

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte.

Parole chiave: circonferenza e cerchio; settore circolare; numerazione in base sessagesimale; area segmento circolare; solidi in assonometria; capacità di una botte.

LEONARDO DA CREMONA

Leonardo da Cremona è anche conosciuto con il nome erroneo di Leonardo Mainardi o Leonardo Maynardi.

Egli è l'autore di alcune opere matematiche. Un manoscritto contenente suoi scritti era nella biblioteca di Leonardo da Vinci.

Fu attivo almeno fra il 1404 e il 1438.

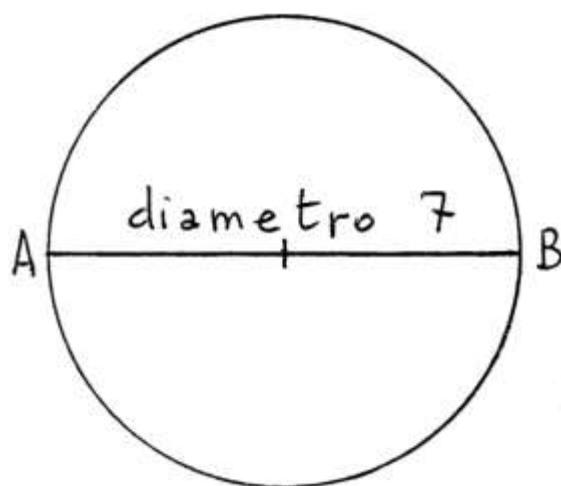
Un suo trattato di geometria pratica ("*Artis Metrice Practice Compilatio*") scritto in italiano (in dialetto veneziano) è stato pubblicato soltanto nel 1902, a cura dello storico della matematica Maximilian Curtze.

In quel lavoro erano trattati diversi argomenti di geometria piana e di geometria solida.

La lunghezza della circonferenza

Leonardo da Cremona fissò per π il valore tradizionale risalente a Archimede pari a $22/7$, che con una circonferenza di diametro 7 fornisce la lunghezza

$$\begin{aligned} \text{circonferenza} &= \text{diametro} \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) = \\ &= 7 \cdot \frac{22}{7} = 22 \end{aligned}$$



Nel Medioevo e nel Rinascimento erano scelte lunghezze rappresentate da *numeri interi* allo scopo di semplificare le operazioni aritmetiche e geometriche.

L'area del cerchio

Leonardo Cremonese usò la seguente formula per calcolare l'area del cerchio:

$$A_{\text{cerchio}} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2}$$

Con i dati dell'esempio precedente l'area è:

$$A_{\text{cerchio}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{2} = 38,5$$

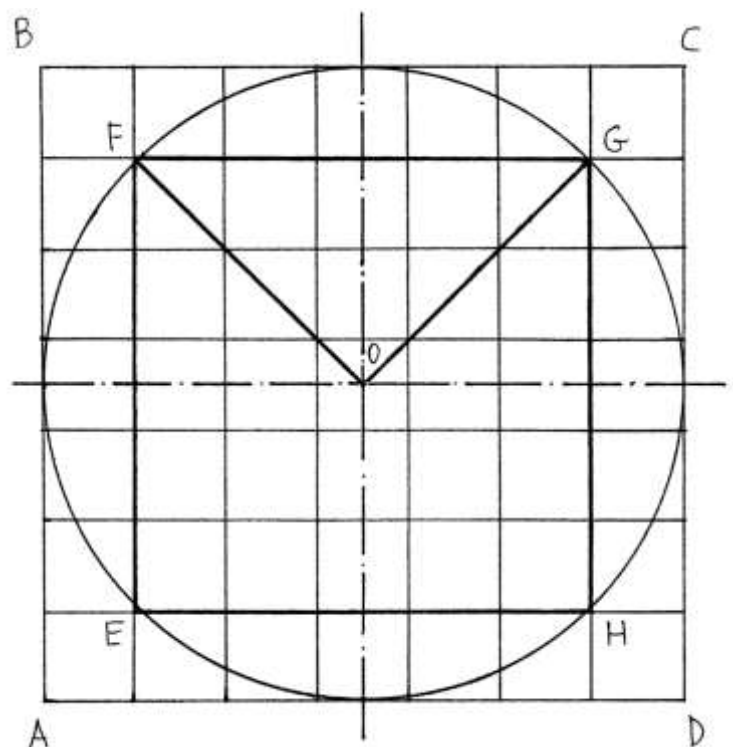
Leonardo suggerì una formula più facile da impiegare:

$$A_{\text{cerchio}} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) = \frac{d^2}{4} \cdot \frac{22}{7} = \frac{11}{14} d^2$$

Nell'esempio numerico si ha:

$$A_{\text{cerchio}} = \frac{11}{14} \cdot 7^2 = 38,5$$

Costruire un quadrato di lato 7 e tracciare il reticolato con quadrati di lato 1, come nella figura che segue:



Fare centro nel punto O e disegnare una circonferenza di raggio

$$\frac{7}{2} = 3,5$$

L'area del quadrato ABCD è:

$$A_{\text{quadrato ABCD}} = 7^2 = 49$$

L'area della superficie racchiusa fra il quadrato ABCD e la circonferenza è:

$$\begin{aligned} \text{Area spazio} &= \text{Area quadrato}_{\text{ABCD}} - \text{Area cerchio} = \\ &= 49 - 38,5 = 10,5 \end{aligned}$$

Il quadrato inscritto nella circonferenza – EFGH – ha diagonali EG e FH lunghe quanto il diametro. La lunghezza del suo lato – EF = EH – è ricavabile indirettamente:

$$EF^2 + EH^2 = FH^2$$

$$\text{Ma } EF = EH$$

quindi:

$$EF^2 + EF^2 = FH^2 \quad EF^2 = \frac{FH^2}{2}$$

La lunghezza di EF vale

$$EF = \frac{FH}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot FH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{diametro}$$

e in cifre:

$$EF = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 \cong 4,9497 \cong 5$$

Il triangolo rettangolo OFG è *isoscele*. La sua area è:

$$\text{Area}_{\text{OFG}} = \frac{OF \cdot OG}{2} = \frac{OF^2}{2} = \frac{d^2}{2}$$

Leonardo propose un metodo per calcolare l'area del *settore circolare* OFG: esso è delimitato dall'arco FG che è lungo

$$\begin{aligned} \widehat{FG} &= \frac{1}{4} \text{ della circonferenza} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 22 = 5,5 \end{aligned}$$

Per calcolare l'area del settore circolare OFG Leonardo moltiplicò la lunghezza dell'arco FG per l'area del cerchio e divise il risultato per la lunghezza della circonferenza:

$$Area_{OFG} = \frac{\text{lunghezza } \widehat{FG} \cdot \text{area cerchio}}{\text{circonferenza}}$$

Con i dati numerici:

$$Area_{OFG} = \frac{5,5 \cdot 38,5}{22} = 9,625 =$$

$$= 9 \text{ } 37 \text{ minuti } 30 \text{ secondi}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

I Sumeri e il sistema sessagesimale

Si deve alla civiltà dei Sumeri il primo impiego della numerazione in base 60.

Questo numero possiede alcune importanti proprietà:

- è il prodotto di tutti i numeri interi da 3 a 5: $3 * 4 * 5 = 60$;
- ha molti divisori: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30.

I Babilonesi continuarono ad usare il sistema sessagesimale dei Sumeri.

Da queste civiltà della Mesopotamia è derivata la odierna divisione della misura del tempo in sottomultipli di 60:

1 ora = 60 minuti; 1 minuto = 60 secondi.

La stessa divisione vale per il grado sessagesimale per la misura degli angoli:

1 angolo giro = 360° ; $1^\circ = 60 \text{ minuti } (')$; 1 minuto = 60 secondi $('')$.

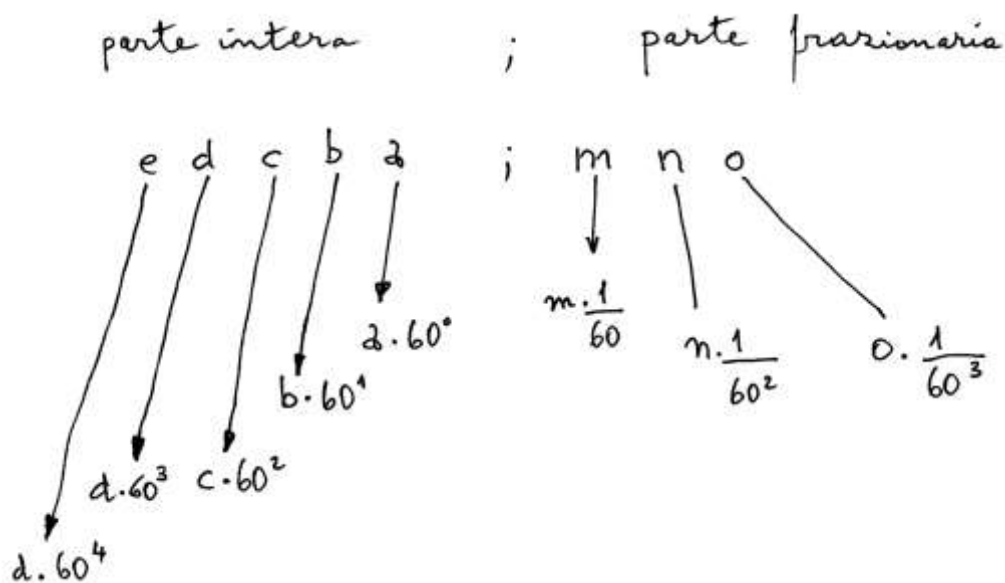
Un numero scritto con questa base è così formato:

$$\text{parte intera} + \frac{m}{60^1} + \frac{n}{60^2} + \frac{o}{60^3} + \dots$$

Gli storici della matematica che studiano i testi cuneiformi dei Sumeri e dei Babilonesi usano il simbolo del *punto e virgola* (;) per separare la parte intera da quella frazionaria dei numeri in base 60 e spazi per separare le componenti frazionarie:

$$\text{parte intera} ; m \ n \ o$$

La struttura di un numero in base 60 è così organizzata:



Ad esempio il numero $1; 24 \ 51 \ 10$ è il risultato di $\sqrt{2}$ espresso in base 60:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\cong 1,414221356237..._{(10)} \equiv \\ &\cong 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000}_{(60)} = \\ &= 1; 24 \ 51 \ 10_{(60)} \end{aligned}$$

Leonardo Cremonese utilizzò sia il sistema decimale che quello sessagesimale.

Per chiarire il metodo usato per la conversione da una base all'altra, riprendiamo l'esempio dell'area del settore circolare OFG, calcolato in 9,625 unità:

- 9 è la parte intera in entrambi i sistemi di numerazione;
- la parte frazionaria in base 10, 0,625, è moltiplicata per 60. Dal risultato – 37,5 – viene tolta la parte intera – 37 – che rappresenta i minuti ed è presa la parte frazionaria, 0,5, a sua volta moltiplicata per 60;
- il risultato intero, 30, rappresenta il numero dei minuti.

