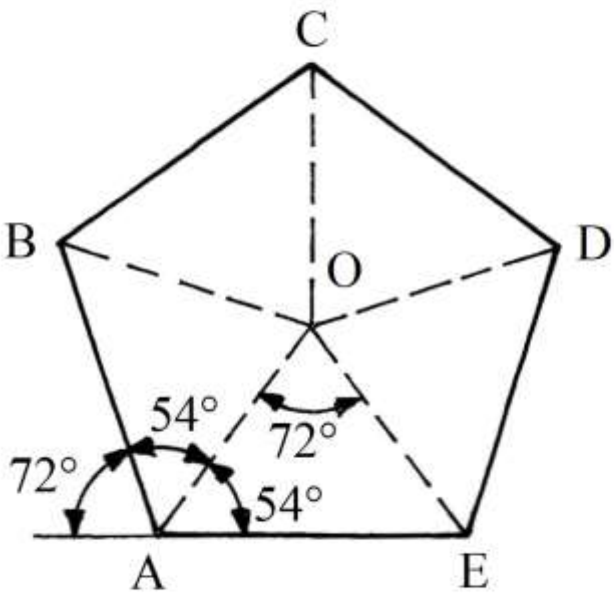
$$\frac{(\text{numero lati} - 2)*180}{\text{numero lati}} =$$

$$= \frac{180*\text{numero lati} - 360}{\text{numero lati}} =$$

$$= 180 - \frac{360}{\text{numero lati}}$$

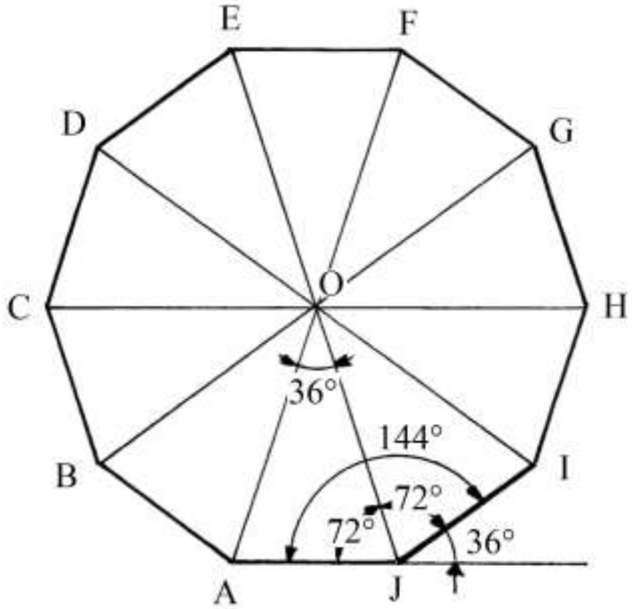
In un pentagono gli angoli interni sono ampi 108° e quelli esterni, *supplementari* a 180°, hanno ampiezza di 72°:



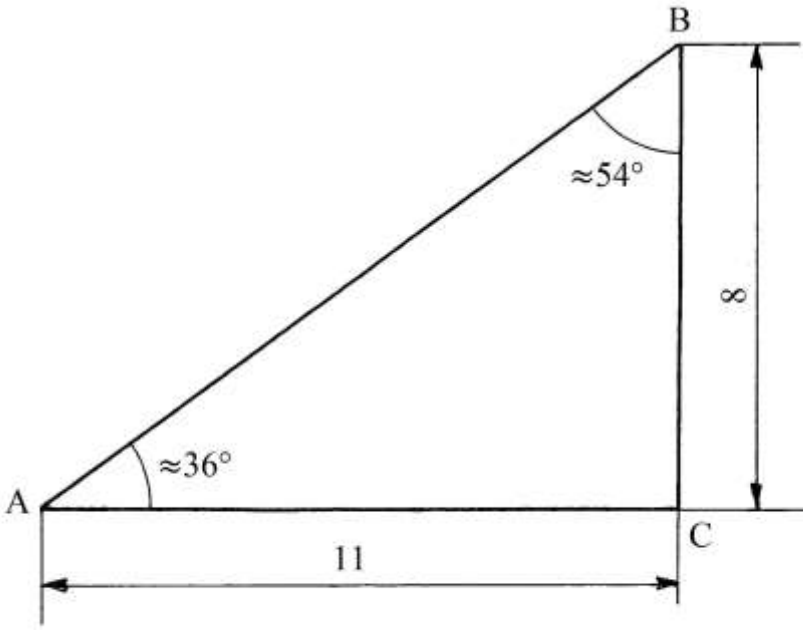


Gli angoli al vertice dei cinque triangoli isosceli nei quali è scomposto il pentagono hanno ampiezza uguale a 360/5 = 72°.

In un decagono regolare scomposto in dieci triangoli isosceli compaiono gli angoli di 36° e i suoi multipli 72° (=36°*2) e 144° (=36°*4):



Gli angoli *complementari* di 36° e di 54° possono essere ricavati, con un'accettabile approssimazione, con l'impiego di una squadra a forma di triangolo rettangolo, con cateti lunghi in proporzionea 8 e a 11 unità:



L’angolo BAC è ampio circa 36° e quello ABC è circa 54°.

La tangente dell’angolo BAC è data da:

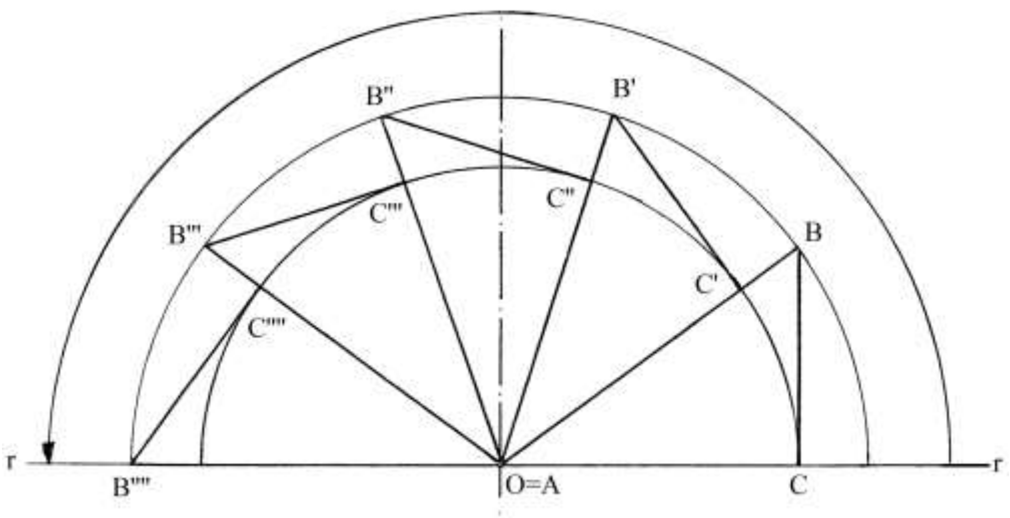
tg BAC = BC/AC = 8/11 ≈ 0,(72) , alla quale corrisponde un angolo di ≈ 36.02737°, leggermente più ampio di quello di 36°.

L’angolo supplementare ABC è ampio:

ABC = 90° - BAC ≈ 53.97262°.

Con questa squadra i progettisti e i costruttori medievali erano in grado di disegnare pentagoni e decagoni quasi regolari.

Di seguito è descritta un’ipotesi di uso della squadra basata sul lavoro di Lluis i Ginovart più volte citato:



La squadra ABC viene posizionata su di una retta orizzontale, *r*, facendo combaciare il cateto maggiore, AC, con la retta.

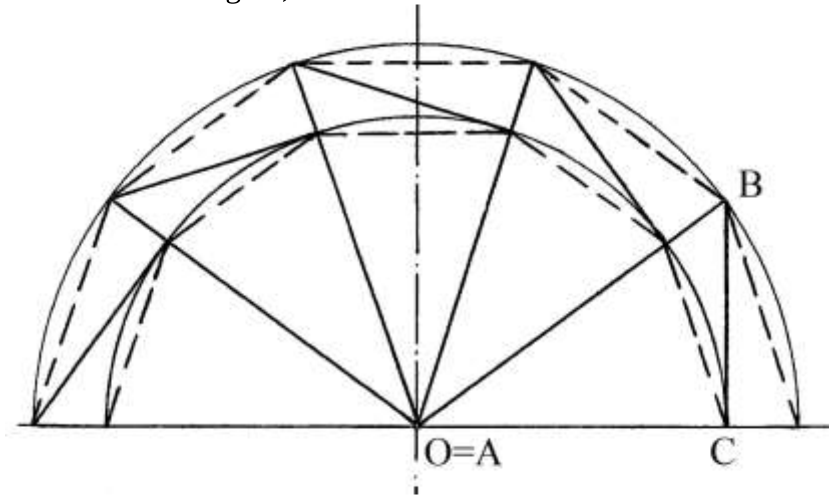
Il vertice A coincide con il centro O.

Fare centro in O e con raggi OC e OB disegnare due semicirconferenze.

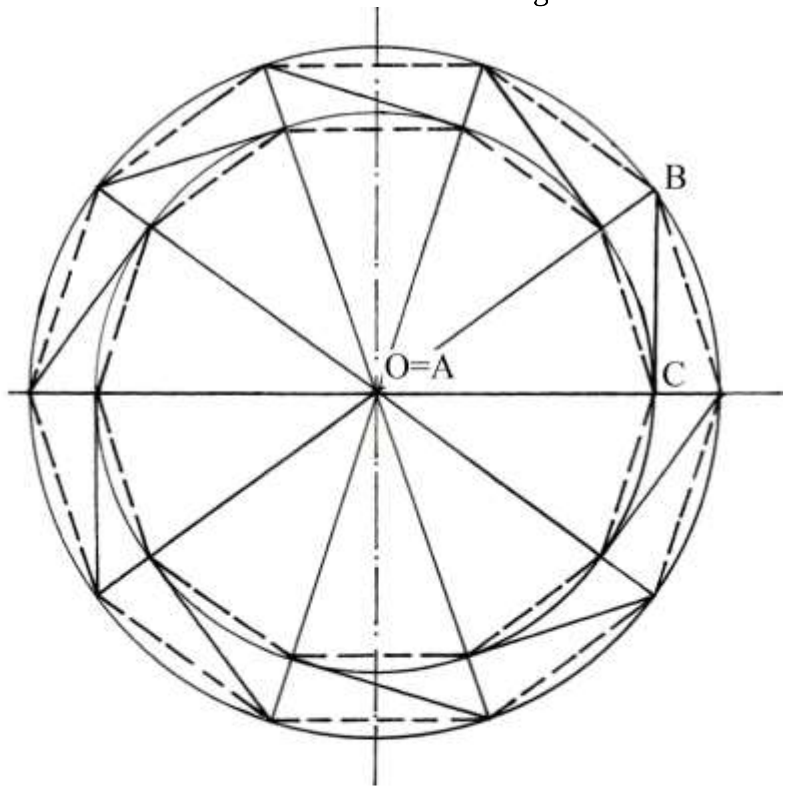
Ruotare la squadra ABC in senso antiorario, intorno a O, fino a posizionare il cateto OC sull'ipotenusa OB. Proseguire con questa rotazione fino a disporre l'ipotenusa OB orizzontalmente sulla retta, a sinistra di O, spostandola nella posizione O(=A)B''''C''''.

