© Sergio Calzolani, Firenze, 2018
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: somma e differenza di due segmenti, moltiplicazione e divisione fra segmenti, potenza e radici quadrate, radice quadrata di 2, radice quarta, radice di 3, radice di 6, radici cubiche, costruzioni di Italo Ghersi, lunghezze costruibili dei lati di poligoni regolari, pentagono, ottagono, decagono, pentadecagono

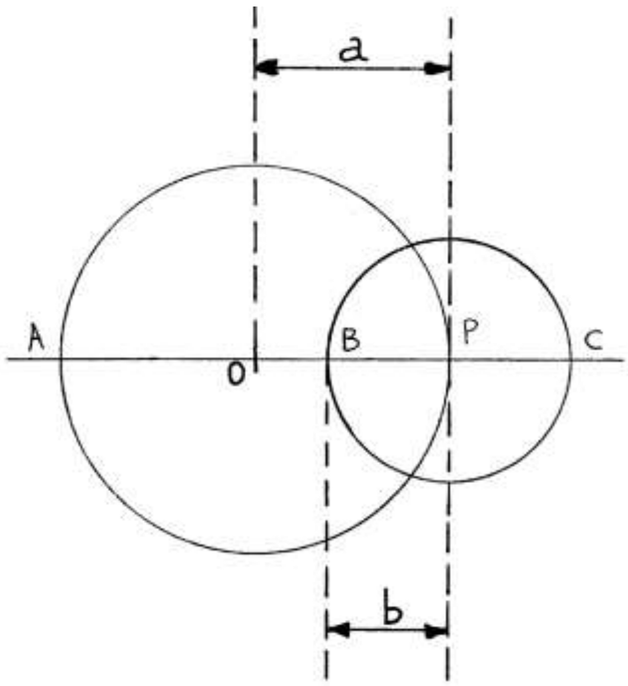
Problemi geometrici risolvibili con riga e compasso

Un problema è risolubile con riga e compasso purché sia possibile usare un metodo algebrico con un numero finito di operazioni.

È possibile eseguire somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e estrazioni di radici per via geometrica.

Somma e differenza di due segmenti

Tracciare una linea orizzontale e su di essa fissare due punti, O e P: la loro distanza è uguale a un segmento lungo a.



Con centro in O, disegnare una circonferenza di raggio OP: viene così fissato il punto A. Sulla retta orizzontale, a partire da P, prendere una lunghezza PB uguale a quella di un segmento b tale che $a > b$ e cioè $OP > PB$.

Fare centro in P e con raggio PB tracciare una circonferenza che taglia in C la retta orizzontale.

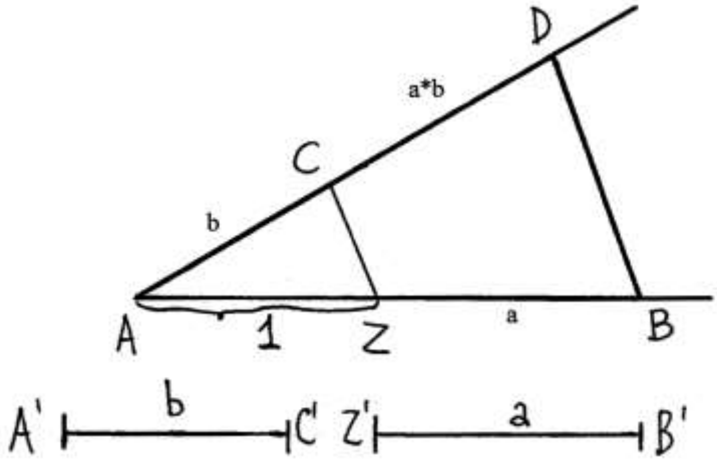
Risulta:

$$OC = OP + PC = a + b$$

$$OB = OP – PB = a – b.$$

La moltiplicazione e la divisione

La figura che segue spiega l'esecuzione di una moltiplicazione:



Un segmento AZ ha lunghezza uguale all'unità di misura scelta e cioè *convenzionalmente* 1. Il problema è: determinare la lunghezza di un segmento che corrisponda al prodotto della lunghezza di altri due: ZB (a) e AC (b). Prolungare verso destra AZ.

L'ampiezza dell'angolo *acuto* DAB deve essere contenuta, perché la costruzione possa svilupparsi più in senso orizzontale che in quello verticale ed avere dimensioni gestibili: se l'angolo fosse più ampio (ad esempio 75°) la costruzione si svilupperebbe eccessivamente in senso verticale.

Con la stessa scala usata per tracciare AZ, riportare in ZB la lunghezza di *a*.

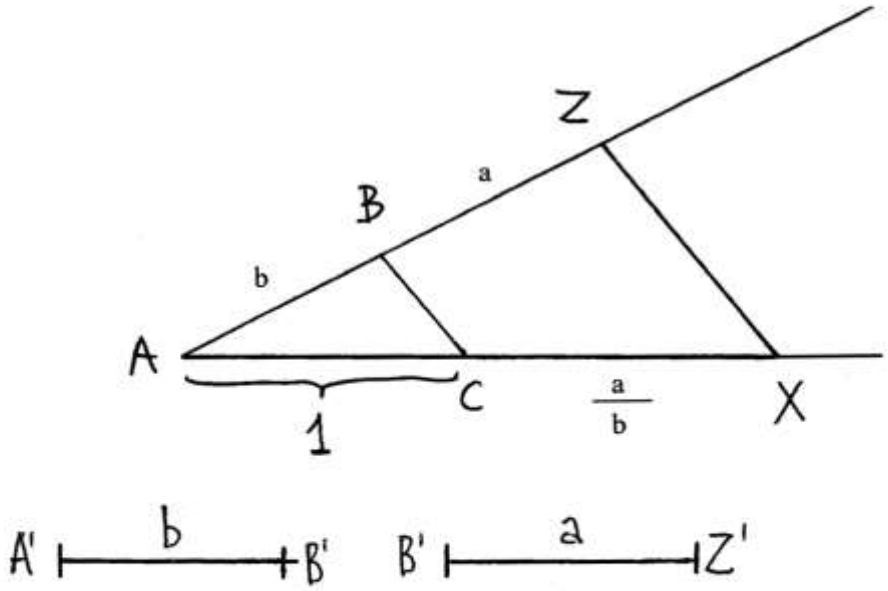
A partire da A condurre una semiretta inclinata a piacere: su questa ultima riportare il segmento AC (lungo *b*), sempre nella stessa scala usata per AZ e ZB.

Collegare i punti C e Z. A partire da B disegnare un segmento parallelo a CZ per intercettare il punto D; il segmento CD è lungo quanto il prodotto

CD = AC * AB .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La divisione fra due numeri (rappresentati dal dividendo BZ = a e dal divisore AB = b è descritta nella figura che segue:



Applicando di nuovo la regola della stessa scala di rappresentazione, disegnare una semiretta orizzontale da A verso destra e fissarvi il punto C, in modo che AC sia la lunghezza dell'unità di misura scelta.

A partire da A, tracciare una semiretta inclinata a piacere. Su di essa determinare il punto B a distanza AB = b e da B misurare la lunghezza a per fissare il punto Z tale che sia BZ = a.

Disegnare il segmento BC e parallelamente ad esso un segmento da Z fino a tagliare la semiretta orizzontale in un punto, X.

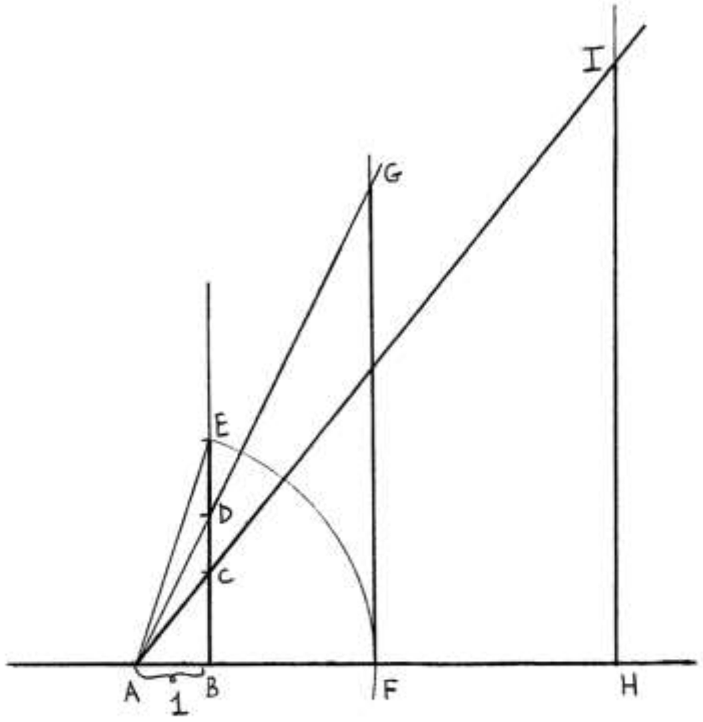
CX è il quoziente cercato:

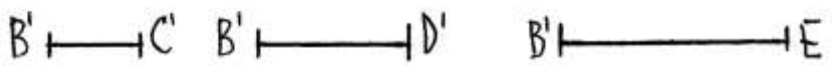
$$CX = BZ/AB .$$

<u>Moltiplicazione di 3 segmenti</u>

La costruzione che segue è ripresa dal bellissimo libro di Italo Ghersi ("Matematica dilettevole e curiosa", editore Hoepli).

Tracciare una retta orizzontale e fissarvi un punto, A:





Determinare il punto B, a distanza da A uguale alla lunghezza unitaria, 1, nella scala scelta.

Dal punto B elevare la perpendicolare alla retta.

A partire da B, riportare sulla perpendicolare, verso l'alto, le lunghezze dei tre segmenti da moltiplicare: in progressione sono BC, BD e BE.

Tracciare delle semirette uscenti da A e passanti per i punti C, D e E.

Fare centro in A e, con raggio AE, tracciare un arco da E fino a intersecare la retta orizzontale in un nuovo punto, F.

Dal punto F innalzare una perpendicolare alla retta: essa taglia la semiretta uscente da A e passante per il punto D, in un nuovo punto: è G.

Con il compasso, misurare la lunghezza di FG e riportarla sulla retta orizzontale a partire da A: viene così fissato il punto H.

Da questo ultimo punto, disegnare la perpendicolare alla retta orizzontale: essa interseca la semiretta passante per C, in un nuovo punto: è I.

Il segmento FG è lungo

$$FG = BE * BD$$

e il segmento HI è lungo

$$HI = BE * BD * BC$$

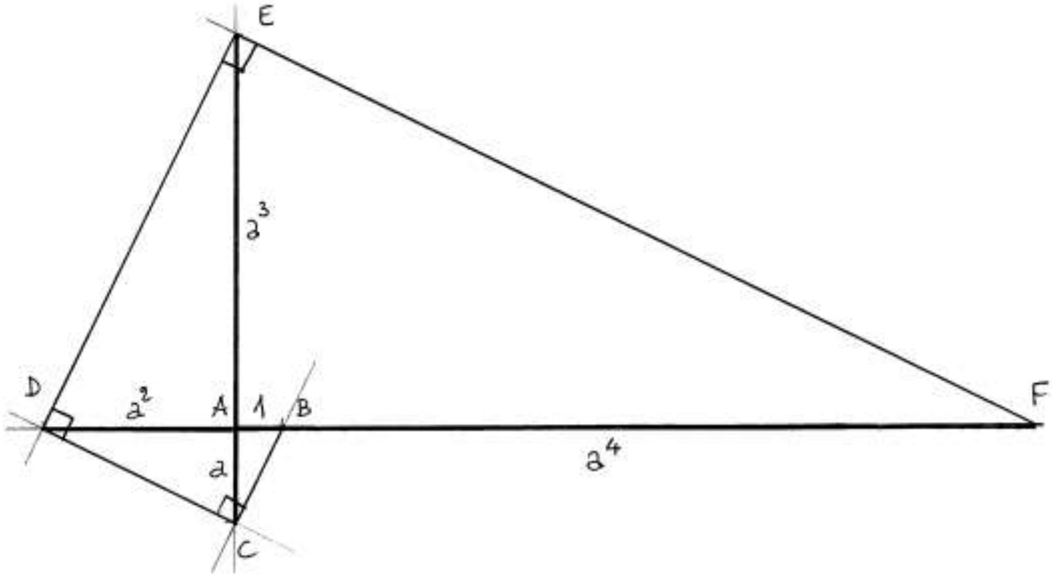
Per capire fino in fondo il risultato è opportuno notare che i triangoli ABD e AFG sono simili.