Il grafico seguente descrive le operazioni di conversione dalla base 10 a quella 60:

$$\begin{array}{r}
 9,625_{(10)} - 9 = 0,625 \\
 0,625 \times 60 = \\
 \hline
 37,5 - \\
 37 = \\
 \hline
 0,5 \\
 0,5 \times 60 = \\
 \hline
 30 - \\
 30 = \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

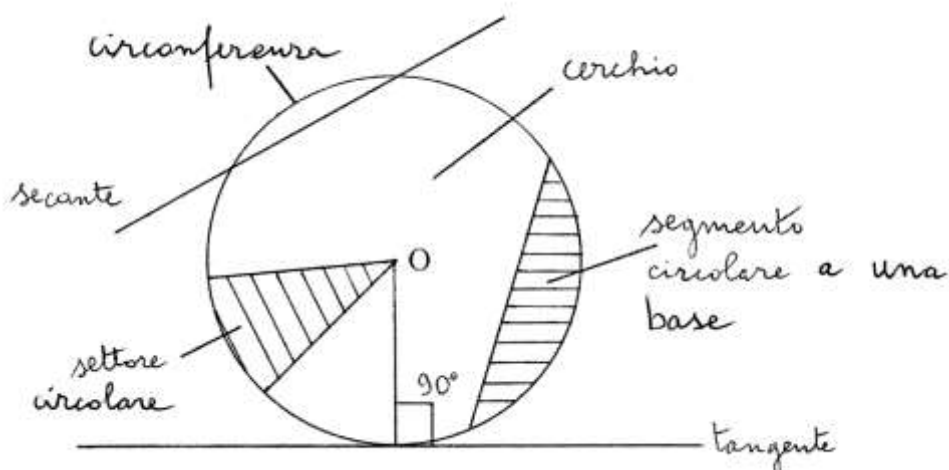
$9,625_{(10)} = 9;37,30_{(60)}$

A titolo di riprova, nel grafico che segue è effettuata l'operazione inversa di conversione dalla base 60 a quella 10:

$$\begin{aligned}
 9;37,30_{(60)} &= 9 \cdot 1 + \frac{37}{60} + \frac{30}{60^2} = \\
 &= 9 + \frac{37}{60} + \frac{30}{3600} = 9 + \frac{37 \times 60 + 30}{3600} = \\
 &= 9 + 0,625 = 9,625_{10}
 \end{aligned}$$

Alcune formule relative ai segmenti circolari

Lo schema che segue descrive alcune entità del cerchio e della circonferenza:



Leonardo Cremonese propose dei metodi per determinare la posizione del centro, *ignoto*, di un cerchio da cui era ritagliato un *segmento circolare a una base*.

Con buona probabilità egli attinse ai trattati del matematico persiano al-Khwarizmi (circa 780 – 850), di Abû Bekr o (Abû Bakr, vissuto nel IX secolo e autore di un “*Liber mensurationum*”)

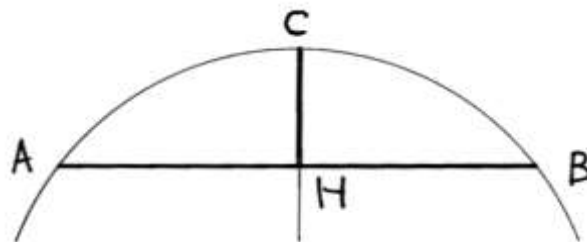
e del matematico ebreo catalano Abraham bar Hiyya (conosciuto come Savasorda o Savasorra, 1070 – 1136) che scrisse un trattato nel quale affrontò pure problemi di divisione delle figure. L'opera geometrica di Savasorda fu tradotta in latino da Platone da Tivoli con il titolo “*Liber embadorum*”.



è un *arco di circonferenza* e



è una *corda*: essi delimitano un *segmento circolare* a una base (che è data dalla corda AB).



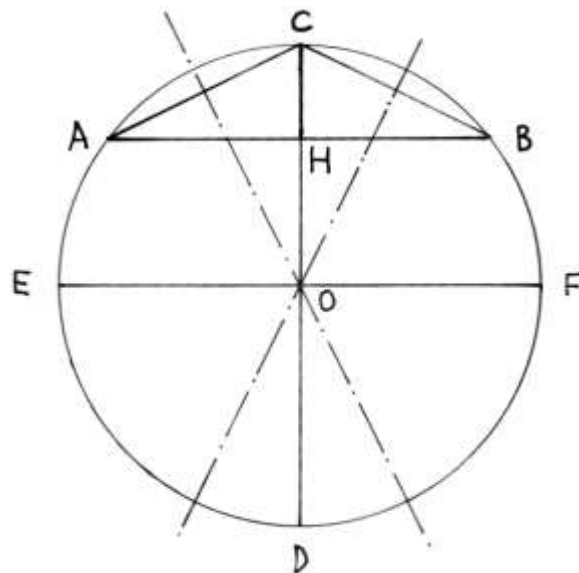
H è il punto medio della corda AB. CH è la *freccia* (o *saetta*), un segmento perpendicolare alla corda AB nel suo punto medio.

Per determinare il centro del cerchio e quindi il raggio e il diametro esistono almeno due metodi.

Il *primo metodo* è geometrico. Tracciare le corde AC e CB.

Prolungare verso il basso la freccia CH.

Costruire gli assi delle corde AC e CB: essi si incontrano in un punto, O, sul prolungamento della freccia.



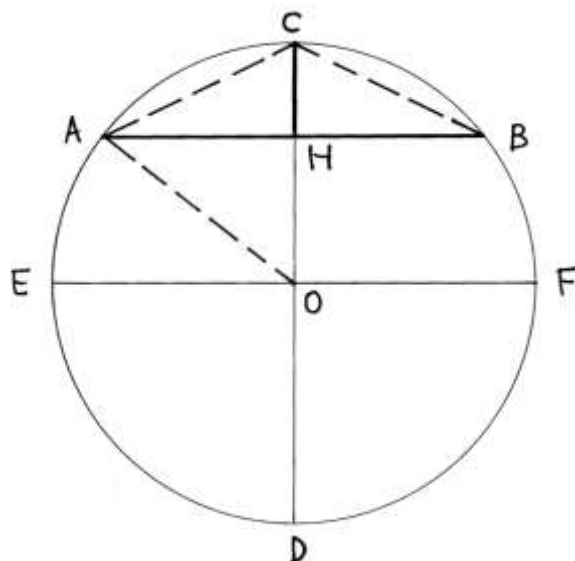
O è il centro della circonferenza di raggio $OC = OA = OB$.

La circonferenza fissa il punto D, estremo del diametro CD.

Per il punto O disegnare il diametro EF, parallelo alla corda AB.

Un *secondo metodo* ricorre all'algebra elementare.

Tracciare il raggio OA. I triangoli ACH e AOH sono rettangoli e hanno in comune il cateto AH:



Questo secondo metodo compare nei trattati dei tre autori citati sopra e nel testo di Leonardo Cremonese.

Fissiamo i dati:

$$AB = c \quad CH = f$$

$$AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$$

La lunghezza del cateto AH del triangolo ACH è data da:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = AC^2 - f^2 \quad (1)$$

AH è anche il cateto del triangolo AOH. Assegniamo alla lunghezza del segmento OH la variabile X:

$$OH = x$$

Vale la seguente relazione:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = r^2 - x^2 \quad (2)$$

Ma $x = r - f$, quindi:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = r^2 - (r - f)^2 \quad (3)$$

Uguagliando le due espressioni (1) e (2) relative a AH^2 , si ha:

$$AC^2 - f^2 = r^2 - (r - f)^2$$

$$AC^2 - f^2 = r^2 - (r^2 - 2rf + f^2)$$

$$AC^2 - f^2 = r^2 - r^2 + 2rf - f^2$$

$$AC^2 = 2rf \quad (4)$$

Ma:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + f^2 = \frac{c^2}{4} + f^2 \quad (5)$$

Eguagliando la (4) e la (5) si ha

$$2rf = \frac{c^2}{4} + f^2$$

$$2rf = \frac{c^2 + 4f^2}{4}$$

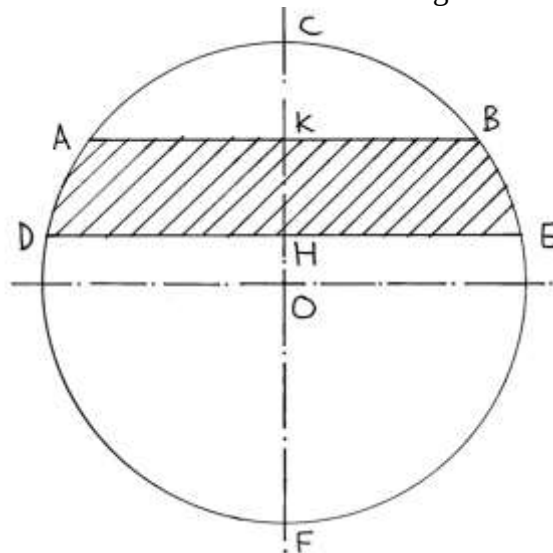
$$r = \frac{c^2 + 4f^2}{8f} = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2}$$

$$d = 2 \cdot r = 2 \cdot \left(\frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2} \right) = \frac{c^2}{4f} + f$$

%%

I tre autori citati sopra e Leonardo Cremonese hanno usato le stesse formule per calcolare l'area di un segmento circolare a una base.

Un settore circolare a due basi è mostrato nella figura che segue:



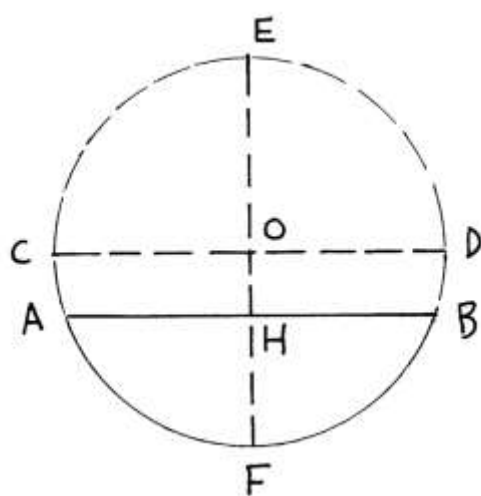
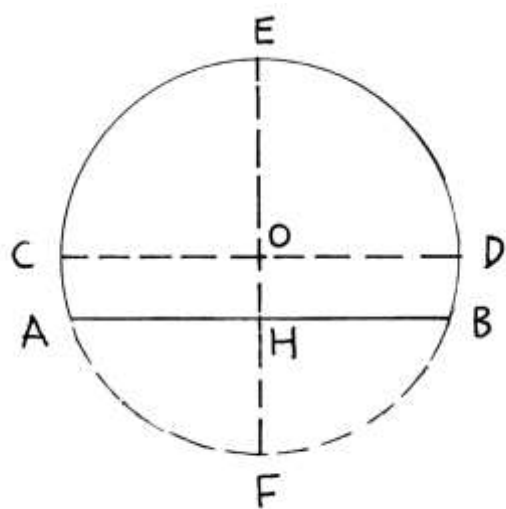
Il settore è disegnato tratteggiato. Esso è delimitato da due corde (AB e DE) e da due archi di circonferenza (AD e BE)

La sua area può essere calcolata sottraendo da quella del cerchio le aree dei due settori circolari a una base ACB e DFE.