Nel semicerchio di raggio OB la squadra ha assunto *cinque* diverse posizioni: ciò è del tutto logico poiché l'angolo BOC è ampio 36° e dividendo l'ampiezza dell'angolo piatto per 36° si ottiene 5: infatti 180°/5 = 36°.

Nel semicerchio della figura che segue sono disegnate, *tratteggiate*, dieci corde che corrispondono a cinque lati di due decagoni, inscritti e fra di loro concentrici:



Da questo grafico deriva la costruzione dei due interi decagoni:



All'interno dell'ultimo grafico sono inscrivibili pentagoni di due differenti dimensioni.

I costruttori e gli artigiani medievali conoscevano la squadra 8-11 per disegnare decagoni e pentagoni?

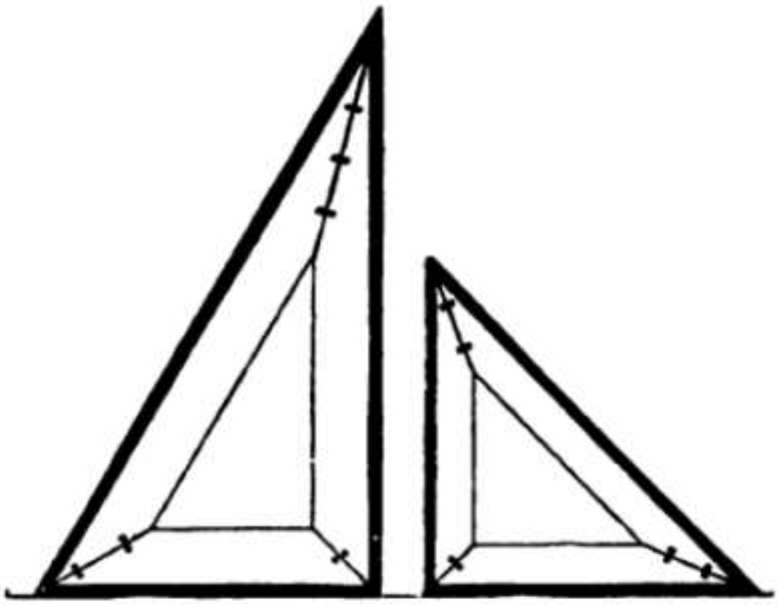
LE SQUADRE USATE NELL'OTTOCENTO

I trattati di disegno tecnico e i cataloghi di strumenti per disegno inglesi e americani, pubblicati a partire dalla seconda metà dell'Ottocento, mostrano, fra le altre, riproduzioni di squadre da disegno costruite in sottile legno di *pero* o di *ciliegio*.

Molti di quei trattati e di quei cataloghi sono facilmente reperibili sul sito www.archive.org .

Le squadre di legno erano di due tipi:

* quelle massicce;
* quelle a forma di cornice, come le due riprodotte nella figura che segue:



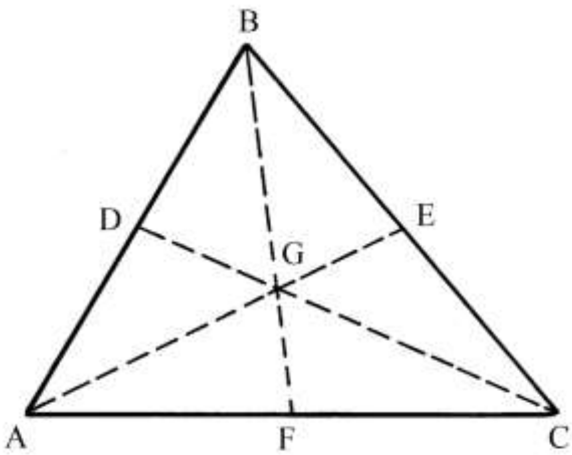
La precedente figura e tutte quelle che seguono sono ricavate e rielaborate dal testo di William Ford Stanley, "A descriptive treatise on mathematical drawing instruments", quinta edizione, Londra, 1873, pp. xi-268, reperibile sul citato sito www.archive.org. William Ford Stanley (1829-1909) è stato un ingegnere e inventore inglese, autore di diversi manuali, pubblicati in più edizioni.

In inglese, la coppia di squadre a 45° e a 30°-60° è chiamata *triangles* e cioè *triangoli*.

Le squadre massicce recavano un foro circolare, forse creato per poter appendere le stesse a un chiodo piantato in una parete, come hanno continuato per lungo tempo a fare i sarti che conservavano in questo modo una lunga riga.

In una superficie piana esiste un punto, il *baricentro*, che è il centro di gravità nel quale risulta applicata la risultante dei pesi di tutti i punti materiali che formano la superficie stessa: analoghe considerazioni valgono per le linee e per i corpi solidi.

In un triangolo qualsiasi il baricentro G è determinato dall'intersezione delle tre *mediane*, segmenti che collegano un vertice al punto medio del lato opposto:



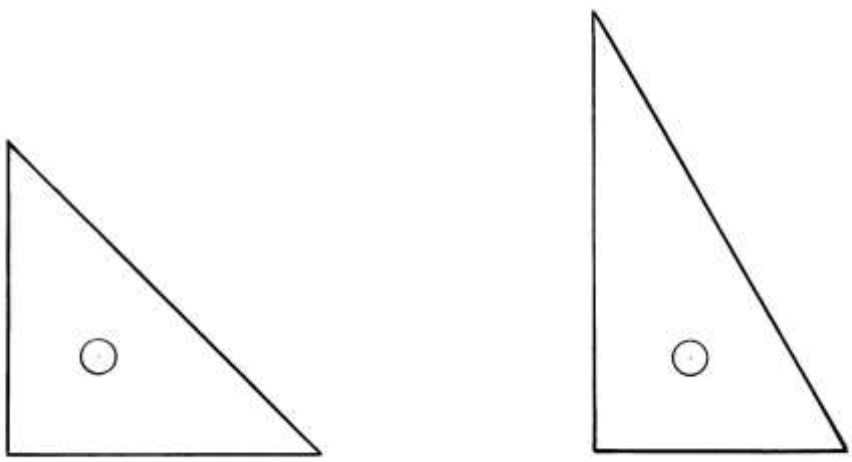
ABC è un triangolo e D, E e F sono i punti medi dei tre lati. AE, BF e DC sono le tre mediane che si intersecano nel punto G, baricentro di ABC.

Ciascuna delle tre mediane viene divisa dal baricentro G in due parti di lunghezze proporzionali a 1 e a 2: la parte rivolta verso il vertice è quella lunga in proporzione a 2:

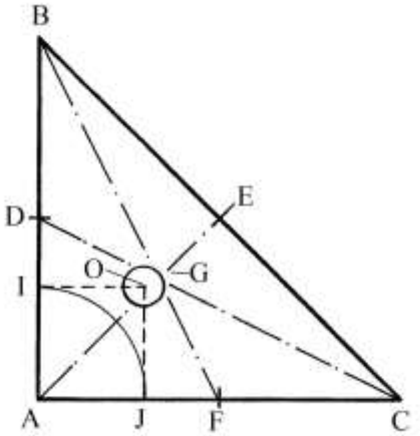
* AG : GE = 2 : 1
* BG : GF = 2 : 1
* CG : DG = 2 : 1 .

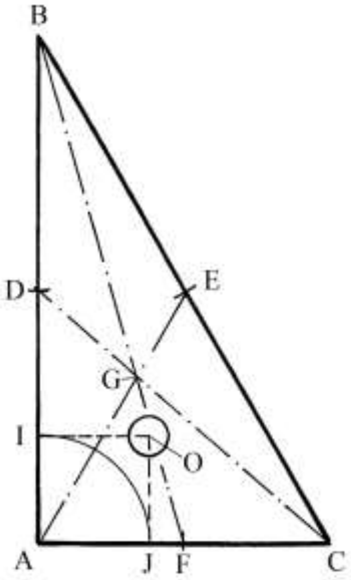
Verifichiamo o smentiamo la validità di un'ipotesi: i fori circolari praticati nelle squadre ottocentesche corrispondono ai baricentri dei triangoli?

Le due squadre mostrate nella figura che segue sono del tipo massiccio e sono a 45° (a sinistra) e a 30°-60° (a destra):



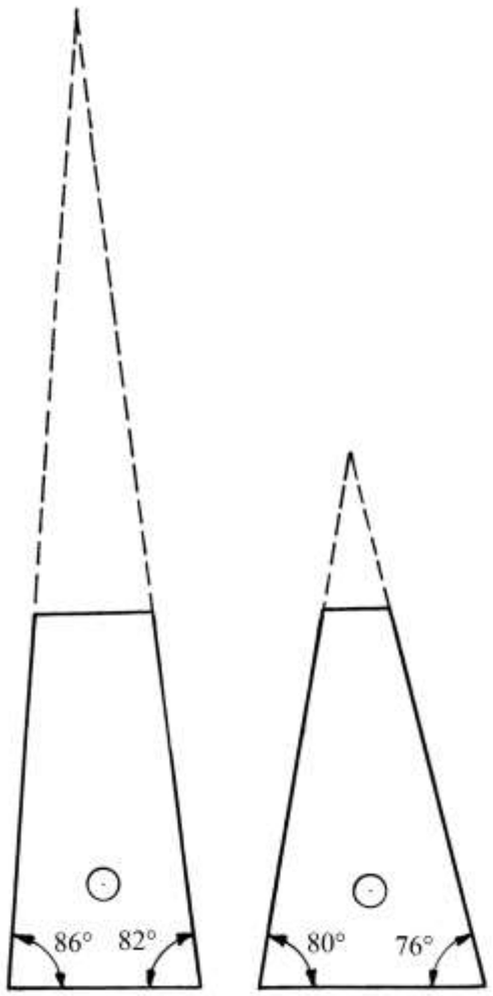
La posizione dei fori e dei loro centri è approfondita nella figura:





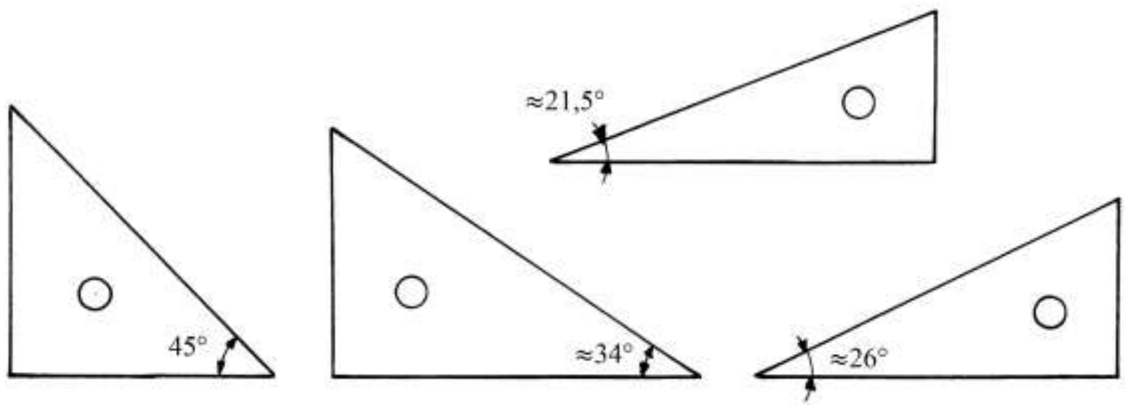
I centri O sono equidistanti dai cateti AB e AC, come spiegano le due figure: I punti O non coincidono con i baricentri dei due triangoli. L’ipotesi sopra avanzata è smentita dai fatti.