Anche i triangoli ABC e AHI sono fra loro simili.

Elevamento a potenza

Su di una retta orizzontale, stabilire il segmento AB lungo, *convenzionalmente,* 1.

Per il punto A, tracciare la perpendicolare alla retta orizzontale.



Sulla linea verticale appena costruita, fissare un segmento AC lungo a, che è un numero.

Tracciare il segmento BC e una perpendicolare a BC dal punto C fino a intersecare la retta orizzontale in un punto, D; disegnare CD.

Il segmento AD è lungo a^2.

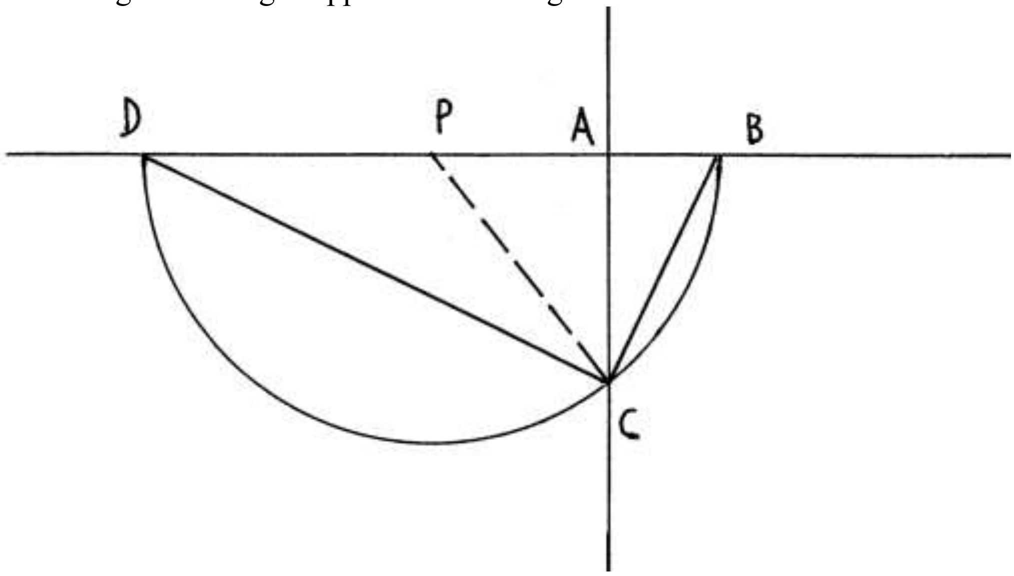
BCD è un triangolo rettangolo: BC e CD sono i suoi cateti, CA è l'altezza e DB è l'ipotenusa.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, l'altezza CA è medio proporzionale fra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa:

AB : AC = AC : AD . Sostituendo i valori si ha:

1 : a = a : AD da cui $AD^2 = a^2/1 = a^2$.

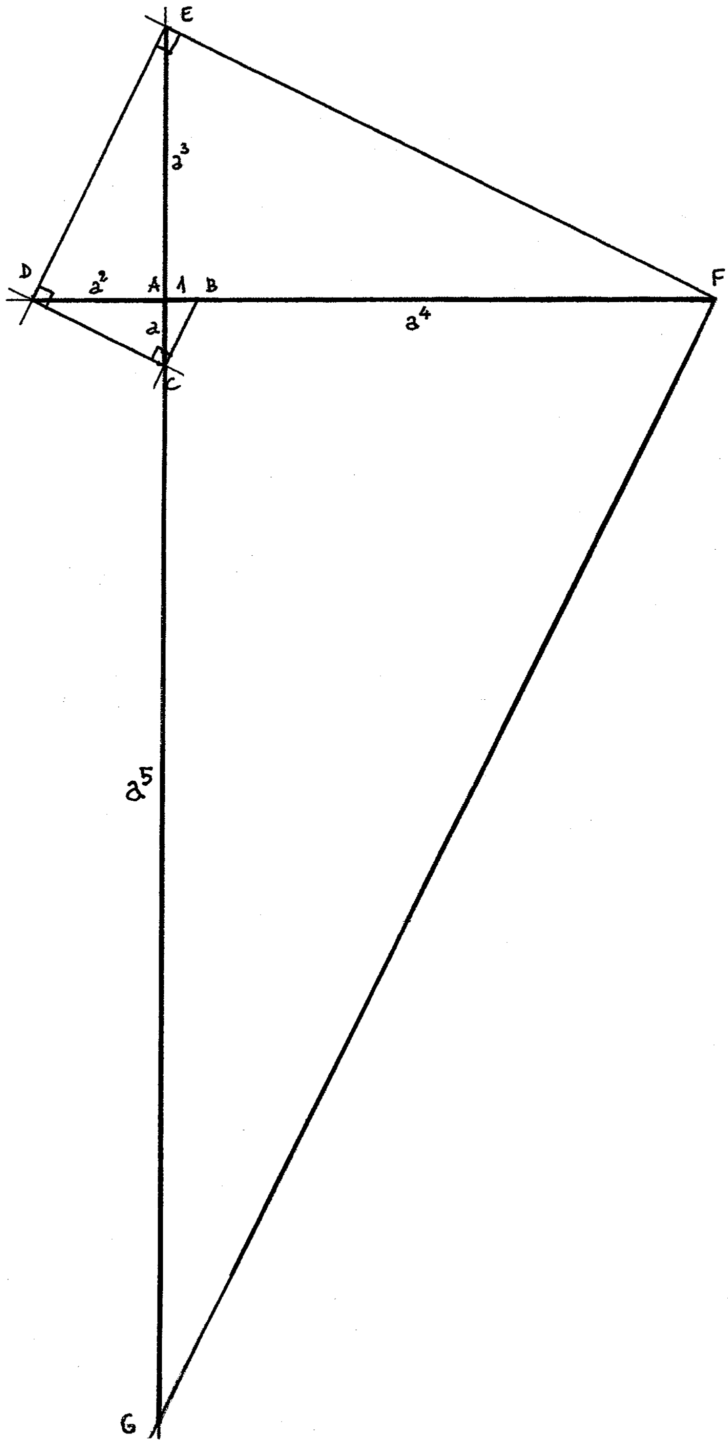
Il grafico della figura che segue approfondisce l'argomento:



Determinare il punto medio del segmento DB: è P. Fare centro in P e con raggio PB = PD tracciare una semicirconferenza: essa passa anche per il punto C. Il triangolo rettangolo BCD è inscritto in un semicerchio e ad esso è applicabile il 2° teorema.

A partire da D, condurre una perpendicolare fino a intercettare la verticale in un punto, E: il segmento AE è lungo a^3; applicando di nuovo il 2° teorema di Euclide al triangolo rettangolo CDE si ha:

AC : AD = AD : AE e sostituendo i valori noti si ottiene:
$a : a^2 = a^2 : AE$ da cui
$AE = (a^2 * a^2)/a = a^3$.

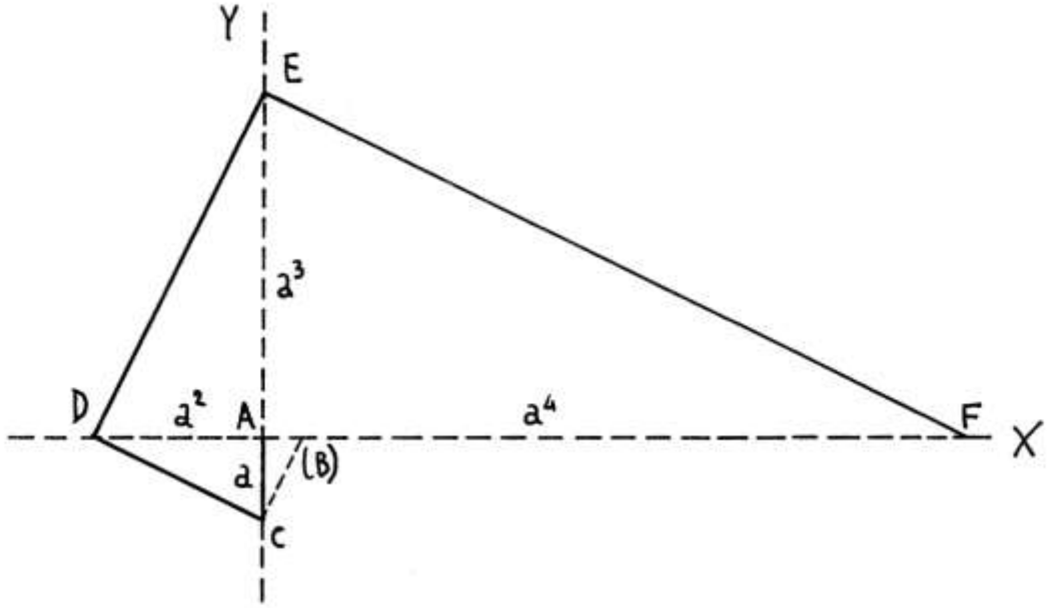


Dal punto E tracciare una perpendicolare al segmento DE, fino a tagliare la retta orizzontale in un punto, F. Il segmento AF è lungo a^4.

Con lo stesso metodo è facile costruire la lunghezza di a^5:

Le lunghezze dei successivi segmenti AB, AD, AE, AF, AG crescono secondo una *progressione geometrica* di ragione a.

La curva ACDEF… è una *spirale delle potenze* di a:

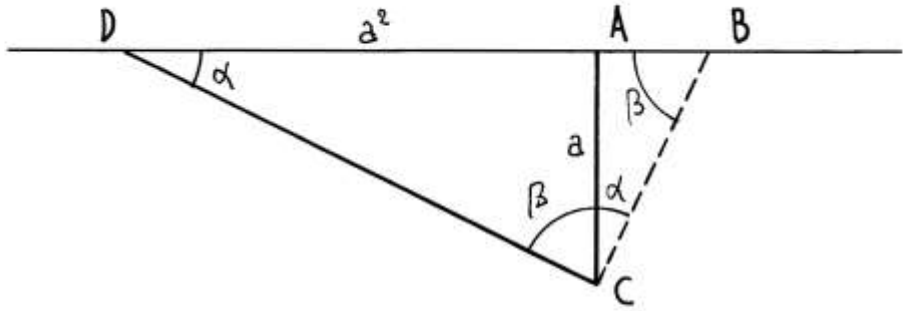


Il centro della spirale è il punto A, intersezione degli assi fra loro perpendicolari X e Y. La curva è formata da segmenti i cui vertici giacciono sugli assi X e Y. Le distanze dei vertici dal centro A sono potenze di a: esse sono tutte misurate lungo gli assi a partire da A.

I successivi segmenti che costituiscono la spirale formano sempre angoli retti. Due tratti di ordine pari o dispari sono sempre *paralleli*: è il caso dei dispari CD e EF.

In questo caso la spirale si avvolge in *senso orario*.

Prendiamo di nuovo in considerazione il triangolo rettangolo DBC:



Esso è scomposto dall'altezza AC in due triangoli rettangoli *simili* a DBC: DAC e ABC.

Gli angoli ADC e ACB hanno la stessa ampiezza α e gli angoli ACD e ABC sono di uguale ampiezza, β.