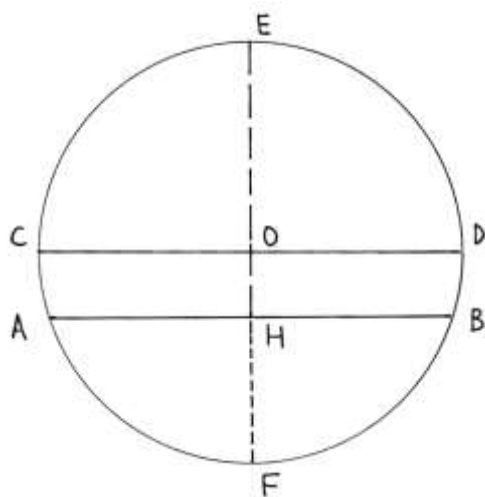
Le fonti di Leonardo Cremonese e lui stesso hanno proposto due formule distinte per il segmento più grande e per il segmento più piccolo di un semicerchio, come è il caso dei segmenti delimitati rispettivamente dagli archi

$\widehat{AEB}$ e $\widehat{AFB}$

delle due figure che seguono:



Esse sono ritagliate dal cerchio di centro O:



Fissiamo i dati:

$$\widehat{AEB} = a_1 \quad CD = d$$

$$EH = f \quad AB = c$$

$$\widehat{AFB} = a_2$$

La somma delle lunghezze dei due archi è uguale all'intera circonferenza:

$$\widehat{AEB} + \widehat{AFB} = \pi \cdot d = a_1 + a_2$$

L'area del maggiore fra i due segmenti circolari è data da:

$$\text{Area}_{\widehat{AEB}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{a_1}{2} - \left(\frac{d}{2} - f \right) \cdot \frac{c}{2}$$

L'area del minore segmento circolare è data da:

$$\text{Area}_{\widehat{AFB}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{a_2}{2} - \left(f - \frac{d}{2} \right) \cdot \frac{c}{2}$$

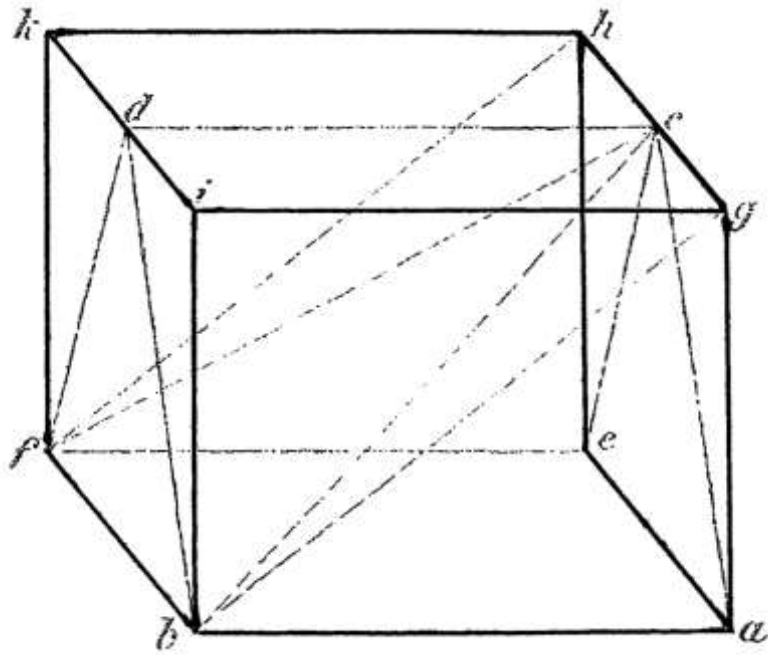
La somma delle due aree è uguale a quella dell'intero cerchio, come dimostrano i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \text{Area}_{\text{cerchio}} &= \text{Area}_{\widehat{AEB}} + \text{Area}_{\widehat{AFB}} = \\ &= \frac{da_1}{4} - \frac{dc}{4} + \frac{fc}{2} + \frac{da_2}{4} - \frac{fc}{2} + \frac{dc}{4} = \\ &= \frac{da_1}{4} + \frac{da_2}{4} = \frac{d}{4}(a_1 + a_2) = \frac{d}{4} \cdot \pi d = \\ &= \frac{\pi}{4} d^2 = \pi r^2 \end{aligned}$$

L'assonometria del prisma

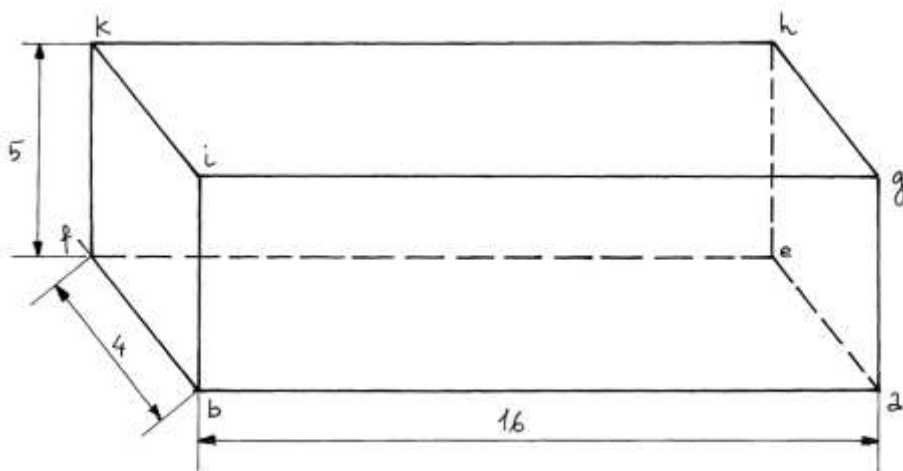
Leonardo studiò pure i problemi di geometria solida e disegnò, fra gli altri solidi, un prisma a base rettangolare, un *parallelepipedo*, che egli chiama con il termine *seratile*, parola impiegata in seguito anche da Luca Pacioli e da Niccolò Tartaglia.

Il solido è disegnato a *filo di ferro* per mostrare tutti gli spigoli e le diagonali.

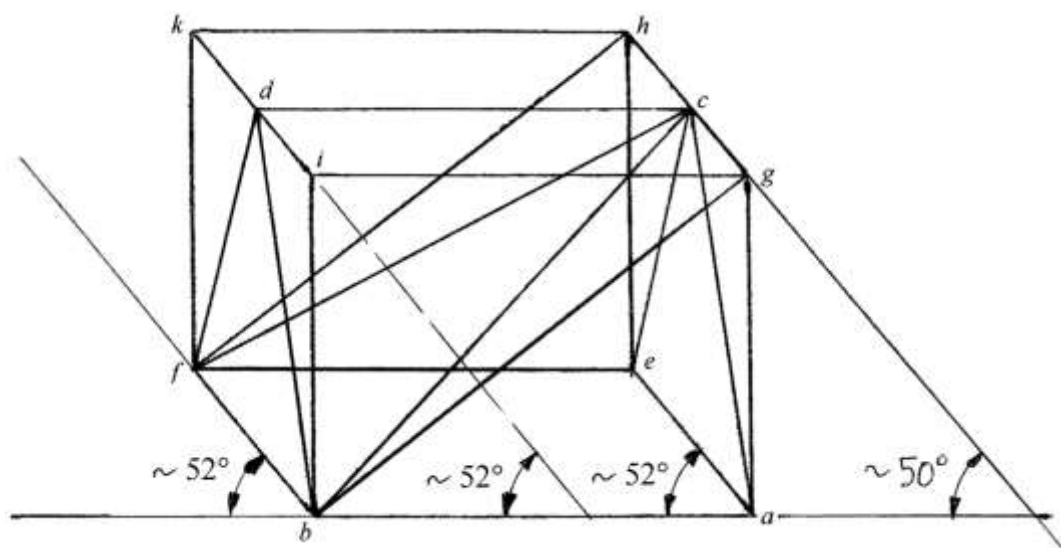


Leonardo usò lettere *minuscole* (a, b, c, ...) per indicare i vertici e lo stesso fece Piero della Francesca nel suo *Trattato d'abaco*.

Secondo il testo, il solido ha lati lunghi 16, 4 e 5:



Gli spigoli obliqui sono fra loro paralleli e inclinati di un *angolo di fuga* di 50 - 52°:



Il solido è disegnato in *assonometria cavaliere*.

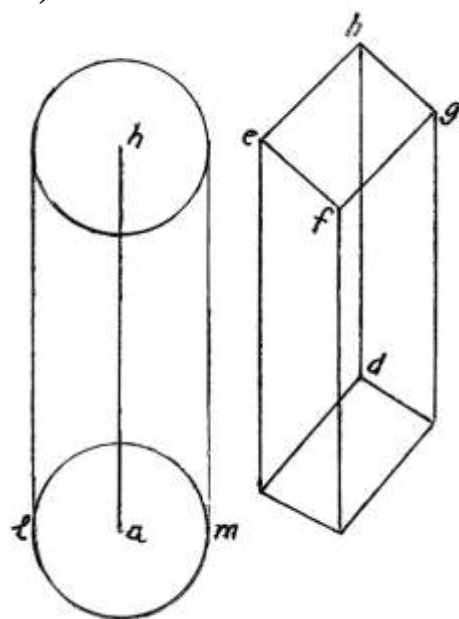
Nel manoscritto il parallelepipedo è disegnato in maniera un po' strana perché le lunghezze degli spigoli non sembrano rispettare una proporzione. La tabella che segue mostra i rapporti:

spigoli	lunghezze teoriche	misure reali proporzionali a
fb	40	10
fk	50	18
ba	160	23

Questo mancato rispetto di semplici regole di proporzionalità è forse dovuto alla limitatezza dello spazio nella pagina destinata ad accogliere il grafico?

