sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: problemi sul cerchio e sulla circonferenza; triangolo rettangolo 3-4-5; problemi sul quadrato; area di un rettangolo; area del pentagono regolare; problemi sui triangoli equilateri; quadratura di un rettangolo; quadrati inscritti e circoscritti.

Nota: in questo articolo sono talvolta scritte le lettere maiuscole ai vertici delle figure per rendere più chiara la spiegazione. Inoltre, su alcune figure sono state inserite le lettere *h* (per altezza) e ℓ o la parola *lato* (per indicare il o i lati di un poligono). Infine, sono considerati solo i problemi di *geometria piana*.

IL TRATTATO DI JACOPO DA FIRENZE

Premessa

Il *Tractatus Algorismi* fu scritto a Montpellier, nella Francia meridionale, dall'abacista Maestro Jacopo da Firenze nel 1307.

Ne sopravvivono tre copie manoscritte, in fiorentino, che sono conservate nel Codice 2236 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, nel Codice MS 90 della Trivulziana di Milano e nel manoscritto Vaticano Latino 4826 a Roma.

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup ha pubblicato un approfondito studio sull'argomento basandosi sul manoscritto Vaticano, ritenuto il più completo dei tre, e poi ha collazionato i testi degli altri due manoscritti.

Il trattato è dedicato prevalentemente a problemi di natura aritmetica e alla descrizione delle caratteristiche delle monete correnti nei mercati dell'Europa e del Mediterraneo.

Secondo Jens Høyrup il trattato è una delle prime esposizioni dell'algebra in italiano e, forse, sarebbe la prima in assoluto. A giudizio dello storico danese, da quest'opera deriverebbero altri successivi testi algebrici scritti in italiano risalenti alla prima metà del Trecento.

Infine, alcuni problemi sono di natura geometrica nelle quali le dimensioni sono sempre espresse in braccia (lineari) e in braccia quadrate.

Nel sommario in italiano di un suo importante articolo Jens Høyrup [in bibliografia, 3] così riassume le sue opinioni su questo trattato:

> Nel 1307, un certo Jacopo da Firenze scrisse a Montpellier un *Tractatus algorismi* che contiene la prima presentazione sopravvissuta dell'algebra in un volgare europeo – probabilmente la prima presentazione in volgare italiano in assoluto. L'analisi del testo dimostra che l'algebra di Jacopo non è basata su nessuno dagli scritti algebrici latini, e neanche su un trattato arabo pubblicato; è dunque una testimonianza di un livello finora inesplorato dell'algebra araba. D'altra parte, Jacopo non utilizza un solo arabismo, e deve dunque aver preso la sua ispirazione da un ambiente di lingua romanza. Un'ispezione attenta di altri scritti algebrici italiani risalenti alla prima metà del Trecento svela che tutti sono legati a Jacopo o a questo ambiente (possibilmente catalano) e che nessuno ha legami con il *Liber abbaci* di Leonardo Fibonacci.

Le tesi di Jens Høyrup riguardo all'opera di Jacopo da Firenze sono al centro di ampie discussioni fra gli storici della matematica: l'articolo di Eva Caianiello [1] fornisce una sintetica esposizione delle diverse posizioni. Oggetto della discussione è la tesi sostenuta da Høyrup secondo la quale il trattato di Jacopo da Firenze sarebbe il primo testo italiano a utilizzare l'algebra nella soluzione di problemi. La maggior parte dei ricercatori, italiani e non, non condivide questa posizione e la gran parte di essi ritiene che il primo trattato algebrico in lingua italiana sia il *Libro di ragioni* del fiorentino Paolo Gerardi, da lui terminato nel 1328 a Montpellier.

Le discussioni non coinvolgono la parte geometrica del trattato di Jacopo da Firenze.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura lineari usate da Jacopo

Jacopo da Firenze usa quali unità di misura il braccio e il suo derivato braccio quadrato.

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

* il braccio *da panno* ("braccio di Calimala", dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l'equivalente di 58,3626 cm;
* al suo fianco, per alcune attività edilizie era usato il *braccio da terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$1 \text{ braccio da terra} = (17/18) * \text{braccio da panno} \approx$$
$$\approx 58{,}3626 * (17/18) \approx 55{,}1202 \text{ cm} .$$

Molti grandi edifici medievali furono costruiti sulla base di progetti con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza.

Come il fiorino, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 denari: furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

La tabella che segue elenca i multipli (il miglio) e molti sottomultipli del braccio da panno:

LUNGHEZZE

RAGGUAGLIO DEL BRACCIO FIORENTINO A PANNO E DELLE SUE FRAZIONI PIU' CITATE DAGLI ACCADEMICI			
Miglio	braccia 2833 1/3		m1653,607
braccio	20 soldi		cm 58,3626
soldo	12 denari	6 piccioli	cm 2,9181
quattrino	4 denari		cm 0,9727
denaro	12 punti		cm 0,2432
punto			cm 0,0203
un braccio e 1/4			cm 72,9532
2/3 di braccio			cm 38,9084
16 soldi			cm 46,69008
3/10 di braccio	18 quattrini		cm 17,50778
3/4 di braccio	15 soldi		cm 43,7718
8 quattrini	1/15 di braccio		cm 7,7816

La tabella è tratta dal sito del Museo Galileo (http://www.museogalileo.it/).

- -

I problemi che seguono sono ricavati dall'edizione del manoscritto Vaticano curata da Jens Høyrup nel volume citato in bibliografia.

Sono stati scelti solo i problemi dedicati alla *geometria pratica*.

I problemi qui descritti sono numerati con le sigle usate dall'Høyrup nel suo studio. I numeri sono scritti a sinistra dei titoli dei problemi e sono racchiusi fra parentesi quadre […].

Alcuni problemi sono presenti in tutti e tre i manoscritti e con le stesse dimensioni, altri lo sono ma con differenti lunghezze dei lati dei poligoni usati.

- AVVERTENZA -

Jacopo da Firenze risolse i problemi presentati con procedure comprendenti i passi da eseguire in successione: esse erano dei veri e propri *algoritmi*.

Per chiare alcune procedure risolutive, in calce alla soluzione di Jacopo sono aggiunte alcune formule che utilizzano dei simboli moderni per indicare le *variabili* coinvolte nelle operazioni aritmetiche.

Sono inoltre usati alcuni simboli per indicare alcune grandezze geometriche, tutti costituiti da lettere dell'alfabeto latino, minuscole o maiuscole. Eccone alcune:

*	*l* (o ℓ) o *lato*	per il *lato* di un poligono;
*	*h*	per un'*altezza*;
*	*p*	per il *perimetro* di un poligono;
*	*A*	per l'*area* di un poligono;
*	*r*	per il *raggio* di un cerchio, di una circonferenza o di un arco;
*	*d*	per il *diametro* di un cerchio o per la *diagonale* di un quadrato;
*	*c*	per la lunghezza di una *circonferenza*.

- -

- APPROFONDIMENTO -

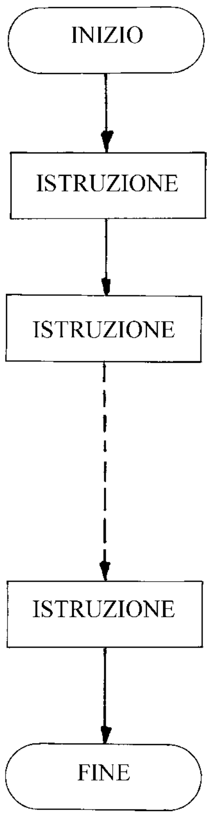
La natura delle procedure risolutive

I problemi geometrici proposti da Jacopo da Firenze sono risolti con delle procedure che sono veri e propri *algoritmi*: esse contengono una serie di istruzioni aritmetiche che devono essere eseguite *in sequenza*.