L'ipotenusa DC è data da:

$$DC^2 = DA^2 + AC^2 = (a^2)^2 + a^2 = a^4 + a^2 = a^2 * (a^2 + 1)$$ da cui

$$DC = a * \sqrt{(a^2 + 1)}\ .$$

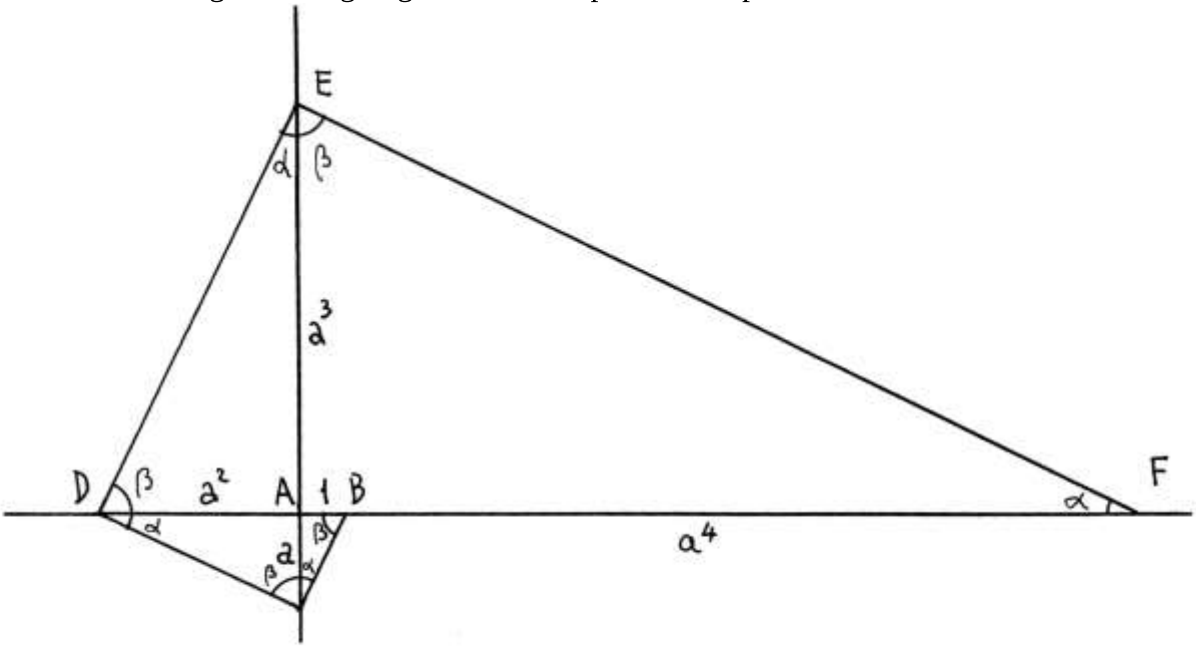
Le tre funzioni trigonometriche principali dell'angolo α valgono:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AC}{DC} = \frac{a}{a \cdot \sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

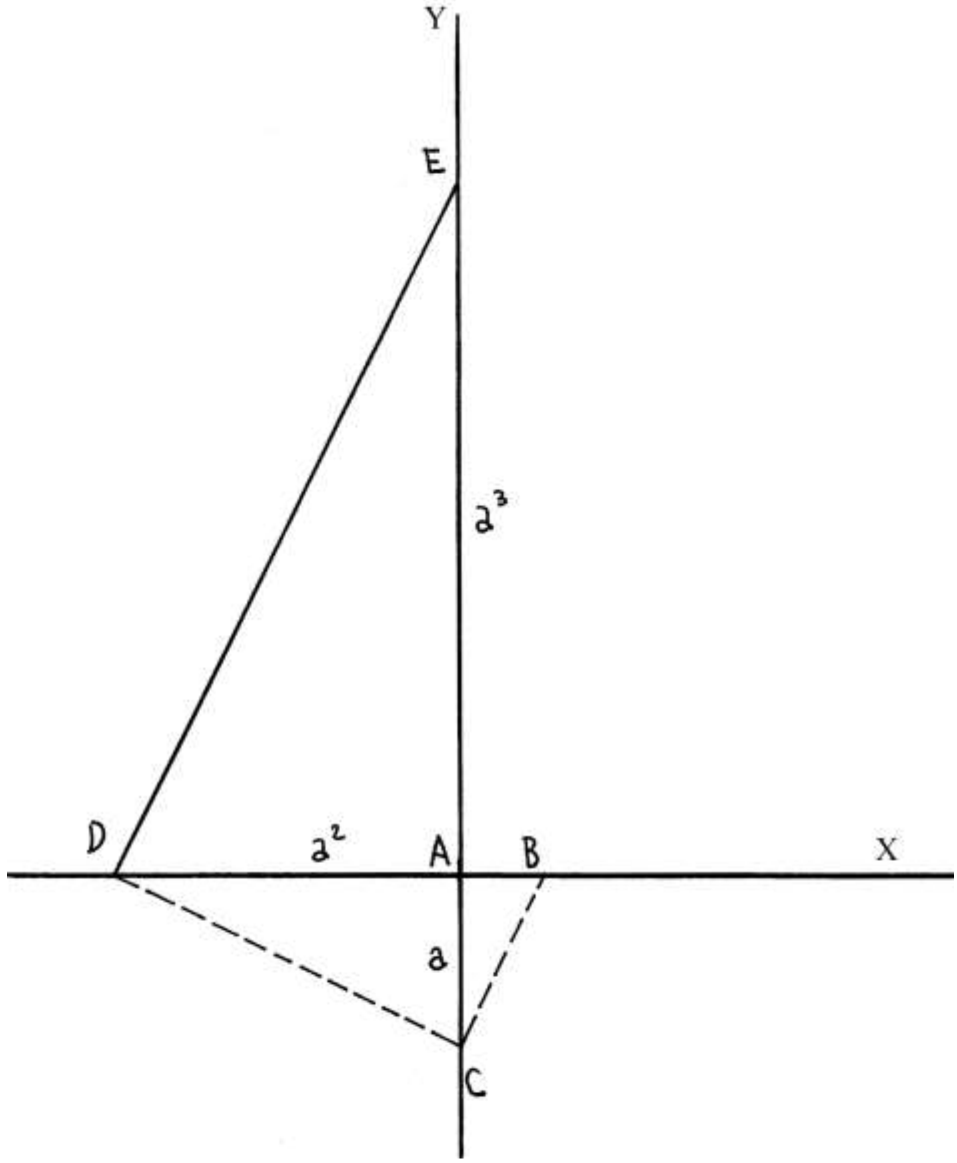
$$\cos\alpha = \frac{DA}{DC} = \frac{a^2}{a\cdot\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{AC}{DA} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

Tutti i triangoli rettangoli generati dalla spirale delle potenze sono fra loro *simili*:



La spirale delle potenze è *reversibile* e cioè è possibile graficamente ricavare la lunghezza di a a partire da due sue potenze, come mostra l'esempio del triangolo, ADE nella figura, di cui sono note le lunghezze dei cateti AD = a^2 e AE = a^3:



Prolungare i cateti AD e AE: sono disegnati gli assi X e Y.

Dal vertice D tracciare la perpendicolare all’ipotenusa DE fino a incontrare in C l’asse Y. Dal punto C condurre la perpendicolare a DC fino a tagliare l’asse X in un punto, B.

Il triangolo DEC è rettangolo e DA è la sua altezza relativa all’ipotenusa EC.

Applicando il 2° teorema di Euclide al triangolo DEC si ha:

AC : AD= AD : AE   da cui

$$AC = \frac{AD^2}{AE} = \frac{(a^2)^2}{a^3} = a$$

Applicando di nuovo il citato teorema di Euclide al triangolo rettangolo DBC si ha:

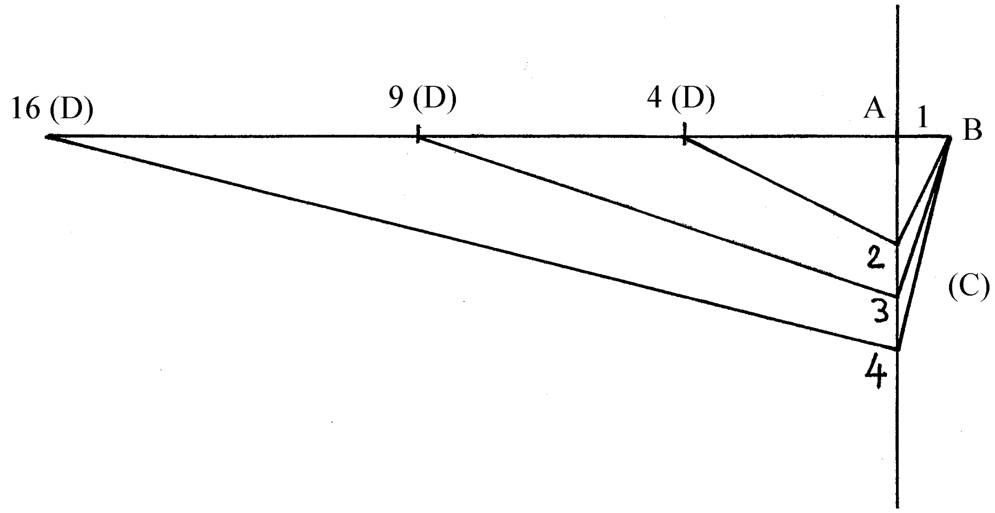
AB : AC = AC : AD   da cui

$$AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Il segmento AB è lungo 1 nella scala impiegata.

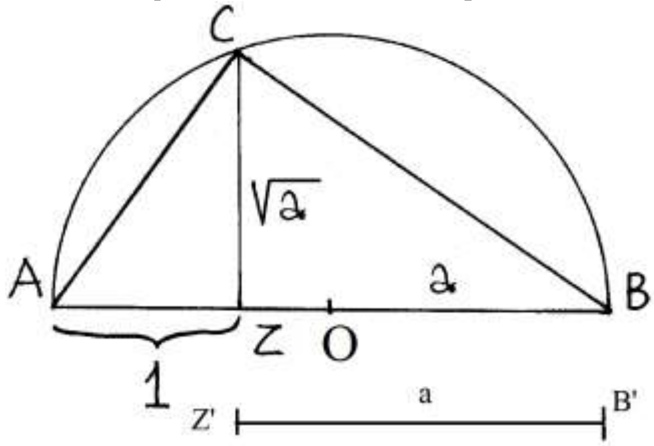
%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue spiega le successive posizioni che assumono i punti C e D del triangolo rettangolo BCD con il variare della lunghezza dell'altezza AC = a per i valori di 2, 3 e 4: la lunghezza di AB = 1 e la posizione del vertice B sull'asse X sono inalterate:



La radice quadrata

Per determinare la radice quadrata di un numero è possibile usare la costruzione che segue:



Disegnare una linea orizzontale e su di essa fissare tre punti A, Z e B tali che AZ sia la lunghezza unitaria e ZB quella di un segmento di lunghezza a.

Determinare il punto medio di AB, O, e tracciare una semicirconferenza di raggio OA = OB.

Dal punto Z innalzare una linea perpendicolare ad AB che la taglia la semicirconferenza nel punto C.

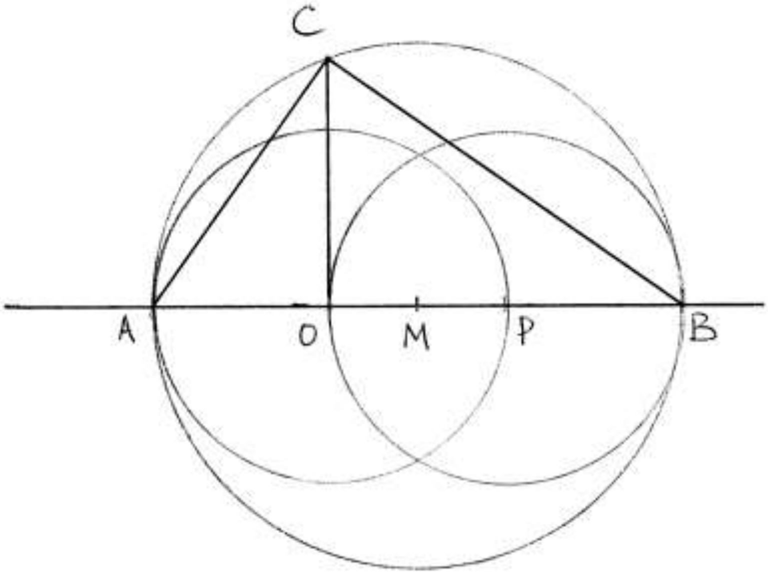
Per il *secondo teorema di Euclide*, $ZC^2 = AZ * ZB = 1 * a$, da cui

$$ZC = \sqrt{AZ * ZB} = \sqrt{a}$$

Il segmento ZC è lungo quanto la radice quadrata del segmento ZB.