Un cilindro e un parallelepipedo

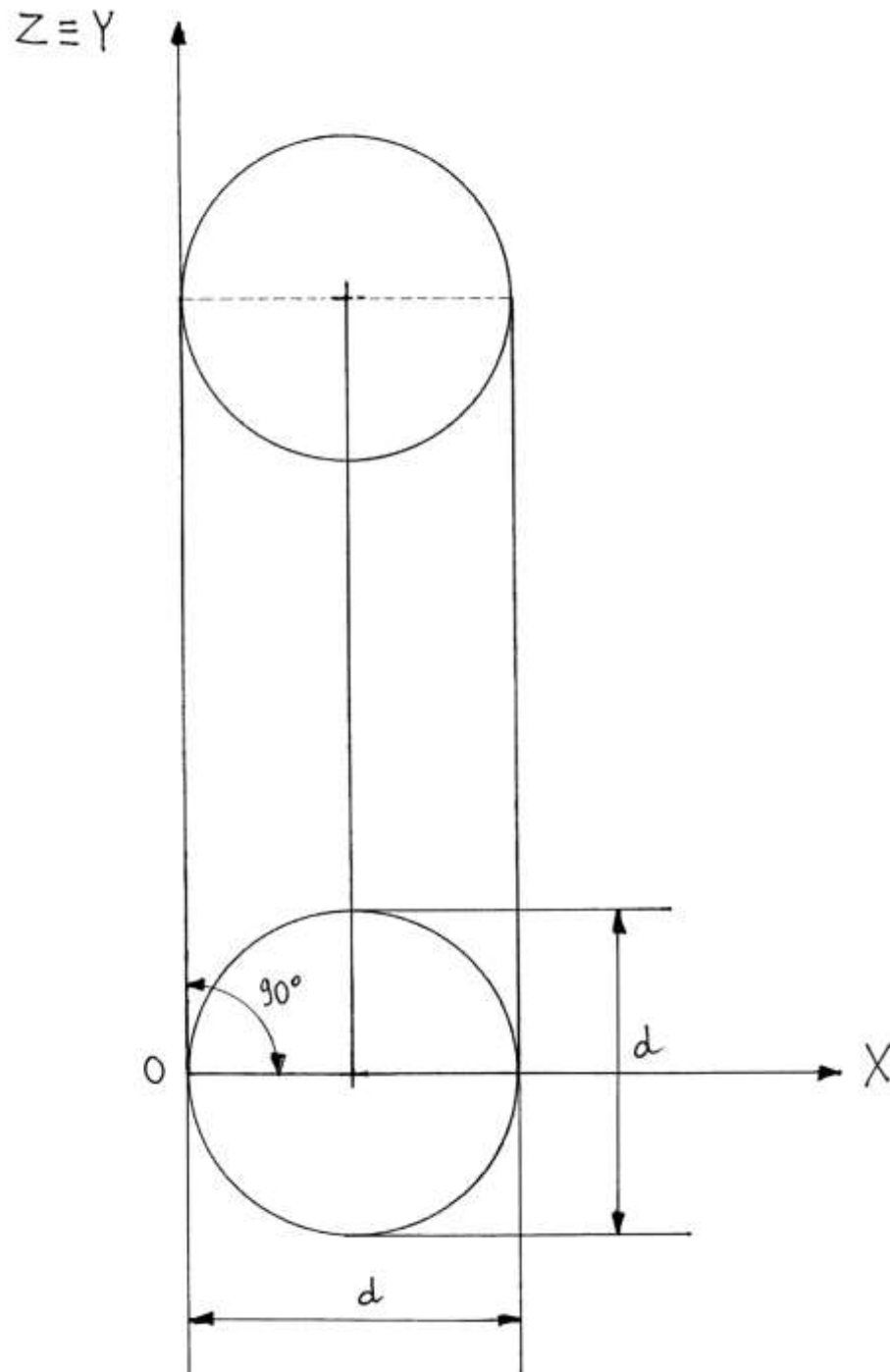
Un cilindro e un parallelepipedo sono disegnati affiancati: il primo è in assonometria cavaliere e il secondo in prospettiva (anche se il metodo si avvicina a quello di un'assonometria militare un po' deformata):



Il cilindro è disegnato con *direzione di fuga* di 90° , con gli assi Y e Z coincidenti e con *rapporto di fuga* uguale a 1, poiché i due cerchi non sono deformati e le dimensioni orizzontali e verticali dei due cerchi sono uguali al loro diametro d :

$$\text{rapporto di fuga} = \frac{d}{d} = 1$$

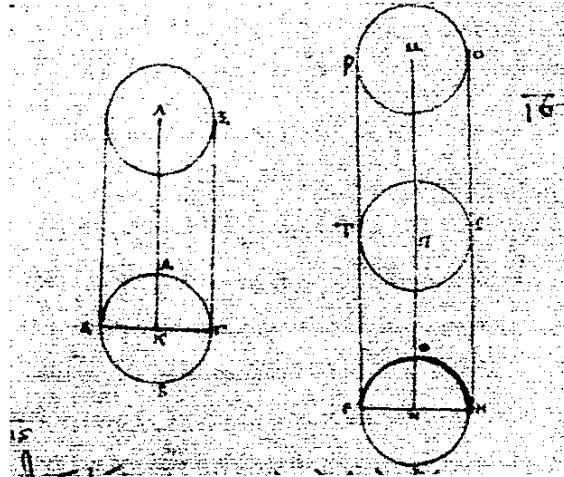
La figura che segue presenta ingrandito il cilindro in assonometria cavalliera:



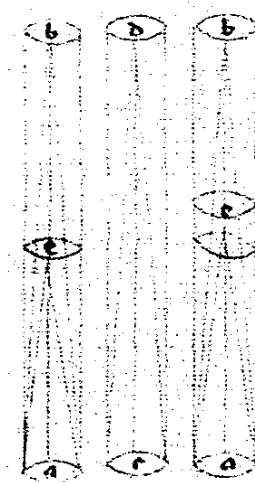
----- APPROFONDIMENTO -----

La particolare tecnica di rappresentazione assonometrica di un cilindro, mostrata nella precedente figura, era stata già impiegata in diversi manoscritti: le immagini sono ricavate dalla pagina 225 del fondamentale studio di Massimo Scolari citato in bibliografia.

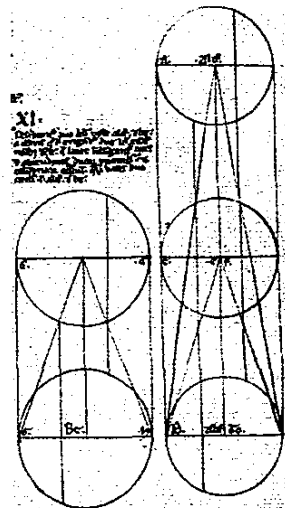
La figura che segue è una rappresentazione del cilindro in una versione di Euclide del XII secolo (Cod. lat. 23511, Monaco di Baviera, foglio 24 *recto*):



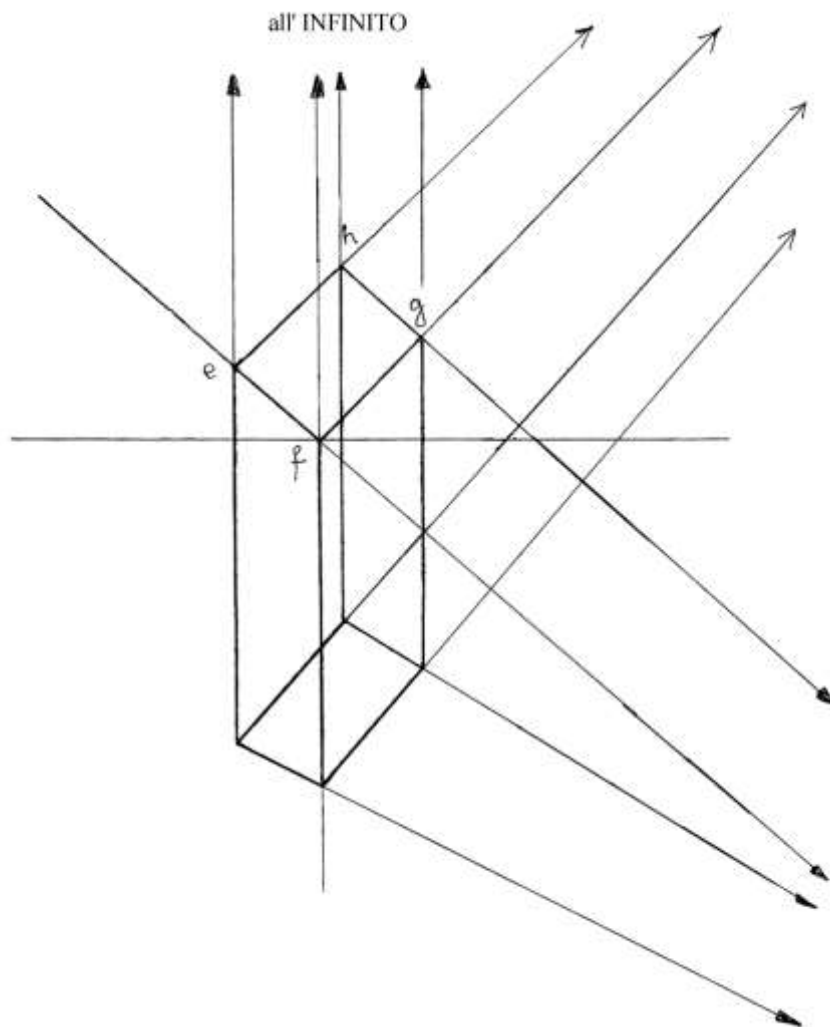
Lo schema che segue è contenuto in un codice con una traduzione degli *Elementi* di Euclide, XII, proposizione 14, a cura di Campano da Novara, codice risalente al XIV secolo e conservato a Londra; le basi dei cilindri sono disegnate con archi di circonferenza, quasi fossero delle ellissi “a punta”:



Infine, il grafico che segue è ricavato da un manoscritto contenente una traduzione latina di Adelardo da Bath, degli *Elementi* di Euclide, risalente al XIII secolo e conservato a Oxford:



Il parallelepipedo di Leonardo da Cremona è disegnato in prospettiva con tre punti di fuga: gli spigoli obliqui delle due facce (superiore e inferiore) tendono a convergere verso due punti di fuga a destra, mentre gli spigoli verticali sono fra loro paralleli e il loro punto di fuga è all'*infinito*:

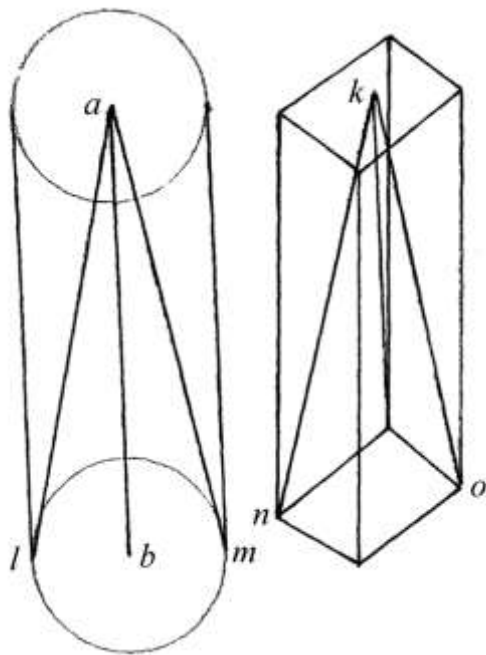


Gli spigoli che convergono verso il punto di fuga in alto a destra formano con la retta orizzontale (parallela alla *linea di terra* non disegnata) angoli compresi nell'intervallo $44 - 50^\circ$: ciò può essere un indizio della presenza di tracce di un'assonometria cavaliera con direzione di fuga inclinata a 45° .

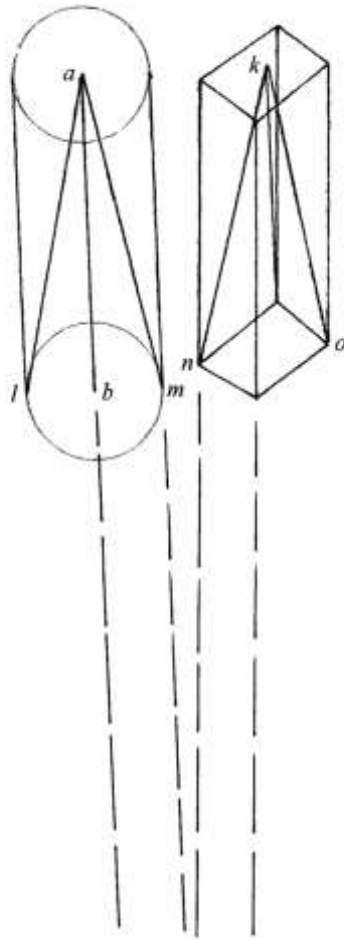
La faccia inferiore del solido è più deformata di quella superiore.

