

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte.

Parole chiave: Eduard Lill, Margherita Beloch Piazzolla, Benedetto Scimemi, soluzione grafica di equazioni di 2° grado e superiori, numeri complessi

Le costruzioni di Lill, di Beloch e di Scimemi

Eduard Lill (1830 – 1900) è stato un capitano dell'esercito austriaco che ha proposto dei metodi grafici per risolvere le equazioni di 2°, 3° grado e oltre, in due articoli del 1867 e del 1868.

Il suo lavoro sulle equazioni di 3° grado ha influenzato le ricerche di Margherita Beloch riguardo all'impiego delle piegature della carta.

L'equazione di 2° grado

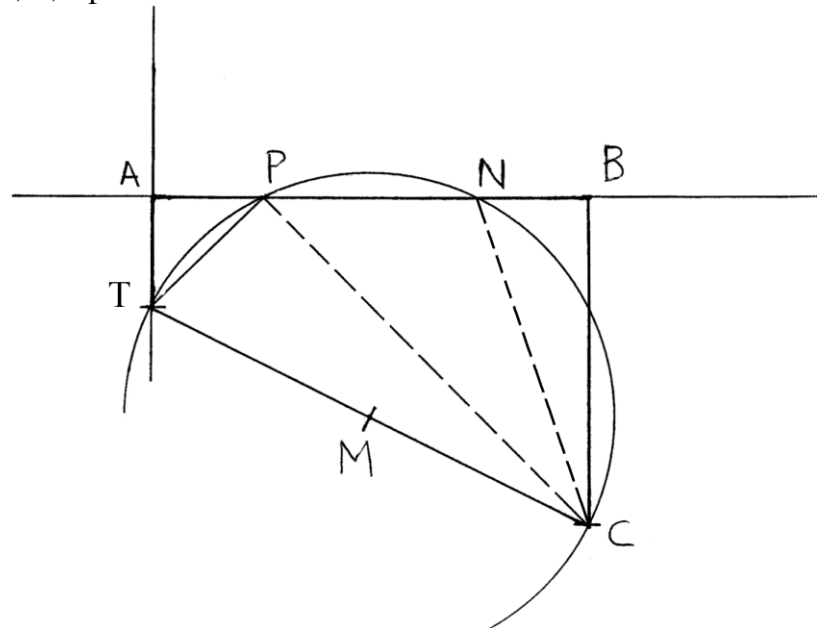
L'equazione $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ può essere risolta per via grafica se possiede una o più radici razionali.

Assegniamo i seguenti valori numerici all'equazione:

- ai coefficienti $a = 1$ e $b = -4$;
- al termine noto $c = 3$.

L'equazione diviene: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Fissare un punto, T, e per esso tracciare una retta verticale.



Dal punto T riportare sulla retta verticale la lunghezza unitaria scelta per $a = 1 = TA$.

Usando la stessa unità di misura, a partire da A fissare sulla retta orizzontale la lunghezza di b : $AB = b$.

Dato che il coefficiente b è negativo ($= -4$), il punto B è collocato a destra di A.

Dal punto D tracciare verso il basso un segmento *perpendicolare* alla retta AB di lunghezza uguale al *termine noto* C. Il segmento è rivolto verso il basso (e cioè verso la destra di AB) perché il termine noto c ha segno positivo, diverso da quello – negativo – del coefficiente b (che è negativo).

Collegare i punti C e T e determinare il punto medio di TC: è M.

Fare centro in M e con raggio $MT = MC$ disegnare una semicirconferenza da T a C: essa taglia AB in due punti, P e N.

I segmenti AP e AN sono le due radici dell'equazione.

Le radici sono calcolabili con la formula generale:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 3 \end{cases}$$

Il segmento AP è lungo:

AP = x_1 e quello AN è:

AN = x_2 .

L'equazione può essere scomposta come segue:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$AP = x_1 = 1$$

$$AN = x_2 = 3$$

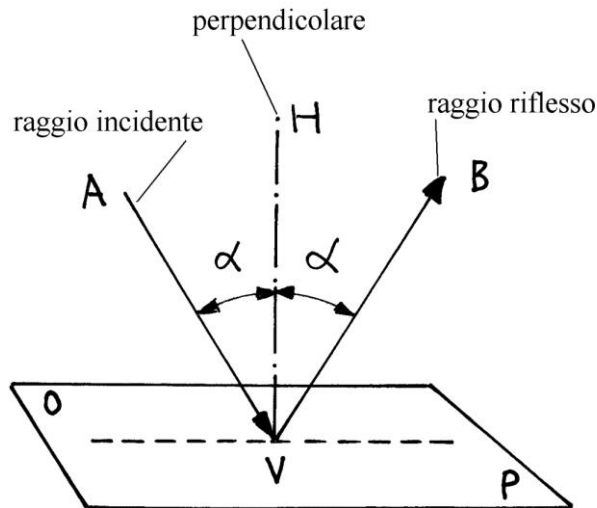
Il numero n di segmenti che compongono la poligonale TABC è 3 e cioè il *grado* g dell'equazione (2) viene incrementato di un'unità:

$$n = g + 1$$

La formula ha validità generale.

La riflessione della luce

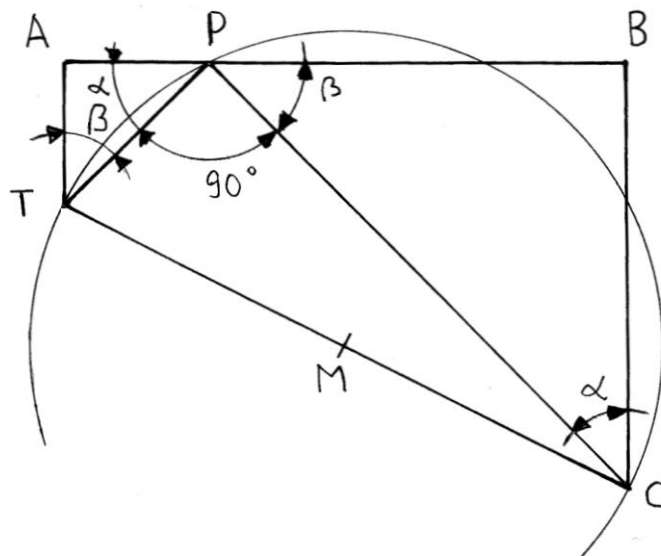
OP è un piano formato da una superficie levigata e pulita, come può essere quella di uno specchio:



Un raggio di luce AV colpisce la superficie nel punto V formando un angolo di incidenza α con la verticale HV. Il raggio viene riflesso in VB formando un angolo α con la perpendicolare HV. Gli angoli di incidenza e di riflessione sono uguali.

Il raggio incidente AV, la perpendicolare HV e il raggio riflesso VB giacciono nello stesso piano che è perpendicolare a quello nel quale sono situati i punti O, V e P.

Nel caso del grafico della soluzione dell'equazione di 2° grado secondo il metodo di Eduard Lill, gli angoli di incidenza (ad esempio APT nella figura contenuta nel precedente paragrafo) e quello di riflessione (BPC) hanno *differente* ampiezza:



Un ipotetico raggio luminoso TP colpisce la sponda AB con un angolo $\text{APT} = \alpha$ e si riflette con un angolo $\text{BPC} = \beta$.

Nel triangolo rettangolo APT gli angoli APT e ATP sono *complementari*: $\alpha + \beta = 90^\circ$. L'angolo BPC è ampio:

$$\text{BPC} = \text{APB} - \text{APT} - \text{TPC} = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha = \beta .$$

Al contrario di ciò che avviene nel caso della luce, con il metodo di Lill i due raggi, incidente (TP) e riflesso (PC), formano angoli *differenti* ma complementari.

Anche i grafici che risolvono le equazioni di 3° e di grado superiore secondo il metodo di Lill mostrano la stessa proprietà: il raggio incidente e il raggio riflesso formano soltanto angoli complementari.

----- APPROFONDIMENTO -----

Le costruzioni di Lill e il linguaggio LOGO

Le costruzioni di Lill possono essere realizzate con il linguaggio LOGO o con quello degli *L-Systems* creati dal biologo e matematico ungherese *Aristid Lindenmayer* (1925-1989).

I comandi necessari per tracciare la poligonale TABC con il LOGO sono in numero limitato:

- *avanti*
- *destra 90*, per ruotare verso destra di 90°;
- *sinistra 90*, per ruotare verso sinistra di 90°.

Esiste una ulteriore regola: se il *segno* del coefficiente che forma la parte numerica di *avanti* è diverso da quello del coefficiente precedente, la rotazione è a *destra*, altrimenti è a *sinistra*.

Il diagramma della figura precedente è ottenuto con i seguenti comandi:

- *tana ;* la tartaruga va al centro dello schermo, la sua *tana*, ed è rivolta verso Nord
- *avanti 1 ;* avanza di un numero di passi dato dal valore del coefficiente **a** e giunge nel punto A
- *destra 90 ;* ruota verso destra di 90°
- *avanti 4 ;* avanza del valore *assoluto* del coefficiente **b** |4| e arriva in B
- *destra 90 ;* ruota verso destra di 90°
- *avanti 3 ;* avanza del valore del *termine noto* C e arriva in C
- *tana ;* torna nel punto T di coordinate [0, 0]

Nota: il segno di *punto e virgola* (;) indica al Logo di ignorare tutto ciò che segue questo simbolo di punteggiatura: si tratta di *commenti* o spiegazioni dei comandi.

Il valore assoluto

Il simbolo | (barra verticale o *pipe* in inglese) è presente sulla tastiera di qualsiasi computer. In quella italiana è il primo tasto a sinistra nella seconda riga orizzontale immediatamente sotto il tasto ESC). Si ottiene tenendo premuto il tasto delle MAIUSCOLE e quello relativo al simbolo.

In matematica il simbolo | è usato in coppia per indicare il *valore assoluto* di una grandezza:

$$|-3| = 3$$

La grandezza è racchiusa fra le due barre verticali.

Un'equazione di 2° grado con radici complesse

L'equazione $x^2 - 4x + 6 = 0$ possiede due radici *complesse* e cioè numeri formati da una parte *reale* e da una parte *immaginaria*

Applicando la formula generale

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a questa equazione, il *discriminante* Δ è *negativo*:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 16 - 24 = -8.$$

Le due radici sono:

$$X = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{-2}}{2} = 2 \pm \sqrt{-2}$$

Ricordiamo che vale la seguente convenzione

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

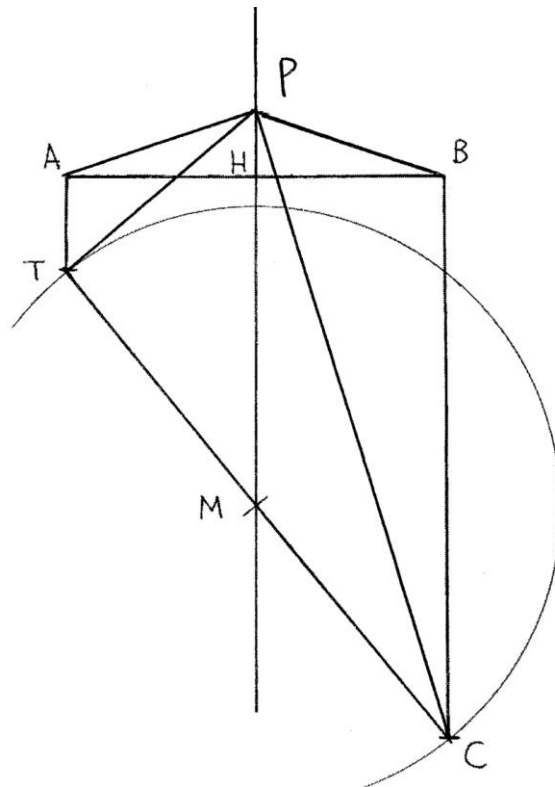
Il simbolo i indica un numero immaginario.

Le radici dell'equazioni sono:

$$\begin{array}{l} \text{parte reale} \\ X_1 = 2 + \sqrt{-2} \\ X_2 = 2 - \sqrt{-2} \\ \text{parte reale} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{parte immaginaria} \\ \text{parte immaginaria} \end{array}$$

Un numero complesso viene rappresentato nel piano cartesiano con la parte reale misurata lungo l'asse delle ascisse e la parte immaginaria lungo l'asse delle ordinate.

Per via grafica la soluzione richiede il diagramma che segue, realizzato secondo il metodo di Lill:



I segmenti della poligonale TABC hanno lunghezze:

- $TA = a = 1$
- $AB = b = |4|$
- $BC = c = 6$.