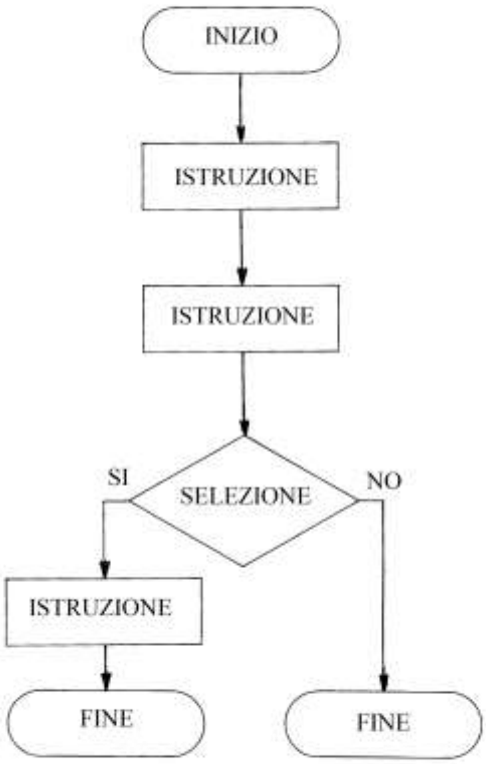
Un *algoritmo* è un insieme di regole o di operazioni che permettono di risolvere un problema: le regole e le operazioni sono in *numero finito*.

Oggi le strutture fondamentali usate per risolvere gli algoritmi sono state ridotte a *tre* e vengono descritte sotto forma di *diagrammi di flusso*. Tutti questi diagrammi hanno un INIZIO e una FINE. Le istruzioni sono scritte all'interno di rettangoli. Un diagramma di flusso è un *grafo orientato* e i suoi nodi (le figure piane che contengono le istruzioni) sono collegati da frecce che indicano l'ordine nel quale le istruzioni stesse devono essere eseguite.

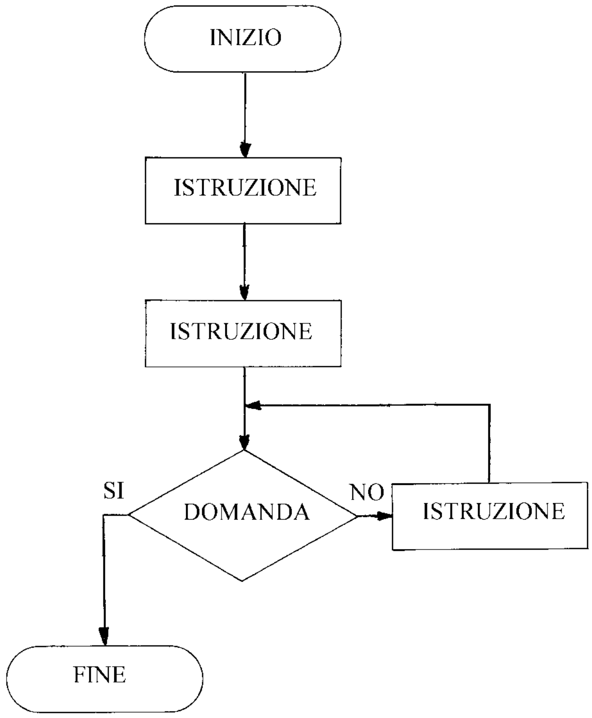
1. *Struttura sequenziale*: essa contiene una successione (o *sequenza*) di istruzioni elementari eseguibili una dopo l'altra.



2. *Struttura condizionale*: all'interno di un rombo è scritta una domanda alla quale sono fornite due diverse risposte fra le quali ne va scelta *una*:



3. *Struttura iterativa*: in inglese è indicata con il termine *loop* (ciclo). Essa prevede la ripetizione di un'istruzione fino a quando la risposta alla domanda è affermativa. Facciamo un esempio pratico: dobbiamo fare 10 fotocopie di una pagina: dopo aver impostata la cifra "10" sul visore della fotocopiatrice vedremo scendere il numero delle copie da fare:
   10 → 9 → 8 →7 → 6 → 5 → 4 → 3 → 2 → 1 → 0.



Nota: le procedure impiegate da Jacopo per risolvere i problemi di natura geometrica sono *sempre corrette*.

- -

PRIMA PARTE – IL MANOSCRITTO VATICANO

\- APPROFONDIMENTO -

Geometria retorica

Gli storici della matematica distinguono tre fasi storiche dell’algebra:

* L’*algebra retorica*: sono del tutto assenti i simboli e i passi della soluzione di un problema sono descritti con sole parole.
* L’*algebra sincopata*: sono introdotte delle notazioni simboliche.
* L’*algebra simbolica*: sono utilizzati simboli che rappresentano le variabili e le costanti tipiche di ciascun problema.

I problemi geometrici descritti da Jacopo da Firenze sono risolti con una serie di passi rigorosamente organizzati e descritti con sole parole, ad eccezione dei numeri, scritti nella variante indo-arabica. I numeri sono talvolta scritti anche sulle figure.

Per indicare le operazioni aritmetiche da compiere sulle grandezze, Jacopo non usa i nostri simboli aritmetici, introdotti secoli dopo.

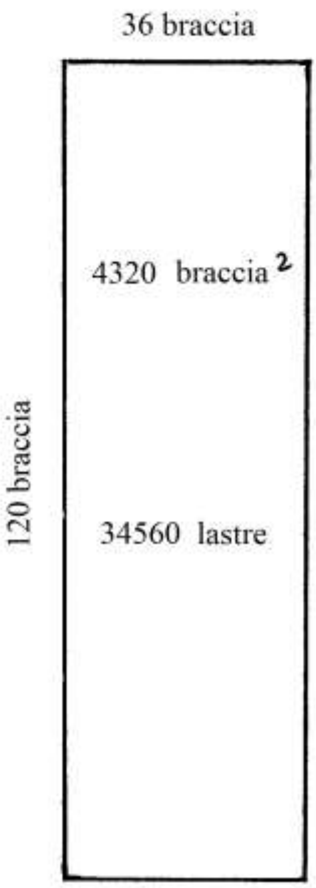
Per analogia con la definizione di *algebra retorica,* la soluzione dei problemi geometrici potrebbe essere classificata come *geometria retorica*.

\- -

[14.26] Pavimentazione

Una sala (o una piazza) ha lunghezza 120 braccia e larghezza 36.

Il pavimento deve essere ricoperto con lastre di uguali dimensioni: ½ braccio di lunghezza e ¼ di larghezza.

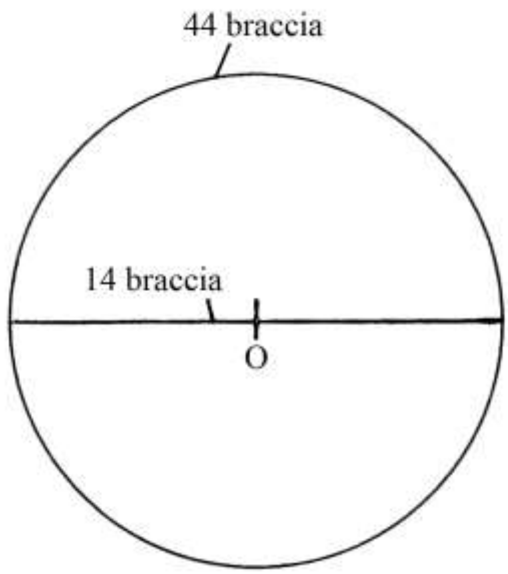


Il problema chiede il numero delle lastre occorrenti per coprire l'intera superficie.
La procedura risolutiva è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza per la larghezza del pavimento: 120 * 36 = 4320 braccia^2, area;
* moltiplicare la lunghezza per la larghezza di una lastra: (½) * (¼) = 1/8 braccia^2;
* dividere l'area del pavimento per quella di una lastra: 4320 : (1/8) = 4320 * 8 = 34560, numero delle lastre occorrenti.

[15.2] <u>Diametro di un cerchio</u>

Un cerchio ha la circonferenza lunga 44 braccia.



Il problema chiede la lunghezza del *diricto de mezzo* e cioè quella del diametro.