Cono e piramide

Nella figura che segue, sempre tratta dal lavoro di Leonardo Cremonese, sono disegnati affiancati due solidi composti: a sinistra un cono inserito nel cilindro da cui ha origine e a destra un tronco di piramide inscritto in un parallelepipedo.

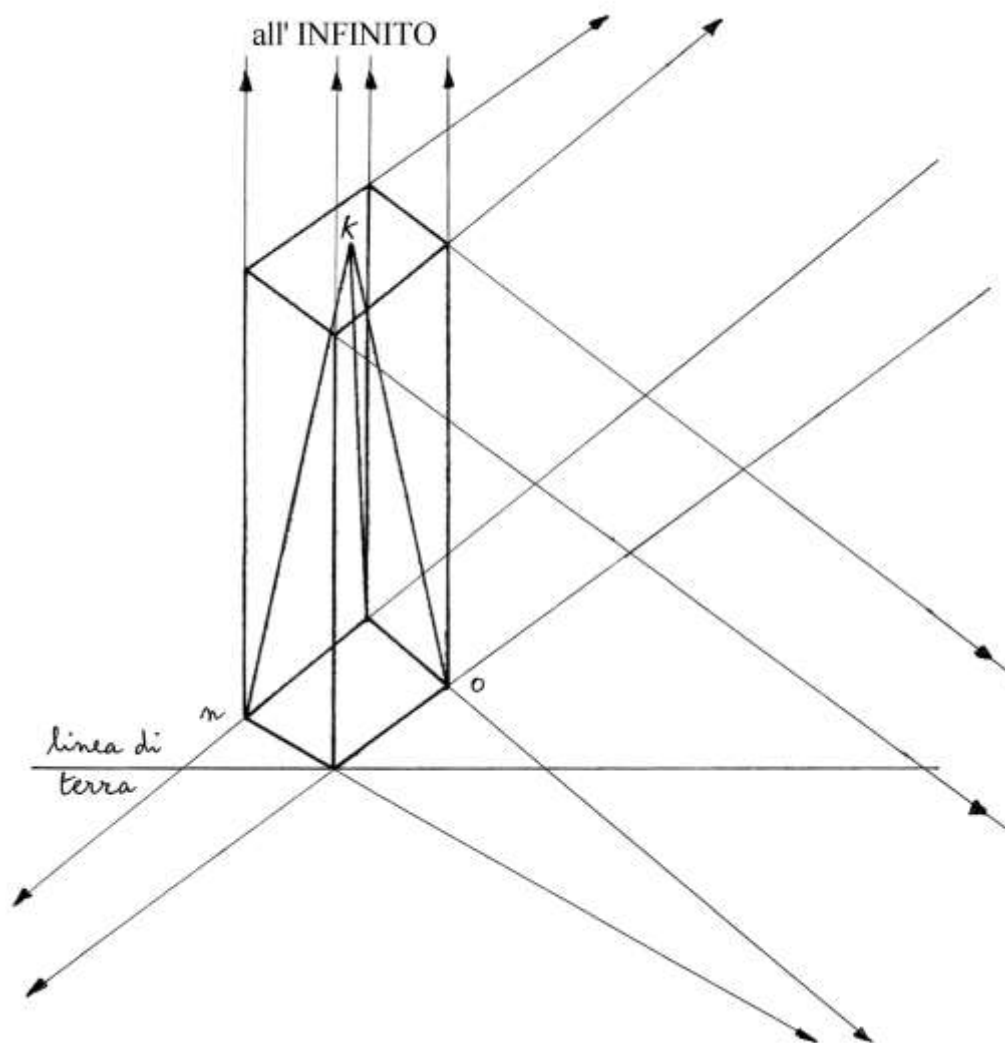


I solidi sono stati disegnati *divergenti* perché i loro spigoli verticali non sono paralleli. I solidi sono rappresentati a “filo di ferro” per mostrare tutti gli spigoli.



Il cilindro e il cono sono disegnati in *assonometria cavaliere* con lo stesso metodo usato per il cilindro descritto nel precedente paragrafo.

Il parallelepipedo e la piramide in esso contenuta sono rappresentati in *prospettiva*: il disegnatore ha impiegato ben *quattro* punti di fuga per gli spigoli delle due basi rettangolari. Gli spigoli verticali sono paralleli e convergono in un *quinto* punto di fuga posto all'*infinito*:



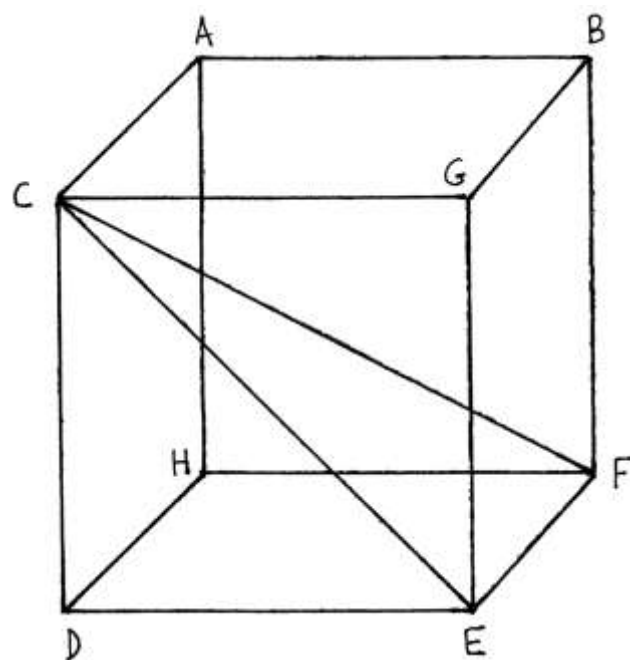
Si ripropone una domanda: questa grossolana prospettiva è stata imposta da mancanza di spazio? Nello spazio euclideo possono esistere solo *tre* punti di fuga.

Le diagonali di un cubo

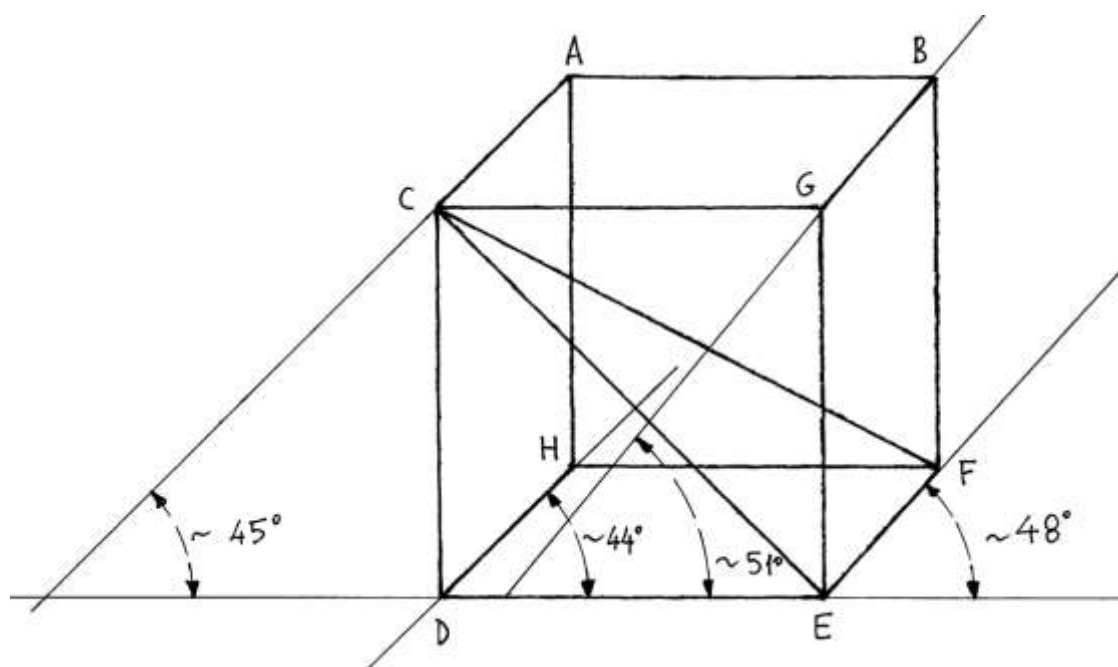
Leonardo determinò la lunghezza della diagonale di una faccia quadrata (CE) e della diagonale del cubo (CF).

Egli chiamò *diametri* entrambe le diagonali.

La figura che segue presenta il disegno del cubo con le lettere apposte ai vertici scritte in *maiuscolo* e non in *minuscolo* come aveva fatto Leonardo:



Il cubo è rappresentato in assonometria cavaliere con angoli di fuga compresi fra 44 e 51°. Il rapporto di fuga sugli spigoli obliqui è compreso fra 0,45 e 0,49 e quindi si avvicina al rapporto di fuga 0,5 tipico della tradizione assonometria cavaliere:



La lunghezza dello spigolo del cubo è fissata da Leonardo in 4 unità. Per calcolare la lunghezza della diagonale $CE = d$ del quadrato $DCGE$, egli impiegò la seguente formula:

$$d = \sqrt{2 \cdot \text{lato}^2} = \sqrt{2 \cdot 4^2} = \sqrt{32} \cong 5,6568..._{(10)}$$

Il metodo per convertire un numero dalla base 10 a quella 60 è stato spiegato in un precedente paragrafo:

$$5,6568..._{10} \cong 5 \text{ } 39^{\text{minuti}} \text{ } 24^{\text{secondi}}_{(60)}$$

Leonardo approssimò il risultato in base sessagesimale a

$$5 \text{ } 39^{\text{minuti}} \text{ } 22^{\text{secondi}}_{(60)}$$

La lunghezza della diagonale del cubo, CF, è data da:

$$CF^2 = CE^2 + EF^2$$

$$\text{Ma } CE^2 = CD^2 + DE^2$$

Le lunghezze degli spigoli del cubo sono uguali: $CD = DE = EF$

Quindi:

$$CF^2 = CD^2 + DE^2 + EF^2 = 3 * CD^2$$

La lunghezza di CF è:

$$CF = CD \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3} \cong 6,92820..._{(10)}$$