Le due figure che seguono, sempre riprese dal testo di Stanley, presentano squadre di legno usate nella progettazione di *costruzioni ferroviarie*:



Le due squadre hanno forma di trapezio scaleno e risultano dal taglio di due triangoli scaleni, ma *quasi* isosceli, lungo linee parallele alle loro basi: entrambe presentano un foro circolare il cui centro non coincide con il baricentro.

Le squadre del secondo gruppo hanno forma di triangolo rettangolo:

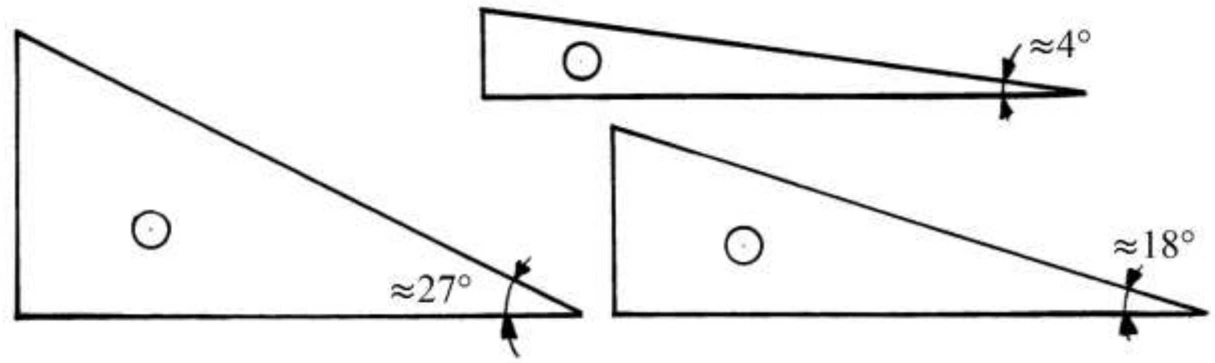


Gli angoli delle quattro squadre sono approssimati, forse a causa della non troppo accurata tecnica di stampa dell'epoca. Gli angoli di 21,5°, 34° e 26° potrebbero essere arrotondati a:

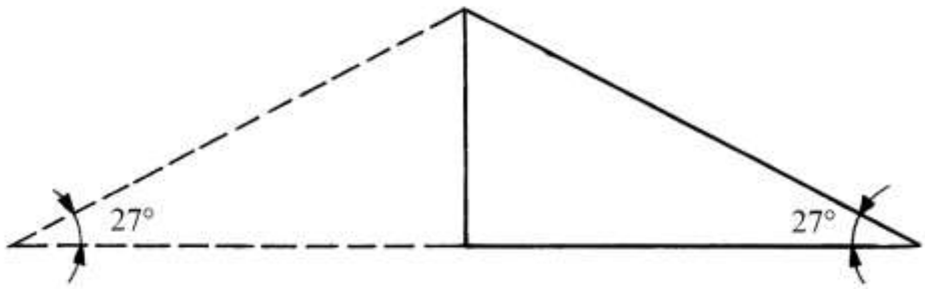
* 21,5° → 22,5° = 45°/2 ;
* 34° → 36° ;
* 26° → 27° .

Gli angoli di 36° e di 27° sono caratteristici delle costruzioni del pentagono e del decagono.

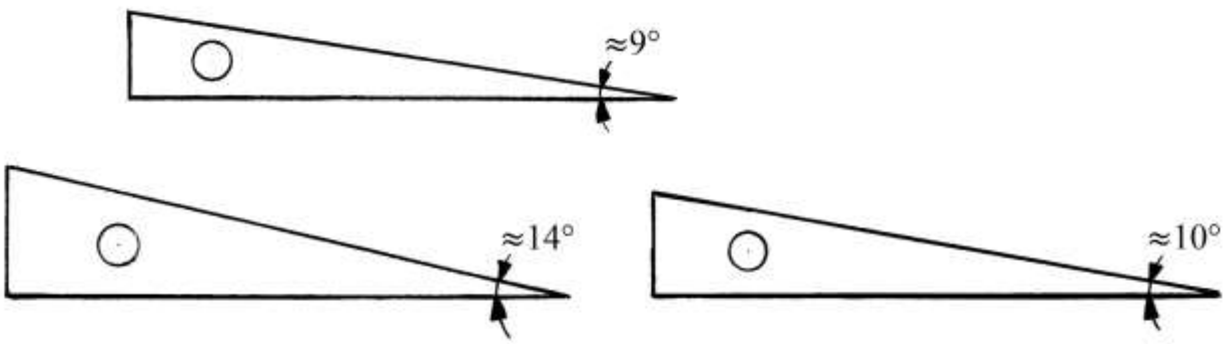
Le figure che seguono presentano squadre a forma di triangolo rettangolo usate per tracciare il profilo dei tetti degli edifici, con un’ampia varietà di inclinazioni:



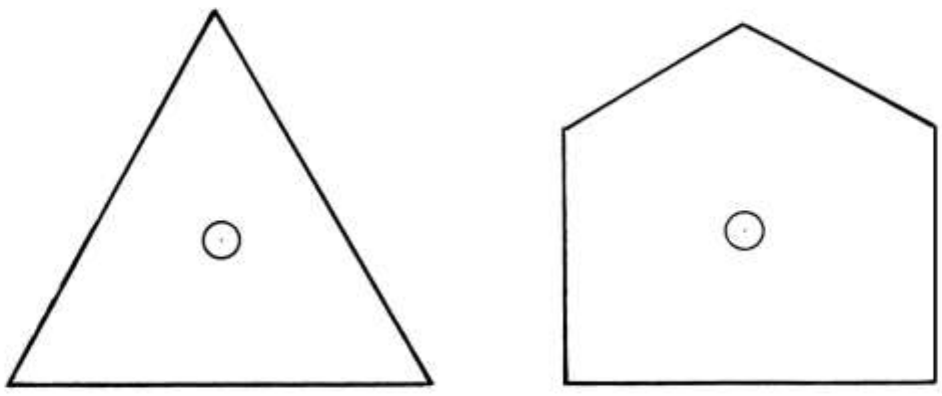
Ad esempio, la squadra a 27° serviva a progettare tetti sostenuti da capriate e inclinati di 27°:



Nella successiva figura sono riprodotte altre squadre a forma di triangolo rettangolo sempre usate nella progettazione dei tetti:

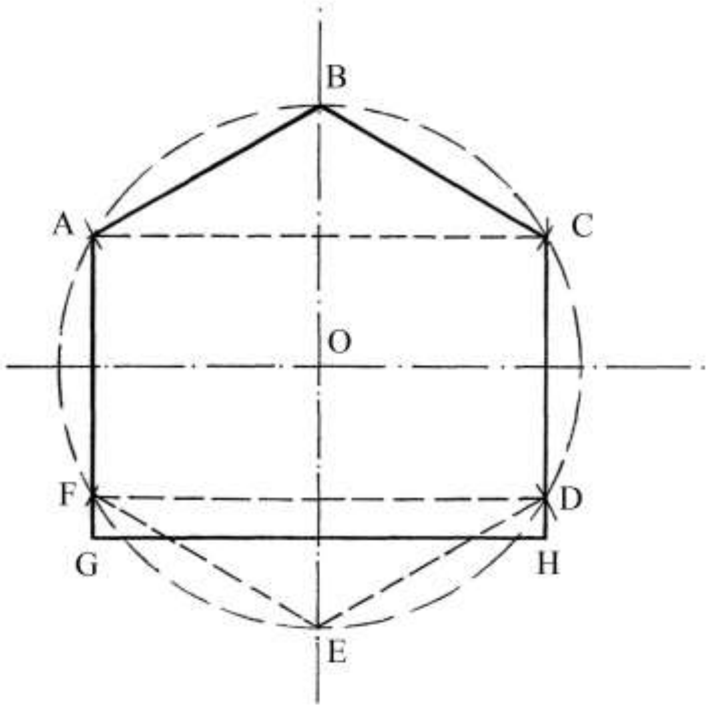


Infine, le due squadre presentate nella figura erano usate per disegnare le teste e i dadi dei *bulloni esagonali*:



A sinistra è una squadra a forma di triangolo equilatero e a destra una squadra derivante da un esagono regolare.

La seconda squadra ha la forma di un pentagono non regolare:



Essa deriva dall'esagono ABCDEF. I due lati verticali AF CD sono stati prolungati della lunghezza FG = DH.

GH è lungo quanto le diagonali AC e FD.

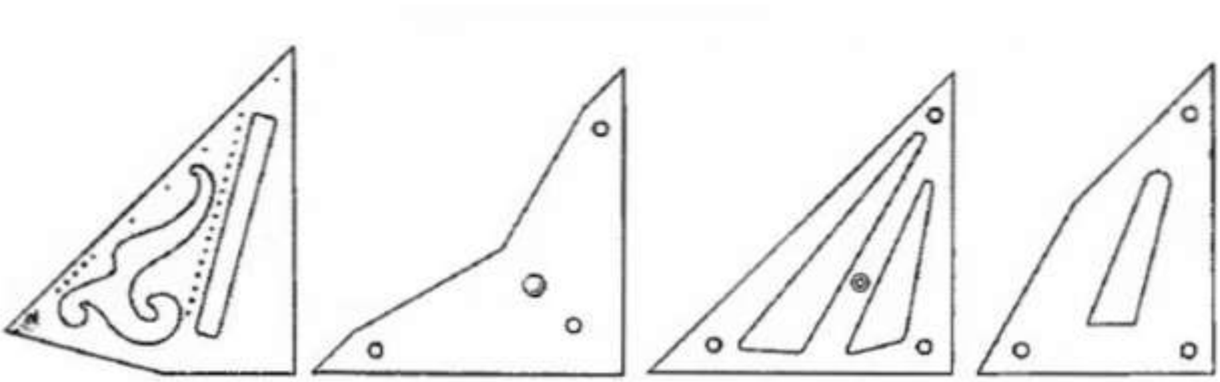
Nota: le prime squadre prodotte nell'Ottocento non recavano scale graduate (in pollici o in centimetri) incise lungo uno o più bordi. Le lunghezze venivano misurate con righelli graduati. Le squadre servivano a tracciare e a verificare gli angoli, i parallelismi e le perpendicolarità.

Nel corso del Novecento sono state prodotte apposite squadre con angoli modificabili: una squadra del genere è conosciuta come *adjustable triangle* e cioè "squadra regolabile" della quale un esemplare è riprodotto nella figura:

Quando è chiusa, l’ipotenusa è inclinata di 45° rispetto al cateto orizzontale.