Collegare i punti T e C e stabilire il punto medio di TC: è M. Fare centro in M e con raggio $MT = MC$ tracciare una semicirconferenza da T a C: essa *non* taglia in alcun punto il segmento AB, fatto che conferma l'assenza di radici reali dell'equazione.

Per il punto M condurre una retta parallela a BC e perpendicolare a AB che taglia nel suo punto medio H.

I segmenti AH e HB sono lunghi

$$AH = HB = b/2$$

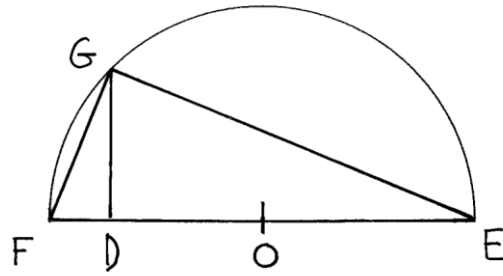
Sulla retta HM fissare un punto P tale che siano creati i due *triangoli simili* TAP e PBC.

La posizione del punto P è pure determinabile per via aritmetica e geometrica con il metodo descritto di seguito.

I segmenti AP e PB hanno uguale lunghezza e sono le ipotenuse dei triangoli rettangoli APH e PBH.

Le due ipotenuse sono lunghe $AP = PB = \sqrt{c} = \sqrt{6}$

Con la costruzione che segue viene determinata la lunghezza di un segmento pari a $\sqrt{6}$:



Tracciare una retta orizzontale e su di essa fissare i punti F, D e E a distanze: $FD = 1$, $DE = 6$ e $FE = 7$. Utilizzare la stessa scala di rappresentazione usata per costruire la poligonale TABC.

Stabilire il punto medio di FE: è O. Fare centro in O e con raggio $OF = OE$ disegnare una semicirconferenza. Dal punto D elevare la perpendicolare a FE: essa taglia la semicirconferenza nel punto G.

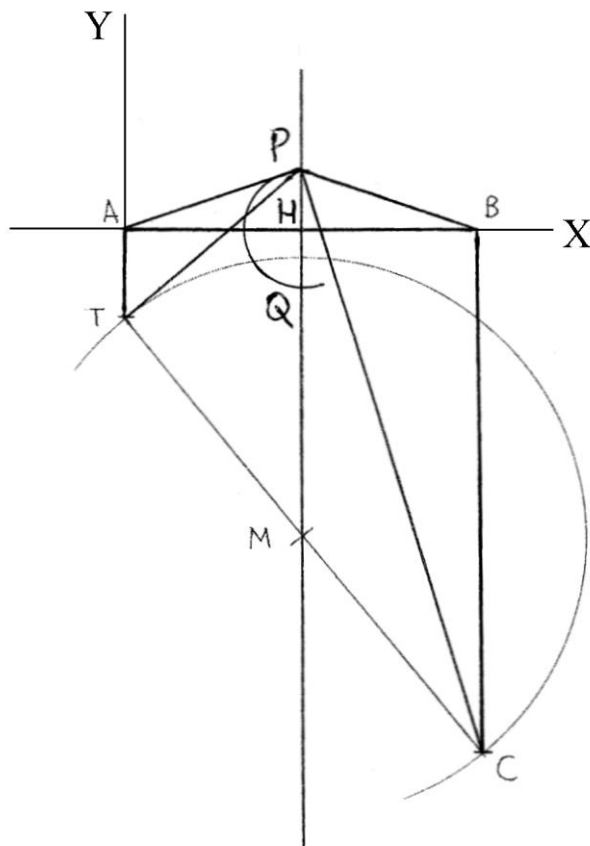
L'altezza DG è media proporzionale fra FD e DE:

$$FD : DG = DG : DE$$

$$DG^2 = FD * DE = 1 * 6 = 6 \text{ da cui}$$

$$DG = \sqrt{6} .$$

Con il compasso misurare la lunghezza di DG: riportarla sul diagramma con la poligonale:



Facendo centro nei punti A e B, tracciare due archi che si intersecano nel punto P. Il cateto PH è lungo

$$PH^2 = AP^2 - AH^2 = (\sqrt{6})^2 - (-4/2)^2 = 6 - 4 = 2 \quad e$$

$$PH = \sqrt{2}.$$

Fare centro nel punto P e, con raggio HP, disegnare una semicirconfenza da P fino a incontrare la retta verticale in un punto, Q.

Considerando A come origine degli assi del piano cartesiano, il punto P ha coordinate

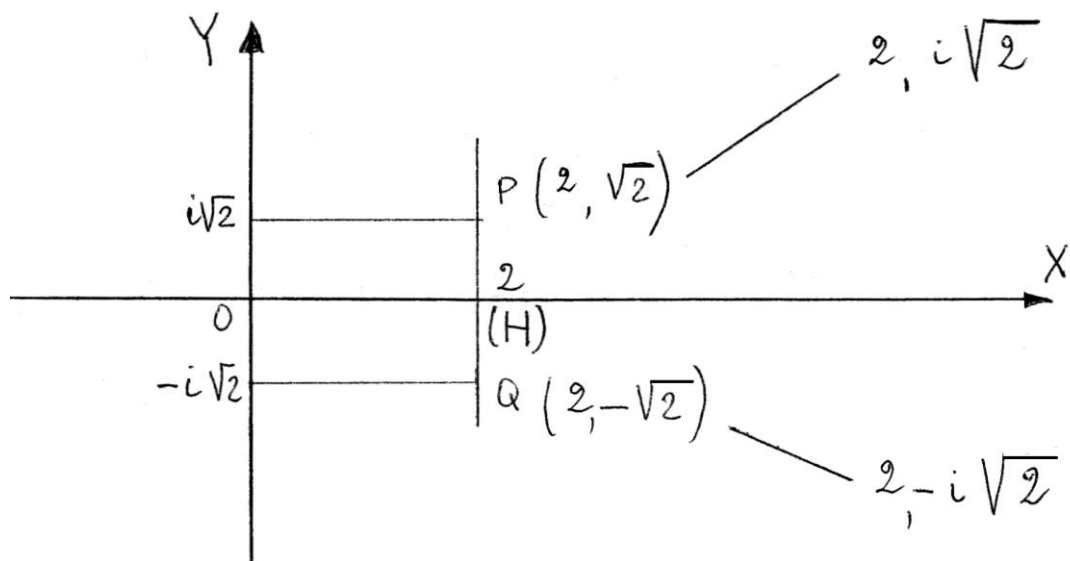
$$[AH, HP] = [2 + \sqrt{(-2)}] = x_1.$$

Il punto Q ha coordinate

$$[AH, HQ] = [2 - \sqrt{(-2)}] = x_2$$

Le due radici hanno una parte *reale* (2) e una parte *complessa* ($\pm \sqrt{-2}$).

Nel piano cartesiano, le due radici dell'equazione sono così rappresentate:



La somma e il prodotto delle due radici di un'equazione di 2° grado danno i seguenti risultati:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} - b\sqrt{b^2 - 4ac} - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Applicando le due formule al caso concreto si ottengono i seguenti risultati:

$$X_1 + X_2 = (2 + \sqrt{-2}) + (2 - \sqrt{-2}) = 4 = \frac{4}{1} = \left| \frac{b}{a} \right|$$

$$X_1 \cdot X_2 = (2 + \sqrt{-2}) \cdot (2 - \sqrt{-2}) = 6 = \frac{6}{1} = \left| \frac{c}{a} \right|$$

Un'equazione di 3° grado

È data l'equazione di 3° grado

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \rightarrow ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$$

I coefficienti sono $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$ e il termine noto è $d = -6$.

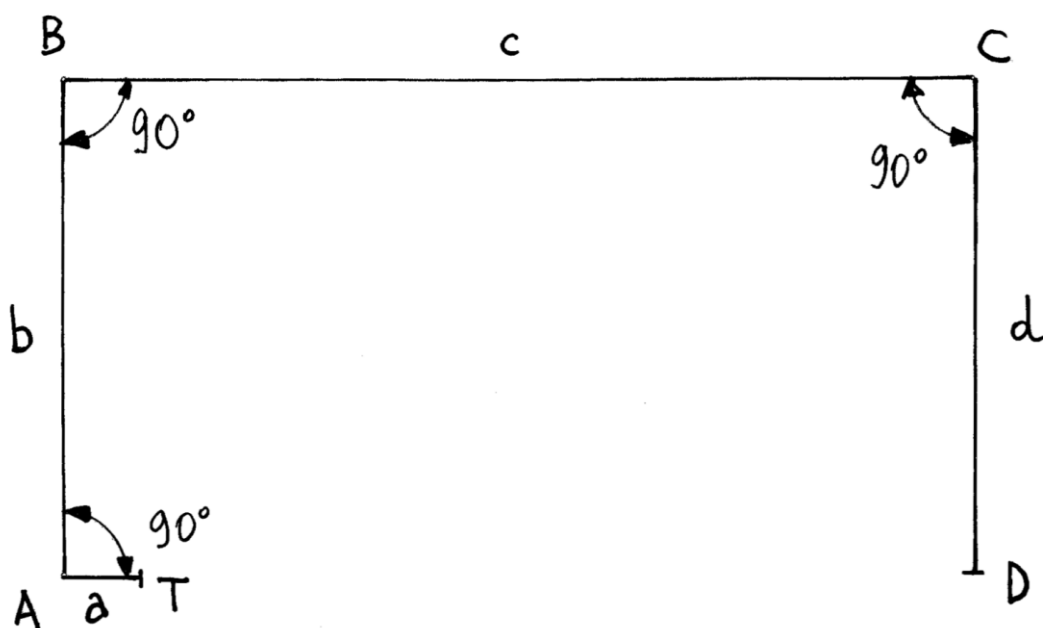
La tabella che segue riassume questi dati:

coefficienti	a	b	c	valore noto (d)
valore	1	-6	11	-6
segno	+	-	+	-

Usando il metodo di Lill possiamo determinare le radici dell'equazione.

Tracciare una linea *poligonale* formata da segmenti consecutivi disposti ad angolo retto seguendo la regola spiegata nel precedente paragrafo.

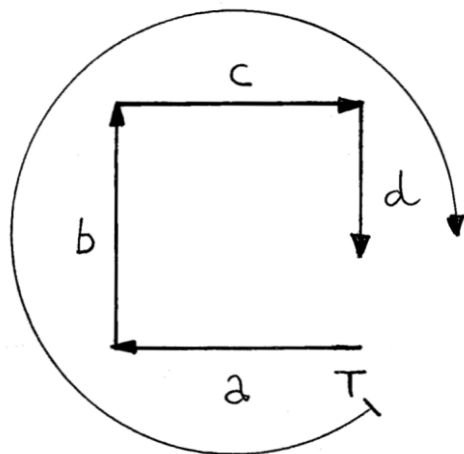
Fissare un punto di partenza, T, e disegnare verso sinistra un segmento orizzontale TA lungo quanto a e cioè 1:



Il coefficiente b ha segno opposto a quello di a per cui da A deve essere tracciato un segmento AB lungo b e rivolto verso la destra di TA.

I successivi segmenti BC e CD sono sempre ruotati verso destra.

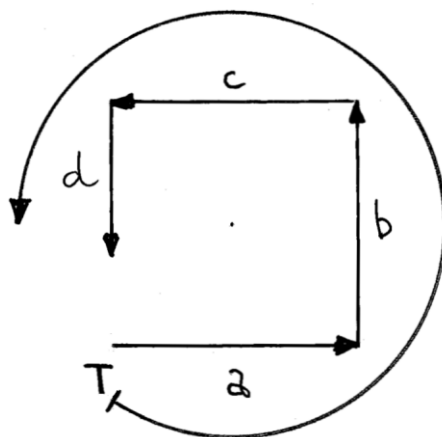
Lo schema che segue riassume le rotazioni a partire dal punto T:



Se i coefficienti (a , b e c) e il termine noto (d) sono tutti *positivi*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \rightarrow x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

la rotazione è in senso antiorario a partire dal punto T, come mostra lo schema che segue:



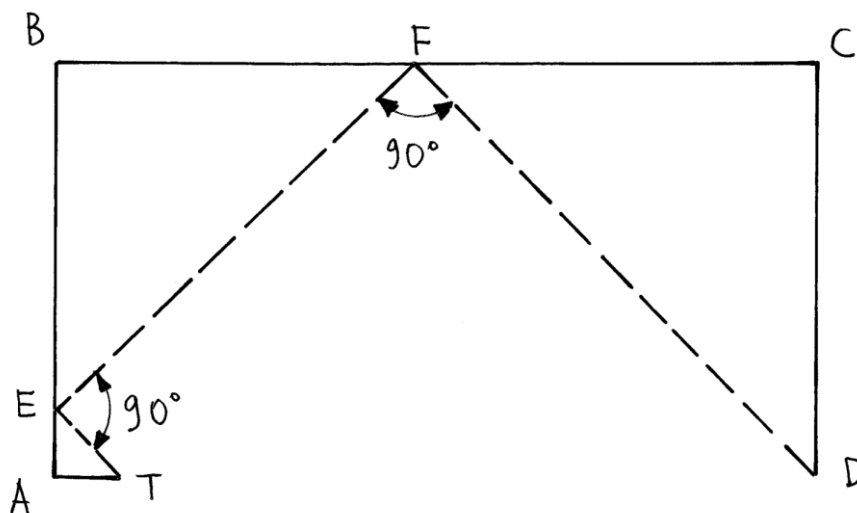
Il metodo di Lill consiste nel ricercare *per tentativi* le possibili radici dell'equazione di 3° grado.