Convertendo nella base 60 si ha:

$$CF \cong 6 \text{ } 55^{\text{minuti}} \text{ } 42^{\text{secondi}}_{(60)}$$

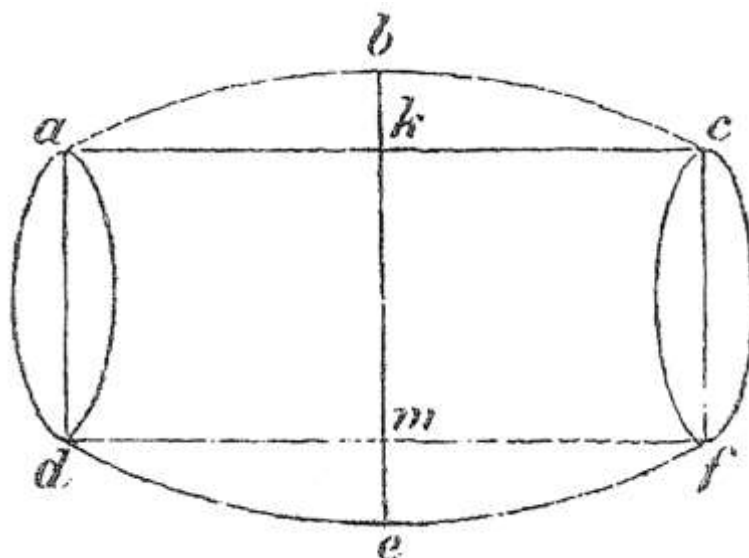
Leonardo Cremonese arrotondò il risultato a

$$6 \text{ } 55^{\text{minuti}} \text{ } 43^{\text{secondi}}_{(60)}$$

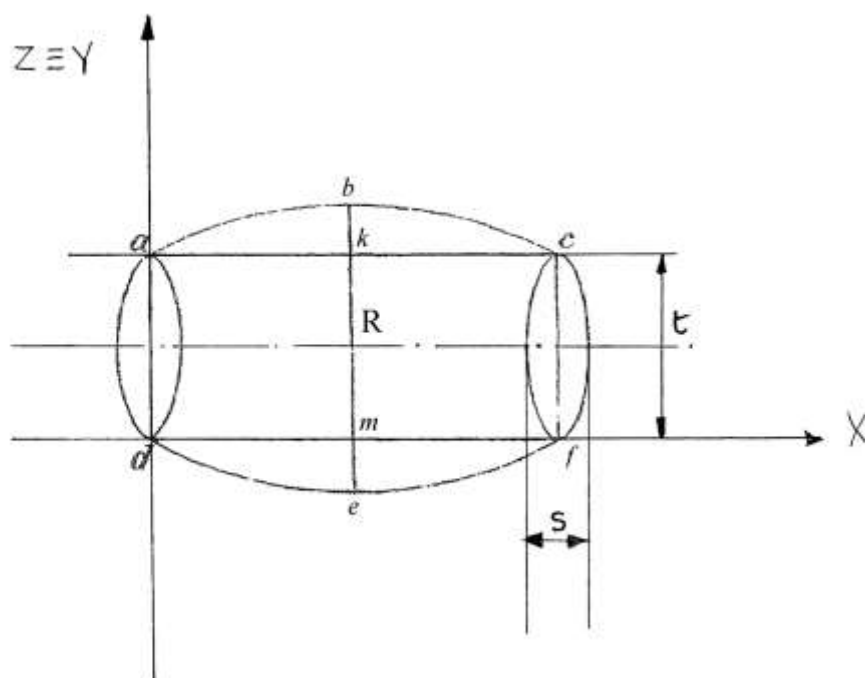
La misura della capacità di una botte

La misura della capacità di una botte (una *veza* nel dialetto veneto usato da Leonardo Cremonese) costituiva un problema diffuso nel Medioevo e nel Rinascimento e oggetto di spiegazioni e di metodi pratici per il suo calcolo nei *trattati d'abaco* italiani e nelle opere di molti matematici.

Anche Leonardo Cremonese studiò l'argomento e rappresentò una botte con l'asse di simmetria orizzontale:



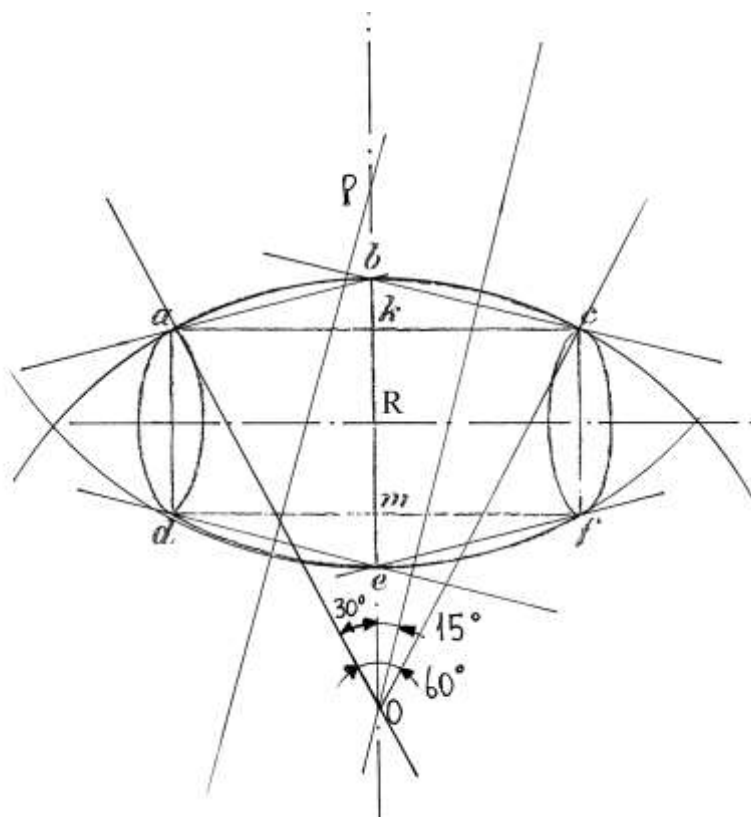
Il solido è disegnato in un'assonometria cavaliere che mostra entrambe le basi circolari deformate in ellissi. L'angolo di fuga è uguale a 90° (angolo formato dall'asse X con gli assi coincidenti Z e Y).



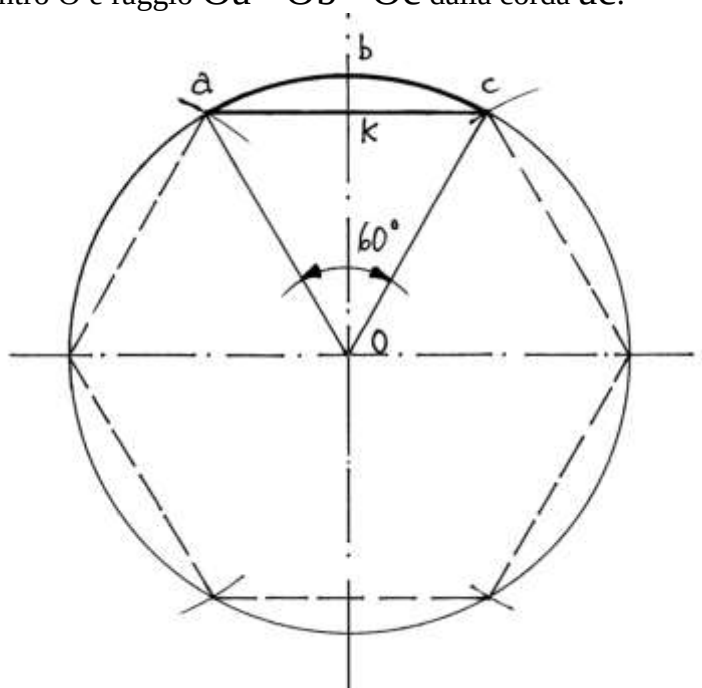
Il rapporto di fuga relativo allo schiacciamento delle circonferenze dei due cerchi di base è misurato l'ungo l'asse X è vale mediamente:

$$\text{rapporto di fuga} = \frac{s}{t} \cong 0,35$$

Gli archi *abc* e *def* sono archi di circonferenza con centri rispettivamente nei punti O e P, esterni al profilo della botte e posizionati sull'asse di simmetria verticale passante per i punti *b*, *k*, *R*, *m* e *e*.



Lo schema che segue mostra l'origine geometrica del *segmento circolare abck* determinato nel cerchio di centro O e raggio $Oa = Ob = Oc$ dalla corda *ac*:

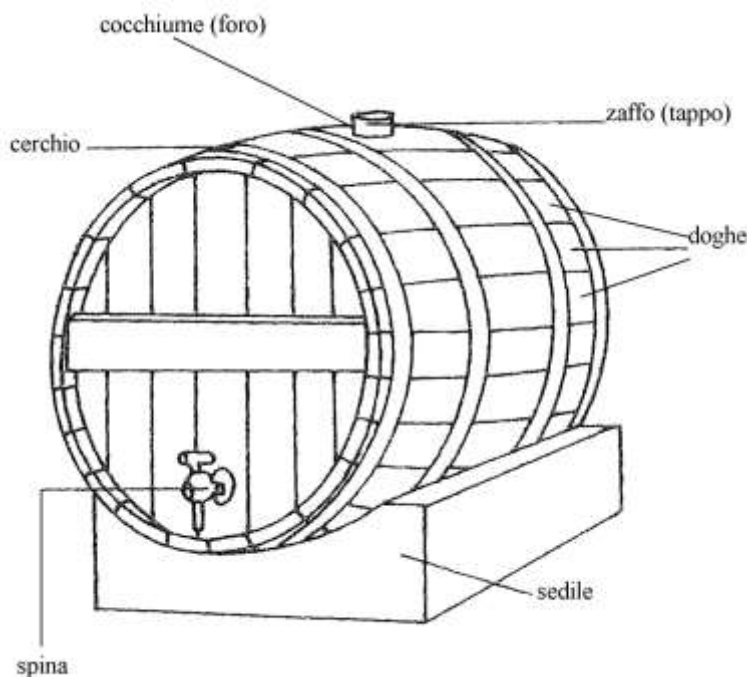


----- APPROFONDIMENTO -----

La botte descritta da Leonardo Cremonese ha pianta circolare e profilo ad arco di circonferenza.

Altre botti e recipienti vinari hanno pianta a forma di ellisse e profili più complessi di quello circolare.