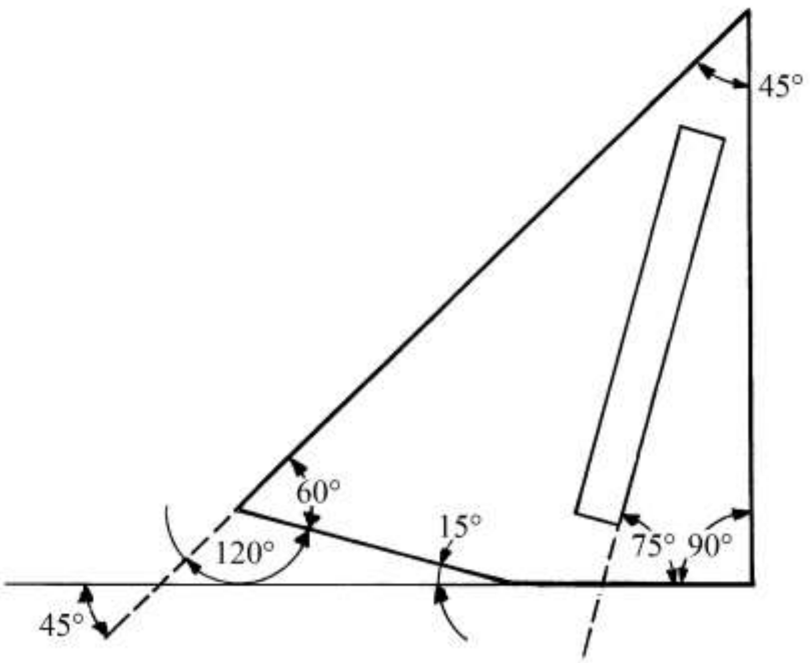
ALCUNE SQUADRE AMERICANE

In un manuale di disegno meccanico dell'americano Thomas Ewing French (1871-1944) sono riprodotte quattro diverse squadre da disegno usate negli Stati Uniti intorno al 1900:



Line-o-graph, Kelsey, Zange & Rondinella "triangles."

La prima squadra è presentata nella figura che segue:



Essa era conosciuta con l'espressione americana "*Line-o-graph*". Si trattava di una squadra a 45° alla quale era stato asportato un lembo triangolare all'estremità in basso a sinistra: ne risultavano angoli di 15°, 60°, 75°e 120°.

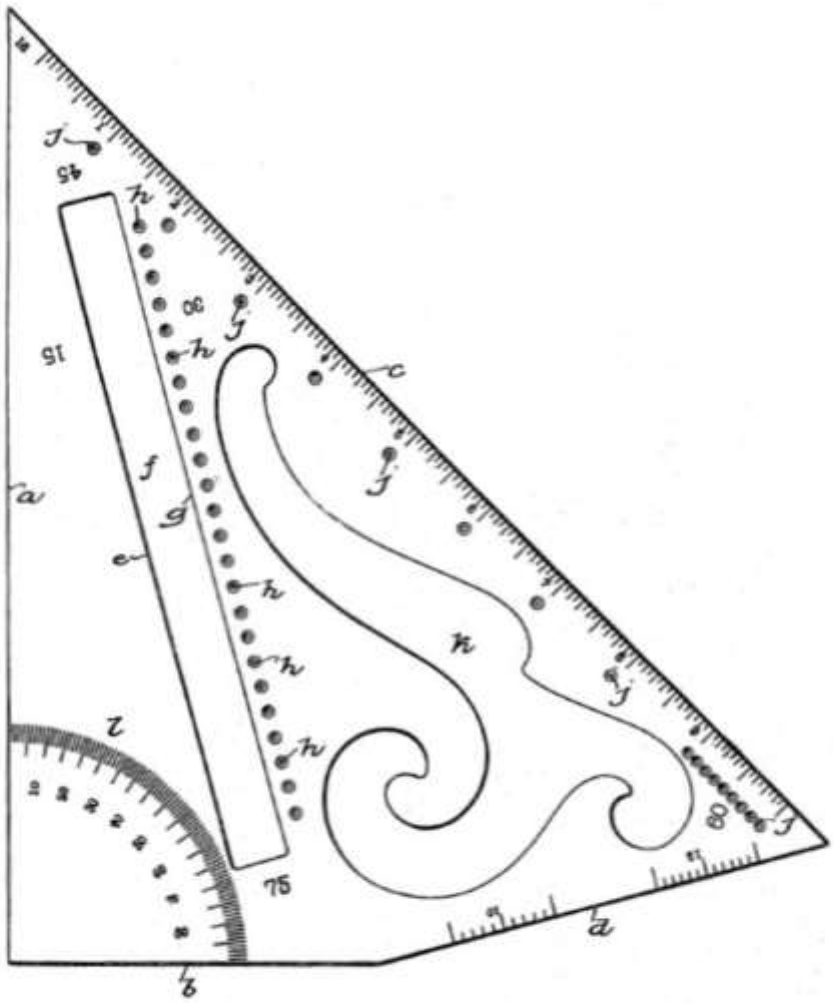
La scanalatura longitudinale a forma di rettangolo offriva la possibilità di tracciare angoli di 15° e di 75°.

La squadra recava poi un intaglio ricurvo, un vero e proprio *curvilinee* in negativo, con il quale era possibile disegnare curve.

Negli Stati Uniti e in altri Paesi anglosassoni, il curvilinee è chiamato "French curve" o "French curves": secondo alcuni il nome deriverebbe da quello del già citato ingegnere americano Thomas Ewing French che, stando a questa ipotesi, ne sarebbe stato l'inventore.

- APPROFONDIMENTO -

L’inventore americano Earl J. Early ottenne il rilascio di un brevetto, il n. 1.171.329, a lui attribuito l’8 febbraio 1916 per il progetto di una squadra da disegno:

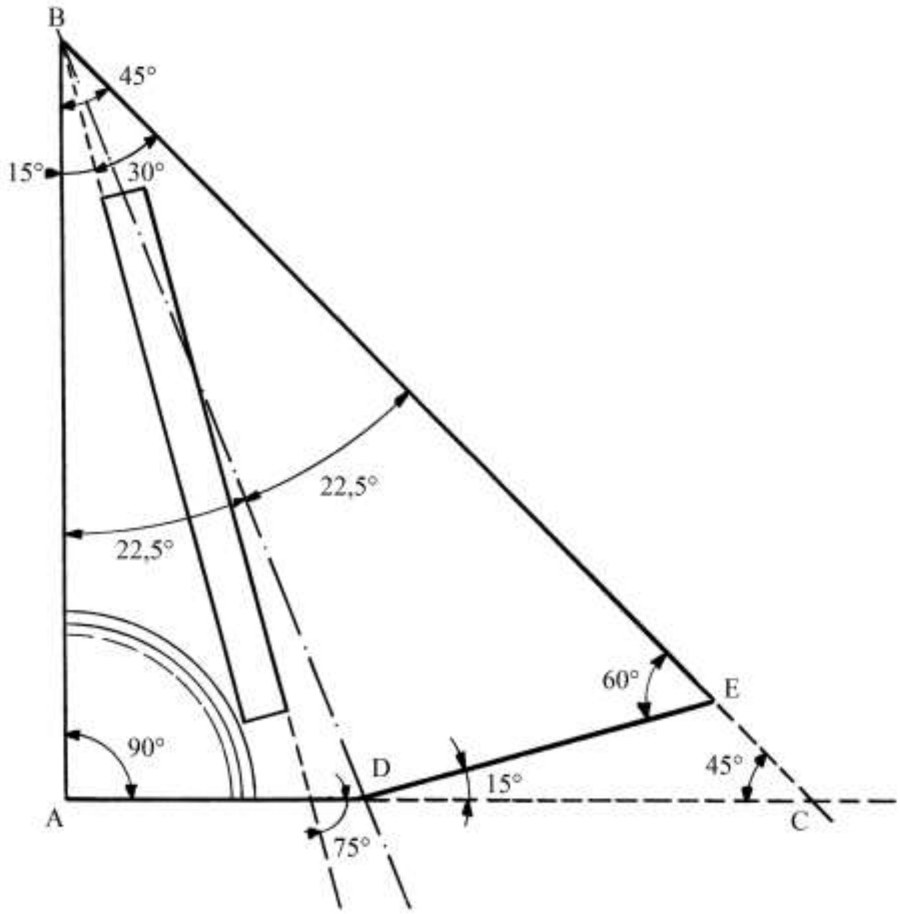


È evidente che lo schema di Early riproduce quello di French, semplicemente ruotato rispetto al cateto verticale: l’unica consistente modifica è data dall’aggiunta del goniometro.

Il disegno contenuto nel brevetto è semplicemente simmetrico rispetto a quelli dei due trattati di French.

In tutti i modelli è inserito un goniometro ampio 90°.

Gli angoli della squadra di Early sono evidenziati nello schema che segue:



La struttura originaria di una squadra “Line-o-graph” è un triangolo rettangolo isoscele, ABC: di seguito è ipotizzata la procedura impiegata per produrla.

BD è la retta che rappresenta la *bisettrice* dell’angolo ABC la quale genera due angoli di ampiezza uguale a 22,5°.

Dal punto D tracciare una linea inclinata di 15° in senso antiorario rispetto a AC: è fissato lo spigolo DE.

Nel vertice E è ricavato un angolo DEB ampio 60°.

Con il taglio del triangolo DEC, la squadra assume la forma di un quadrilatero, ABED.

Una lunga asola rettangolare è inclinata di 15° rispetto allo spigolo AB e origina angoli di 15° e di 75°.

Lungo il lato destro dell’asola sono allineati una serie di fori circolari: essi sono distanziati di frazioni di pollice. Anche le gradazioni incise lungo i lati BE e DE sono espresse in pollici e loro frazioni.

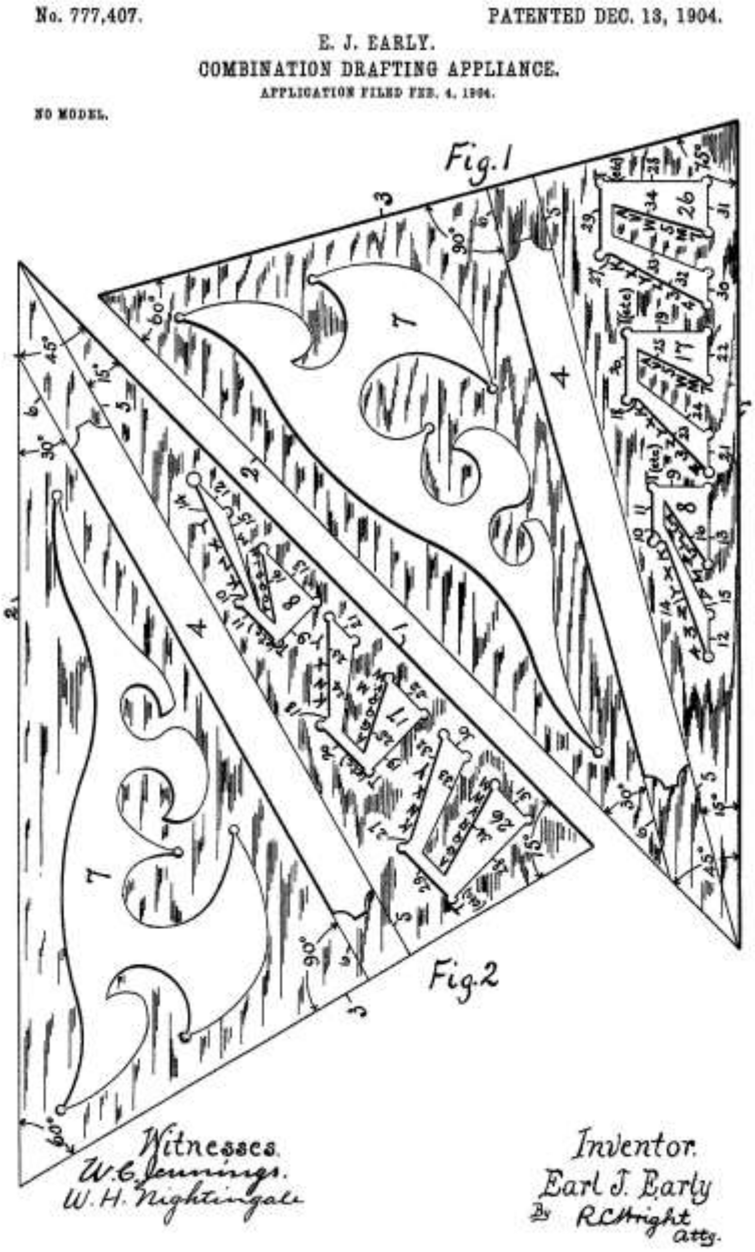
Infine, una grande asola profilata secondo tratti di curve completa la dotazione della squadra.