La procedura usata è la seguente:

* dividere la lunghezza della circonferenza per la costante (3 + 1/7):

$$44 : (3 + 1/7) = 14 \text{ braccia, diametro del cerchio.}$$

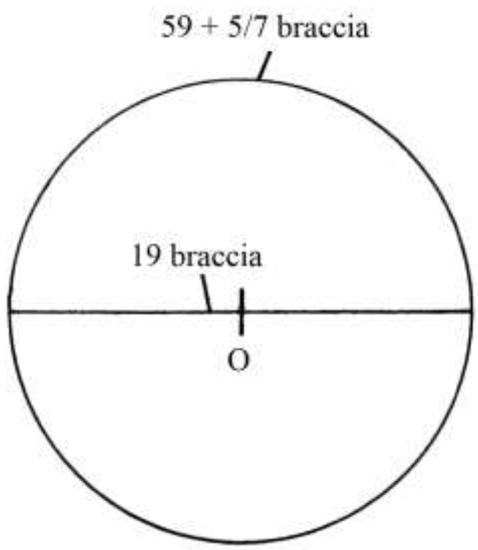
Jacopo scrive la costante nella forma “3 *e* 1/7”.

Per π, l’Autore usa l’approssimazione

$\pi \approx (3 + 1/7) \approx 22/7$, risalente a Archimede, e valore usato in quasi tutti i trattati medievali e rinascimentali di aritmetica e di geometria pratica.

[15.3] <u>Circonferenza di un cerchio</u>

Un cerchio ha il *diricto de mezzo* (diametro) lungo 19 braccia.



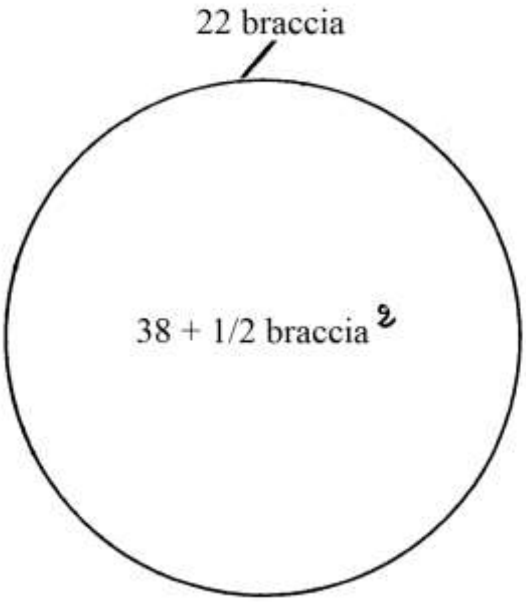
Il problema domanda la lunghezza della circonferenza.

Essa è ricavata dal prodotto del diametro per la costante (3 + 1/7):

$19 * (3 + 1/7) = 59 + 5/7$ braccia.

[15.4] <u>Area di un cerchio</u>

Un cerchio ha circonferenza lunga 22 braccia.
Il problema chiede la sua area.



La procedura impiegata è la seguente:

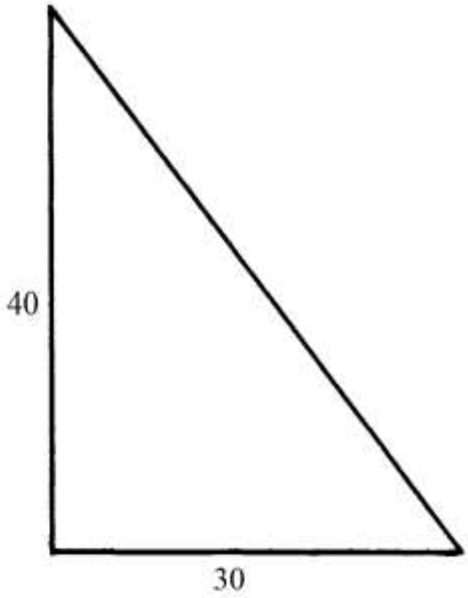
*	dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): diametro del cerchio;	$22 : (3 + 1/7) = 7$ braccia,
*	moltiplicare la circonferenza per il diametro:	$22 * 7 = 154$;
*	dividere per 4: area del cerchio.	$154 : 4 = 38 + ½$ braccia^2,

La procedura è sintetizzabile nella formula

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = [\pi * r^2] = c * d/4 \approx [c * c/(22/7)]/4 \approx c^2 * 7/88.$$

[15.5] <u>Ipotenusa di un triangolo rettangolo</u>

Un terreno ha la forma di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi 30 e 40 braccia.
Il triangolo è orientato come in figura:



Il problema domanda la lunghezza dell'ipotenusa, che Jacopo chiama la *squadrante*.
La soluzione applica il teorema di Pitagora, peraltro senza citarlo.
La procedura applicata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del cateto maggiore per se stessa: $40 * 40 = 1600$;
* moltiplicare il cateto minore per se stesso: $30 * 30 = 900$;
* sommare i due prodotti: $1600 + 900 = 2500$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{2500} = 50$ braccia, lunghezza dell'ipotenusa.

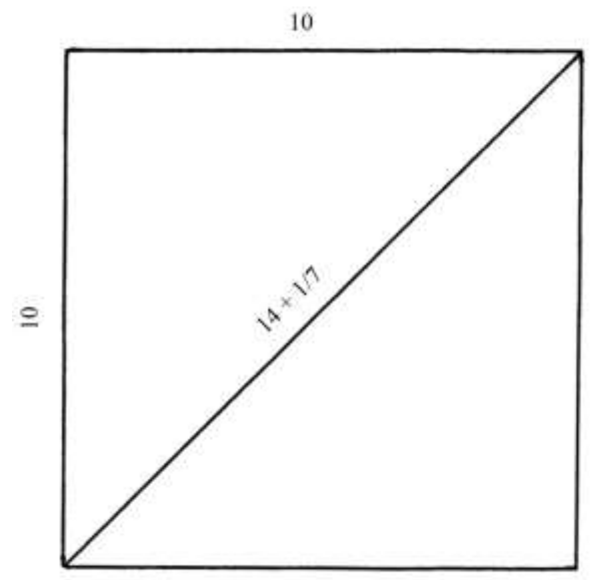
I passi della procedura sono riassunti nella formula che segue:

$$\text{ipotenusa} = \sqrt{[(\text{cateto maggiore})^2 + (\text{cateto minore})^2]}$$

Nota: il triangolo rettangolo ha dimensioni multiple secondo un moltiplicatore uguale a 10 della terna pitagorica 3 – 4 – 5.

[15.6] Terreno quadrato

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 10 braccia.



Il problema domanda la lunghezza di una diagonale.

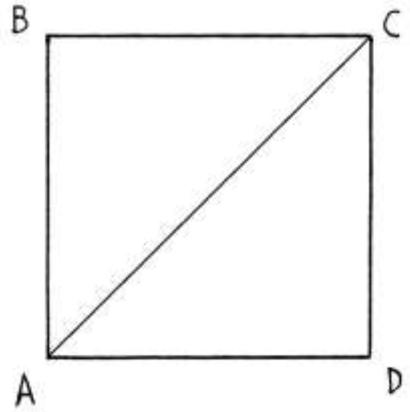
La procedura utilizzata è:

* moltiplicare la lunghezza di un lato (una *faccia*) per quella del lato opposto: 10 * 10 = 100 ;
* moltiplicare le lunghezze degli altri due lati: 10 * 10 = 100 ;
* sommare i due prodotti: 100 + 100 = 200 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{200} \approx 14 + 1/7$ braccia, lunghezza approssimata di una diagonale.