La figura che segue descrive una botte con basi circolari, vista in prospettiva (da Devoto – Oli, “*Dizionario illustrato della Lingua Italiana*”):

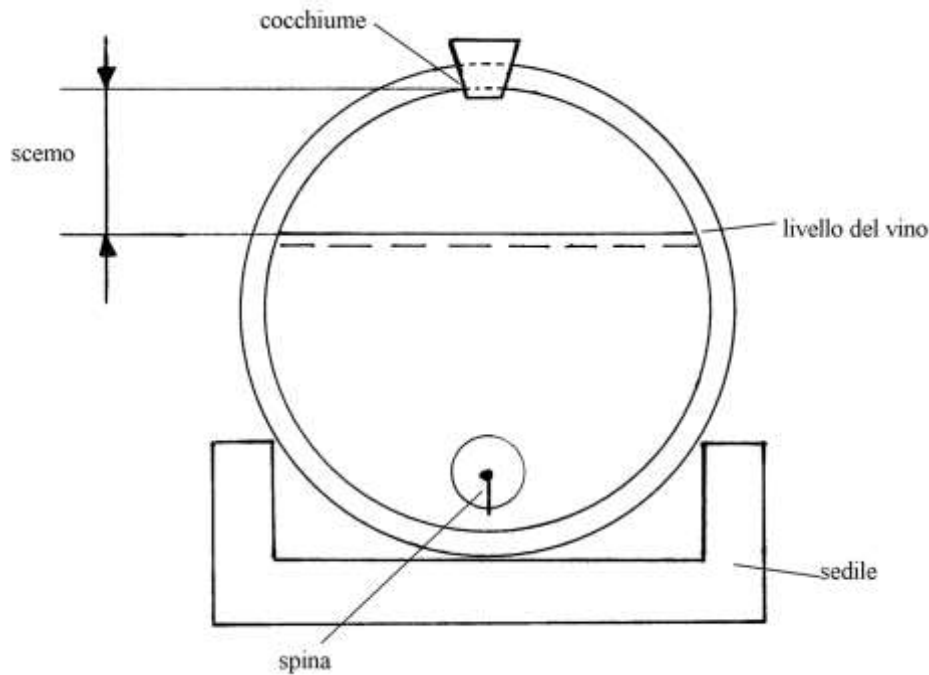


La botte è costruita con *doghe* di legno rigidamente connesse per mezzo di *cerchi* metallici. Nella parte superiore, nella zona di diametro maggiore (*entasi*) è praticato un foro su una doga: è il *cocchiame*, chiuso con un tappo di forma conica, lo *zaffo*.

La base anteriore è forata per l'inserimento di un rubinetto, la *spina*.

La botte non poggia direttamente sul pavimento ma su un apposito sostegno, il *sedile*.

Per il caso più semplice, botti con basi circolari, gli abacisti e i geometri del Medioevo e del Rinascimento che studiarono la misura del contenuto delle botti elaborarono formule semplificate e apposite tabelle. Negli stessi periodi storici furono usati appositi strumenti, dei *calibri*, che servivano a misurare il livello del vino e la lunghezza degli *scemi*:



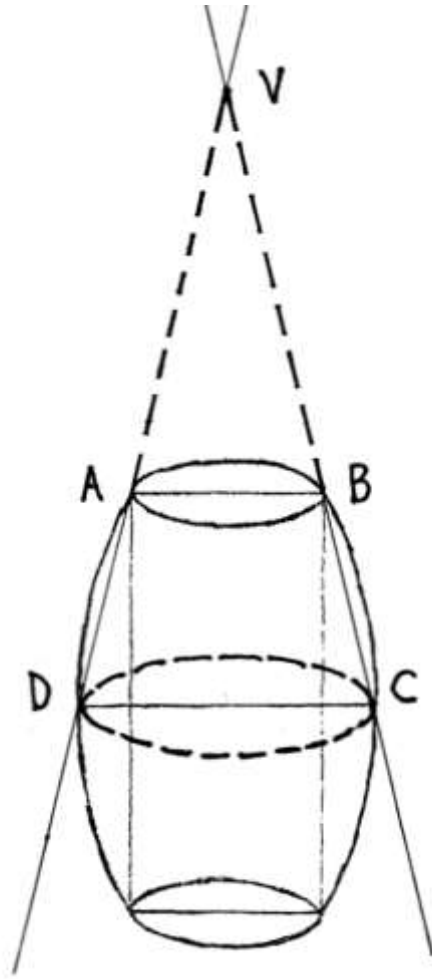
Lo *scemo* è l'altezza della colonna d'aria sovrastante il pelo libero del liquido.

La forma delle botti

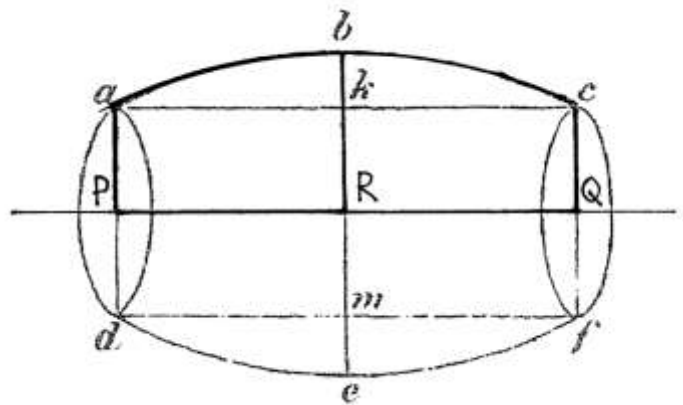
La forma delle botti presenta generalmente un rigonfiamento a metà altezza o lunghezza (a seconda che la botte sia verticale o orizzontale): si tratta di un'*entasi* (il rigonfiamento delle colonne usate in architettura). La presenza del rigonfiamento sembra dovuta al trasporto dei recipienti: esso ridurrebbe l'attrito fra più botti affiancate.

La soluzione approssimata più sbrigativa adottata da alcuni geometri (ma poco precisa) riduceva la botte a un solido formato da due tronchi di cono uniti per la base maggiore.

Il solido ABCD non è un trono di cono ottenuto dal sezionamento del cono DVC: le due superfici AD e BC non sono rettilinee. Ciò comportava un risultato errato per *difetto*.

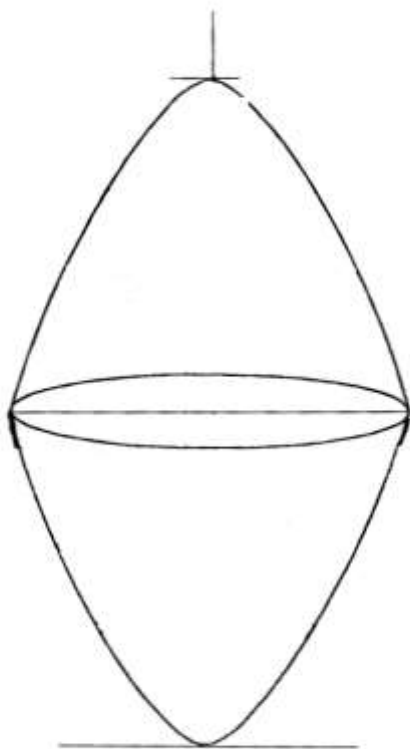


Il solido ABCD è prodotto dalla rotazione del quadrilatero $RPab$ intorno all'asse di simmetria passante per i punti P, R e Q:

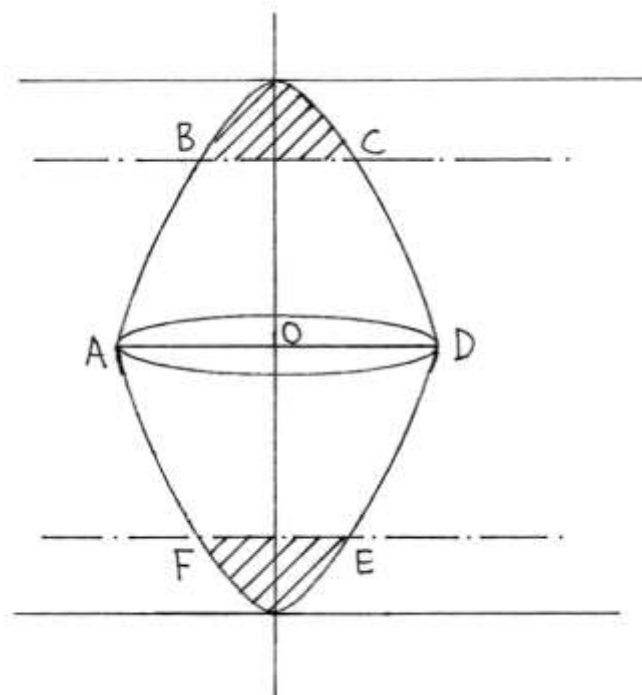


La rotazione della figura $QPabc$ intorno all'asse di simmetria PRQ genera la botte (che ha la stessa forma di quella descritta da Leonardo Cremonese).

La seconda soluzione era data dall'assimilazione della botte a due tronchi di *paraboloide* opposti per le loro basi maggiori:

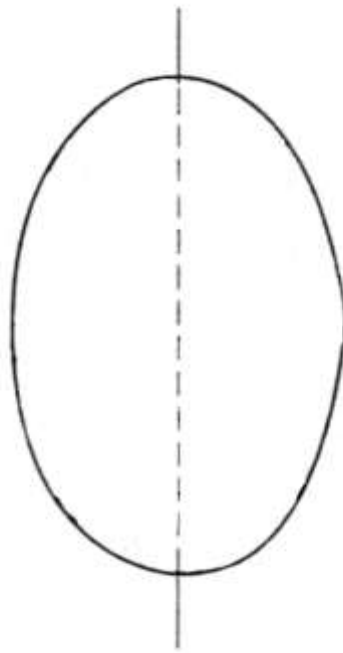


Tagliando con due piani paralleli a quello di unione si ottiene un *paraboloide troncato*:

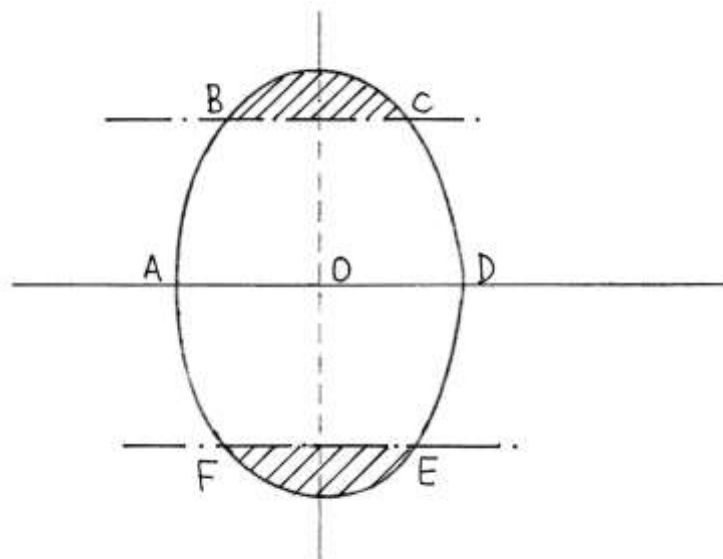


Una terza soluzione è data dall'assimilazione della botte circolare a un *ellissoide troncato*. Un ellissoide è un solido geometrico generato dalla rotazione di un'ellisse intorno a uno dei suoi due assi.