Dato che il primo coefficiente, a , vale 1 è ragionevole ipotizzare una radice

$$X_1 = 1 .$$

Se sono rappresentate da *numeri razionali*, le lunghezze delle tre radici dell'equazione sono misurabili dal vertice A sul segmento AB.

AE è lunghezza corrispondente alla radice X_1 .

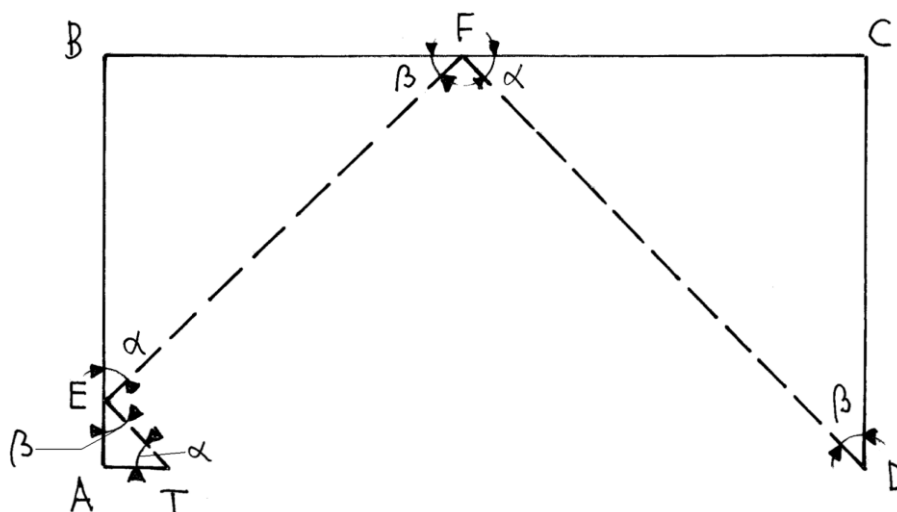


Collegare i punti T e E e da questo ultimo condurre una perpendicolare a TE fino a incontrare BC in un punto, F.

Da questo ultimo punto tracciare la perpendicolare a EF: se la radice X_1 è stata scelta correttamente, la linea passa per il punto D e fissa il segmento FD.

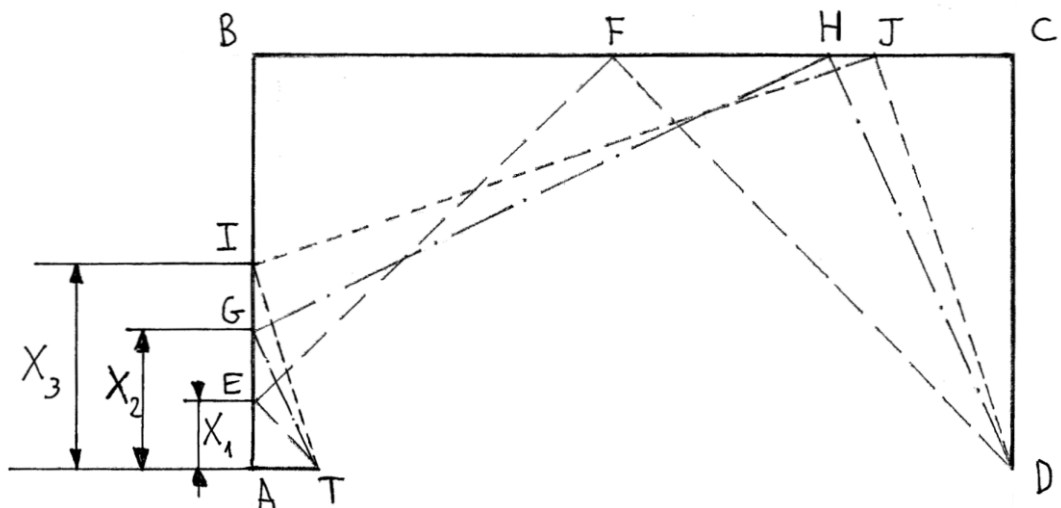
Il percorso TEFD può essere assimilato a quello di una pallina che partendo da T rimbalza sulle pareti AB e BC per fermarsi nel punto D.

I triangoli rettangoli AET, BFE e FCD sono *simili*, perché possiedono tutti i due angoli complementari α e β ($\alpha + \beta = 90^\circ$):



Eduard Lill impiegò un reticolato quadrettato, a maglia fine, trasparente, per determinare *per tentativi* le posizioni dei diversi punti sul segmento AB necessari per ricavare le lunghezze corrispondenti alle radici dell'equazione: un materiale simile è la carta millimetrata stampata su carta trasparente.

Il segmento AG è la radice X_2 perché esso fissa la poligonale TGHD:



AI è la terza radice, X_3 .

Misurando sul grafico le lunghezze di AE, AG e AI si ottiene:

* $AE = x_1 = 1$

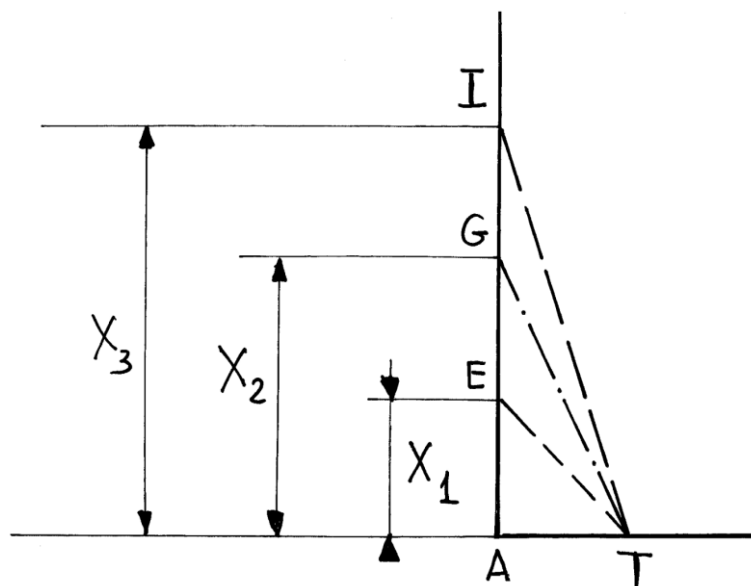
* $AG = x_2 = 2$

* $AI = x_3 = 3$.

L'equazione di partenza è scomposta come segue:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

La figura che segue è un ingrandimento della parte sinistra della figura precedente:



I triangoli EAT, GAT e IAT sono rettangoli e hanno in comune il vertice A, l'angolo retto in A e il cateto AT.

La funzione trigonometrica *tangente di un angolo* in un triangolo rettangolo è data dal rapporto fra le lunghezze del cateto opposto all'angolo e del cateto ad esso adiacente. Nel triangolo EAT, l'angolo

$$\widehat{ETA}$$

è stato in precedenza indicato con α : in *valore assoluto*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{EA}{AT} = |X_1|$$

Le tangenti degli angoli in T formati dagli altri due triangoli sono, in *valore assoluto*:

$$\operatorname{tg} \widehat{GTA} = \frac{GA}{AT} = |X_2|$$

$$\operatorname{tg} \widehat{ITA} = \frac{IA}{AT} = |X_3|$$

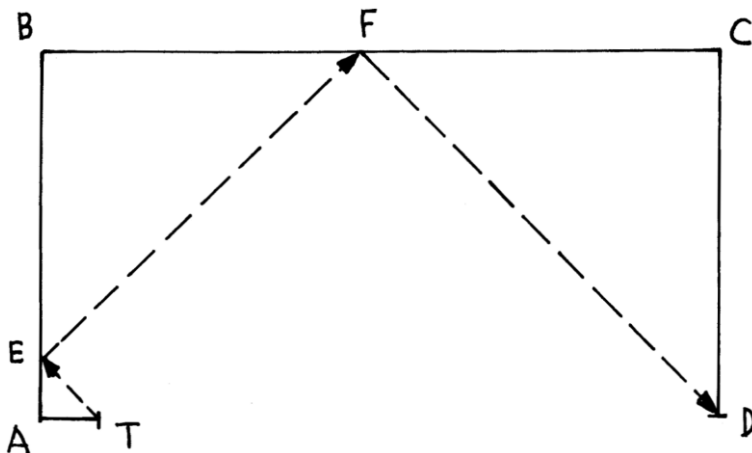
Gli angoli α e β hanno ampiezze comprese fra -90° e $+90^\circ$.

In generale, la poligonale che rappresenta un'equazione di un grado qualsiasi è formata da un numero di segmenti uguale al numero dei membri dell'equazione:

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0$$

n = 4 membri

La poligonale TABCD relativa a questa equazione contiene 4 segmenti:

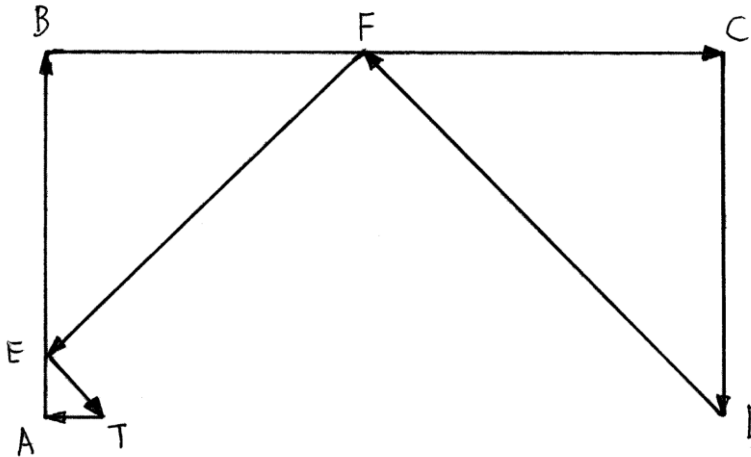


La poligonale TEFD fornisce la prima radice dell'equazione $-X_1 = AE$ - ed è formata da un numero di segmenti uguale a

$$n - 1 = 4 - 1 = 3$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Osservando con un po' di attenzione il grafico della precedente figura si può notare che la poligonale TAEBCDFET è un percorso *chiuso* che inizia e si conclude nel punto T.



I segmenti che la compongono hanno lunghezze proporzionali ai coefficienti e alle radici (in questo caso solo $AE = X_1$) dell'equazione di 3° grado; essi sono tracciati con la stessa scala di rappresentazione.

Il diagramma rappresenta la poligonale con i suoi componenti disegnati come *segmenti orientati* o *vettori*.

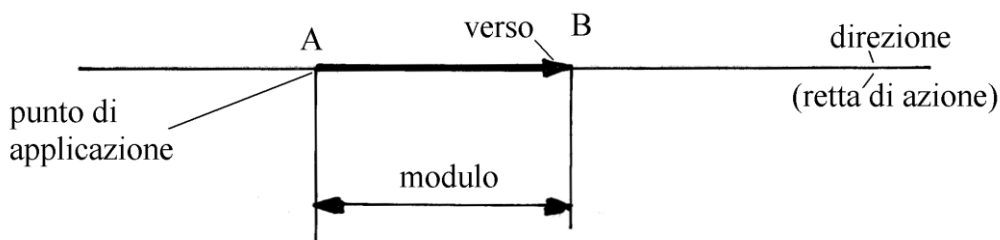
Per determinare la risultante di più forze applicate a un corpo rigido, nella *Scienza delle costruzioni* è usata una rappresentazione grafica conosciuta con l'espressione di *poligono delle forze*. Se una poligonale costruita con segmenti rappresentanti le forze è un poligono *chiuso*, il corpo è in equilibrio.