La formula che riassume la procedura è:

$$d = \sqrt{(\ell^2 + \ell^2)} \ .$$

[Sembra che nella soluzione di questo problema, Jacopo sia stato influnzato dall'antichissima ed errata *formula degli agrimensori* usata per il calcolo della superficie di un quadrilatero, che era ottenuta dal prodotto delle semisomme delle coppie di lati opposti:



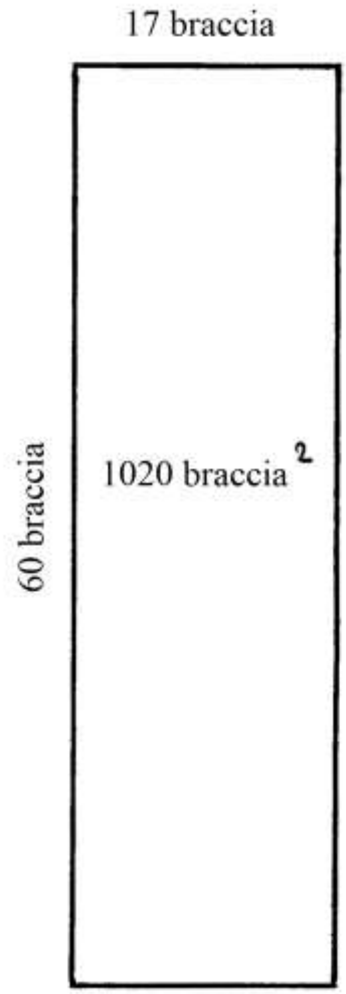
$$\text{Area}_{ABCD} = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = (2 * \ell)/2 * (2 * \ell)/2 = \ell^2 \ .$$

Il quadrato della diagonale è calcolato da Jacopo con la formula:

$$AC^2 = AB * CD + AD * BC$$, ciò che può sostenere l'ipotesi dell'influenza esercitata dalla tradizionale *formula degli agrimensori*.]
Il risultato ottenuto da Jacopo è comunque *esatto*.

[15.8] <u>Terreno rettangolare</u>

Un terreno rettangolare ha dimensioni 60x17 braccia. Il problema chiede l'area del terreno.

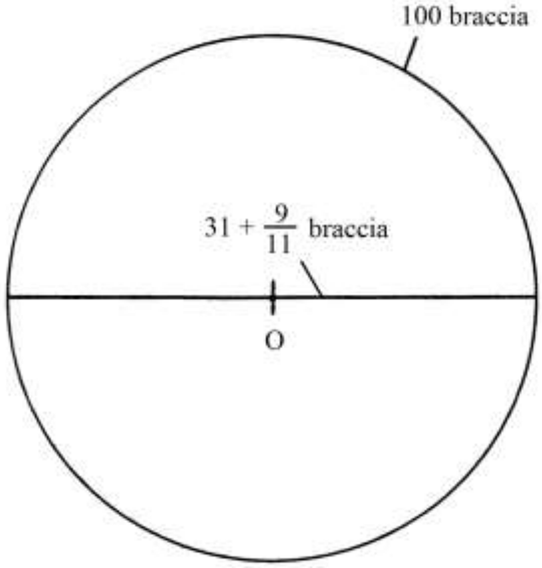


La risposta è data dal prodotto della lunghezza per la larghezza:

$$Area = 60 * 17 = 1020 \text{ braccia}^2.$$

[15.11] Diametro di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 100 braccia.



Il problema domanda la lunghezza del diametro.

La soluzione è semplice: dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7) e quindi il risultato è

100 : (3 + 1/7) ≈ 31 + 9/11 braccia.

La descrizione della soluzione del problema che fa Jacopo aggiunge alcuni suggerimenti per facilitare la divisione di un intero per un divisore costituito da un *numero sano ˆet rottoˆ*: il numero *sano* è 3 e il numero *rotto* è 1/7 e il divisore è (3 + 1/7).

Egli suggerisce di riportare a un'unica frazione il *partitore* (così Jacopo chiama la costante, sotto forma frazionaria, che è il valore approssimato di π):

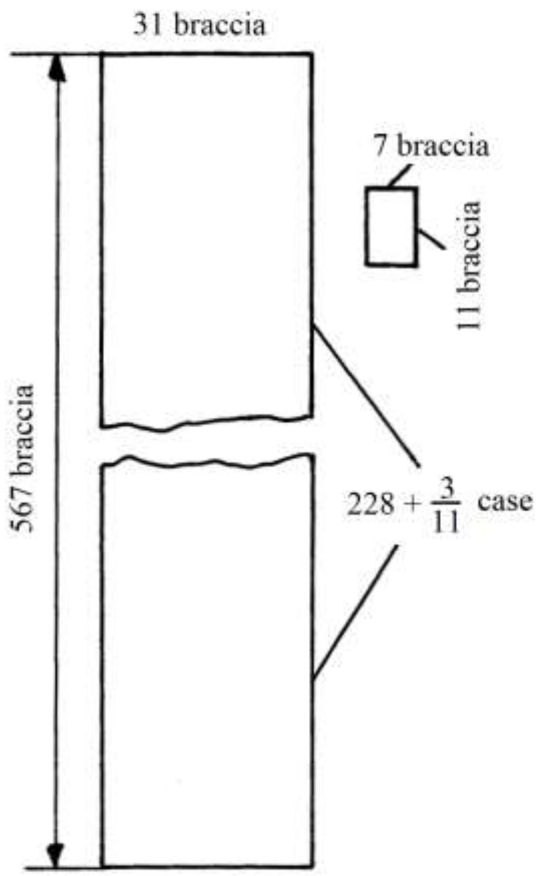
3 + 1/7 = 22/7 .

La divisione precedente si trasforma in

100 : (3 + 1/7) = 100 : (22/7) = 100 * (7/22) = 700/22 ≈ 31 + 9/11 braccia.

[15.17] Terreno e case

Un terreno ha la forma di un rettangolo di dimensioni 567x31 braccia.

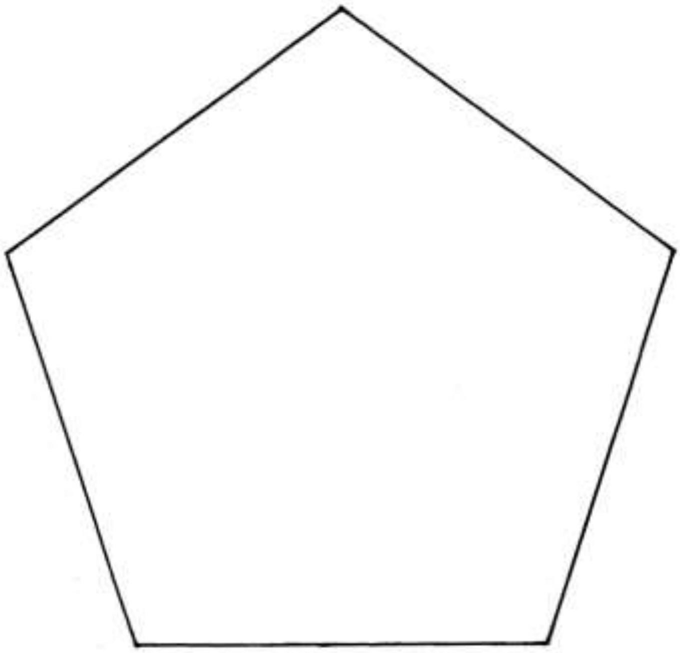


Nel terreno devono essere inserite *case* di dimensioni 11x7 braccia.
Il problema domanda il numero di case che possono esservi inserite.
La procedura messa in atto è la seguente:

* moltiplicare la larghezza per la lunghezza del terreno: 31 * 567 = 17577 braccia^2, area del terreno;
* moltiplicare la larghezza per la lunghezza di una *casa*: 7 * 11 = 77 braccia^2, area di una *casa*;
* dividere l'area del terreno per quella di una casa: 17577 : 77 = 228 + 3/11 *case*.

[15.19] <u>Terreno di forma pentagonale</u>

Un terreno ha la forma di un pentagono regolare, con i lati lunghi 8 braccia.



Il problema chiede l'area del terreno.

La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per quella di un altro: 8 * 8 = 64 ;
* moltiplicare l'ultimo prodotto per il numero dei lati rimanenti (5 – 2 = 3): 64 * 3 = 192 ;
* sottrarre la lunghezza di un lato: 192 – 8 = 184 braccia^2, area del pentagono.