Costruzione della radice di 2 – altro metodo

Disegnare una linea orizzontale e, su di essa, fissare cinque punti: A, O, M, P e B.
Il segmento OA è lungo, *convenzionalmente*, 1 e lo stesso vale per i segmenti OP e PB.



Il segmento OB è pertanto lungo, *convenzionalmente*, 2.

Il punto M è medio fra A e B (e fra O e P).

Tracciare tre circonferenze, due con raggio OA e centro in O e in P, e la terza con centro in M e raggio MA = MB.

Dal punto O innalzare la perpendicolare a AB, fino a intersecare la circonferenza più grande in un punto, C.

Disegnare i segmenti AC e CB. Il triangolo ACB è rettangolo con angolo retto in C.

Per il 2° teorema di Euclide, il quadrato costruito sull'altezza (CO) relativa all'ipotenusa (AB) ha la stessa area del rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti (AC e CB) sull'ipotenusa (rispettivamente AO e OB).

Il risultato è

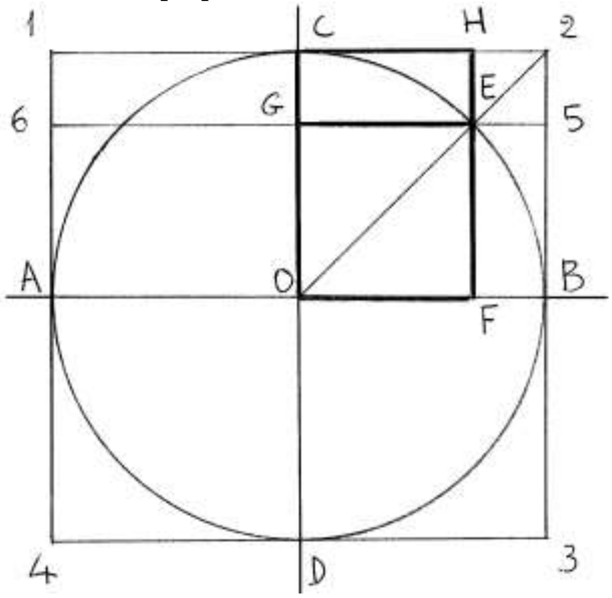
$$OC^2 = AO * OB .$$

Sostituendo le lunghezze convenzionali nella proposizione si ha: $OC^2 = 1 * 2$, per cui

$$OC = \sqrt{2} .$$

<u>Determinazione di $\sqrt{2}$ per via geometrica</u>

Tracciare due rette fra loro perpendicolari che si intersecano nel punto O:



Con apertura di compasso a piacere, fare centro in O e disegnare una circonferenza: essa taglia le rette nei punti A, B, C e D.

Tracciare il quadrato 1-2-3-4, circoscritto alla circonferenza.

Condurre il segmento O-2: esso fissa sulla circonferenza il punto E.

Disegnare il segmento EG (parallelo a AB) e quello HF, passante per E e parallelo al diametro verticale CD.

Il segmento OE è un raggio della circonferenza e anche la diagonale del quadrato OGEF.

Se il raggio della circonferenza è *convenzionalmente* lungo 1, per il teorema di Pitagora, i lati del quadrato OGEF sono lunghi:

$$OF^2 + FE^2 = OE^2$$

ma OF = FE per cui $2 * OF^2 = OE^2$ e

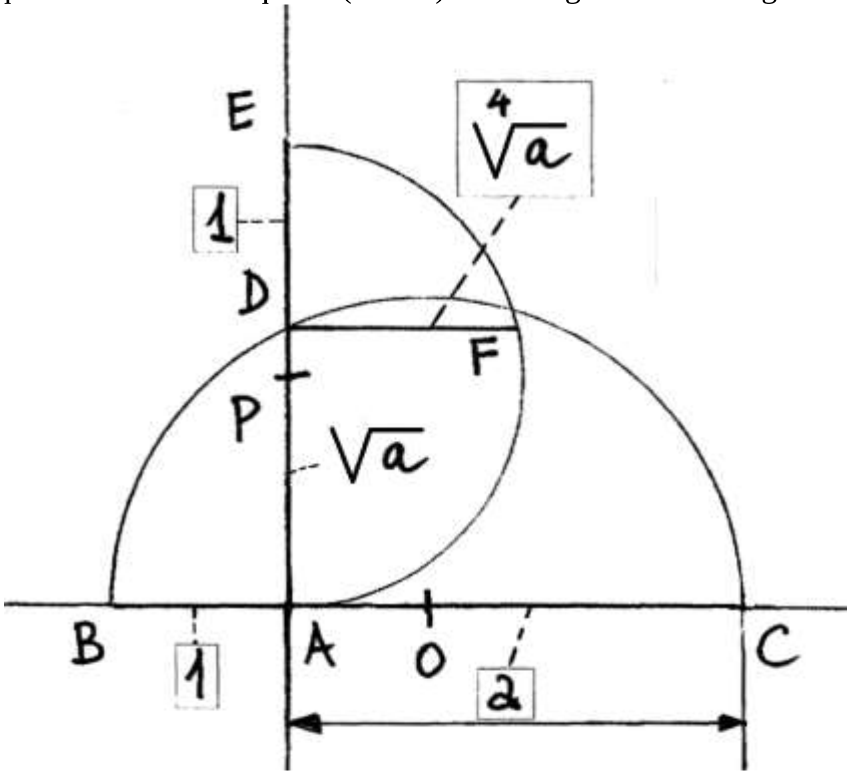
$$OF^2 = (OE)^2 /2.$$

OF è lungo: $OF = OE/\sqrt{2} = OE * (\sqrt{2})/2$.

Il rettangolo OCHF ha le lunghezze dei lati nel rapporto $\sqrt{2}$: OC : OF = $\sqrt{2}$: 1. Esso ha lo stesso rapporto che intercorre fra i lati del rettangolo che ha le dimensioni di un generico foglio di carta della famiglia dei *formati A*.

Radice quadrata e radice quarta

La figura che segue descrive una costruzione in grado di determinare per via geometrica la radice quadrata e la radice quarta ($\sqrt[4]{\ }$) della lunghezza di un segmento.



Tracciare una retta orizzontale. Fissare il segmento AB di lunghezza *convenzionale* 1. Da A fino a C riportare la lunghezza del segmento a della quale sono da determinare le lunghezze uguali alla radice quadrata e alla radice quarta.

Determinare il punto medio di BC, O. Con raggio OB = OC, fare centro in O e disegnare una semicirconferenza. Essa taglia la verticale in un punto, D: il segmento AD è lungo

$$\sqrt{a}$$

A partire da D, riportare verso l'alto un segmento lungo 1 (e cioè quanto AB): si ottiene il punto E.

Con la costruzione dell'asse del segmento AE determinare il punto medio dello stesso AE: è P.

Con centro in P e raggio PA, tracciare una semicirconferenza da A a E.

Dal punto D condurre un segmento parallelo a BC, fino a tagliare l'ultima semicirconferenza nel punto F.

Il segmento DF è lungo $\sqrt[4]{a}$.

Per determinare i due risultati (radice quadrata e radice quarta di a) è stato di nuovo applicato il 2° teorema di Euclide relativo alle proprietà del triangolo rettangolo.

<u>Radice quarta – altra costruzione</u>

AB è il diametro orizzontale di una circonferenza di centro O.

AH è lungo, *convenzionalmente*, 1 e HB è lungo 5. Il diametro AB è lungo, sempre convenzionalmente, (1 + 5) = 6.

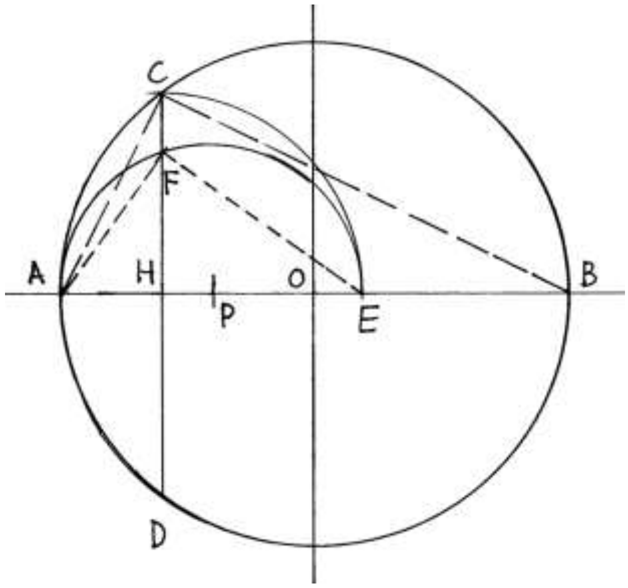
Per il punto H tracciare la *corda* CD, perpendicolare a AB; AH è la sua *freccia*.

ACB è un triangolo rettangolo e per il 2° teorema di Euclide, l'altezza CH è media proporzionale fra le due proiezioni dei cateti:

AH : CH = CH : HB

Sostituendo le lunghezze *convenzionali*:

1 : CH = CH : 5 da cui $CH^2 = 1 * 5 = 5$ e $CH = \sqrt{5}$.



Fare centro nel punto H e con raggio HC disegnare un arco da C fino a intersecare il diametro AB in un nuovo punto, E.

Il segmento HE è lungo $\sqrt{5}$ e AE è lungo:

AE = AH + HE = AH + HC = $1 + \sqrt{5}$.

Determinare il punto medio di AE: è P.

Fare centro nel punto P e, con raggio PA = PE, tracciare una semicirconferenza da A fino a E. Essa taglia la corda CD in un punto, F.

AFE è un triangolo rettangolo. Sempre per il 2° teorema di Euclide, vale la proporzione

AH : HF = HF : HE → AH : HF = HF : CH .

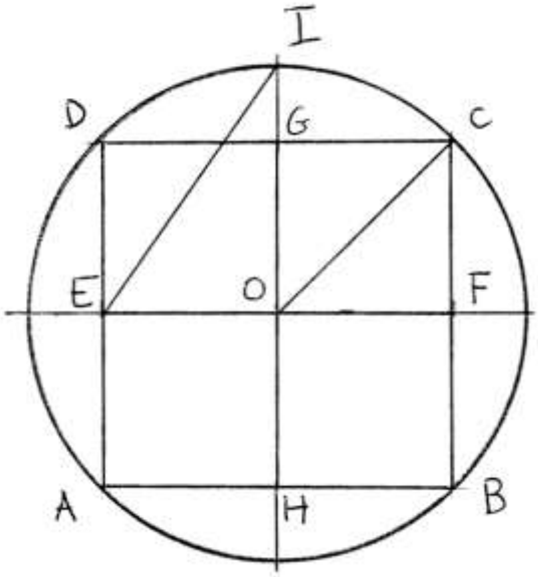
Sostituendo i valori numerici si ha:

1 : HF = HF : $\sqrt{5}$ da cui $HF^2 = 1 * \sqrt{5} = \sqrt{5}$ e

$$HF = \sqrt[2]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[4]{5}$$

Determinazione di $\sqrt{3}$ per via geometrica

Disegnare il quadrato ABCD e dividerlo in quattro quadrati uguali: il punto O è il centro del quadrato ed è definito dall'intersezione delle due mediane EF e GH.



Tracciare il segmento OC e, con centro in O e raggio OC, disegnare una circonferenza passante per tutti i vertici A, B, C e D.