Il grafico contenuto nella precedente figura è assimilabile a un poligono delle forze. I segmenti disegnati nel grafico sono tutti orientati a partire da quello



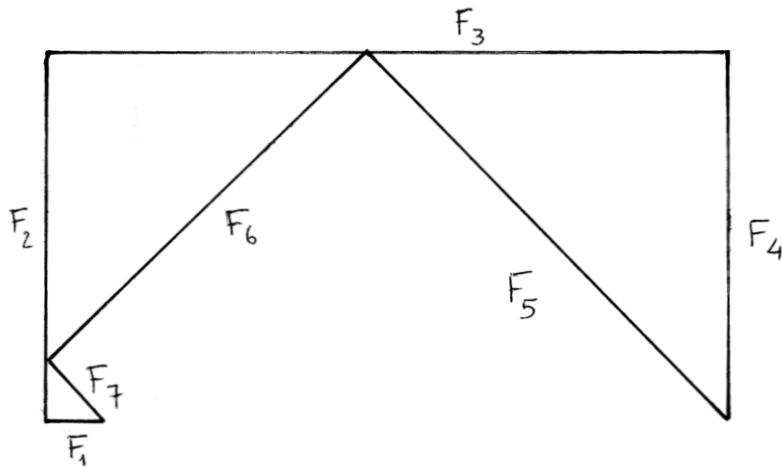
Un segmento orientato è rappresentato con le due lettere (punti iniziale e finale) sovrastate da una freccia orizzontale rivolta nel verso del punto finale (A).

AB è un segmento orientato di lunghezza AB che è chiamata *modulo*:

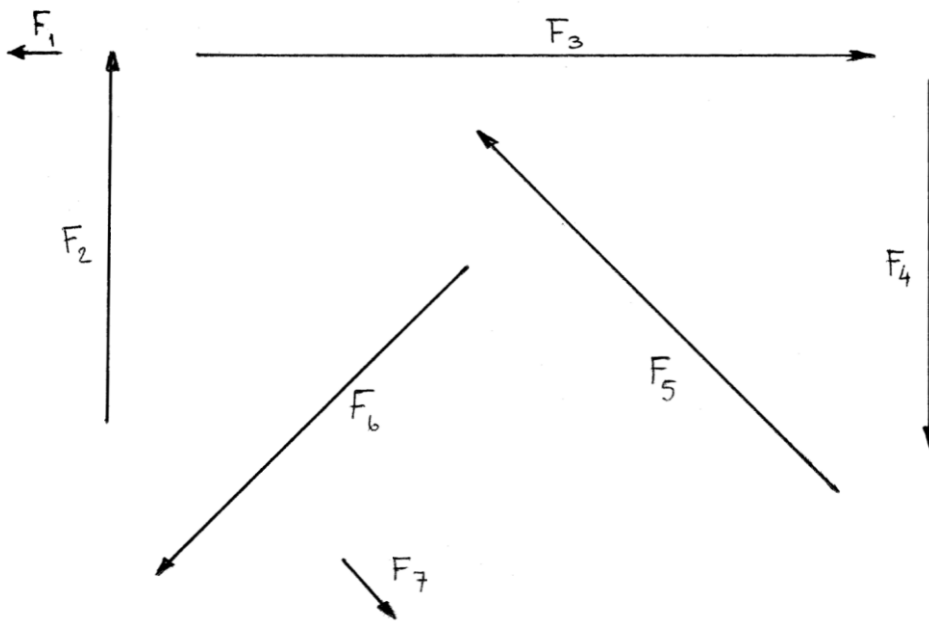


AB è un *vettore* e possiede un *punto di applicazione* che è A. La freccia apposta presso il punto B indica il *verso* del vettore. Infine, AB giace su una *retta d'azione* che ne indica la direzione nel piano.

Il grafico che segue presenta il grafico alla stregua di una poligonale formata da più vettori rappresentanti delle *forze* indicate in successione con i simboli da F_1 a F_7 :

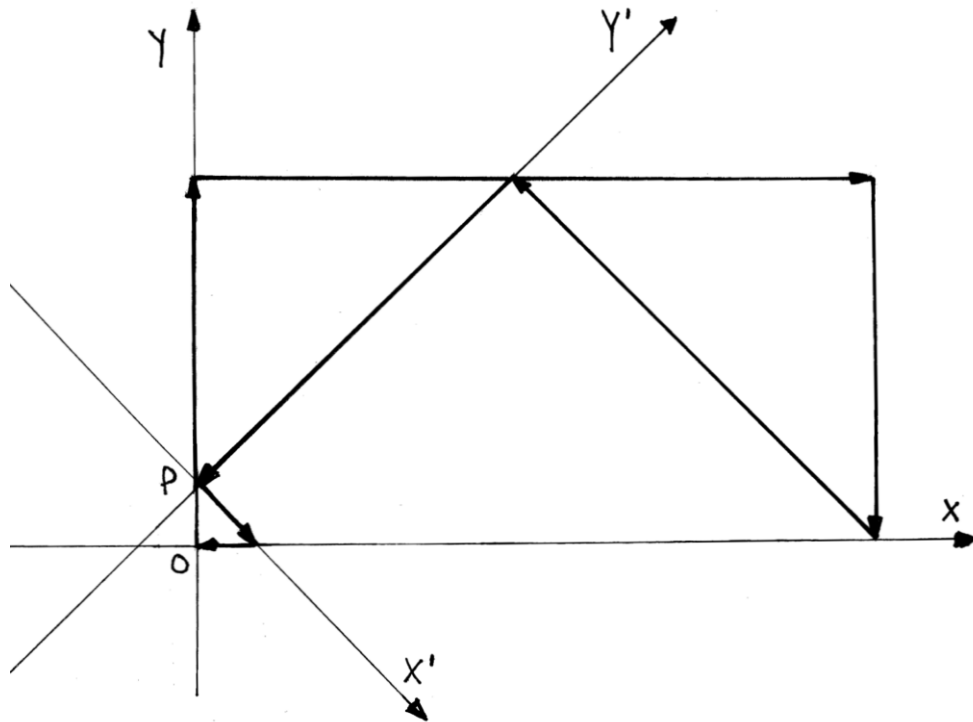


Il grafico dei *sette vettori* non assemblati è mostrato nella figura che segue:



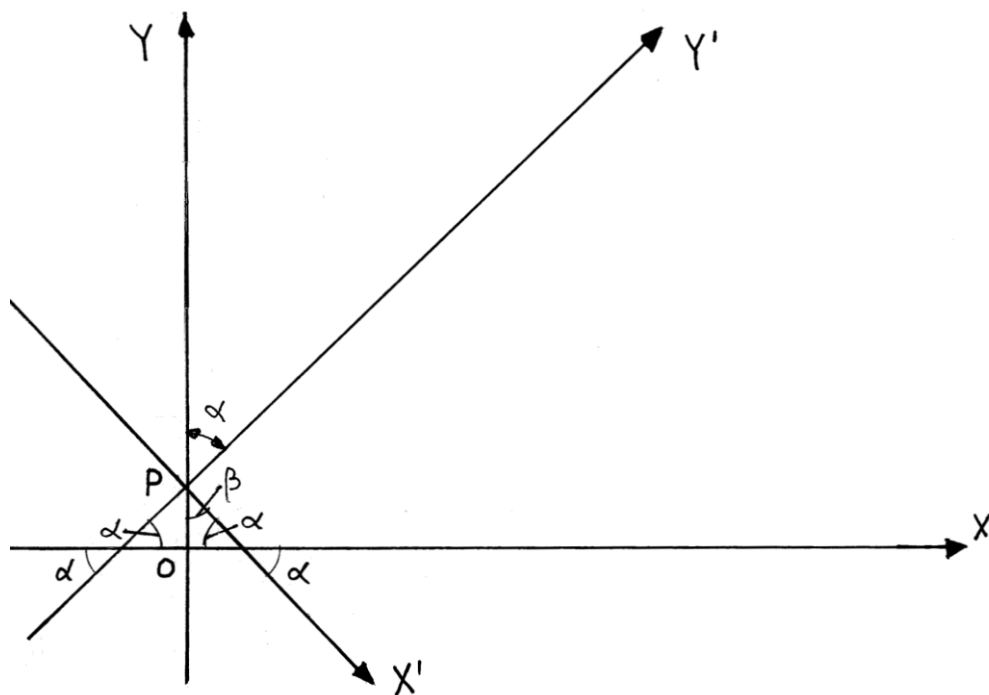
Nell'ultimo schema, i vettori conservano lunghezze e inclinazioni originarie.

Tutti i vettori che formano la poligonale TAEBCDFET sono orientati secondo due distinte coppie di assi cartesiani fra loro non coincidenti. Gli assi sono: $X - Y$ e $X' - Y'$:



Tutti i segmenti della poligonale sono paralleli o perpendicolari a una sola delle coppie di assi cartesiani.

Le due coppie sono ruotate di un angolo α , complementare dell'angolo β , angoli che hanno le stesse ampiezze dei corrispondenti angoli evidenziati nel precedente paragrafo:



Lo strumento di Eduard Lill

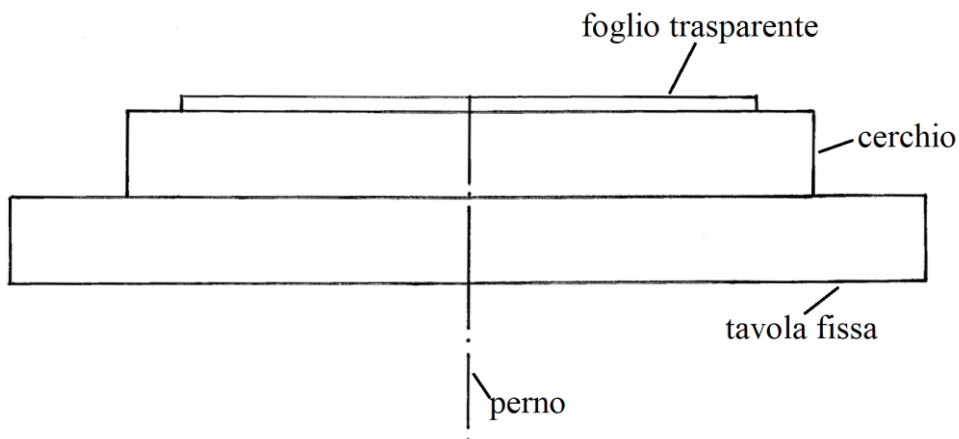
Eduard Lill realizzò un semplice strumento per determinare *per tentativi*, per via grafica, con una buona approssimazione le radici di un'equazione di grado qualsiasi.

L'esempio che di seguito sarà sviluppato è quello dell'equazione di 3° grado utilizzata nel precedente paragrafo:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Lo strumento di Lill era formato da tre strati.

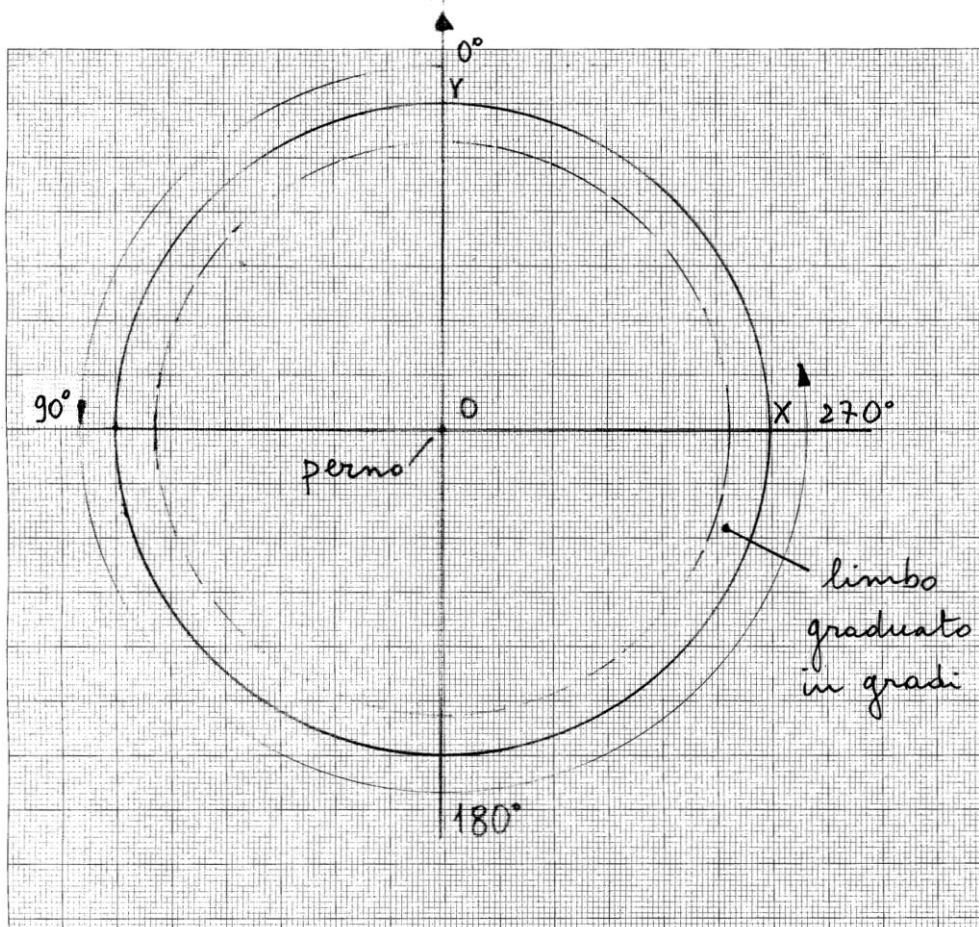
Lo strato inferiore recava un *nonio* e dei riferimenti. Al centro recava un perno che poteva essere bloccato e sbloccato.