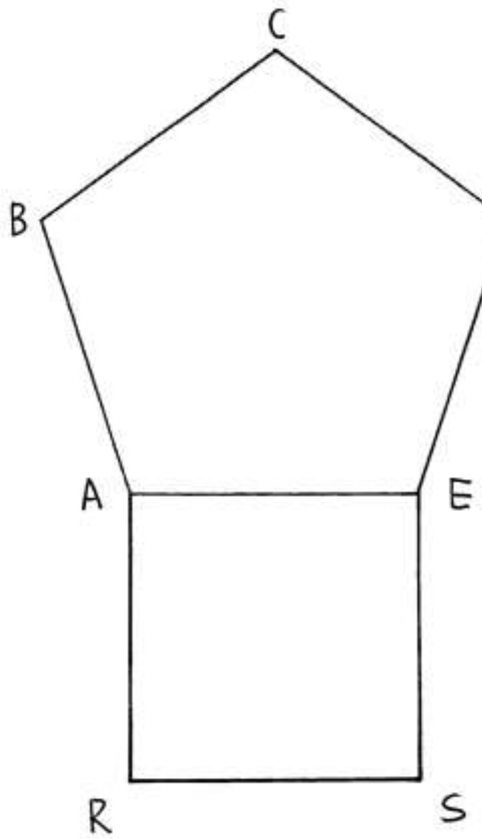
- APPROFONDIMENTO -

I passi della procedura sono sintetizzati nella formula che segue, con *n* che indica il numero dei lati:

$$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = \ell^2 * (n - 2) - \ell \ .$$

In un qualsiasi poligono regolare il rapporto fra la sua area e quella del quadrato costruito su un suo lato (AE nella figura che segue) è costante ed è un *numero fisso*, indicato con la lettera *F* (maiuscola), per distinguerla dal numero fisso *f* relativo all'apotema:

$$\text{Area}_{\text{POLIGONO}} = F * \text{lato}^2 \ .$$



Nel caso del pentagono regolare *F* vale 1,72. Ciò significa che il pentagono ha area 1,72 volte quella del quadrato RAES.

Il numero 1,72 è una buona approssimazione.

Applicando la formula al caso concreto si ha:

$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} \approx 1{,}72 * 8^2 \approx 1{,}72 * 64 \approx 110{,}08$ braccia^2.

Questo risultato dimostra che la cifra calcolata da Jacopo, 184 braccia^2, è grandemente errata per eccesso.

Forse, la formula deriva, con un errore che è di seguito evidenziato, da una formula di Frontino.

Sesto Giulio Frontino (vissuto fra il 30 e il 104 circa) è stato un importante politico, funzionario, ingegnere e scrittore romano di agrimensura, di idraulica e di strategia militare.

A Frontino sono attribuite alcune formule approssimate per calcolare l'area dei poligoni regolari: le formule furono riprodotte in diversi manoscritti degli agrimensori romani (ad esempio in quello di Vitruvio Rufo) e poi largamente usate fino alle epoche medievali e rinascimentali.

La formula per il pentagono era la seguente:

$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = (3 * \ell^2 - \ell)/2$.

La formula usata da Jacopo è quella di Frontino, ma contiene un errore: ha omesso di dividere per 2.

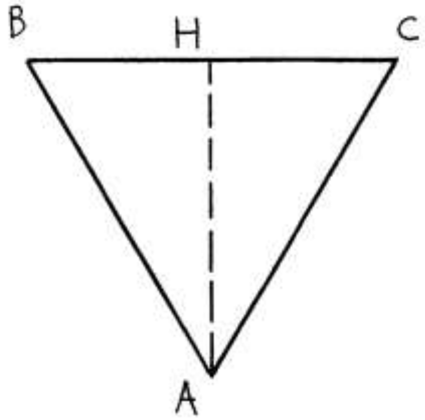
Applicando la formula di Frontino, l'area del pentagono è:

$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = (3 * 8^2 - 8)/2 = 184/2 = 92$ braccia^2, valore errato per difetto.

- -

[15.20] Triangolo equilatero

Uno *scudo* ha la forma di un triangolo equilatero: il poligono è disegnato con il lato orizzontale collocato superiormente e il vertice comune ai due lati obliqui posto inferiormente. Questo modo di rappresentare i triangoli è comune nei trattati degli abacisti italiani del Medioevo, come è comune agli autori di testi umbri e toscani l'uso del termine *scudo* per indicare il triangolo isoscele e il triangolo equilatero: sono i casi del Maestro Umbro (nel *Livero de l'Abbecho*), di Paolo dell'Abbaco e di Orbetano da Montepulciano.



Nota: nel trattato sono assenti le lettere ai vertici, le quali sono qui aggiunte per facilitare la comprensione dei problemi e delle loro soluzioni.

È data la lunghezza del *dericto de mezzo* (così Jacopo chiama l'altezza, HA) che è 5 braccia.
Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei lati del triangolo.
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare l'altezza per se stessa: $5 * 5 = 25$;
* dividere per 3: $25 : 3 = 8 + 1/3$;
* addizionare a 25: $(8 + 1/3) + 25 = 33 + 1/3$;
* estrarre la radice quadrata $\sqrt{(33 + 1/3)} \approx 5 + 7/9 - 4/18$

braccia, lunghezza dei lati del triangolo.

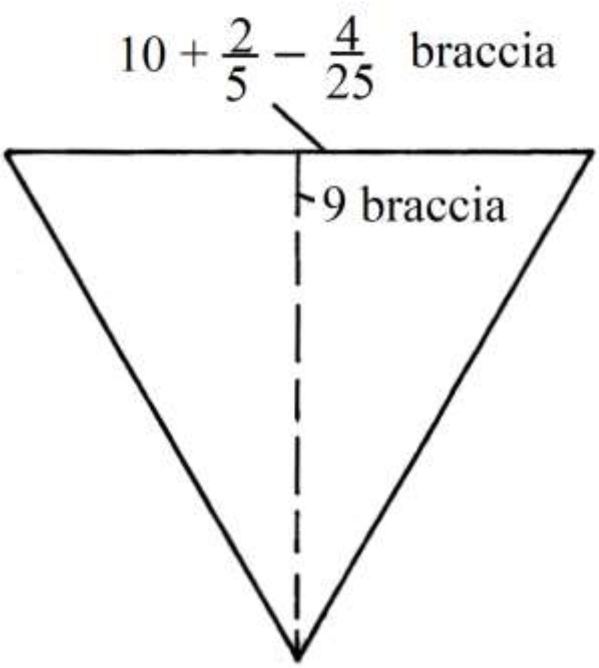
La procedura è riassunta nella formula che segue:

$$\ell = \sqrt{[\ell^2 + \ell^2/3)}$$

Nota: Jacopo non usò mai i simboli "+" e "– " perché essi furono introdotti in Europa soltanto alla fine del XV secolo. Come molti altri autori, Jacopo scrisse (33 1/3) invece di (33 + 1/3). In alcuni casi usò l'espressione "33 e 1/3".

[15.22] Triangolo equilatero

Uno *scudo* ha la forma di un triangolo equilatero. È nota soltanto l'altezza che è lunga 9 braccia.



Il problema domanda la lunghezza dei lati e il perimetro.

La procedura usata è la seguente:

*	moltiplicare l'altezza per se stessa:	9 * 9 = 81 ;
*	dividere per 3:	81 : 3 = 27 ;
*	sommare gli ultimi due numeri:	81 + 27 = 108 ;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{108} \approx 10 + 2/5 - 4/25$ braccia, lunghezza di un lato dello scudo;
*	moltiplicare per 3:	(10 + 2/5 – 4/25) * 3 = 31 + 1/5 braccia, perimetro dello scudo.

La formula per calcolare la lunghezza del lato, ℓ, è quella già incontrata nel problema precedente:

$$\ell = \sqrt{(\ell^2 + \ell^2/3)} .$$

Il perimetro, *p*, è:

$$p = 3 * \ell .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

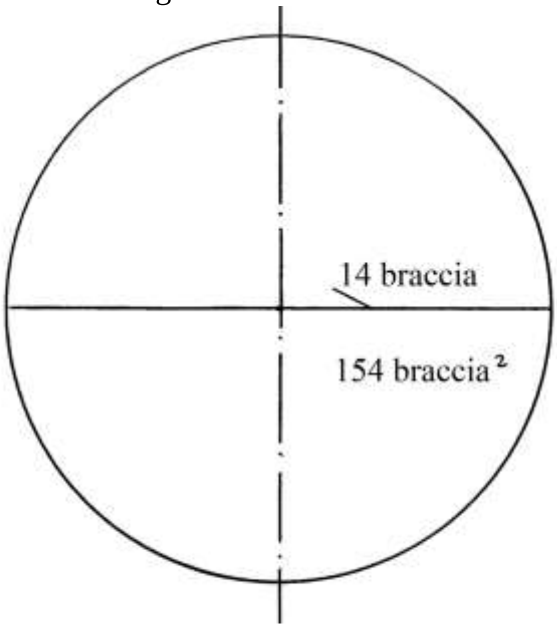
La lunghezza del lato può essere semplificata in

10 + 2/5 – 4/25 = 10 + (10 – 4)/25 = 10 + 6/25 braccia.