Il segmento OC è lungo

$$OC = OF * \sqrt{2}$$

Il triangolo rettangolo EIO ha il cateto OE lungo quanto OF. Il cateto OI è il raggio della circonferenza ed è lungo

$$OI = OC = OF * \sqrt{2} = OE * \sqrt{2}$$

La lunghezza dell'ipotenusa EI viene ricavata con i seguenti passaggi:

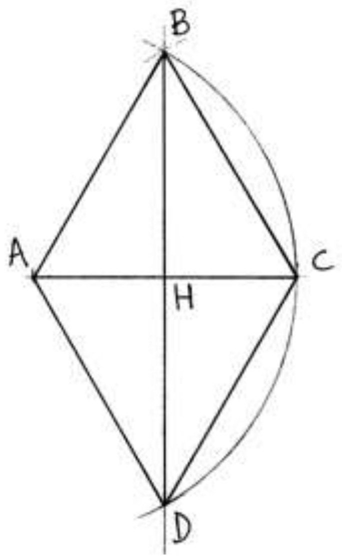
$$EI^2 = OE^2 + OI^2 = OE^2 + (OE * \sqrt{2})^2 = OE^2 + 2 * OE^2 = 3 * OE^2$$, da cui

$$EI = OE * \sqrt{3} .$$

Quindi, il segmento EI ha lunghezza proporzionale a $\sqrt{3}$.

Costruzione di $\sqrt{3}$ per via geometrica

Un altro metodo geometrico per determinare la radice di 3 è spiegato con la figura che segue:



ABC è un *triangolo equilatero* e H è il punto medio del lato AC.

Tracciare l'altezza BH e prolungarla verso il basso.

Fare centro nel punto A e, con raggio AB = AC, disegnare un arco da B passando per C fino a intersecare il prolungamento di BH in un nuovo punto, D.

ACD è un secondo triangolo equilatero, simmetrico rispetto a quello ABC e con le stesse dimensioni.

L'altezza di un triangolo equilatero è lunga $(\sqrt{3})/2$ volte un lato:

$$BH = [(\sqrt{3})/2\ ] * AC$$

Il segmento BD ha lunghezza uguale alla somma delle altezze:

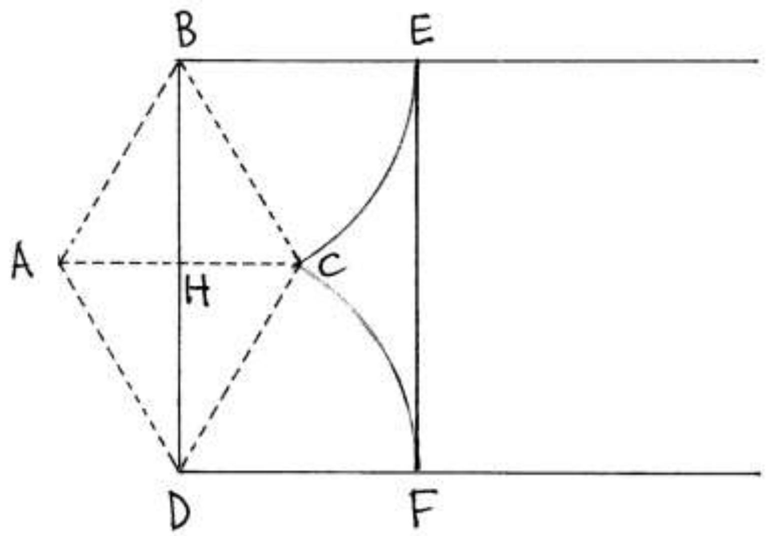
$$BD = BH + HD = 2\ BH$$

Ne consegue che

$$BD = 2 * [(\sqrt{3})/2\ ] * AC = (\sqrt{3}) * AC\ .$$

Se il lato dei triangoli equilateri è lungo 1, la lunghezza del segmento BD è convenzionalmente $BD = \sqrt{3}$.

Dalla precedente costruzione deriva quella che è spiegata nella figura che segue:



Per i punti B e D, tracciare due semirette parallele al lato AC e rivolte verso destra.

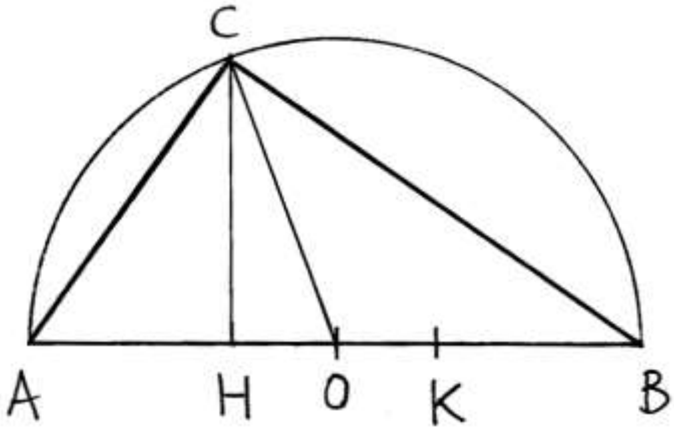
Fare centro nei punti B e D e, con raggio BC = DC, disegnare due archi dal punto C fino a intersecare le semirette nei punti E e F.

Il rettangolo DBEF ha lati lunghi secondo il rapporto $\sqrt{3}$:

BE : 1 = DB : = $\sqrt{3}$

<u>Costruzione di $\sqrt{6}$</u>

AB è il diametro di un semicerchio di raggio OA.



Il diametro AB è lungo, *convenzionalmente*, 3 e il raggio è lungo 1,5.

Dividere in *tre* parti uguali il segmento AB: sono fissati i punti H e K.

A partire dal punto H innalzare la perpendicolarea AB: essa incontra la semicirconferenza in un punto, C.

ACB è un triangolo rettangolo. Il segmento OC è un raggio ed è lungo 1,5; il segmento OH è lungo la metà di HK e cioè ½ di 1 e quindi 0,5.

L'altezza CH è lunga: $CH^2 = OC^2 – OH^2 = 1{,}5^2 – 0{,}5^2 = 2{,}25 – 0{,}25 = 2$.

CH è: $CH = \sqrt{2}$.

Il cateto AC è così determinato: $AC^2 = CH^2 + AH^2 = 2 + 1^2 = 3$.

AC è lungo: $AC = \sqrt{3}$.

Infine, il secondo cateto, CB, è lungo: $CB^2 = CH^2 + HB^2 = 2 + 2^2 = 6$.

Quindi CB è: $CB = \sqrt{6}$.

Questa costruzione era usata per determinare per via geometrica la lunghezza di $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$.

- APPROFONDIMENTO -

Chi era Italo Ghersi

Italo (Antonio Clelio Italo) Ghersi (Genova 1862 - Chiavari 1925), *ingegnere,* è stato un prolifico autore di manuali tecnici per il benemerito editore milanese Ulrico Hoepli.
La voce dedicata a Italo Ghersi su Wikipedia fornisce dettagliate informazioni sulla sua avvenurosa vita e sui suoi guai giudiziari.

Uno dei testi più famosi è la "*Matematica dilettevole e curiosa*", pubblicato per la prima volta nel 1913: la *quinta* edizione è stata ristampata nel 2004, sempre a cura dell'editore Hoepli, e consta di VIII-776 pagine con 660 figure originali.

Il titolo può trarre in inganno: il testo è una vera piccola enciclopedia matematica che affronta moltissimi problemi aritmetici, geometrici (prevalentemente di geometria piana), tracciamento di curve, sistemi articolati, probabilità, giochi. Ghersi descrive numerose costruzioni geometriche *approssimate* di poligoni regolari inscritti.

L'unico difetto che si può imputare al libro è di natura *tipografica*: ha dimensioni di 11,9x16,8 cm e i caratteri usati hanno un *corpo* assai piccolo. Sarebbe auspicabile che l'editore Hoepli lo ristampasse in formato più grande.

Il fisico Tullio Regge e il matematico Enrico Bombieri in differenti interviste hanno rivelato che la passione per la matematica era stata loro inculcata dalla lettura in giovanissima età della "*Matematica dilettevole e curiosa*" di Italo Ghersi.

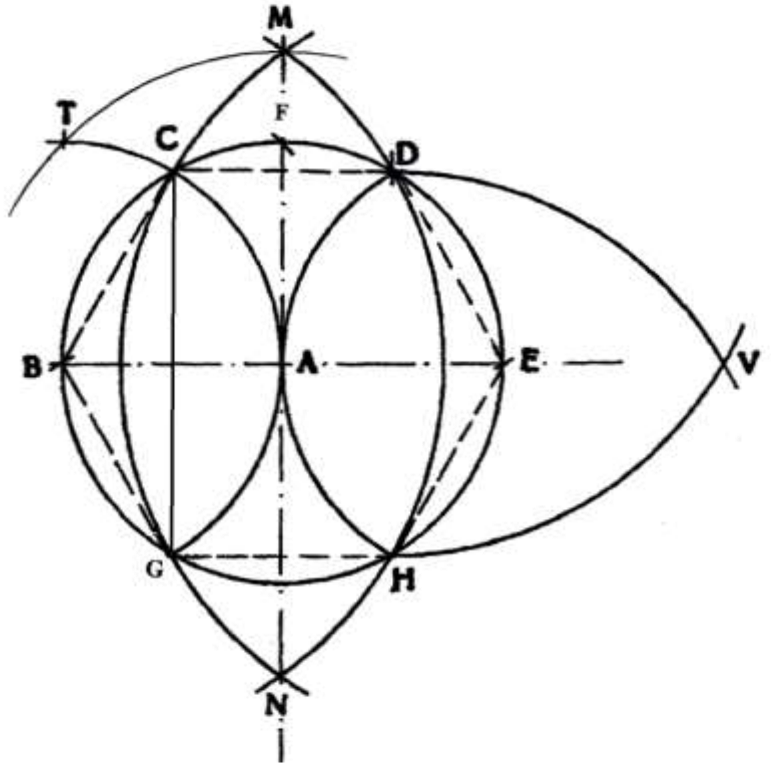
Un altro importante volume di Ghersi è citato dall'Ossola nell'elenco dei libri che nell'Ottocento e nel Novecento hanno fatto gli Italiani: si tratta del "*Ricettario industriale*".

- -

Le radici quadrate di Italo Ghersi

Nel suo famoso e bellissimo libro, già citato, Italo Ghersi presentò due costruzioni in gradi di determinare graficamente le *radici quadrate* di numeri interi.

Le figure che seguono sono riprodotte, con leggere modifiche, dal testo di Ghersi, a pagina 417 della ristampa del 2004.



A è il centro di un cerchio e BE è il suo diametro orizzontale.

Il raggio AB è *convenzionalmente* lungo 1(uno).

Fare centro nei vertici B e E con lo stesso raggio AB e determinare i vertici C, D, G e H dell'esagono inscritto.

Con raggio CG = DH fare centro nei punti B e E e D e H e tracciare quattro archi. I primi due si intersecano nei punti M e N per i quali passa il diametro verticale. Gli archi disegnati con centri in D e H si incontrano nel punto V.

Fare centro in A e con raggio AM disegnare un arco da M fino a tagliare l'arco GAC in un punto, T.

Ghersi afferma che i segmenti presenti sul grafico rappresentano lunghezze *convenzionali* uguali alle *radici quadrate* di numeri interi:

- AB = √1 = 1 ;
- AM = √2 ;
- BD [= CG] = √3 ;
- BE = √4 = 2 ;
- ET = √5 ;
- MV = √6 ;
- CV = √7 ;
- MN = √8 = 2 * √2 ;
- BV = √9 = 3 ;
- TV = √10 .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In generale, per costruire la radice quadrata di un generico numero intero n, $\sqrt{n}$, Ghersi propose questa soluzione.

Sottrarre n dal quadrato ad esso immediatamente superiore, m^2 . Nel caso di $n = 11$, il quadrato superiore più vicino è $16 = 4^2$.