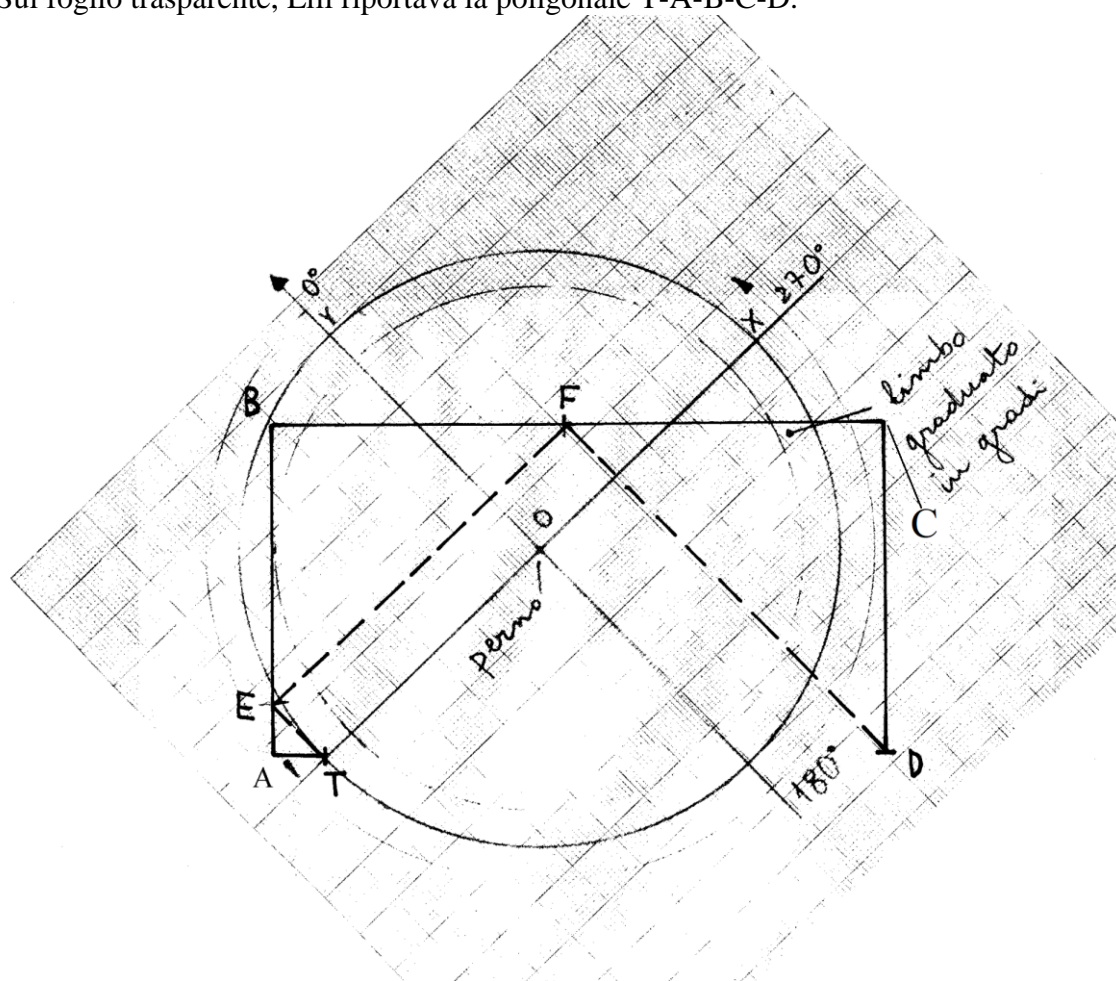
Lo strato intermedio era costituito da un cerchio graduato in senso *antiorario*. Il cerchio veniva ricoperto da un reticolato quadrettato con lato lungo 1 mm, come se esso fosse sovrapposto a un foglio di carta millimetrata trasparente.

Infine, il terzo strato dello strumento di Lill era dato da un foglio trasparente.

La figura che segue mostra l'ipotetica ricostruzione dello strumento vista dall'alto:



Sul foglio trasparente, Lill riportava la poligonale T-A-B-C-D.



Allentando la vite del perno centrale, la tavola fissa veniva ruotata fino a stabilire una poligonale T-E-F-D formata da segmenti ad angolo retto e *sovrapposti* per controllo alla rigatura quadrettata del cerchio. Il punto T era posizionato sull'asse X in corrispondenza del punto determinato dalla rotazione *antioraria*, posizione indicata con 90° nel penultimo grafico.

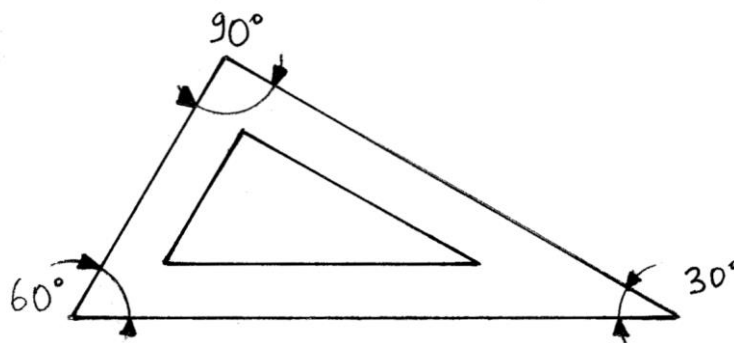
AE è la prima radice dell'equazione di 3° grado.

Con lo stesso metodo sono ricavate le altre due radici dell'equazione che saranno date dalle poligonali T-G-H-D e T-I-J-D già incontrate nel precedente paragrafo.

Il metodo grafico di Benedetto Scimemi

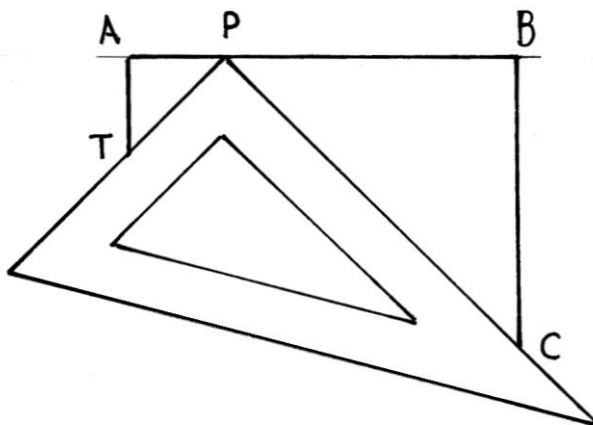
Il matematico italiano Benedetto Scimemi ha descritto in un articolo del 1987 un metodo grafico per la determinazione delle soluzioni di un'equazione di grado qualsiasi.

Negli esempi che seguono è stato impiegato un triangolo rettangolo a forma di squadra con angoli di 30-60°:



Niente impedisce di usare un triangolo rettangolo isoscele, e cioè una squadra a 45°. In alcuni casi la squadra a 30-60° si rivela più utile perché l'ipotenusa è più lunga di quella del triangolo rettangolo isoscele.

Nella figura che segue è riprodotta la poligonale TABC, già incontrata all'inizio di questo articolo e relativa all'equazione di 2° grado $x^2 - 4x + 3 = 0$:

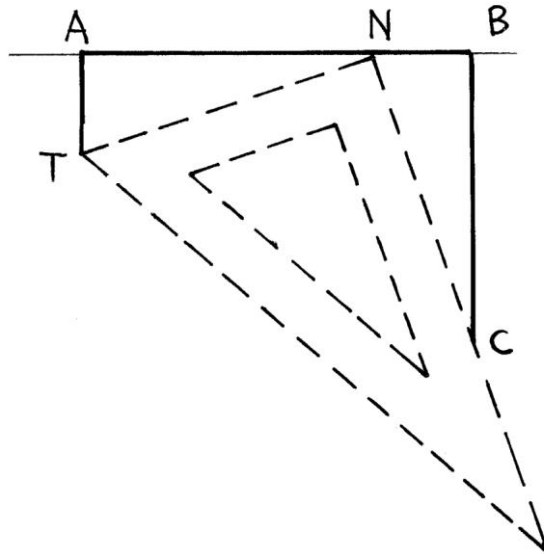


Una squadra è posizionata, *per tentativi*, in modo che il vertice con l'angolo retto sia sul segmento AB e i due cateti passino per i vertici T e C.

Il primo vertice della squadra fissa il punto P.

Il segmento AP è la prima radice, $AP = x_1$, dell'equazione di 2° grado.

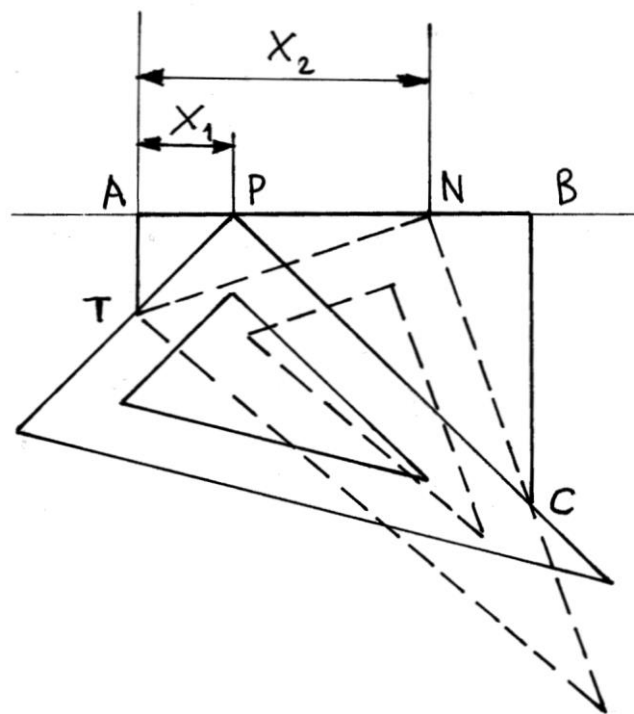
Sempre per tentativi, la squadra è spostata fino a farle assumere la posizione mostrata nella figura che segue:



Il tentativo ha successo perché l'equazione ha una seconda radice, $AN = x_2$.

Il punto N è stabilito dal vertice con l'angolo retto della squadra: i suoi cateti passano per i vertici T e C.

La figura che segue riunisce i due precedenti diagrammi:



Per ottenere risultati corretti è necessario adattare la scala di rappresentazione della poligonale e le dimensioni del triangolo rettangolo 30-60° (che può essere disegnato ingrandito o rimpicciolito su un foglio di carta o di plastica trasparente).