Il perimetro è: 3 * (10 + 6/25) = 30 + 18/25 braccia e non (31 + 1/5) braccia, dato calcolato da Jacopo.

[22.5] Area di un cerchio

Un cerchio ha il diametro lungo 14 braccia. Il problema chiede di calcolare la sua area senza determinare preliminarmente la lunghezza della circonferenza.



La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare il diametro per se stesso: 14 * 14 = 196 ;
* dividere per 7: 196 : 7 = 28 ;
* dividere per 2: 28 : 2 = 14 [questa ultima operazione calcola ½ di 1/7 e cioè 1/14 del quadrato del diametro] ;
* sommare gli ultimi due quozienti: 28 + 14 = 42 ;
* sottrarre da 196: 196 – 42 = 154 braccia^2, area del cerchio.

Nota: l'Autore ha sottratto i 3/14 del quadrato del diametro:

Area cerchio = (1 – 3/14) * d^2 = (11/14) * d^2.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = d^2 – 3/14 * d^2 = 11/14 * d^2 .

[22.6] Circonferenza e area di un cerchio

Il problema è basato sul cerchio del precedente problema: conoscendo il diametro, che è lungo 14 braccia, esso chiede la lunghezza della circonferenza e l'area.

Ecco la procedura risolutiva:

* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 14 * (3 + 1/7) = 44 braccia, lunghezza della circonferenza [Jacopo usa per π il valore approssimato 22/7 che scrive sotto forma di numero misto (3 1/7)];
* moltiplicare il diametro per la circonferenza: 14 * 44 = 616 ;
* dividere per 4: 616 : 4 = 154 braccia^2, area del cerchio [Jacopo ha impiegato la formula

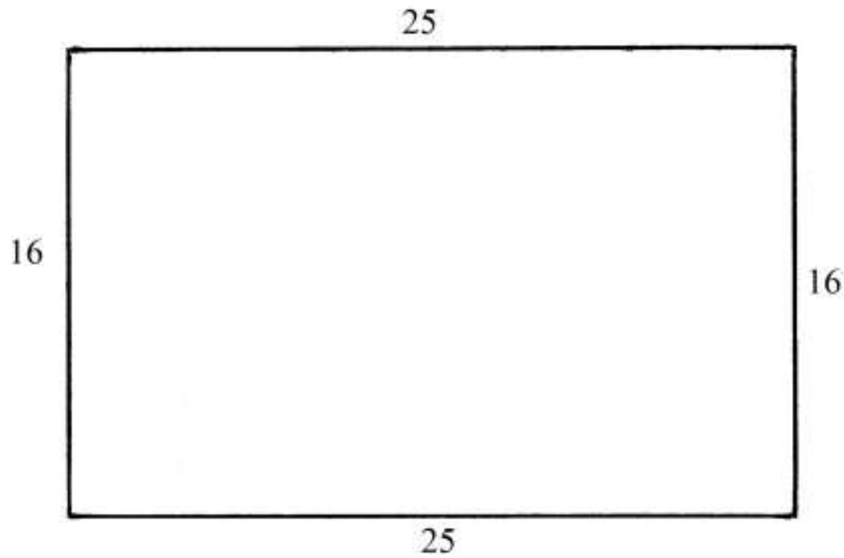
Area $_{\text{CERCHIO}}$ = d * c/4].

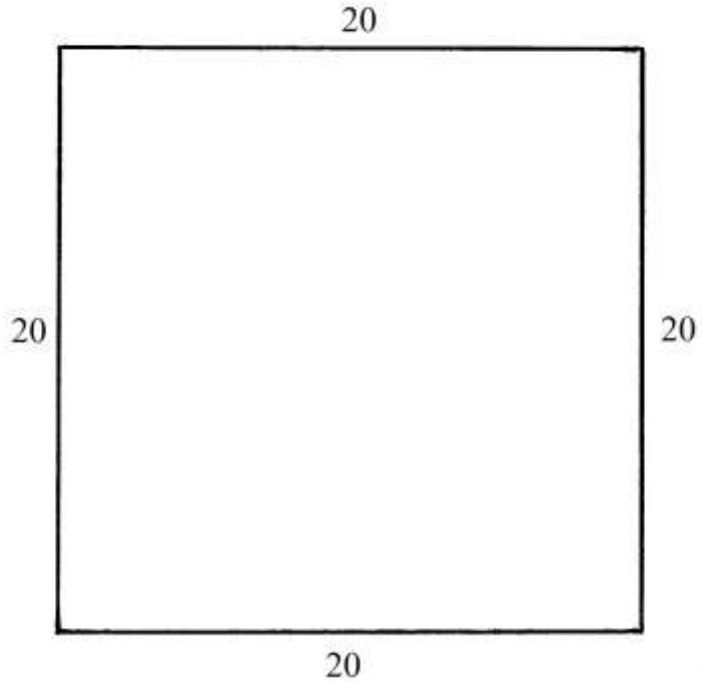
Jacopo commenta: il risultato del calcolo dell'area è identico a quello ottenuto dalla soluzione del precedente problema e viene ricavato conoscendo soltanto il diametro.

[22.10] Quadratura di un rettangolo

Un campo ha forma rettangolare: è lungo 25 e largo 16 braccia.

Il rettangolo deve essere trasformato in un quadrato equivalente:





Ecco la soluzione:

* calcolare l'area del rettangolo:

  Area rettangolo = lunghezza * larghezza = 25 * 16 = 400 braccia^2 ;

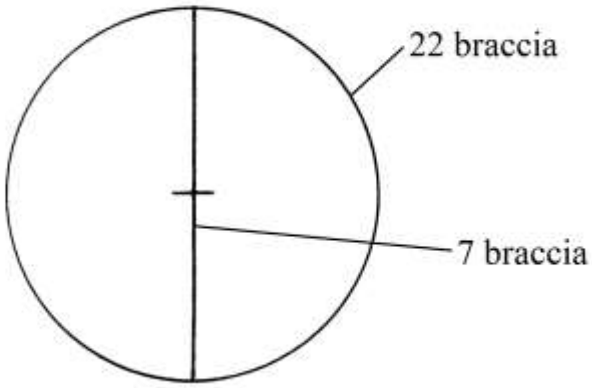
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{400}$ = 20 braccia.

La formula che riassume la procedura è:

lato $_{QUADRATO}$ = √(lunghezza * larghezza) .

[22.17] <u>Diametro e area di un cerchio</u>

Un cerchio ha la circonferenza lunga 22 braccia:



Il problema chiede di calcolare la lunghezza del diametro e l'area.

La procedura per risolvere il problema è la seguente:

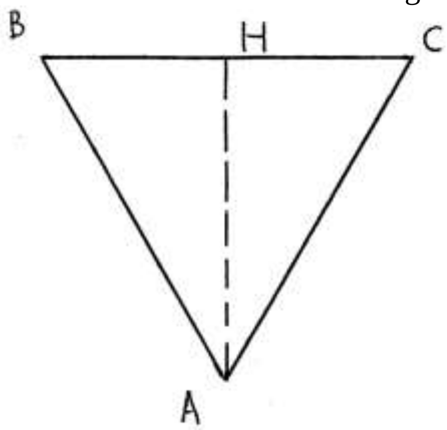
* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 22 : (3 + 1/7) = 7 braccia, lunghezza del diametro;
* moltiplicare la circonferenza per il diametro: 22 * 7 = 154 ;
* dividere per 4: 154 : 4 = 38 + ½ braccia^2, area del cerchio.