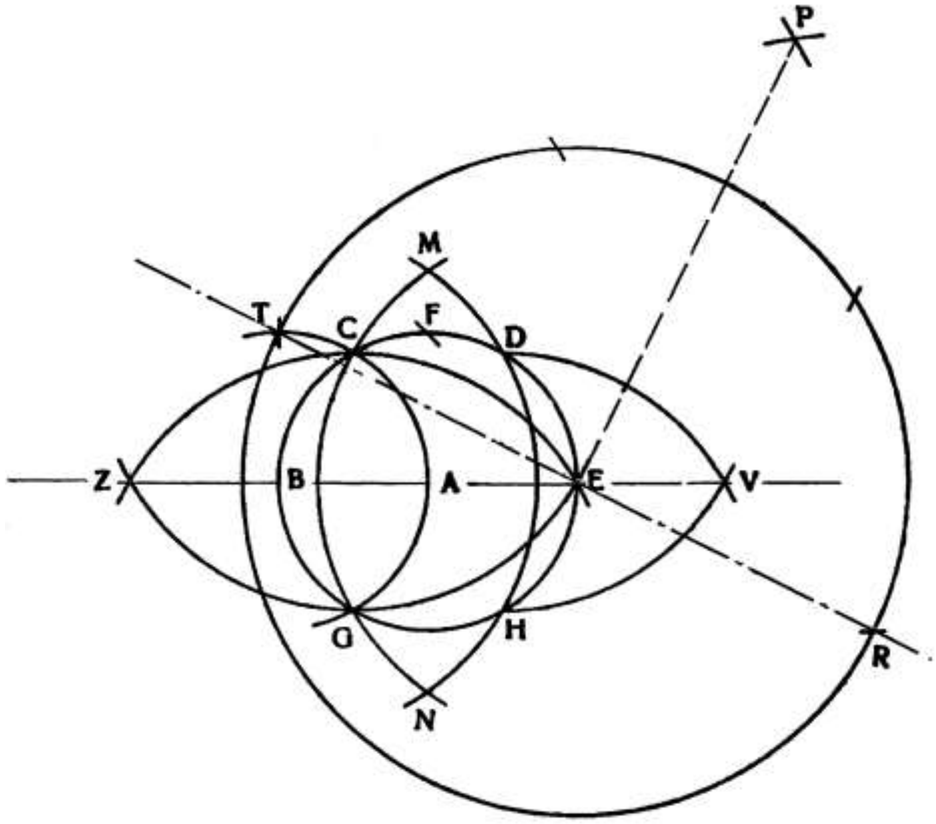
La formula generale di Ghersi è: $m^2 – n = k$.

Applicando la formula al caso di n = 11, la soluzione è: $4^2 – 11 = k = 5$.

Con la precedente costruzione è stato stabilito : ET = √5 = √k .

Riprodurre il primo diagramma. Tracciare una retta passante per i punti T e E.

Fare centro in E e con raggio ET disegnare una circonferenza che taglia la retta nel punto E.



Con il compasso, misurare la lunghezza di $VZ = \sqrt{16} = 4 = m$ e fare centro nei punti T e R con questa apertura: tracciare due archi che si intersecano nel punto P.

Il segmento EP è lungo $\sqrt{11}$.

Il metodo può essere applicato per valori di n maggiori di 11.

Nel caso di $n = 17$, dovrà essere scelto un numero m tale che $m^2 > 17$ e cioè

$m = 5$ e $m^2 = 25$.

SEGMENTI COSTRUIBILI CON RADICI QUADRATE

Le lunghezze dei lati di alcuni poligoni regolari possono essere ottenute con delle costruzioni geometriche che implicano l'uso delle radici quadrate: in questo modo si rivolvono i problemi aritmetici mostrati dai numeri irrazionali prodotti da quelle radici quadrate.

Le lunghezze corrispondenti a radici quadrate sono costruibili per via geometrica.

Tutti gli esempi forniti nei nei paragrafi che seguono sono basati sulla convenzione che il raggio del cerchio abbia lunghezza 1 (uno).

Solo alcuni poligoni sono costruibili con riga e compasso: altri come l'ettagono e l'ennagono regolari sono costruibili soltanto con gli strumenti della *geometria degli origami*.

Il lato del pentagono inscritto

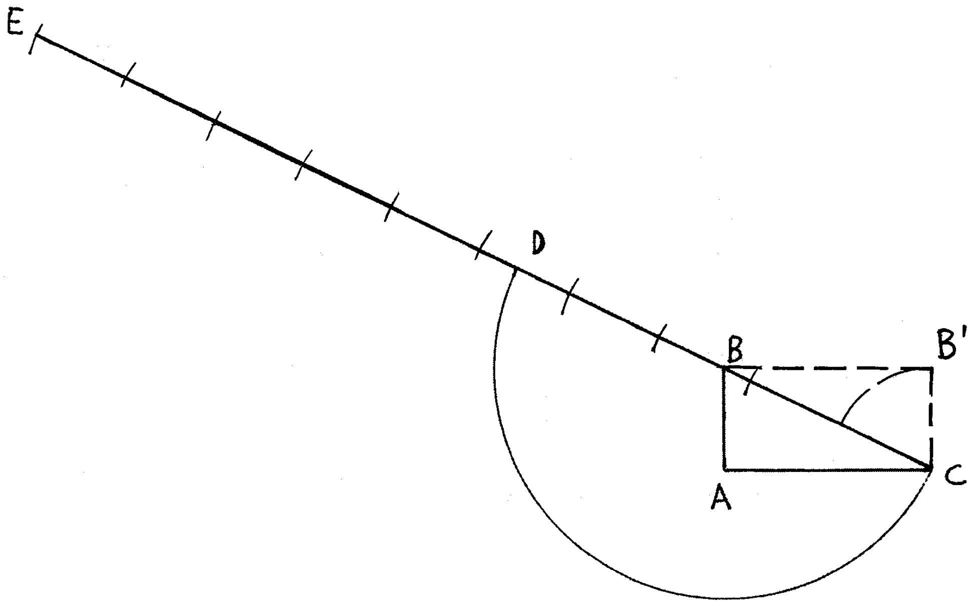
La lunghezza del lato di un pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *convenzionalmente* lungo 1 è data dalla seguente formula:

$$lato = \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{2}$$

Con una serie di costruzioni geometriche è possibile ricavare la lunghezza del lato uguale alla precedente espressione.

ABC è un triangolo rettangolo con i cateti in proporzione 1 : 2 :

AB : AC = 1 : 2



L'ipotenusa BC è lunga:

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \sqrt{(1^2 + 2^2)} = \sqrt{5}\ .$$

Prolungare verso sinistra l'ipotenusa BC.

Fare centro nel punto B e con raggio BC tracciare una semicirconferenza da C fino a stabilire il punto D.

Dal punto C misurare una lunghezza *convenzionale* uguale a 10 volte AB fino a stabilire il punto E: CB’ è lungo quanto AB.

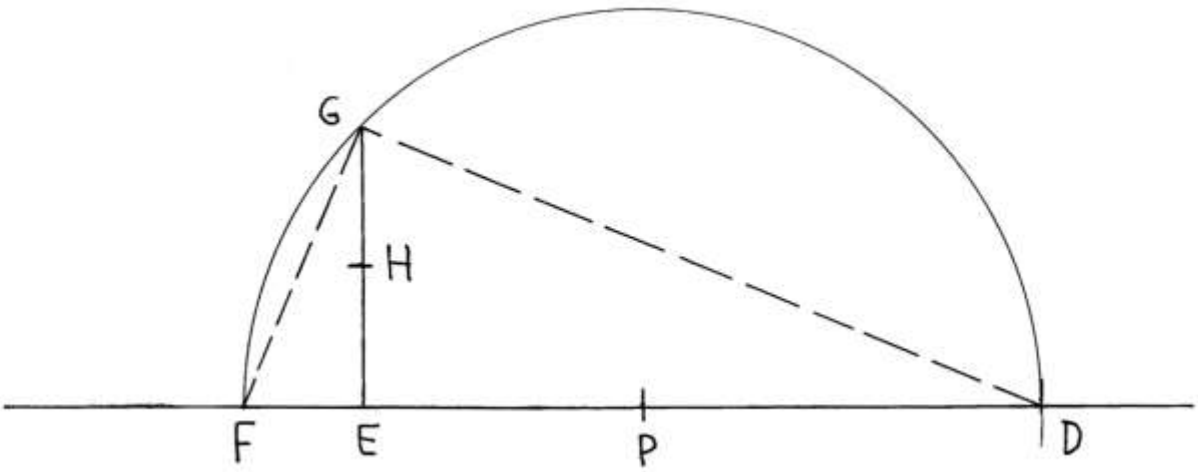
Le lunghezze dei segmenti presenti nella figura sono:

* $AB = 1$;
* $AC = 2$;
* $BC = \sqrt{5}$;
* $BD = \sqrt{5}$;
* $DC = 2 * \sqrt{5}$;
* $CE = 10$.

Il segmento ED è lungo:

$ED = EC – DC = 10 – 2 * \sqrt{5}$.

Con il compasso riportare la lunghezza di ED su di una retta orizzontale:



Dal punto E riportare sulla retta orizzontale, verso sinistra, la lunghezza *convenzionale* di AB (= 1) per stabilire il punto F.

Fissare il punto medio di FD: è P.

Fare centro in P e con raggio PF = PD tracciare una semicirconferenza da F a D.

Dal punto E innalzare la perpendicolare a FD fino a incontrare la semicirconferenza nel punto G.

FGD è un triangolo rettangolo inscritto nella semicirconferenza e GE è la sua altezza rispetto all’ipotenusa FD.

Per il 2° *teorema di Euclide* sui triangoli rettangoli, vale quanto segue:

$$FE : GE = GE : ED$$

$$GE^2 = FE * ED$$ da cui

$$GE = FE \cdot ED = \sqrt{1 \cdot (10 - 2 \cdot \sqrt{5})} = \sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}$$.

Il punto H è il medio dell’altezza GE ed è la lunghezza *convenzionale* del lato del pentagono inscritto:

$$GH = HE = \frac{GE}{2} = \frac{10 - 2 \cdot 5}{2} \cong 1{,}17557$$

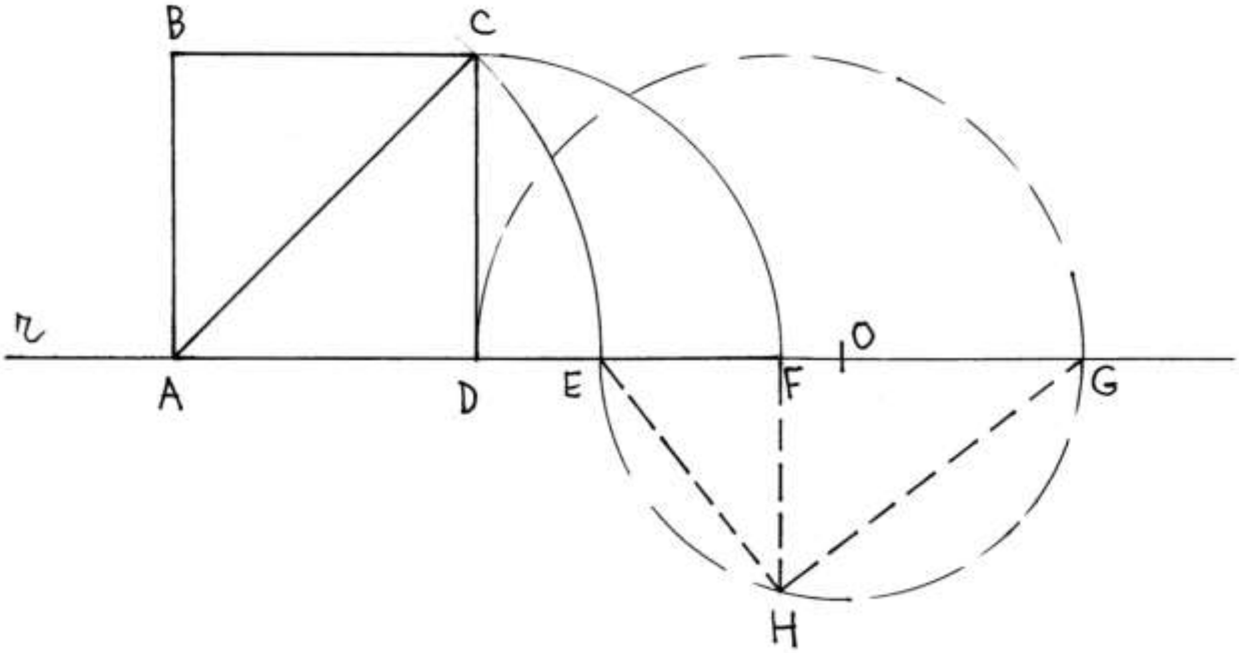
Il lato dell’ottagono inscritto

Un ottagono regolare è inscritto in una circonferenza di raggio *convenzionale* 1.
La lunghezza del lato è:

$$\text{lato ottagono} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

La lunghezza del lato è costruibile per via geometrica.