In conclusione questa squadra ha la forma di un quadrilatero (ABED), fonde in un unico manufatto le squadre a 45° e a 30-60°, offre un ampio ventaglio di angoli e contiene un goniometro e un curvilinee.

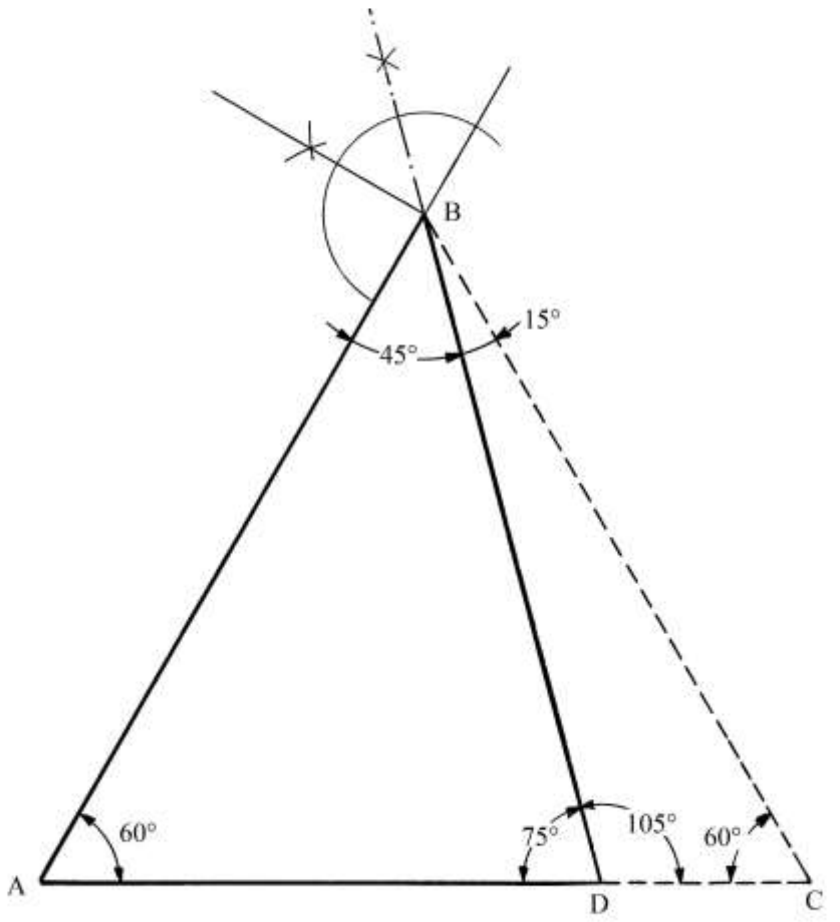
%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo stesso Early aveva in precedenza ottenuto un brevetto relativo a un’altra squadra da disegno: è il n. 777.407, rilasciato il 13 dicembre 1904.

Nel testo del documento, la squadra è rappresentata al *recto* e al *verso*:

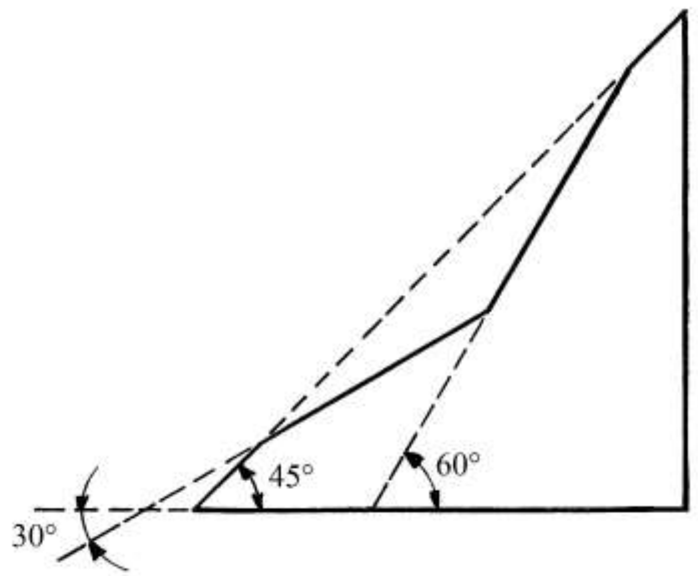


Con ogni probabilità, essa deriva da un triangolo equilatero opportunamente sezionato con una linea passante per i punti B e D:



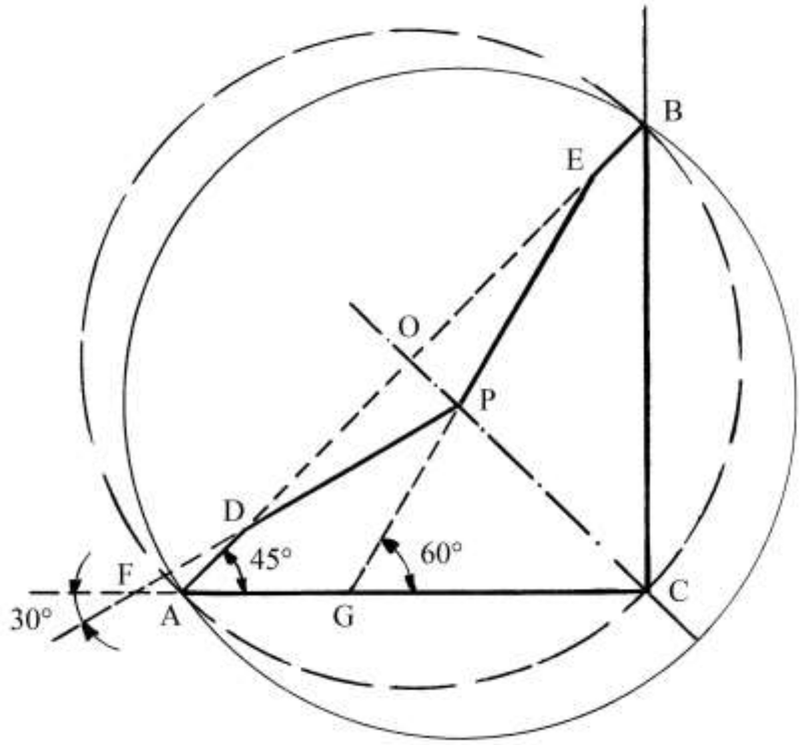
- -

La seconda squadra descritta da French era conosciuta come *modello Kelsey*:



La sua particolare forma permetteva al disegnatore di tracciare angoli di 30°, 45°, 60° e 90° e quindi sostituiva le attuali squadre da 30°- 60° e da 45°. Essa derivava da un triangolo rettangolo isoscele.

Lo schema che segue propone un'ipotesi riguardo all'origine di questa squadra:



Per il vertice C tracciare la perpendicolare all'ipotenusa AB che incontra nel suo punto medio, O: la retta è anche la *bisettrice* dell'angolo retto ACB.

Fare centro in O e disegnare la circonferenza passante per i tre vertici del triangolo rettangolo ABC.

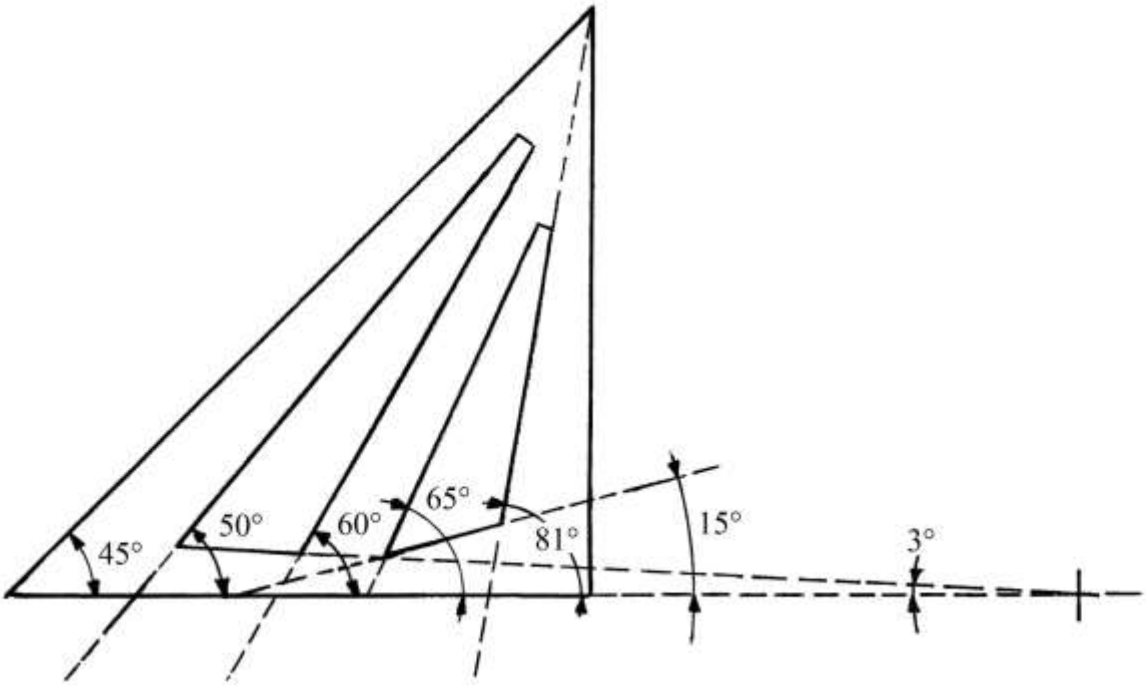
Sulla bisettrice OC è fissato un punto, P. Da questo ultimo tracciare due linee inclinate di 30° e di 60° rispetto al cateto AC: sono fissati i punti D e E, collocati sull'ipotenusa AB.

I punti F e G sono posizionati sul prolungamento di AC (F) e sullo stesso cateto (G).

Fare centro in P e con raggio PA = PB disegnare una seconda circonferenza.