Un ellissoide prodotto dalla rotazione di un'ellisse intorno al suo asse maggiore è presentato nella figura che segue:



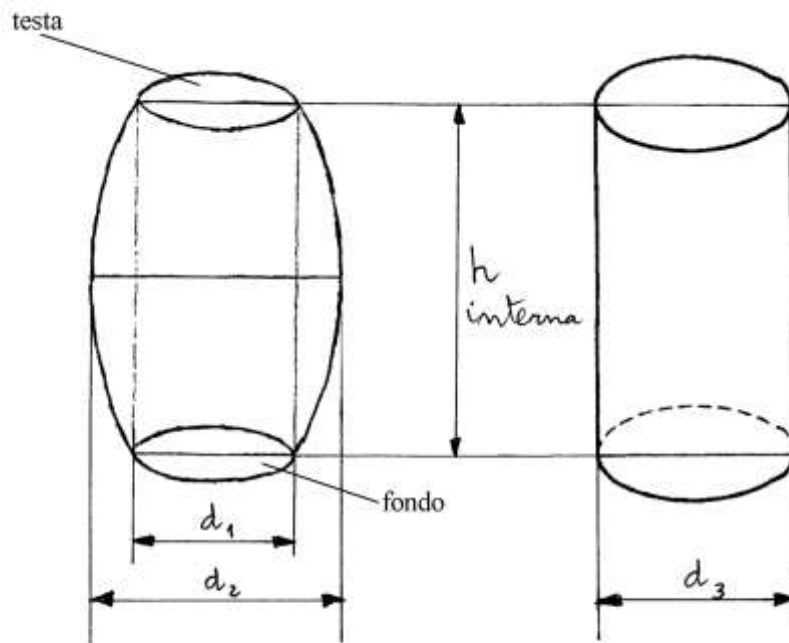
La figura che segue mostra un *ellissoide troncato* ABCDEF ottenuto sezionando un ellissoide con due piani paralleli equidistanti dal piano in cui giacciono i punti A, O e D:



Fra le tre soluzioni proposte quella che più si allontana dal profilo della botte è la prima, quella a doppio tronco di cono.

Il profilo di una generica botte non può essere assimilato ad alcuna delle tre forme viste.

La botte circolare presentata da Leonardo Cremonese è assimilabile a un cilindro di forma equivalente. Nella figura che segue, a sinistra è riprodotta la botte di Leonardo e a destra il cilindro equivalente con la stessa altezza h :



d_1 d_2 d_3 diametri misurati all'interno

L'assimilazione della botte circolare al cilindro è una soluzione ricercata dagli abacisti e dai geometri fino almeno all'Ottocento.

Questo metodo fu adottato nell'Ottocento dalle Dogane di alcuni Stati italiani anteriori all'unificazione nazionale.

Di seguito è descritta la soluzione spiegata dal matematico Luigi Malavasi nel suo trattato "La Metrologia Italiana ...", pubblicato a Modena nel 1842.

Nel caso più semplice, il diametro della *testa* e quello del *fondo* sono uguali a d_1 .

La lunghezza del diametro del cilindro equivalente, d_3 , è intermedia fra quelle di d_1 e d_2 della botte:

$$d_1 > d_3 > d_2$$

Il volume di una botte era calcolato determinando le dimensioni *interne* del solido: altezza h e diametri vari.

Nel caso mostrato nella precedente figura, il diametro del cilindro *equivalente*, d_3 , era calcolato con la seguente formula *empirica*:

$$d_3 = \frac{2 \cdot d_2 + \frac{d_1 + d_1}{2}}{3} = \frac{2 \cdot d_2 + d_1}{3}$$

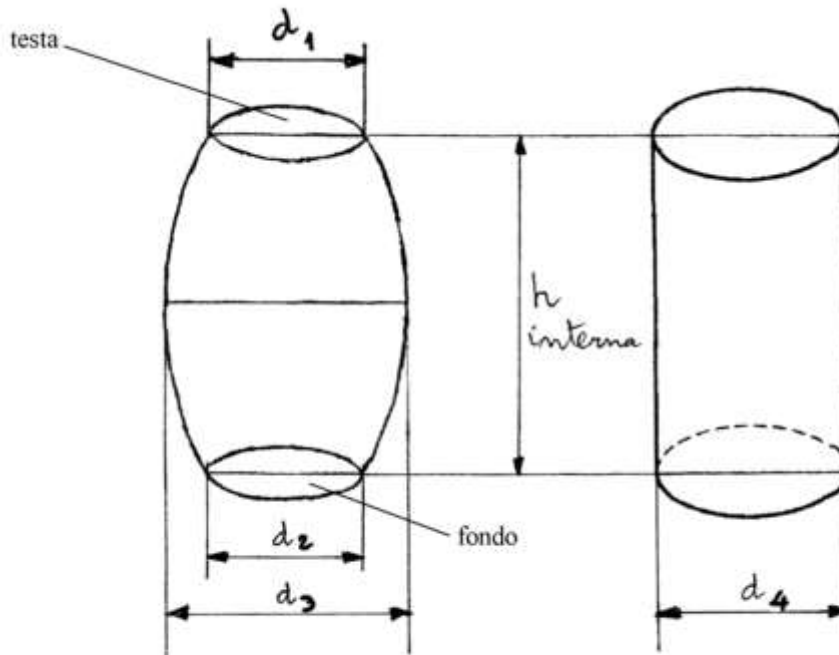
e cioè come la *terza parte* della somma del doppio diametro maggiore (d_2) e del diametro minore (d_1).

Il volume V del cilindro equivalente è dato da:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2 \cdot h$$

Nel caso in cui il diametro della testa (d_1) fosse diverso da quello del fondo (d_2), la formula precedente si complica un po':

$$d_4 = \frac{2 \cdot d_2 + \frac{d_1 + d_2}{2}}{3}$$



$d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4$ diametri misurati all'interno

Malavasi confrontò i risultati ottenuti con la *formula empirica* con quelli ricavabili da una formula, a suo dire, più corretta:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{h}{3} \cdot (2 \cdot d_2^2 + d_1^2)$$

La differenza fra i risultati dei due metodi è trascurabile: il volume calcolato con il diametro determinato con la *formula empirica* sarebbe approssimato *per difetto* dello 0,65%.

----- ANALISI STORICA -----

Fra i primi abacisti a interessarsi alla misura del volume e del contenuto delle botti è il senese Tommaso della Gazzaia (o Tommaso Agazzari), vissuto a cavallo dei secoli XIV e XV e morto a Siena nel 1433. Nel suo trattato "*Pratica di geometria e tutte misure di terre*" (manoscritto C. III. 23 della Biblioteca Comunale di Siena) egli affrontò l'argomento.

Il banchiere e abacista fiorentino Paolo Petriboni (1393/94 – 1443/44) studiò l'argomento nel suo trattato "*Libro d'arismetrica*".

Anche Piero della Francesca si interessò a questo tema.

Numerosi matematici italiani si sono dedicati alla misura dei vasi vinari.

Il novarese Girolamo Cataneo pubblicò a Brescia nel 1572 un trattato (*“Opera del misurare”*): egli vi inserì alcune tabelle *cadometriche*.

Alcune tabelle furono dedicate alla misura degli *scemi* e cioè l’altezza del vuoto sovrastante il peso del liquido. Aumentando gli scemi diminuiscono l’altezza e il volume del vino contenuto nella botte, per cui misurandoli con un apposito strumento e usando la tabella opportuna, il vignaiolo calcolava la quantità di vino disponibile.

Altri successivi matematici italiani si interessarono al problema: Evangelista Torricelli, Pietro Cossali, Odoardo Gherli, Barnaba Oriani, Giuseppe Bruschetti, Giovanni Alessandro Majocchi.

Nelle opere di questi (e di altri autori) sono contenute formule assai più complesse di quella vista in precedenza e usata da alcune Dogane italiane del XIX secolo, prima dell’Unificazione.

La formula di Keplero

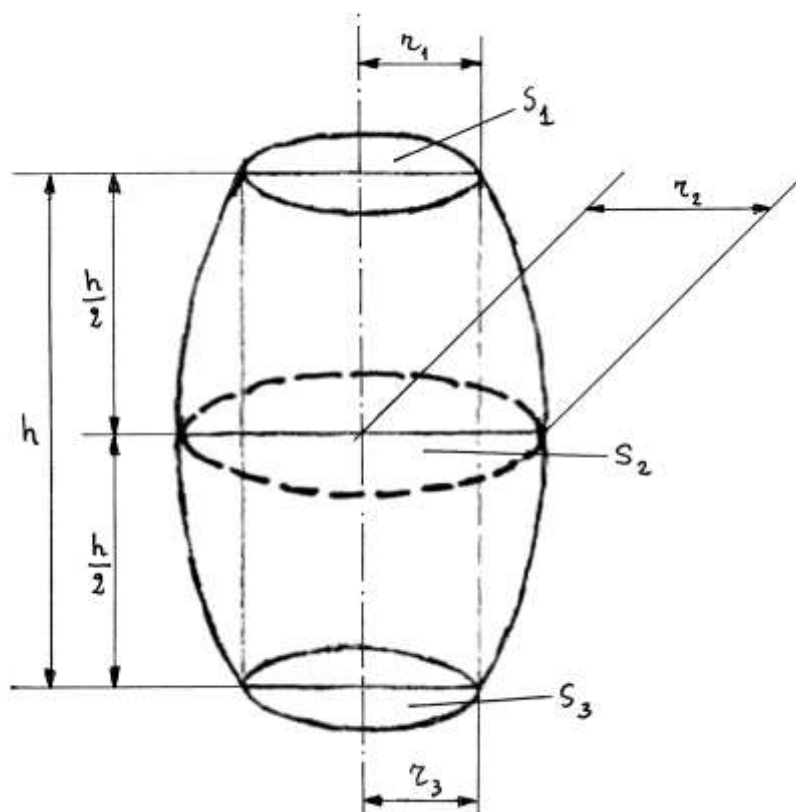
Il matematico tedesco Giovanni Keplero (1571 – 1630) pubblicò nel 1615 un trattato dedicato allo studio della geometria delle botti (*“Nova stereometria doliorum vinariorum”*).

Egli usò una *formula approssimata* per calcolare il volume di una botte di sezione circolare;

r_1 , r_2 e r_3 sono i raggi delle tre sezioni circolari: il primo è il raggio della *testa* e il terzo è quello del *fondo*.

S_1 , S_2 e S_3 sono le rispettive aree:

$$S_1 = \pi \cdot r_1^2 \quad S_2 = \pi \cdot r_2^2 \quad S_3 = \pi \cdot r_3^2$$



Nell’esempio di figura, il rigonfiamento (l’*entasi*) della botte si trova a metà altezza, $h/2$.

La formula di Keplero per calcolare il volume V è la seguente:

$$V = \frac{1}{6} \cdot h \cdot (S_1 + 4 \cdot S_2 + S_3)$$

Nel caso in cui i diametri della *testa* e del *fondo* siano uguali ne deriva:

$$r_1 = r_2 \text{ e } S_1 = S_3.$$

La formula di Keplero viene così semplificata:

$$V = \frac{1}{6} \cdot h \cdot (2 \cdot S_1 + 4 \cdot S_2)$$

Bibliografia

1. Curtze Maximilian, "Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance", Lipsia, Tubner, 1902, vol. II [le pp. da 339 a 434 contengono l'edizione bilingue, italiana e tedesca, del trattato di Leonardo da Cremona].
2. Favaro Antonio, "Sul matematico cremonese LEONARDO MAINARDI", "Bibliotheca Mathematica", Lipsia, 4^a, 1903, pp. 334-337.
3. Favaro Antonio, "Intorno al presunto autore della 'Artis metrice practice compilatio' edita da Massimiliano Curtze", in "Atti del Regio Istituto", 63-2, 1904, pp. 377-395.
4. Favaro Antonio, "Nuove ricerche sul matematico Leonardo Cremonese" in "Bibliotheca Mathematica", Lipsia, 1904, pp. 326 – 341.
5. Scolari Massimo, "Il disegno obliquo". Una storia dell'antiprospettiva, Venezia, Marsilio, 2005, pp. 348.