Tracciare una retta orizzontale, r, e su di essa costruire il quadrato ABCD di lato lungo 1.



AC è una diagonale che è lunga

$$AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}\ .$$

Fare centro nel punto A e con raggio AC tracciare un arco da C fino a intersecare la retta r nel punto E.

Con centro in D e raggio DC disegnare un arco da C fino a tagliare la retta r nel punto F.

Fare centro nel punto F e con raggio FD (= 1) tracciare una semicirconferenza da D fino a incontrare la retta r nel punto G.

Il segmento DG è *convenzionalmente* lungo 2.

Il segmento EF è lungo:

$$EF = AF - AE = 2 - \sqrt{2}\ .$$

Occorre mettere in atto una costruzione che permetta di determinare la *radice quadrata* di $(2 - \sqrt{2})$, utilizzando il 2° teorema di Euclide.

Il segmento FG è lungo 1.

O è il punto medio di EG. Fare centro in O e con raggio OE = OG disegnare una semicirconferenza da E a G.

Dal punto F abbassare la perpendicolare al segmento AG: essa intercetta la semicirconferenza nel punto H.

L'altezza FH è medio proporzionale fra EF e FG:

$$FH^2 = EF * FG$$
$$FH = \sqrt{(EF * FG)} .$$

Sostituendo i numeri si ha:

$$FH = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right) \cdot 1} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Il segmento FH ha la lunghezza del lato dell'ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio AB = 1.

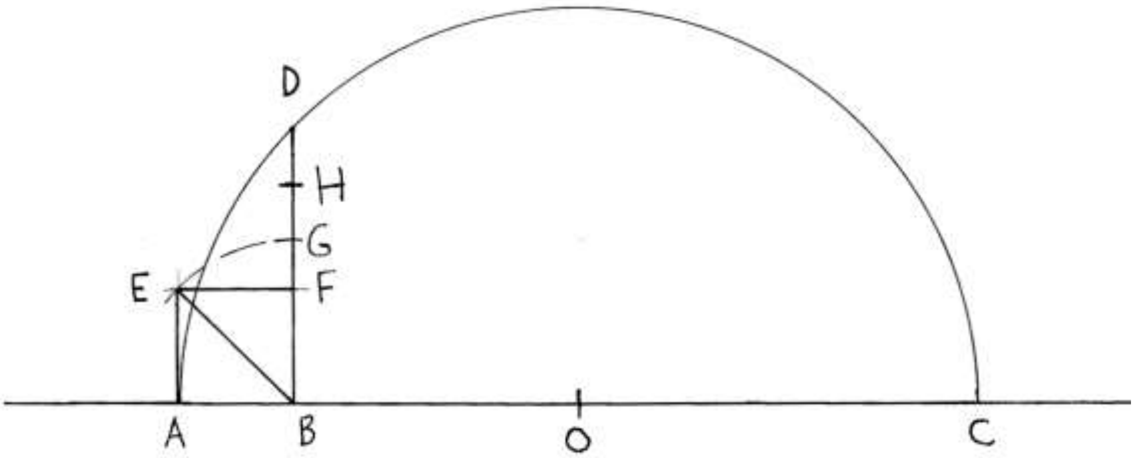
Il lato del dodecagono regolare inscritto

Questo poligono regolare è facilmente costruibile a partire dall'esagono regolare.

Un dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *convenzionale* 1 ha lato lungo:

$$\text{lato dodecagono} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

La costruzione di $\sqrt{6}$ è descritta dalla figura che segue:



Tracciare una retta orizzontale e fissarvi *tre* punti A, B e C a distanze *convenzionali* uguali a AB = 1 e BC = 6. Il segmento AC è lungo 1 + 6 = 7

Determinare il punto medio di AC: è O.

Fare centro nel punto O e, con raggio OA = OB, disegnare una semicirconferenza da A a C.

Dal punto B innalzare la perpendicolare fino a incontrare la semicirconferenza nel punto D.

L'altezza BD è medio proporzionale fra AB e BC:

$$BD^2 = AB * BC \text{ da cui}$$
$$BD = \sqrt{(AB * BC)} = \sqrt{(1 * 6)} = \sqrt{6} .$$

Sul segmento AB costruire il quadrato AEFB.
Disegnare la diagonale BE: essa è *convenzionalmente* lunga $\sqrt{2}$.
Fare centro nel punto B e con raggio BE tracciare un arco da E fino a stabilire il punto G.
Il segmento DG è lungo:

$$DG = DB - FG = \sqrt{6} - \sqrt{2} .$$

Il punto H divide in due parti uguali DG:

$$GH = HD = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2 .$$

GH e HD sono due lati del dodecagono regolare inscritto in un cerchio di raggio convenzionale 1.

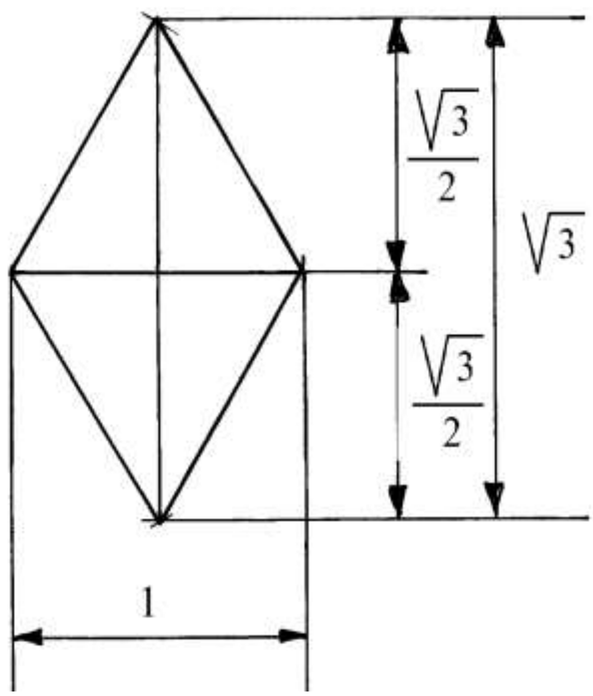
<u>Il lato del pentadecagono regolare inscritto</u>

Questo poligono regolare può essere disegnato a partire dalla costruzione del triangolo equilatero e del pentagono regolare inscritti nello stesso cerchio e *con un vertice in comune*, come mostra l'ultima figura di questo paragrafo: il punto A è il vertice comune al triangolo equilatero e al pentagono e, di conseguenza, anche del pentadecagono.

Il lato del pentadecagono inscritto in una circonferenza di raggio 1 è lungo:

$$lato = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{15}}{4}$$

Come abbiamo già visto in un precedente paragrafo, il valore di $\sqrt{3}$ è facilmente costruibile con l'aiuto di due triangoli equilateri uniti per un lato di lunghezza 1:



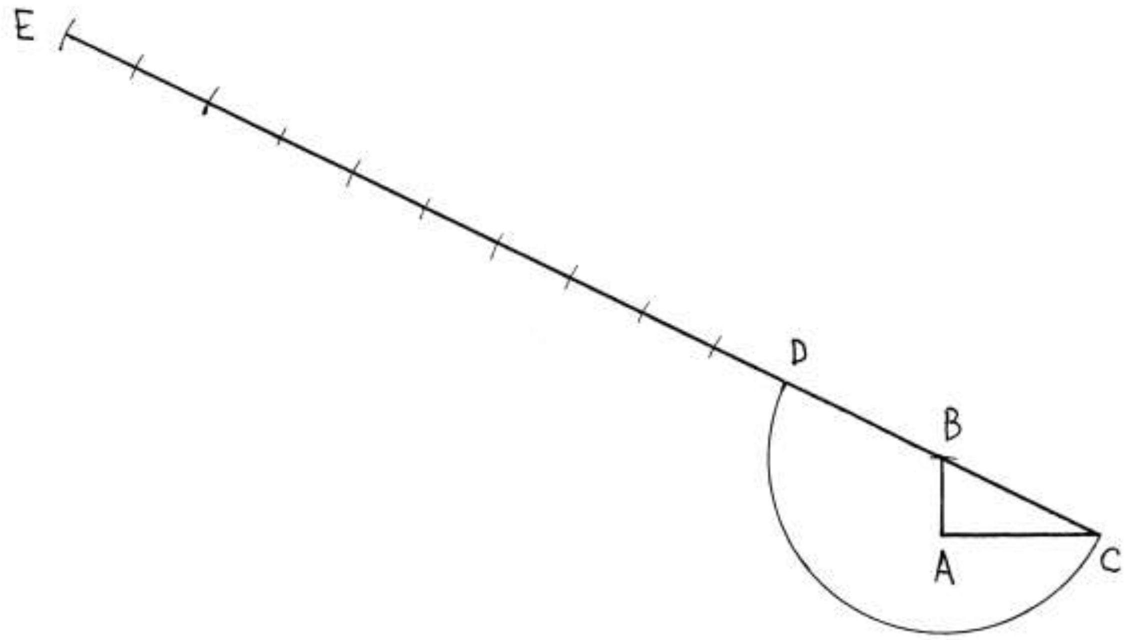
La doppia altezza è lunga $\sqrt{3}$.

Il valore del secondo membro – $\sqrt{15}$ – al numeratore della precedente espressione che misura la lunghezza del lato del pentadecagono è costruibile con riga e compasso.

Parte della costruzione che segue è uguale a quella già descritta per il pentagono regolare.

ABC è un triangolo rettangolo con lati lunghi *convenzionalmente*

$AB = 1$ $AC = 2$ $BC = \sqrt{5}$.



Prolungare verso sinistra l'ipotenusa BC. Fare centro nel punto B e con raggio BC tracciare una semicirconferenza da C fino a stabilire il punto D.

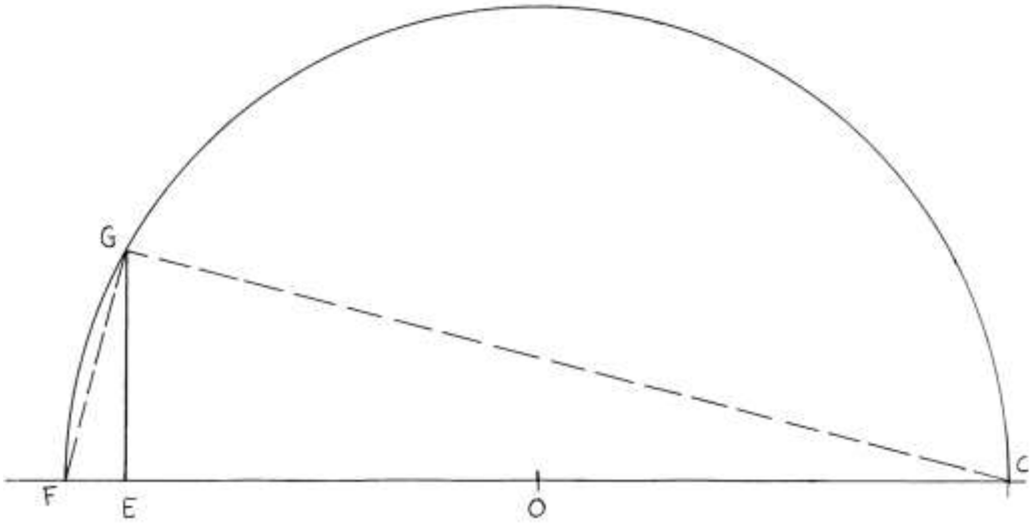
Il segmento DC è lungo $DC = 2 * \sqrt{5}$.

Dal punto D determinare la posizione del punto E a distanza convenzionale uguale a 10 volte la lunghezza di AB. 10:

$DE = 10$.

Il segmento EC è lungo $EC = ED + DC = 10 + 2 * \sqrt{5}$.

La costruzione della *radice quadrata* dell'ultima espressione è realizzabile con il 2° teorema di Euclide:



Su di una retta orizzontale riportare la lunghezza di EC e da E verso sinistra misurare EF = 1.

Determinare il punto medio di FC: è O. Fare centro in O e con raggio OF = OC disegnare una semicirconferenza da F a C. Dal punto E innalzare la perpendicolare a FC fino a intersecare la semicirconferenza nel punto G.