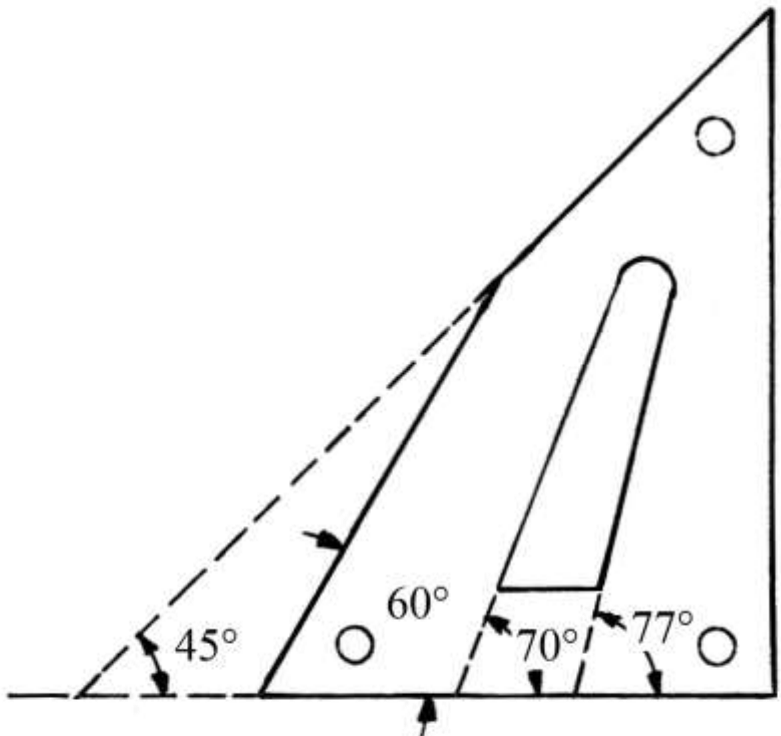
Il pentagono irregolare ADPBC è la squadra Kelsey.

Il terzo modello, chiamato *Zange*, era una squadra a 45° che recava degli intagli con i quali era possibile tracciare angoli di 3°, 15°, 30°, 45°, 50°, 60°, 66°, 81° e 90°:

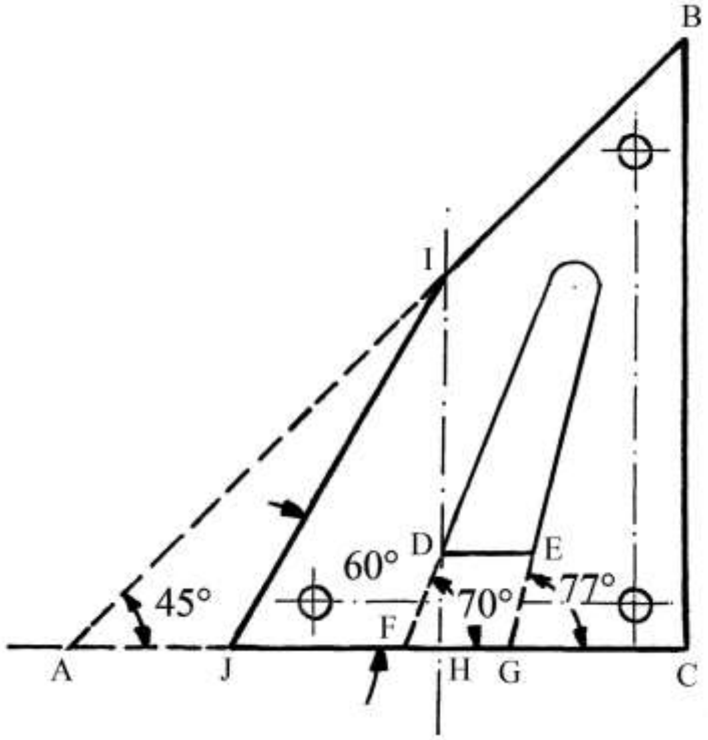


È probabile che i disegnatori americani si servissero di un'unica squadra perché la usavano insieme alla riga a T.

Il quarto modello, *Rondinella*, permetteva di disegnare diversi angoli:



Il grafico che segue tenta di descrivere l'origine della sua forma:



Prolungare i lati maggiori dell’asola fino a incontrare AC nei punti F e G.

Per il punto D tracciare un asse parallelo al cateto BC: esso interseca l’ipotenusa AB nel punto I.

Da questo ultimo disegnare una linea inclinata di 60° rispetto a AC che taglia AC nel punto J.

Il quadrilatero JIBC è la squadra *Rondinella*.

I tre fori circolari giacciono su assi paralleli ai cateti AC e BC.

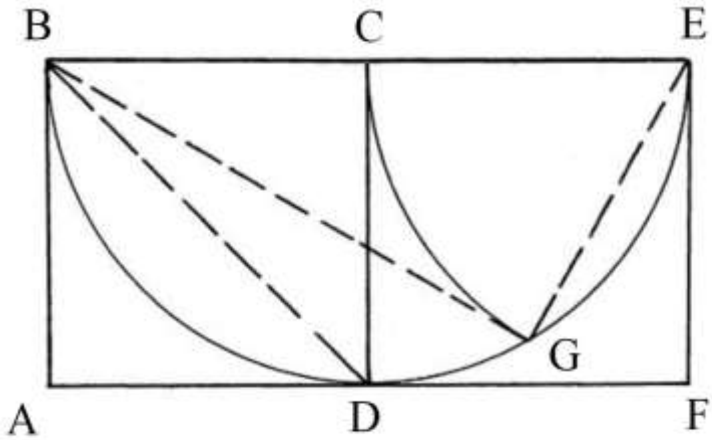
%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un’altra squadra di fabbricazione americana (prodotta dalla Stanley con il numero di catalogo 1-46-169) è quella descritta nelle figure che seguono:

Essa è usata in falegnameria per tracciare o verificare alcuni angoli e può essere impiegata anche dai disegnatori. È costruita in acciaio e in alluminio e ha il manico di legno.

In italiano è chiamata *squadra a doppia unghiatura*, abbreviata in *squadra doppia*: anche se per unghiatura si intende il taglio a 45° (angolo presente nella squadra).

L’origine della squadra muove dal doppio quadrato ABCEFD che forma un rettangolo:

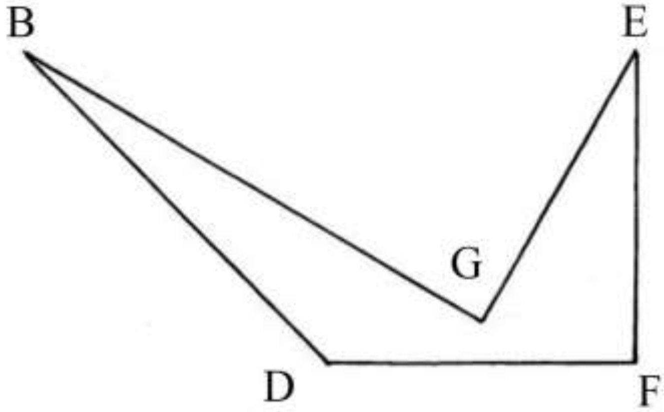


Con raggio CB = CE fare centro nel punto C e tracciare una semicirconferenza da B a E. Con la stessa apertura fare centro nel punto E e disegnare un arco da C fino a intersecare la semicirconferenza in un punto, G.

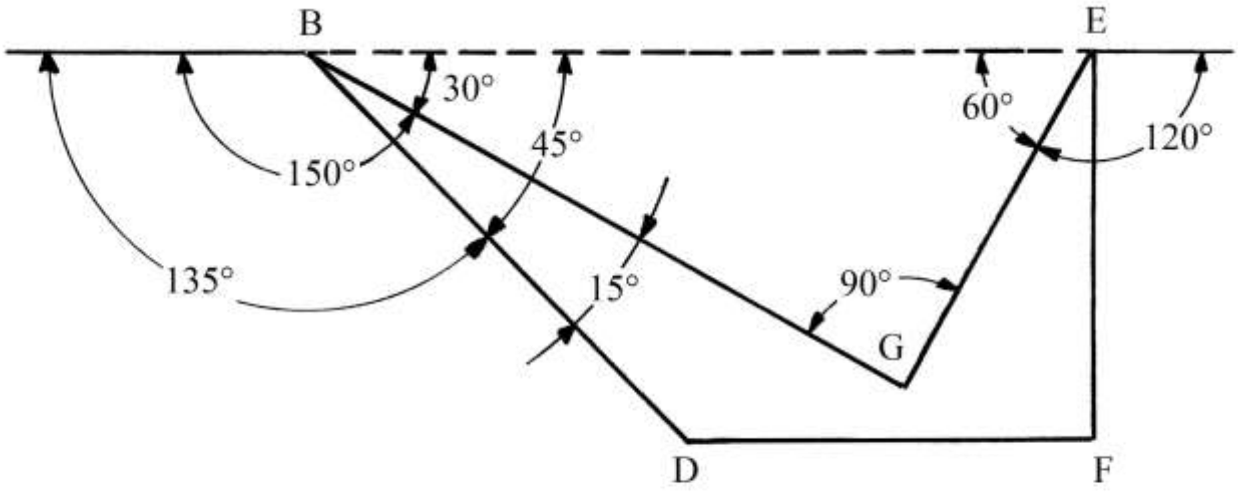
Collegare i punti B e E con G: BGE è un triangolo che è *rettangolo* perché inscritto nel semicerchio.

Tracciare la diagonale BD.

Il risultato della costruzione è la squadra DBGEF, presentata nella figura che segue:



Con questa squadra sono costruibili gli angoli di ampiezza 15°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135° e 150°:



Per differenza fra gli angoli di 45° e di 30°, l'angolo GBD è ampio 15°.

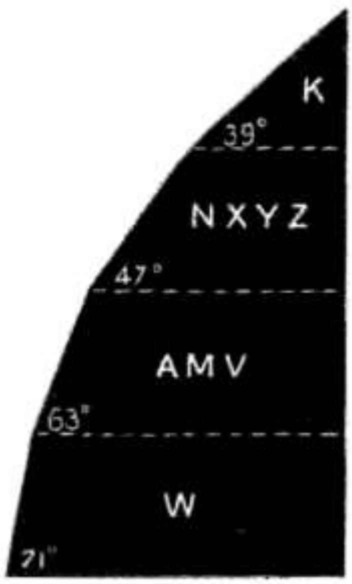
La squadra può essere impiegata per disegnare assonometrie cavaliere (con gli angoli di 45°, 90° e 135°) e isometriche (con gli angoli di 30°, 60°, 120° e 150°).

La squadra per aiutare nella scrittura

Prima dell'invenzione del *normografo*, dei *caratteri trasferibili* e delle tastiere per scrittura applicate ai tecnigrafi, le scritte erano fatte a mano.

Per aiutare l'operazione di scrittura (*lettering* in americano), sul foglio da disegno venivano tracciate delle sottili linee orizzontali e parallele: fra di esse erano tracciati a matita o a inchiostro i caratteri.