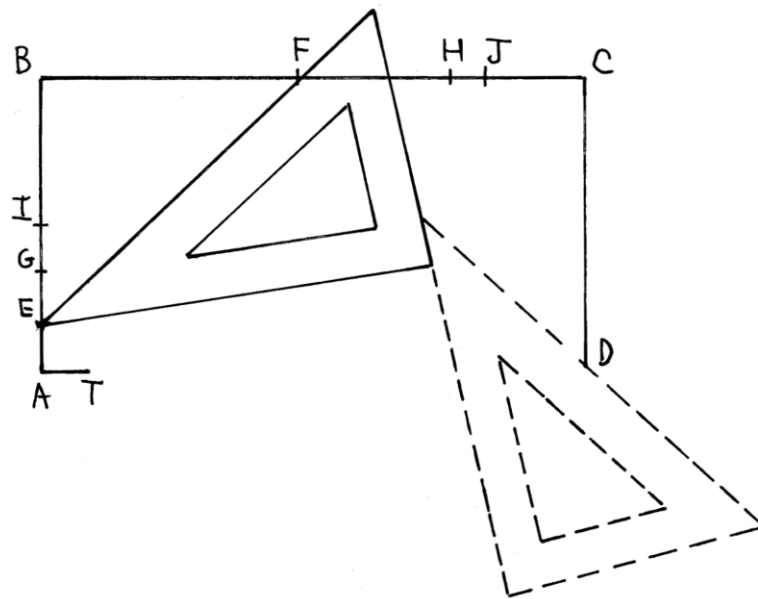
%%%%%%%%%

In precedenza è stata descritta la poligonale relativa all'equazione di 3° grado

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Il punto E fissa il valore di x_1 : $AE = x_1$.

La figura spiega il metodo usato per determinare la posizione di E:



Con un'equazione di 3° grado occorre usare *due* triangoli rettangoli che scorrono l'uno lungo l'altro.

Il cateto minore del triangolo di sinistra scorre lungo il cateto maggiore del triangolo di destra. L'ipotenusa di questo ultimo passa per il punto D.

Il triangolo di sinistra ha un vertice che viene posizionato sul segmento AB; l'ipotenusa di questo triangolo taglia BC in un punto, F.

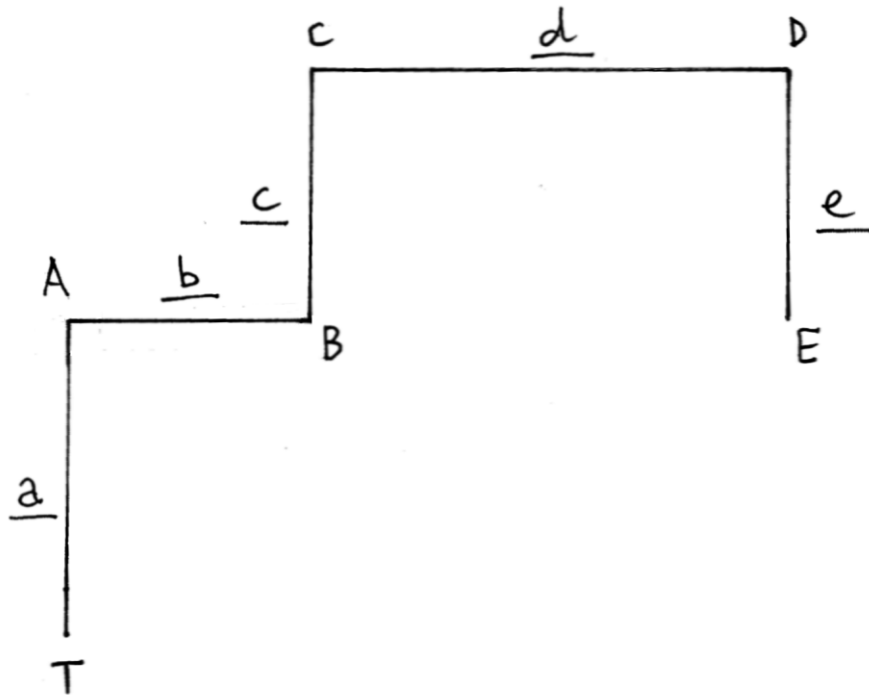
I punti E e F sono collegati alla prima radice dell'equazione, X_1 .

Gli altri punti (G, I, H e J) sono determinati con lo scorrimento delle due squadre.

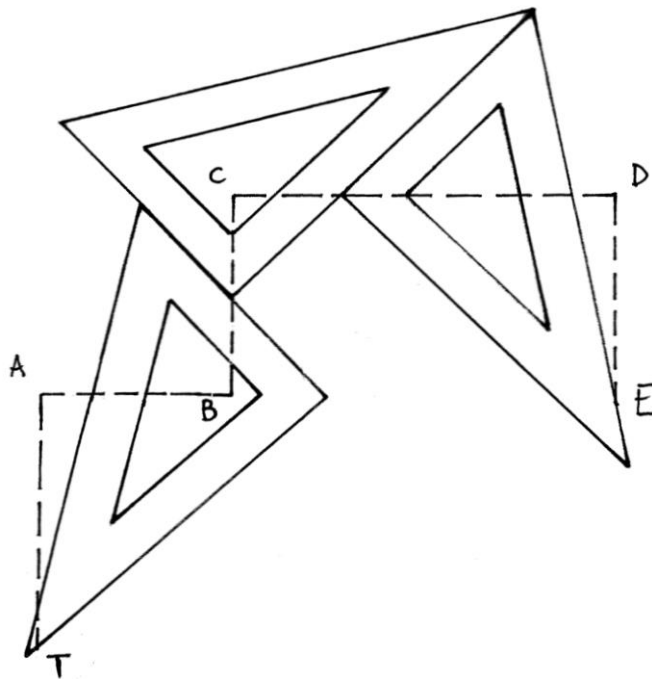
%%%%%%%%%

Il grafico che segue è la poligonale TABCDE di un'equazione di 4° grado:

$$a*x^4 - b*x^3 - c*x^2 + d*x - e = 0$$



La soluzione grafica con il metodo Scimeni richiede per ciascuna delle *quattro* radici l'uso congiunto di *tre* triangoli rettangoli di uguali dimensioni, come suggerisce la figura che segue:



%%

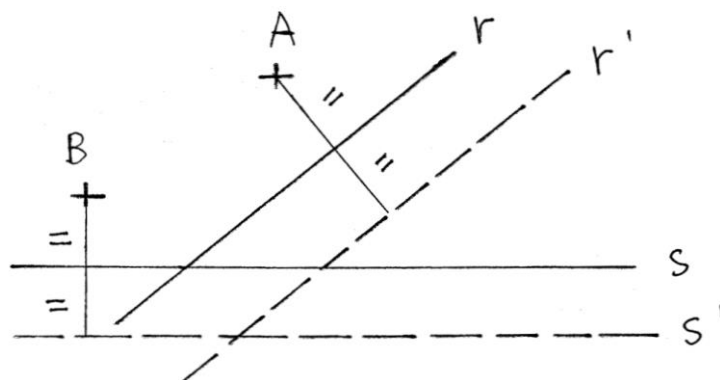
La regola generale che può essere stabilita dagli esempi finora mostrati è che per risolvere un'equazione per via grafica con il metodo di Benedetto Scimemi occorre impiegare *contemporaneamente* un numero **n** di triangoli rettangoli di identiche dimensioni uguale al grado **g** dell'equazione meno un'unità:

$$n = g - 1$$

Le costruzioni di Margherita Beloch

Ulteriori approfondimenti sono venuti da parte della matematica italiana Margherita Beloch Piazzolla (1879 – 1976).

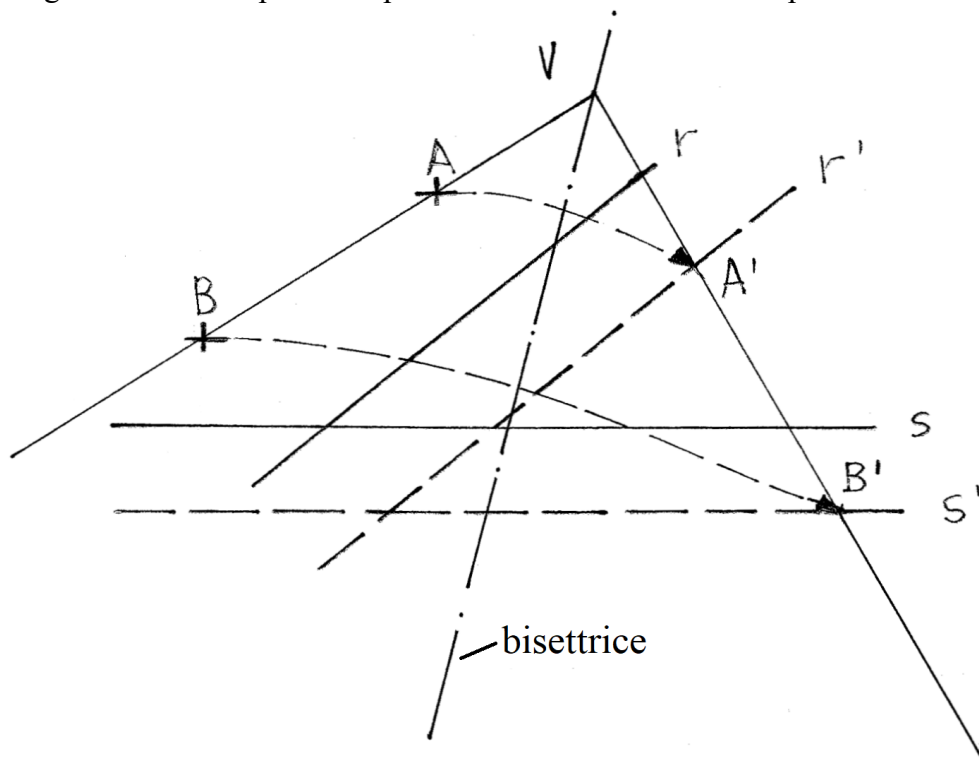
A e B sono due punti e r e S due rette non parallele:



Dai punti A e B condurre le *perpendicolari* rispettivamente alle rette r e S e tracciare due rette parallele a queste ultime – r' e S' – alle distanze uguali a quelle da A e da B.

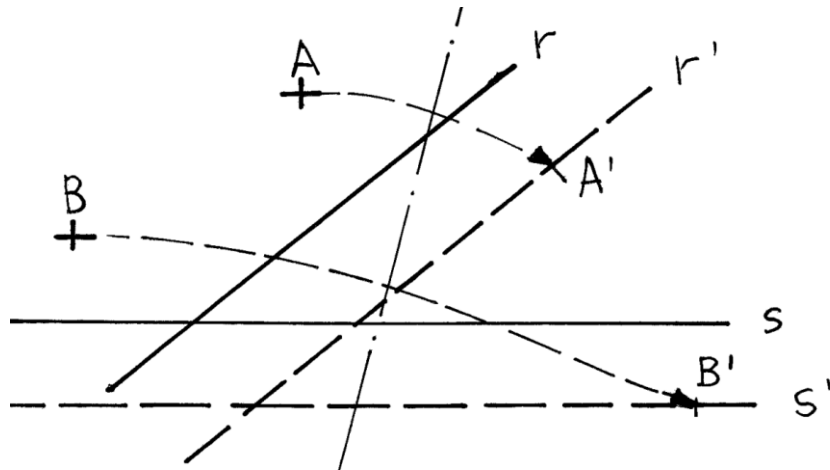
Le rette r e S sono equidistanti dai punti A e B e dalle rette r' e S' .

Piegare in modo da portare il punto A in A' sulla retta r' e il punto B in B' sulla retta S' :



Tracciare le semirette passanti per le coppie di punti A-B e A' - B' : esse si intersecano nel punto V. Per questo punto passa la bisettrice dell'angolo AVB' che può essere ricavata con una semplice *piega*.

Torniamo alla prima figura, con la bisettrice, ma senza la sua costruzione:



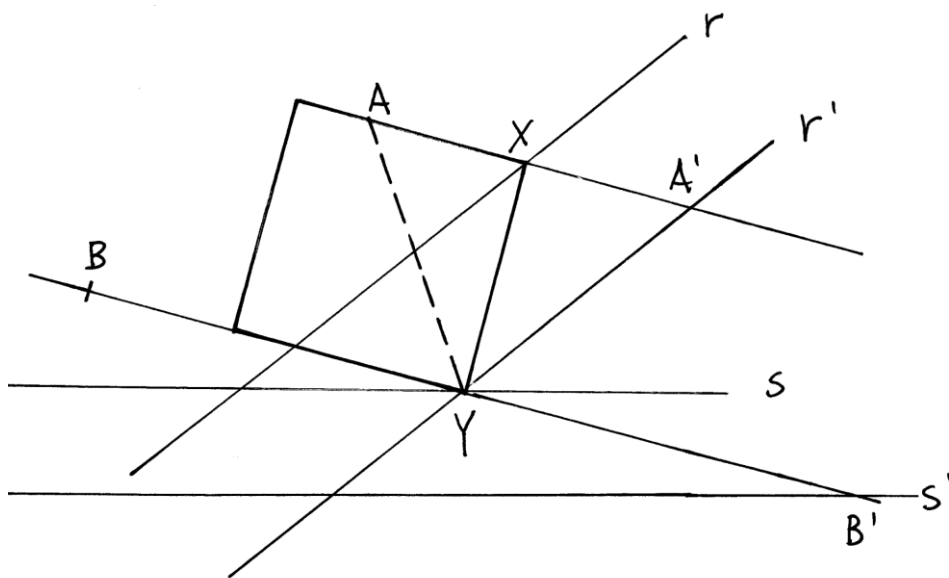
Disegnare due rette passanti per le coppie di punti A-A' e B-B':

La prima retta interseca la r nel punto X e la seconda taglia la S nel punto Y.