La procedura è esprimibile con le due formula che seguono:

* d = c/(3 + 1/7)
* Area $_{CERCHIO}$ = c * d/4 .

[22.19] <u>Area di uno scudo</u>

La figura che segue mostra uno *scudo* a forma di triangolo:



Il problema chiede l'area del triangolo ma non fornisce alcun dato: esso è puramente metodologico.

La soluzione è la seguente:

* determinare il punto medio di un lato (ad esempio, H sul lato BC);
* misurare la lunghezza della metà del lato BH;

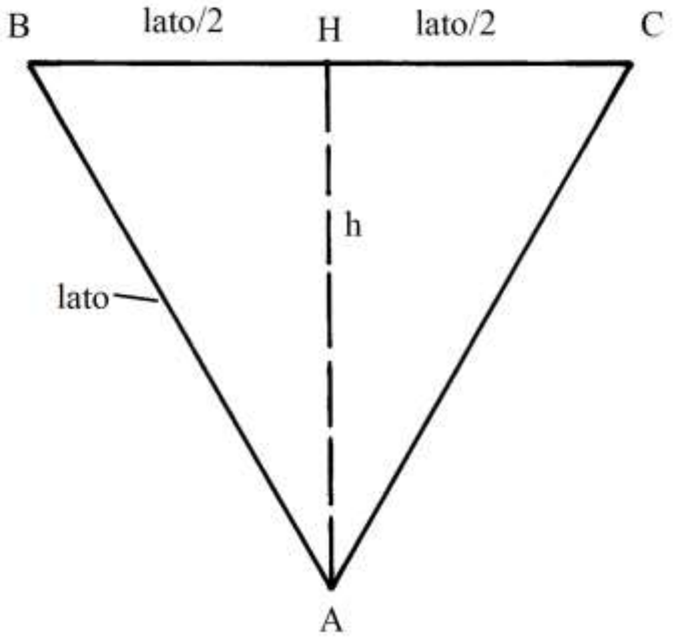
* misurare l'altezza (*la lunghezza de mezzo* secondo Jacopo) e cioè AH;
* moltiplicare la lunghezza della metà del lato per l'altezza: il risultato è l'area del triangolo.

La procedura vale per qualsiasi triangolo ed è riassumibile nella formula

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO}} = (\text{lato BC}/2) * \text{altezza AH}.$$

[22.20] <u>Altezza di un triangolo equilatero</u>

Uno scudo ha la forma di un triangolo equilatero di cui è nota la lunghezza dei lati: il problema è basato sul precedente e anche in questo caso Jacopo non fornisce dati.



Il problema è di fatto diviso in due parti, qui contrassegnate con I) e II).

I) In primo luogo è chiesto il calcolo del *dericto de mezzo* e cioè dell'altezza. La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato, ℓ, per se stessa: $\text{lato} * \text{lato} = \text{lato}^2$;
* dividere per 4: $\text{lato}^2/4$;
* sottrarre dal quadrato del lato: $\text{lato}^2 - \text{lato}^2/4 = (3/4) * \text{lato}^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(3/4 * \ell^2)} = \ell * (\sqrt{3})/2$,

lunghezza dell'altezza.

La soluzione è corretta.

La procedura applica, senza citarlo, il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH: l'altezza AH è il suo cateto maggiore. La formula che riassume questa prima parte della procedura è:

$$h = AH = \sqrt{(AB^2 - BH^2)} = \sqrt{[\ell^2 - (\ell/2)^2} = \ell * (\sqrt{3})/2 .$$

II) La seconda parte domanda la lunghezza del lato conoscendo soltanto quella dell'altezza, *h*.

La procedura impiegata è:

* moltiplicare l'altezza per se stessa: $\text{altezza} * \text{altezza} = \text{altezza}^2$;
* dividere per 3: $\text{altezza}^2/3$;
* sommare gli ultimi due numeri: $\text{altezza}^2 + \text{altezza}^2/3 = (4/3) * \text{altezza}^2$;

*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{(4/3 * h^2)} = h * 2/\sqrt{3}$, lunghezza del lato del triangolo equilatero.

Questa seconda parte è chiaramente l'inverso della precedente: è data la lunghezza dell'altezza *h* = AH ed è nota la proporzione fra le lunghezze dell'ipotenusa AB e del cateto minore BH:

AB = 2 * BH.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH si ha:

$AH^2 = AB^2 - BH^2$ che equivale a scrivere

$h^2 = \ell^2 - (\ell/2)^2 = 3/4 * \ell^2$.

Da questa formula si ricava:

$\ell^2 = 4/3 * h^2$ e $\ell = h * 2/\sqrt{3}$, che è ciò che ha ottenuto Jacopo.

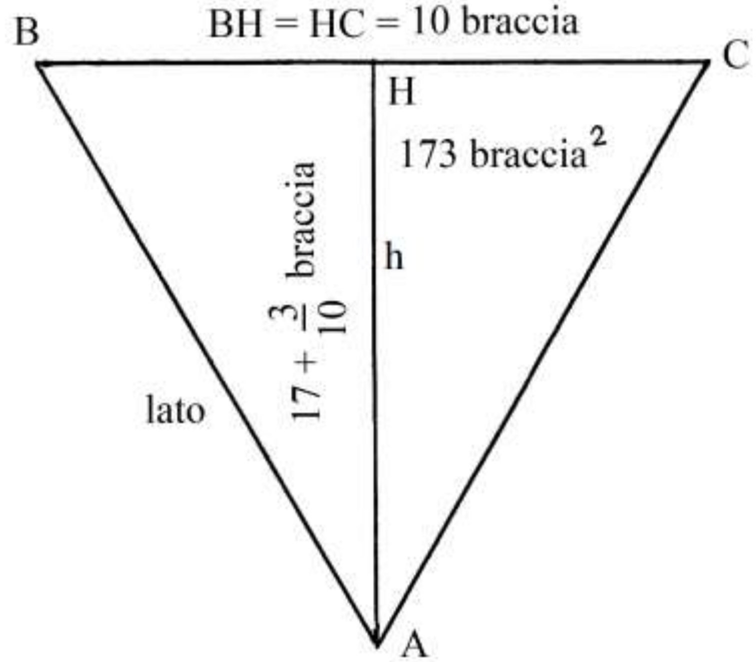
[22.21] <u>Altezza e area di uno scudo</u>

Uno scudo ha la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 20 braccia.

Il problema si propone di calcolare l'altezza e l'area.

La procedura risolutiva è la seguente:

*	moltiplicare la lunghezza di un lato per se stesso:	20 * 20 = 400 ;
*	dividere per 4:	400 : 4 = 100 ;
*	sottrarre da 400:	400 – 100 = 300 ;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{300} \approx 17 + 3/10$ braccia, lunghezza approssimata dell'altezza [Jacopo arrotonda *per difetto* il risultato di $\sqrt{300}$ a ≈ 17,32 braccia e effettua una verifica moltiplicando per se stessa la radice: $(17 + 3/10)^2 = 299 + 29/100$];
*	dividere per 2 la lunghezza di un lato:	20 : 2 = 10 ;
*	moltiplicare per l'altezza:	10 * (17 + 1/3) = 173 $braccia^2$, area dello scudo.



Jacopo conclude la soluzione del problema facendo notare che $\sqrt{300}$ non fornisce un risultato intero.