La pratica suggeriva talvolta di eseguire scritture *inclinate* verso destra di un certo angolo. Per aiutare i disegnatori furono prodotte delle squadre di legno con diverse inclinazioni come mostra la figura che segue (ricavata da un manuale americano di disegno tecnico del 1906):

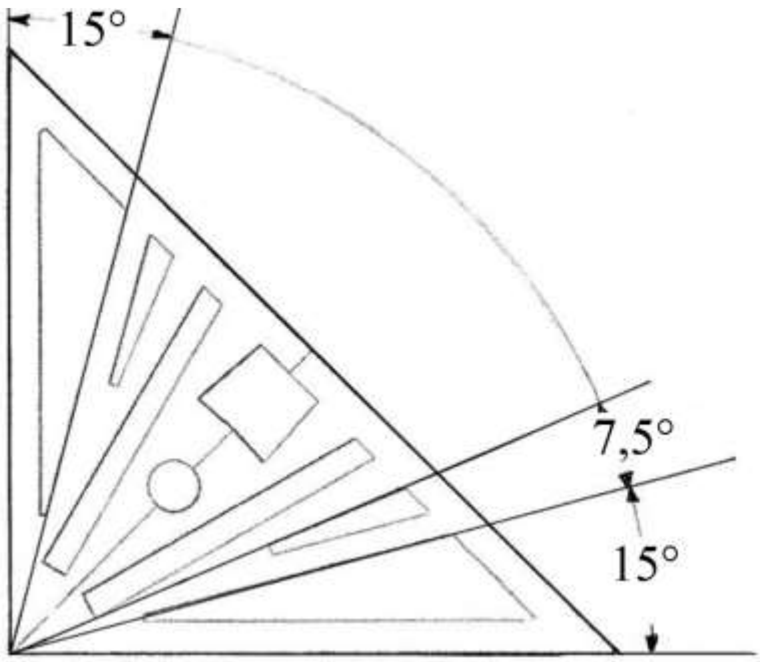


Altre squadre americane

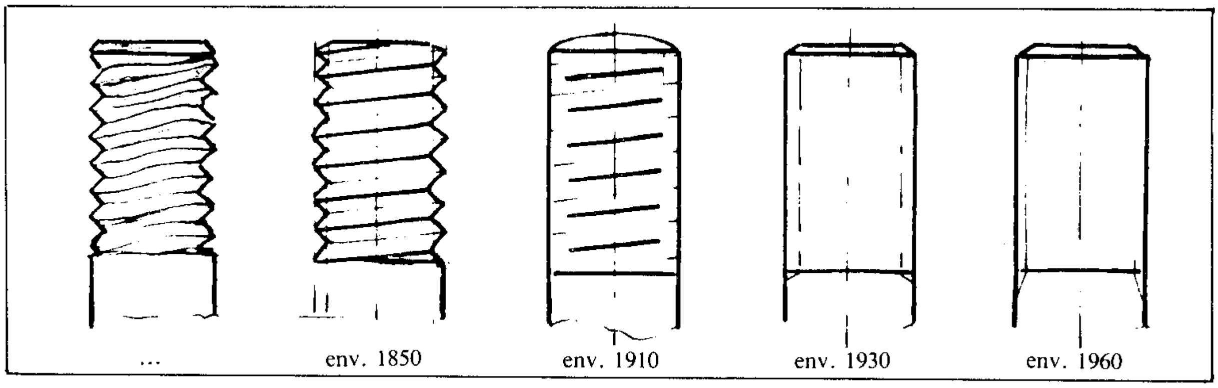
All'inizio del Novecento (e forse anche da prima) negli Stati Uniti erano usati diversi tipi di squadre, di uso generale o particolare.

Fra le squadre di uso generale vi è quella rappresentata nella figura che segue (tratta da AA.VV., *"Working Drawings and Drafting-Room Kinks"*, The Industrial Press, New York, 1911):

Si tratta di una comune *squadra a 45°* al cui interno venivano praticate delle *asole* inclinate con l'aiuto delle quali era possibile disegnare angoli di 7,5° e di 15° e loro multipli:

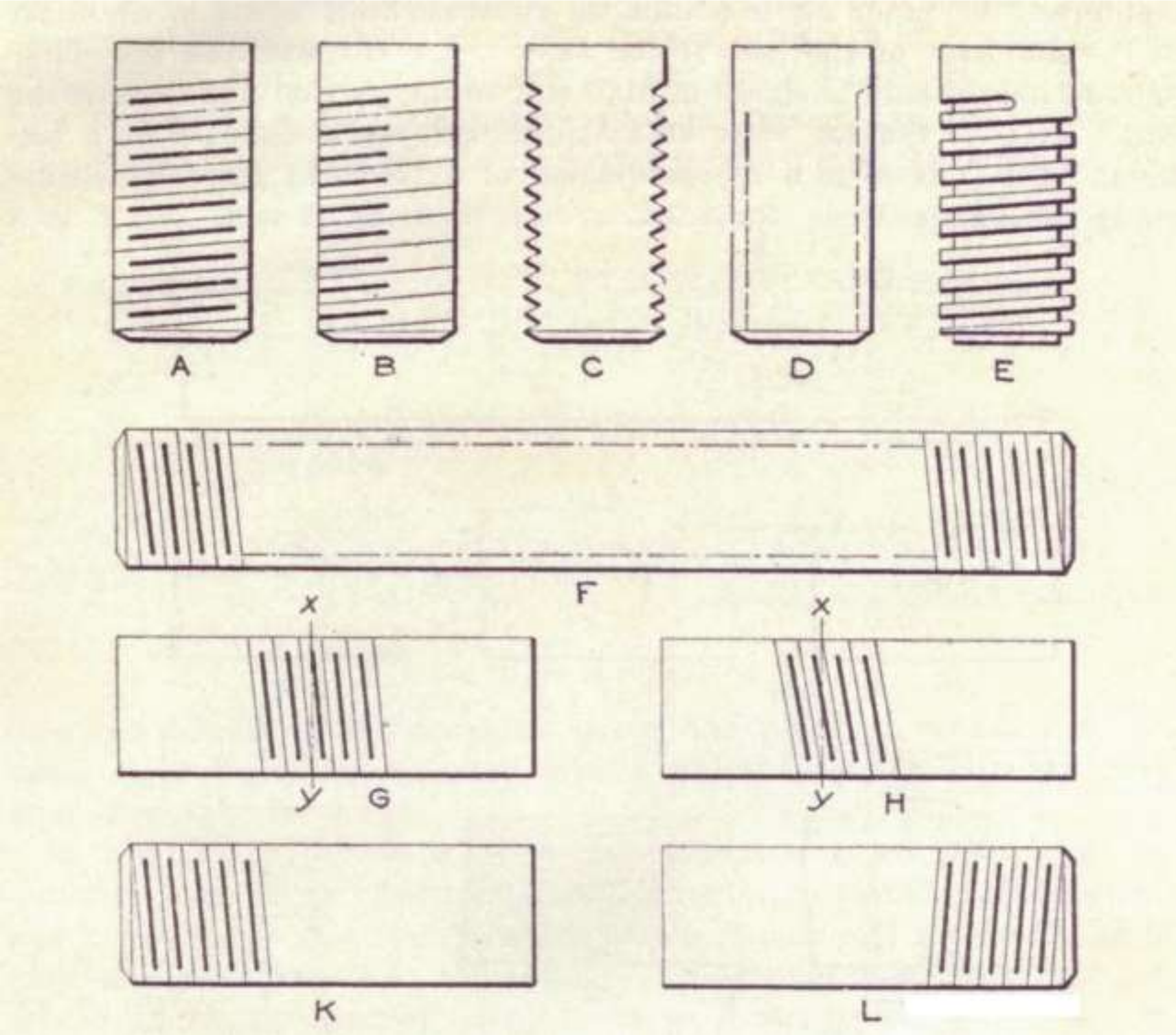


Fino a pochi decenni fa le *filettature* venivano disegnate in maniera più naturalistica rispetto alle regole semplificate che le norme (UNI, ISO) vigenti prevedono. La figura che segue (da Deforge) mostra l'evoluzione del disegno di filettature da quello manuale, a sinistra, fino all'attuale, risalente al 1960:



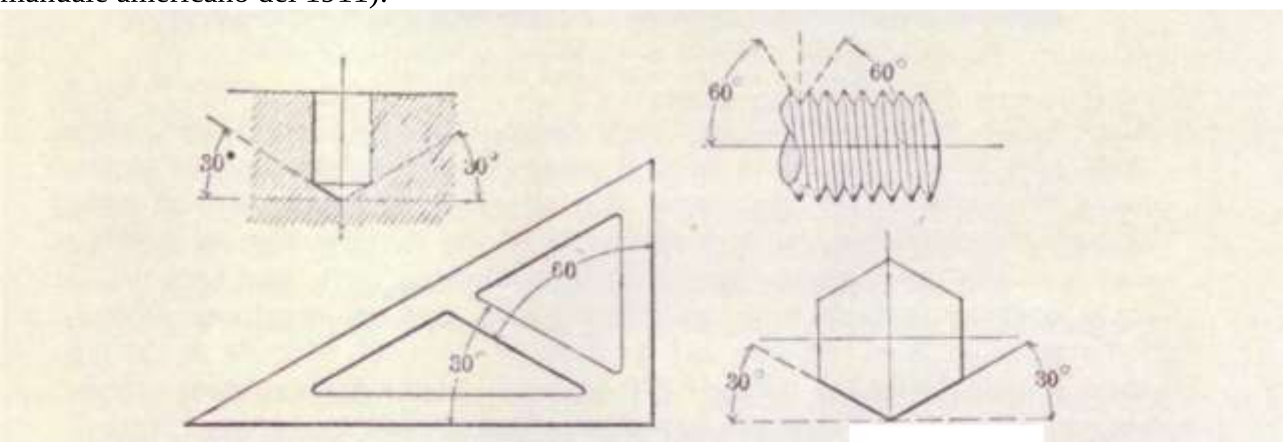
I primi disegni di filettature (il secondo e il terzo esempio della figura precedente) richiedevano tempo e pazienza.

Negli Stati Uniti erano usati diversi metodi per rappresentare le filettature; nella figura che segue (tratta dallo citato manuale del 1911) sono presentati alcuni esempi:



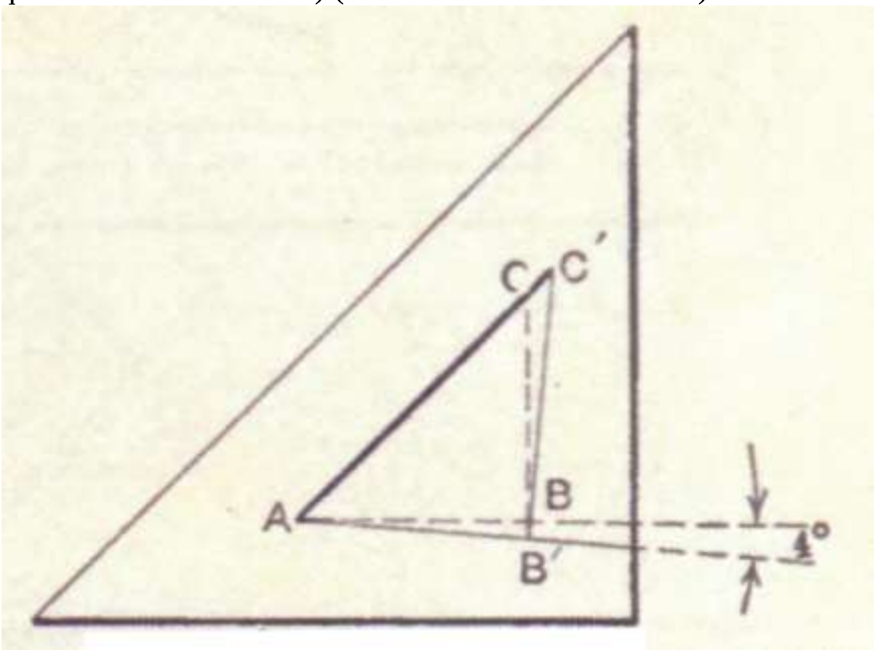
Quei disegni di filettature così dettagliati richiedevano tempo, abilità e pazienza: negli Stati Uniti si diffusero diversi modelli di squadre in grado di aiutare i disegnatori in questo compito.