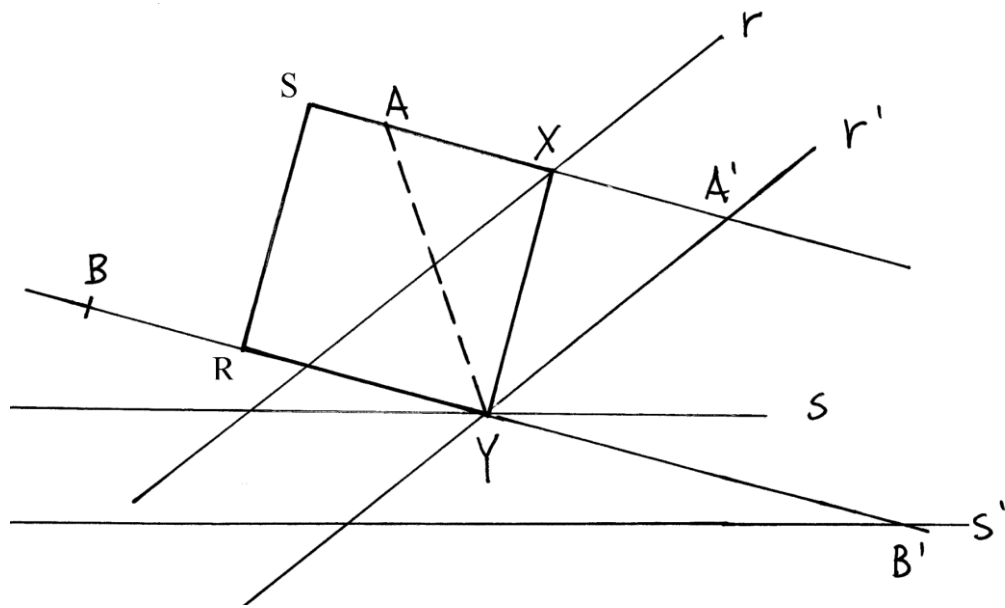
XY è il lato di un *quadrato*. Il punto X è equidistante da A e da A' per costruzione: $AX = XA'$.

Anche il punto Y possiede una simile proprietà: $BY = YB'$.

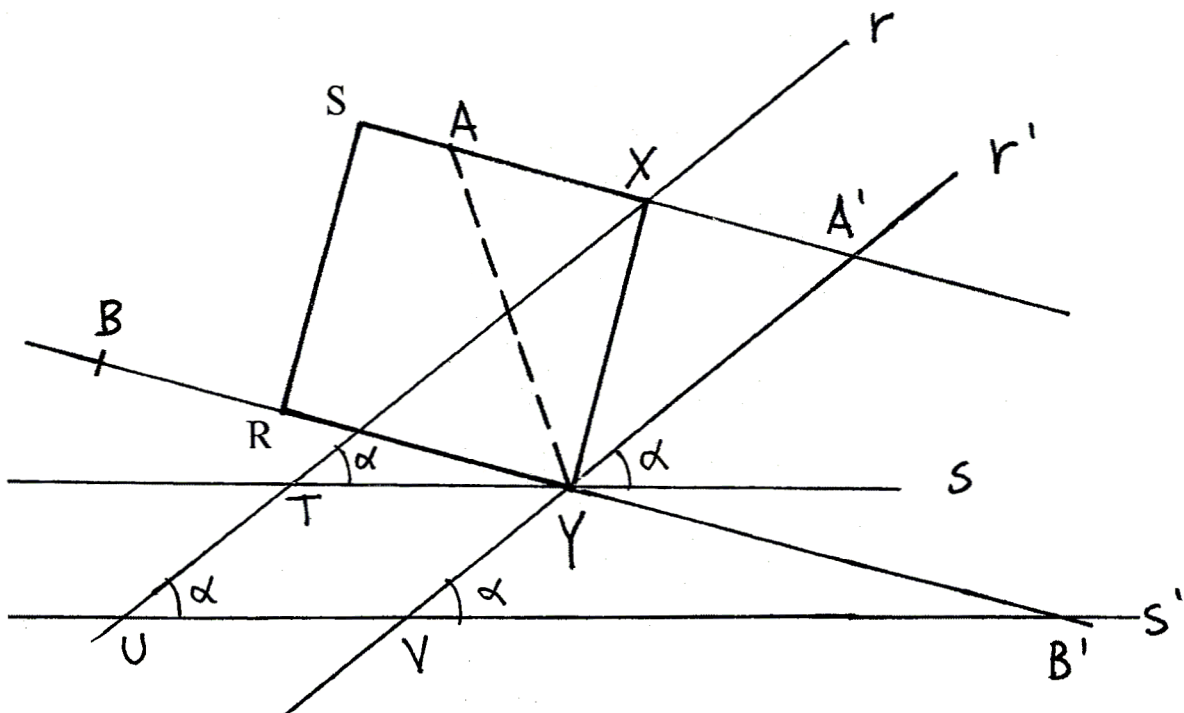
Tracciare la corda AY:



RSXY è un quadrato:



Prolunghiamo la retta r fino a farle intersecare la s' :



Le due coppie di rette ($r - r'$ e $s - s'$) si incontrano nei punti T, U, V e Y sempre formando l'angolo α .

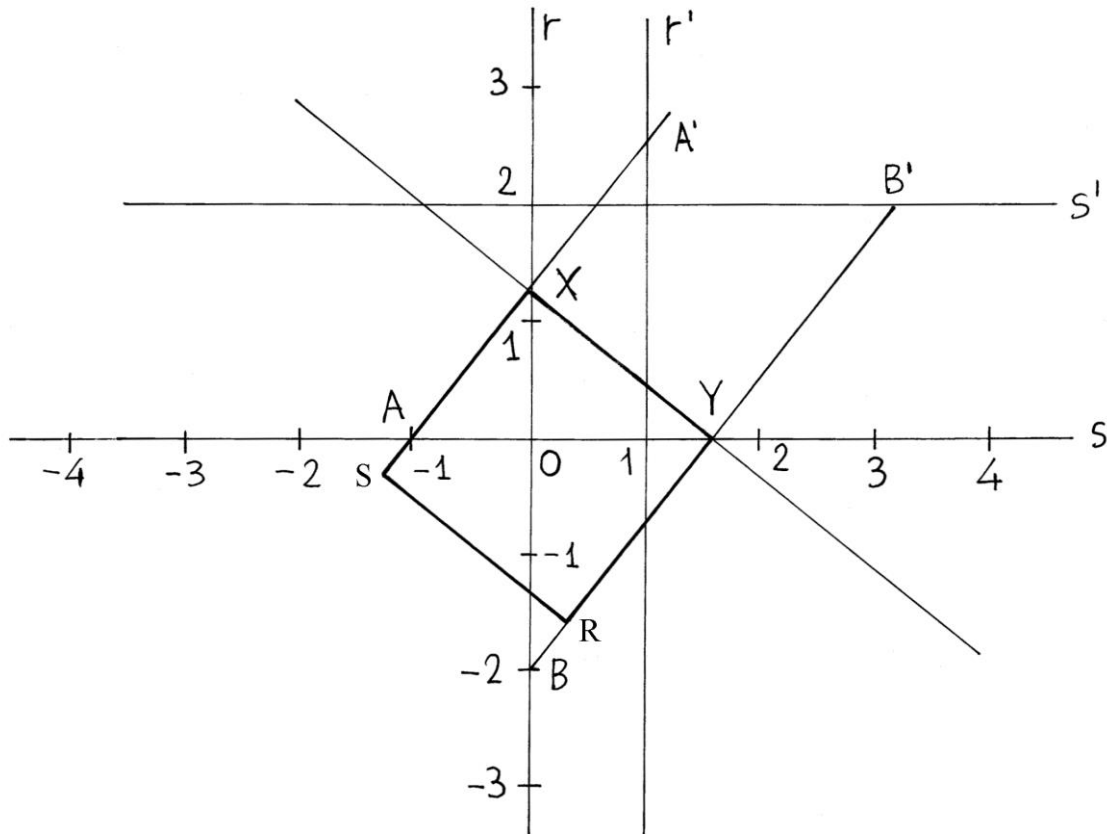
Disegnare due assi cartesiani fra loro perpendicolari, aventi origine nel punto O di coordinate (0, 0): rispetto al precedente diagramma, la retta r è ruotata in senso antiorario di un angolo uguale a $(90^\circ - \alpha)$ fino a posizionarsi sull'asse delle *ordinate*: l'angolo

Sull'asse delle *ascisse* viene collocata la retta s , che già nei precedenti grafici era orizzontale.

Disporre la corda AY sull'asse orizzontale in modo che il punto A abbia coordinate *convenzionali* $(-1, 0)$ e il punto X sia posizionato sull'asse verticale. L'unità di misura di tutte le lunghezze è fissata da quella convenzionale di OA : $OA = |1|$.

Sul precedente grafico, misurare con il compasso le lunghezze di AY e di XY e riportarle sul diagramma che segue.

L'asse delle ordinate è indicato con r e quello delle ascisse con S : diversamente da quanto contenuto nei precedenti grafici, le due rette sono ora *perpendicolari* e sono gli assi del piano cartesiano.

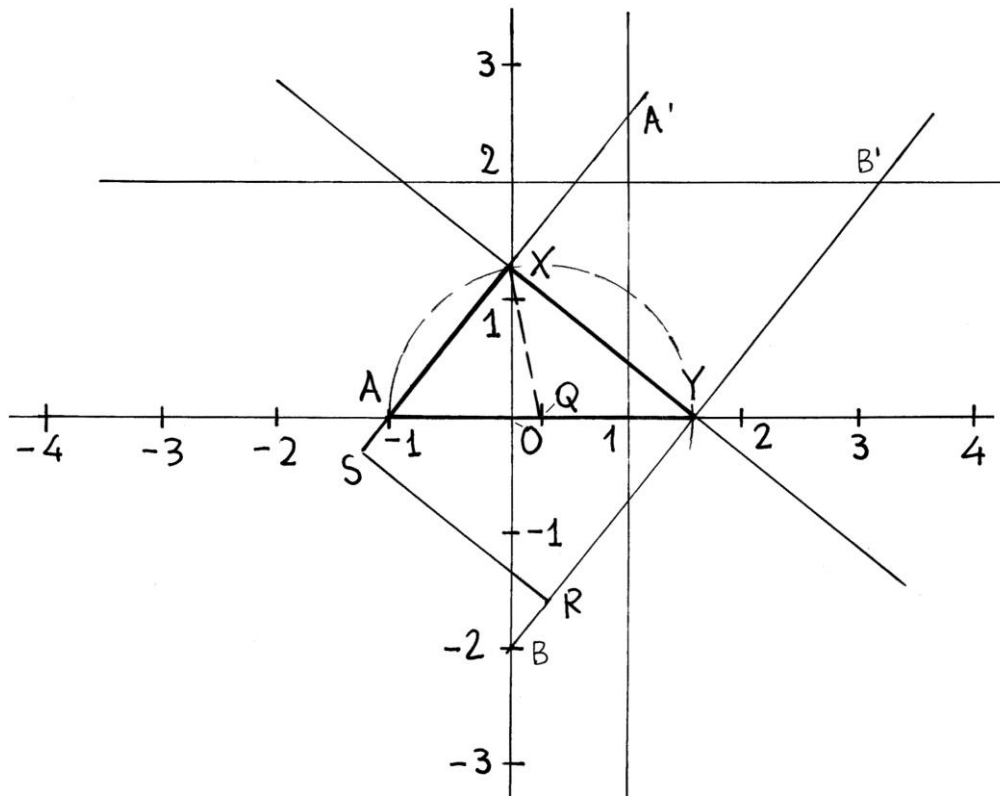


Per il punto di coordinate $[1, 0]$ condurre la retta r' , parallela alla r ; per il punto di coordinate $[0, 2]$ tracciare la retta orizzontale S' parallela alla S .