Valgono le seguenti relazioni:

$$FE : EG = EG : EC$$

$$EG^2 = FE * EC = 1 * (10 + 2 * \sqrt{5})$$

$$EG = \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}} \cong 3,804226$$

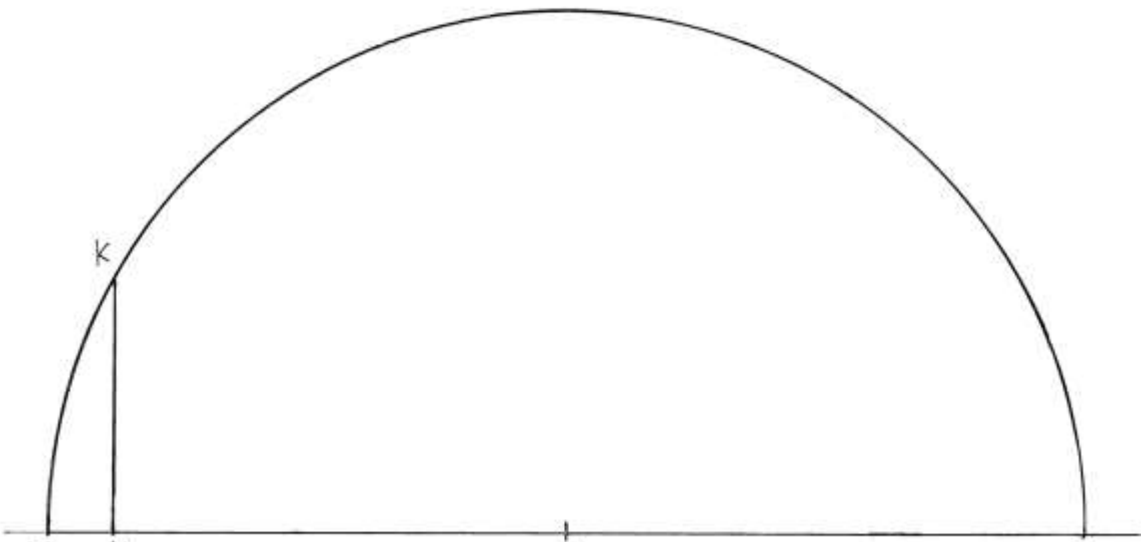
Anche la lunghezza di $\sqrt{15}$ è costruibile con l'applicazione del 2° teorema di Euclide.

HI è lungo 15 e HJ è lungo 1.

Il punto P è medio di JI.

Fare centro nel punto P e con raggio PJ = PI disegnare una semicirconferenza da J a I.

Dal punto H innalzare la perpendicolare JI fino a fissare il punto K.



Valgono le seguenti relazioni:

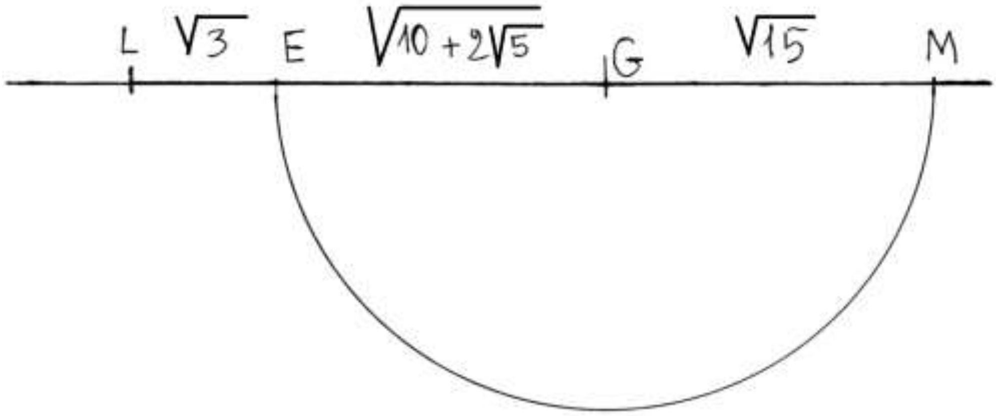
$$JH : HK = HK : HI$$
$$HK^2 = JH * HI = 1 * 15 = 15$$
$$HK = \sqrt{15}\ .$$

Riportare su di una retta orizzontale le lunghezze

$\sqrt{3}$ e

$$EG = \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}$$

Con il compasso misurare la lunghezza di $HK = \sqrt{15}$ e riportarla sulla retta a partire da G fino a M; fare centro in G e con raggio GM tracciare una semicirconferenza il cui estremo sinistra *quasi* coincide con il punto E.



Infatti, come visto in precedenza,

$$EG = \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}} \cong 3{,}804226$$

e

$$HK = \sqrt{15} \cong 3{,}872983\ .$$

La differenza fra le due ultime lunghezze è: .

$$GM - EG = 3{,}872983 - 3{,}804226 \cong 0{,}068757$$

In percentuale la differenza è minima:

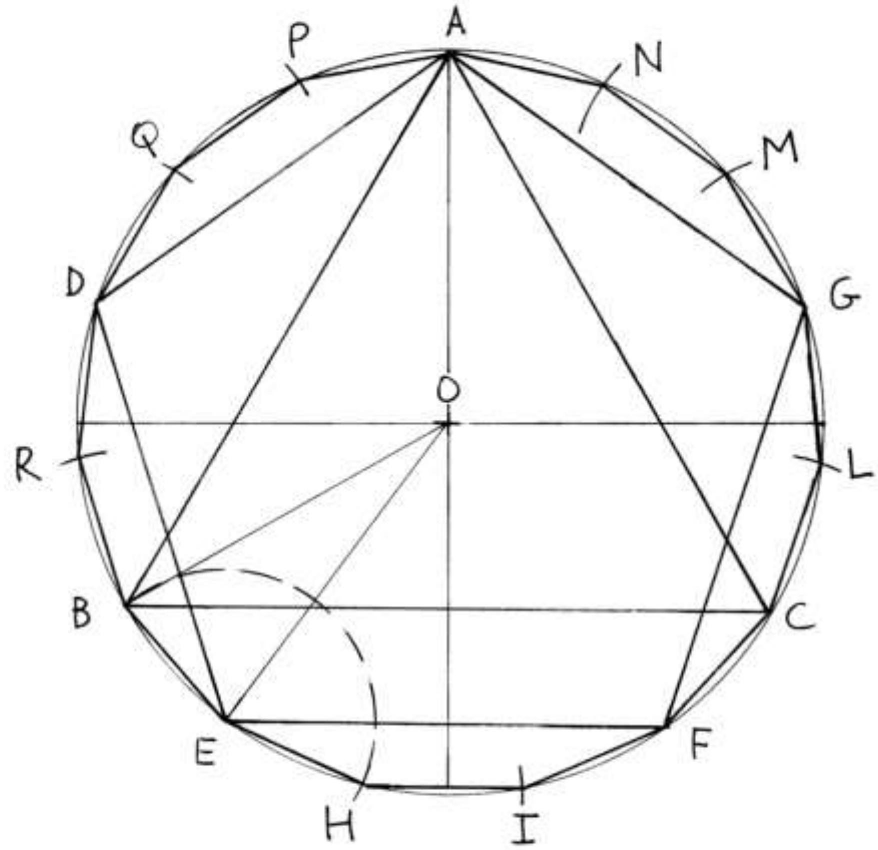
$$\frac{GM - EG}{GM} \cong 1{,}7753\ \%$$

La lunghezza del lato del pentadecagono è data da

$$\text{lato pentadecagono} \approx \frac{\sqrt{3} - 0{,}068757}{4} \approx 0{,}4158$$

Come già accennato all’inizio di questo paragrafo, il pentadecagono regolare inscritto è disegnabile per via *indiretta*, dopo aver costruito nello stesso cerchio di centro O il *triangolo equilatero* ABC e il *pentagono regolare* AGFED: il vertice A è comune ai tre poligoni.

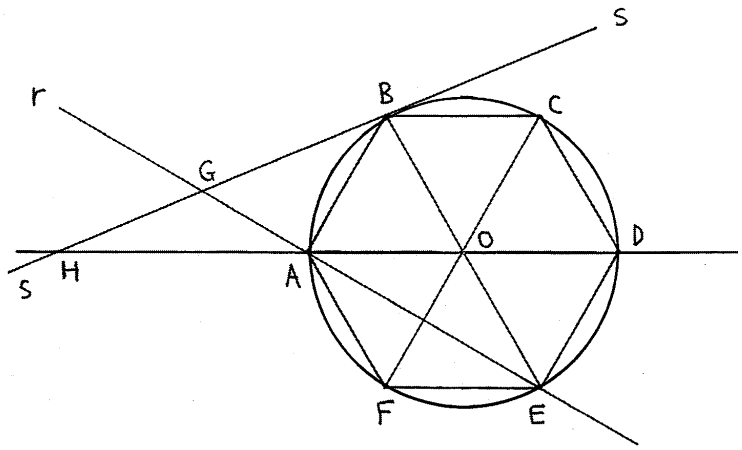
Le corde BE e FC sono due lati del *pentadecagono* ANMGLCFIHEBRDQP:



<u>Radice cubica di 2 e di 4</u>

La costruzione che segue è *approssimata*.

Disegnare l’esagono regolare ABCDEF inscritto in un cerchio di centro O e raggio *convenzionalmente* lungo 1(*uno*):



Il lato dell’esagono, ad esempio AB, è anch’esso lungo 1.

Prolungare verso sinistra il diametro DA e tracciare la retta r passante per i vertici A e E.

Far ruotare una riga *graduata* intorno al punto B affinché essa determini un segmento GH di lunghezza uguale a AB e cioè anch'esso lungo 1:

GH = AB = 1.

Il segmento GB è lungo

$$GB = \sqrt[3]{2}$$

e quello HA è lungo

$$HA = \sqrt[3]{4}$$

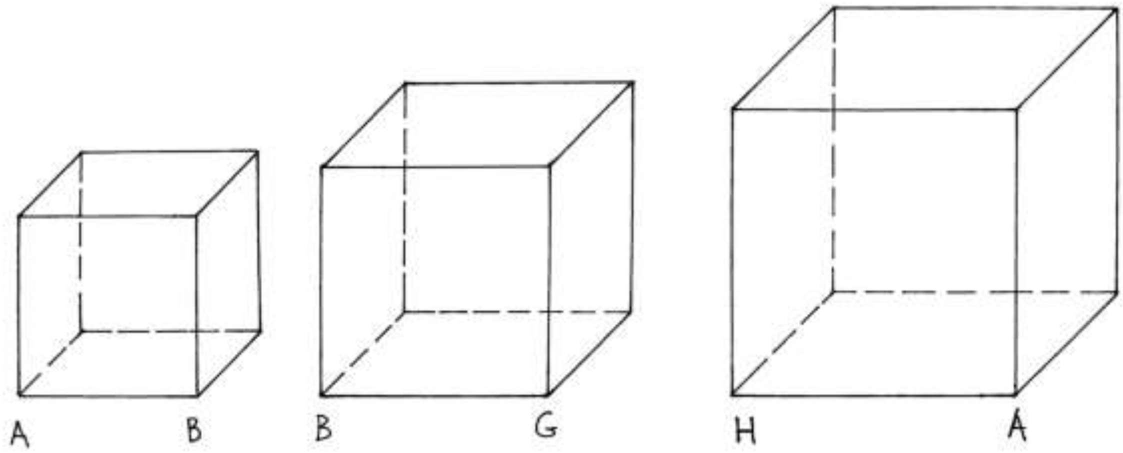
Il segmento AB è il lato di un cubo di volume unitario ($V = AB^3 = 1^3 = 1$), il segmento BG (o GB) è il lato di un cubo di volume doppio del primo

$$V = GB^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$$

e, infine, il segmento HA è il lato di un cubo di volume doppio del secondo e quadruplo del primo:

$$V = HA^3 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4$$

.



Bibliografia

1. Ghersi Italo, "Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare", Milano, Hoepli, 1900, pp. XII-190.
2. Ghersi Italo, "Matematica dilettevole e curiosa", Milano, Hoepli, 5.a ed., 1988, pp. VIII-778.