Un’apposita squadra a 30-60° veniva modificata internamente producendovi due distinte *asole* di forma triangolare e con i loro lati paralleli sia fra loro che a quelli della squadra (dal citato manuale americano del 1911):

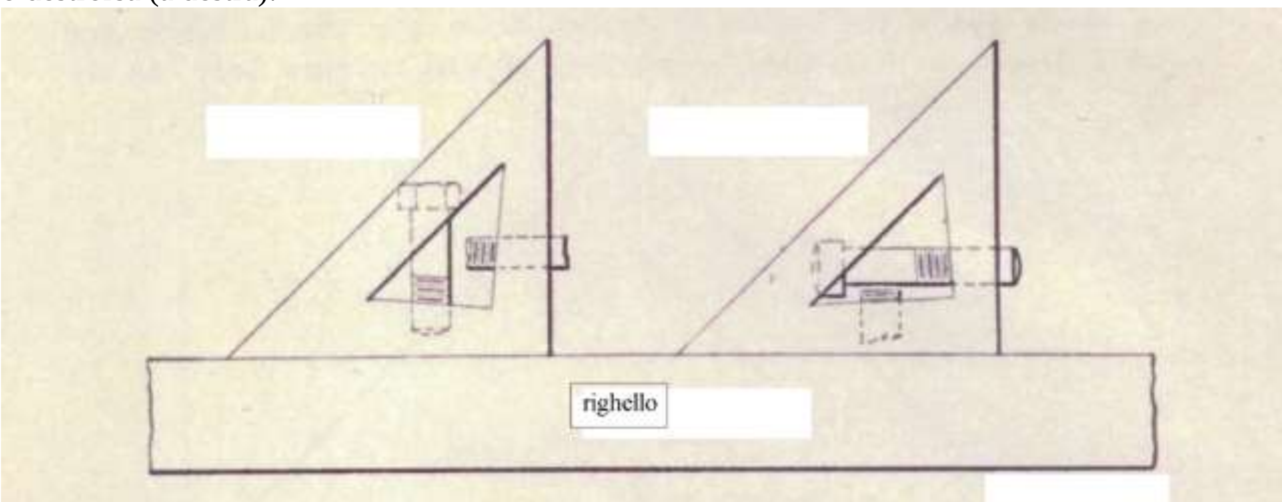


Con gli angoli interni di 30° e di 60° era facilitata l’esecuzione dei disegni di filettature e di bulloni e dadi.

Una squadra a 45° aveva l’asola interna AB’C’ sagomata in modo da divergere di 4° rispetto al triangolo isoscele ABC, avente i lati paralleli ai cateti e all’ipotenusa della squadre (come avviene nelle comuni squadra a 45° e a 30°-60°) (dal citato manuale del 1911):



L’inclinazione di 4° era usata per disegnare i filetti inclinati delle filettature.
Le filettature possono essere *destrorse* (le più usate) o *sinistrorse*. Con la squadra presentata nella precedente figura era possibile disegnare una filettatura sinistrorsa (a sinistra nella prossima figura) o destrorsa (a destra):

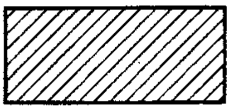
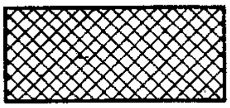


La squadra per tratteggi

I pezzi sezionati devono essere contrassegnati con particolari indicazioni. La soluzione più usata è quella del riempimento delle superfici con dei tratteggi.

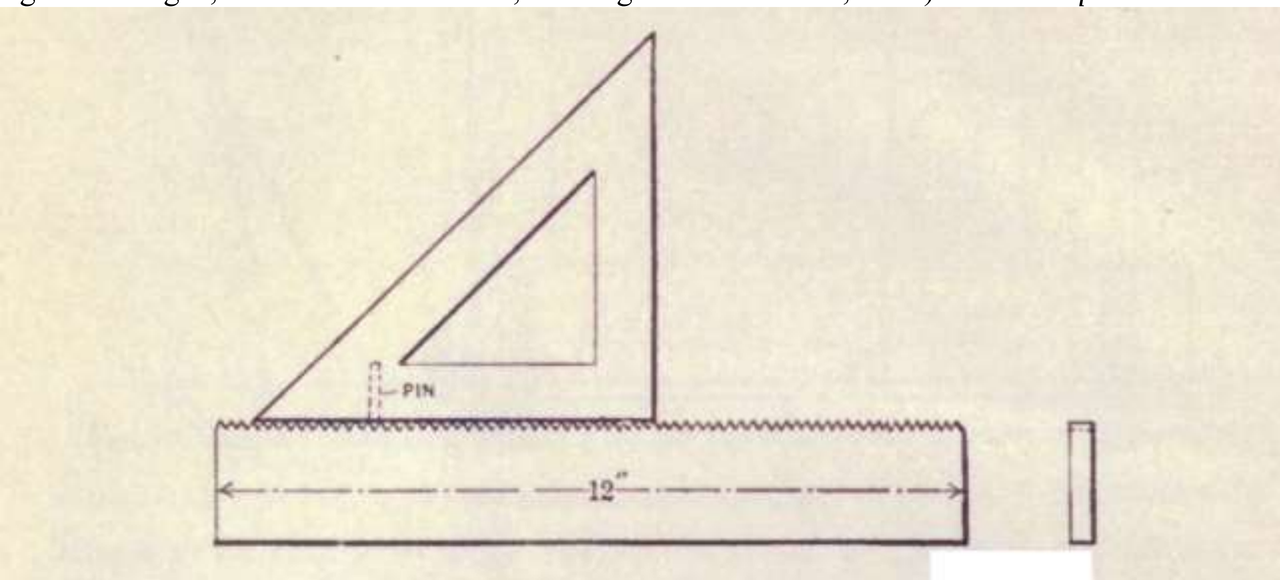
Ad esempio, in Italia, la norma UNI 3972 del settembre 1981 prevede l’uso del tratteggio inclinato per rappresentare il *materiale predominante* in un insieme:

Prospetto II

Numero d'ordine	Tratteggio	Natura del materiale
4.1.		Materiale predominante (per esempio: metallo in meccanica, laterizio in edilizia, vetro in ottica)
4.2.		Materiale da mettere in particolare evidenza (per esempio: parti a contatto con quelle individuate con il tratteggio 4.1)
		(segue)

Le linee sono generalmente inclinate di 45°, sono disegnate con tratto sottile e a distanza costante.

I disegnatori americani usavano una coppia di strumenti formata da un *righello* (che nella figura che segue, tratta dalla citata fonte, era lungo 12” e cioè 304,8 mm) e da una *squadra* a 45°:



Il righello aveva un bordo ondulato con un profilo triangolare: la squadra recava una punta (*pin*) sporgente che veniva bloccata in un vano del profilo. Le linee inclinate erano tracciate lungo l’ipotenusa della squadra, tenuta ben ferma dal blocco.

Spostando la squadra verso destra di una tacca era possibile tracciare un’altra linea inclinata.

Bibliografia

1. Bartoli Maria Teresa, “Le ragioni geometriche del segno architettonico”, Firenze. Alinea, 1997, pp. 117.
2. Bartoli Maria Teresa, “Il teorema degli anfiteatri: un’ipotesi”, in “Matematica e architettura”, Firenze, Alinea, 2001, pp. 25-32.
3. Bessac Jean-Claude – Codou Yann, “La représentation d’un lot d’outils de taille de pierre dans le cloître de Saint-Honorat (îles de Lérins)”, in “Bulletin Monumental”, tome 167, n° 4, année 2009, pp. 351-356.
4. Chiovelli Renzo, “Tecniche costruttive murarie medievali. La Tuscia”, Roma, “L’Erma” di Bretschneider, 2007, pp. 496.
5. Derforge Yves, “Le graphisme technique”. Son histoire et son enseignement, Champ Vallon, Seyssel (Francia), 1981, pp. 256.
6. Deforge Yves, “Technologie et génétique de l’object industriel”, Maloine, Parigi, 1985, pp. 196.
7. French Thomas E., “A manual of Engineering Drawing for Students and Draftsmen”, New York, McGraw-Hill Book Company, 1911, pp. xi+289.
8. French Thomas E., “A manual of Engineering Drawing for Students and Draftsmen”, second edition – second impression, New York, McGraw-Hill Book Company, 1918, pp. xii+329.
9. Henry Charles, “Sur les deux plus anciens traités français d’Algorisme et de Géométrie”, in “Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche”, vol. XV, Roma, 1882, pp. 49-70.
10. Legendre Léonard – Veillerot Jean-Michel, “L’architecte, l’équerre et la géometrie instrumentale au moyen âge: Analyse du plan de la Cathédrale de Reims”, in “Mediévalés”, n. 1, 1982, pp. 48-84.
11. Lluís i Ginovart Josep et alii, “Gothic Construction and the Traça of a Heptagonal Apse: The Problem of the Heptagon”, in “Nexus Network Journal”, 15(2013), pp. 325-348.
12. Lluís i Ginovart Josep, “Geometria y traza de escaleras góticas. Las escuadras como ábacos en la construcción de los caracoles de la catedral de Tortosa”, in “Informes de la Construcción”, vol. 68, 541, e132, gennaio-marzo 2016, pp. 1-10.
13. Lluís i Ginovart Josep et alii, “Les escuadras en las Marcas de cantero de la Vila d’Horta de Sant Joan (s. XIV)”, in “EGA – Revista de Expression Grafica Arquitectonica”, 22(31), novembre 2017, pp. 194-203.
14. Mathieu Clément, “Des équerres et des compas”, Panazol, Lavauzelle, 2013, pp. 174.
15. Redondo Buitrago Antonia, “La geometría interdisciplinary del nonagon mudéjar” in “VIII Congreso Iberoamericano de Educación matemática”. Libro de Actas, Andújar (Jaén) España, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2017, pp. 107-116.
16. Sarrade Marie-Thérèse, “Sur les connaissances mathématiques des bâtisseurs de cathédrales”, Parigi, “Librairie du Compagnonnage”, 1986, pp. 62.
17. Sené Alain, “Un instrument de précision au service des artistes du moyen âge: l’équerre”, in “Cahiers de civilisation médiévale”, 13, n. 52, octobre-décembre 1970, pp. 349-358.
18. Sené Alain, “Quelques instruments des architectes et des tailleurs de pierre au Moyen Âge: hypothèse sur leur utilisation”, in “Actes des congrès de la Société des historiens médiévistes de l’enseignement supérieur public”, 3e congrès, Besançon, 1972, pp. 39-52.
19. Shelby Lonnie R., “Medieval Masons’ Tools: the Level and the Plumb Rule”, “Technology and Culture”, Vol. 2, No. 2, 1961, pp. 127–130.
20. Shelby Lonnie R., “Medieval Masons’ Tools. II. Compass and Square”, “Technology and Culture”, Vol. 6, No. 2, 1965, pp. 236–248.
21. Shelby Lonnie R., “Mediaeval Masons’ Templates”, “The Journal of the Society of Architectural Historians”, Vol. 30, No. 2, may 1971, pp. 140 –154.