Prolungare verso l'alto il lato SX : il punto A' è sulla retta r' .

Prolungare verso il basso e verso l'alto il lato RY : il punto B è sulla retta r con coordinate $(0, -2)$ e il punto B' è sulla S' .

Determinare il punto medio di AY : è Q . Fare centro in Q e con raggio $QA = QX = QY$ disegnare una semicirconfenza. Il triangolo rettangolo AXY è inscritto in questa semicirconfenza: AX e XY sono i suoi cateti e AY ne è l'ipotenusa.



Per il 2° teorema di Euclide relativo ai triangoli rettangoli, vale la seguente proporzione:

$$AO : XO = XO : OY \rightarrow XO^2 = AO \cdot OY$$

Ma $AO = 1$, quindi $XO^2 = 1 \cdot OY = OY$

Consideriamo ora i triangoli rettangoli OXA , OXY e OYB : essi sono *simili*.

Fra i loro lati valgono le seguenti proporzioni:

$$OX : OA = OY : OX = OB : OY .$$

Ma $OA = 1$ e $OB = 2$, quindi sostituendo questi valori nella precedente proporzione si ha:

$$OX : 1 = OY : OX = 2 : OY .$$

Consideriamo i primi quattro termini della proporzione:

$$OX : 1 = OY : OX : \text{da essa consegue } OX^2 = OY .$$

Prendiamo ora in considerazione gli ultimi quattro termini della prima proporzione:

$$OY : OX = OB : OY \text{ e sostituiamo i valori che abbiamo calcolato:}$$

$$OX^2 : OX = 2 : OX^2 .$$

Ne consegue: $OX^4 = 2 \cdot OX$ da cui $OX^3 = 2$ e

$$OX = \sqrt[3]{2}$$

Il punto X ha coordinate

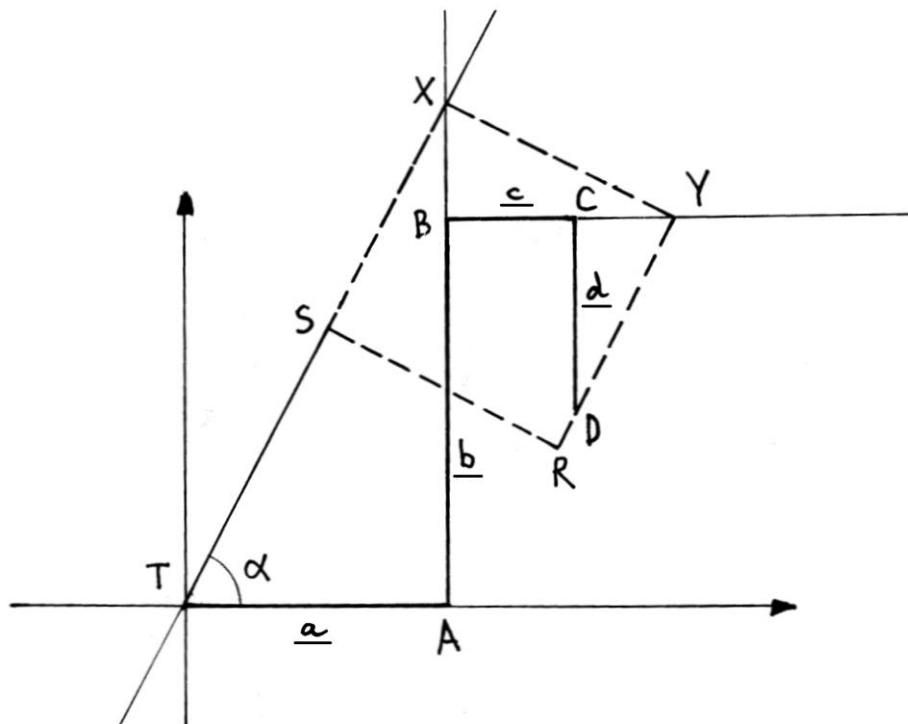
$$\left[0, \sqrt[3]{2} \right]$$

La costruzione di Margherita Beloch porta a determinare per via geometrica la radice cubica di un numero intero e, di conseguenza, nel caso della radice cubica di 2 consente il calcolo della lunghezza dello spigolo, OX, del cubo di volume doppio:

$$2 \cdot OA^3 = OX^3$$

Due equazioni di 3° grado

L'equazione di 3° grado $10x^3 + 15x^2 - 5x + 7 = 0$ è rappresentata dal grafico contenuto nella figura che segue:



Nota: nei grafici che seguono, i coefficienti e il termine noto sono sottolineati, a, b, c e d, per distinguerli dalle lettere maiuscole A, B, C e D che indicano i vertici.

T è il punto di partenza della poligonale che ha lati lunghi:

- TA = a = 10;
- AB = b = 15;
- BC = |c| = 5;
- CD = d = 7

Prolungare verso destra il segmento BC e verso l'alto quello AB.

Deve essere posizionato sul grafico un quadrato, RSXY, in modo che il punto X sia sul prolungamento di AB, il punto Y cada sul prolungamento di BC, il lato YR passi sul punto D e il lato SX sia sovrapposto a una retta passante per il punto T: solo il quadrato RSXY soddisfa tutte queste condizioni.

La corretta sovrapposizione di RSXY al grafico è ottenibile con la griglia quadrettata su carta trasparente con il metodo suggerito da Eduard Lill.

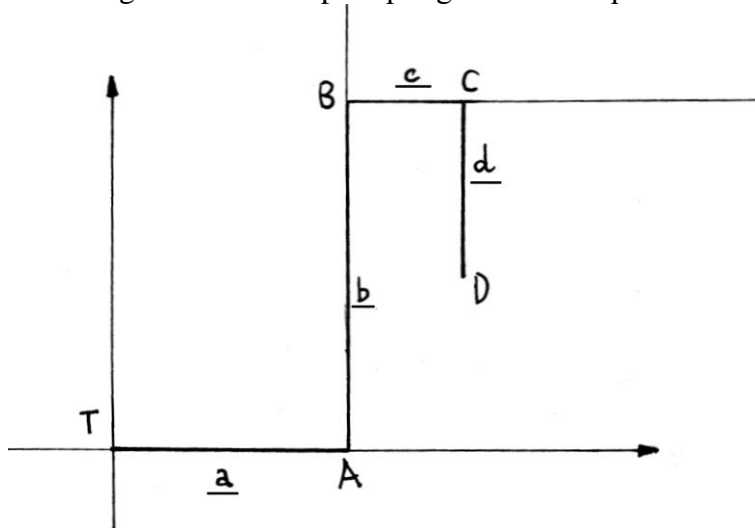
La tangente dell'angolo α è data da

$$tg \alpha = \frac{AX}{TA} = |X|$$

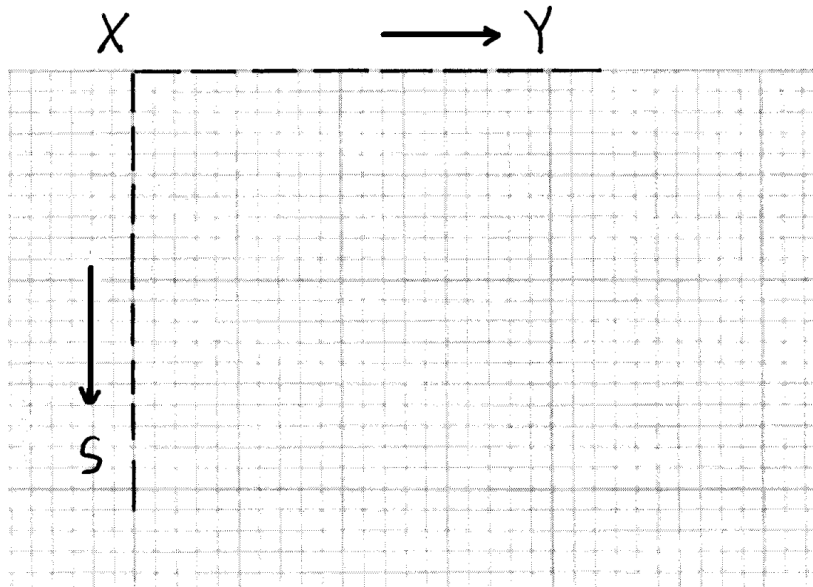
Essa è il *valore assoluto* di una radice X dell'equazione di terzo grado.

Come appena accennato, il precedente grafico è ottenuto con la sovrapposizione di una griglia quadrettata sulla costruzione.

La figura che segue contiene la pura poligonale dell'equazione di 3° grado:



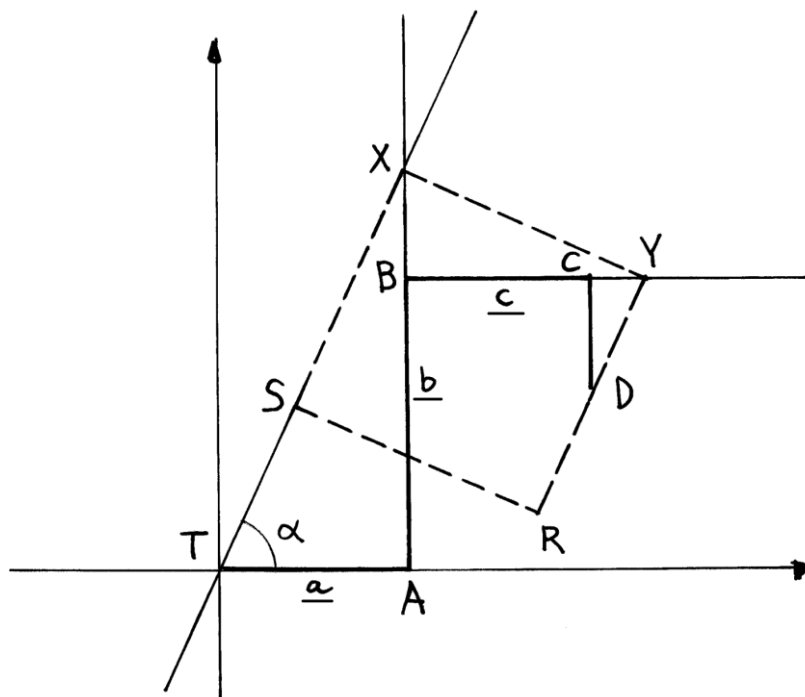
Su di un foglio di carta millimetrata trasparente fissare il punto X e tracciare due linee perpendicolari uscenti da X, una orizzontale sulla quale si trova il punto Y in posizione da definire e una verticale riservata ad accogliere il punto S:



Sovrapponendo questo ultimo grafico al precedente e facendo coincidere il punto X con il prolungamento di AB si ottiene per tentativi il corretto posizionamento dei vertici Y, R e S.

%%%%%%%%%

L'equazione di 3° grado $7x^3 + 11x^2 - 7x + 4 = 0$ è rappresentata con il grafico che segue:



Prolungare verso l'alto il segmento AB e verso destra quello BC.

Posizionare il reticolato di carta millimetrata per fissare i vertici del quadrato RSXY collocati come evidenziato nella figura: X sul prolungamento AB, S su una retta passante per X e per T, il punto Y sul prolungamento di BC e infine il vertice D sul lato YR.

Il *valore assoluto* della tangente dell'angolo $XTA = \alpha$ è una radice dell'incognita X dell'equazione di 3° grado.

Bibliografia

1. Beloch Piazzolla Margherita, “Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara – Row”, in “Atti dell’Accademia di Scienze mediche, naturali e matematiche di Ferrara”, serie II, vol. XI, 1934, pp. 186-189.
2. Hull Thomas C., “Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill”, in *American mathematical monthly*, 108, april 2011, pp. 307-315.
3. Hull Thomas, “Project Origami”, 2.a ediz., Boca Raton (Florida – USA), CRC Press, 2013, pp. xxii-341.
4. Lill Eduard, “Résolution graphique des equations numériques d’un degré quelconque à une inconnue”, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, 1867, 65, pp. 854-857.
5. Lill Eduard, “Résolution graphique des equations numériques de tous les degrés à une seule inconnue et description d’un instrument inventé dans ce but”, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1867, 6, pp. 359-362.
6. Scimemi Benedetto, “Un metodo grafico per la ricerca degli zeri reali dei polinomi”, in *Archimede*, 39 (1987), n. 4, pp. 163-178.
7. Tournes Dominique, “Du compas aux integraphes: les instruments du calcul graphique”, *Repères – IREM*, n. 50, janvier 2003, pp. 63-84.