La procedura per il calcolo dell'altezza è sintetizzata nella formula che segue:

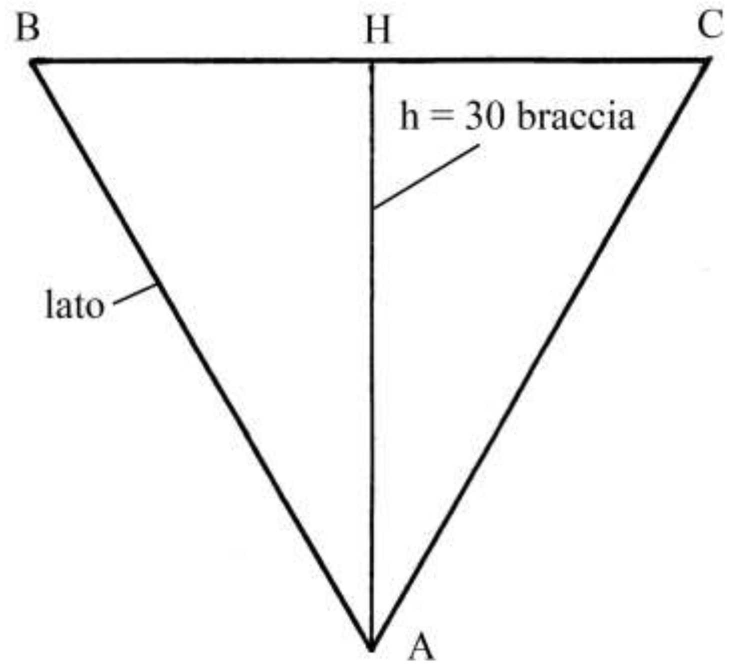
$$h = \sqrt{(\ell^2 - \ell^2/4)} = \ell + (\sqrt{3})/2 .$$

I passi impiegati per calcolare l'area sono così riassunti:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO}} = \text{lato}/2 * \text{altezza} = \ell/2 * h .$$

[22.22] Altezza di un triangolo equilatero

Uno scudo ha la forma di un triangolo equilatero di cui è nota soltanto l'altezza (*mino longho*) che è lunga 30 braccia.



Il problema chiede la lunghezza dei tre lati e l'area del triangolo.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare l'altezza per se stessa: $30 * 30 = 900$:
* dividere per 3: $900 : 3 = 300$;
* sommare i due numeri: $900 + 300 = 1200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1200} \approx 34 + 11/17$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo [Jacopo chiarisce che questo risultato è è arrotondato per eccesso e al riguardo fornisce una verifica moltiplicando la radice per stessa:
  $(34 + 11/14)^2 = 1200 + 121/289$];
* arrotondare per eccesso $(34 + 11/17)$ a $(34 + 2/3)$;
* dividere per 2 la lunghezza di un lato: $(34 + 2/3) : 2 = 17 + 1/3$;
* moltiplicare per l'altezza: $(17 + 1/3) * 30 = 520$ braccia^2, area dello scudo.

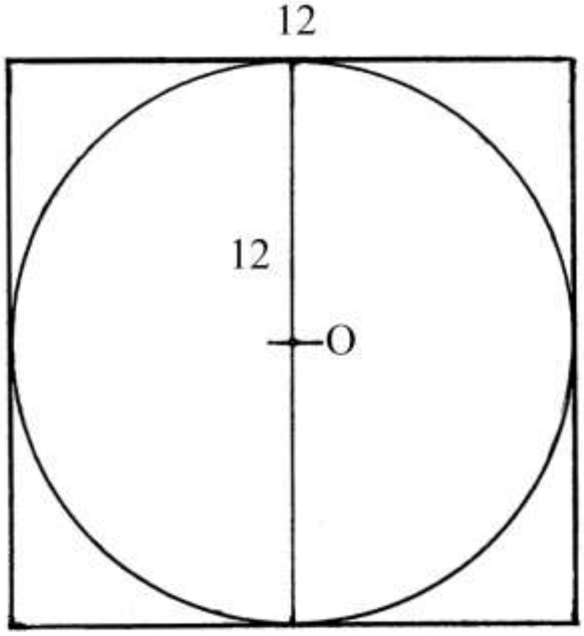
La procedura è uguale a quella già incontrata in precedenza e lo stesso vale per le formule riassuntive:

$$\ell = \sqrt{(h^2 + h^2/3)} = h * 2/\sqrt{3}$$

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO}} = \ell/2 * h.$$

[22.23] Quadrato circoscritto a un cerchio

Un cerchio ha diametro (*dericto de mezzo*) lungo 12 braccia.



Il problema domanda l'area del quadrato circoscritto al cerchio.

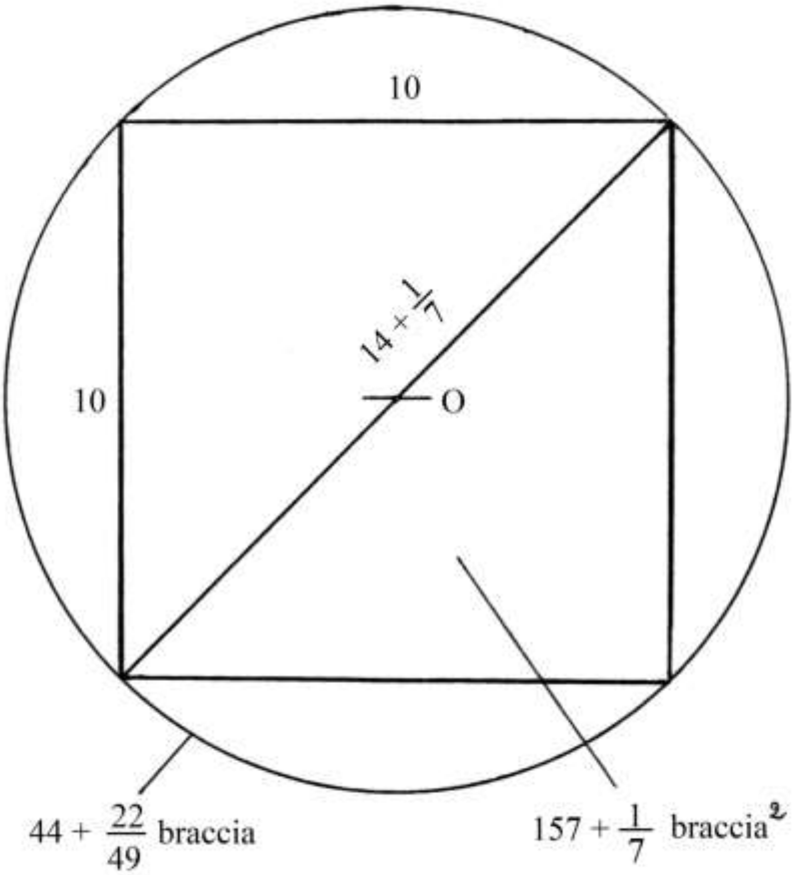
Dato che i lati del quadrato hanno la stessa lunghezza del diametro del cerchio, l'area è data dal prodotto del lato per se stesso:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \text{lato} * \text{lato} = \text{diametro} * \text{diametro} = 12 * 12 = 144 \text{ braccia}^2.$$

[22.24] Quadrato inscritto in un cerchio

Un quadrato ha lati lunghi 10 braccia ed è inscritto in un cerchio.

Il problema vuole calcolare la circonferenza e l'area del cerchio circoscritto.



La procedura attivata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato del quadrato per se stessa: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per 2: $100 * 2 = 200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{200} \approx 14 + 1/7$ braccia, lunghezza della diagonale [Jacopo verifica il risultato elevandolo al quadrato: $(14 + 1/7)^2 = 200 + 1/49$ che è leggermente approssimato per eccesso] ;
* dato che la diagonale del quadrato è lunga quanto il diametro del cerchio, moltiplicarla per la costante (3 + 1/7): $(14 + 1/7) * (3 + 1/7) = 44 + 22/49$ braccia, lunghezza della circonferenza;
* moltiplicare il diametro per se stesso: $(14 + 1/7) * (14 + 1/7) \approx 200$;
* dividere per 7: $200 : 7 = 28 + 4/7$;
* dividere per 2: $(28 + 4/7) : 2 = 14 + 2/7$;
* sommare gli ultimi due quozienti: $(28 + 4/7) + (14 + 2/7) = 42 + 6/7$;
* sottrarre l'ultimo risultato da 200: $200 – (42 + 6/7) = 157 + 1/7$ braccia^2, area del cerchio.

La lunghezza della circonferenza, *c*, è ricavata da:

$c = d * (3 + 17)$, formula nella quale *d* indica sia la diagonale del quadrato sia il diametro del cerchio.

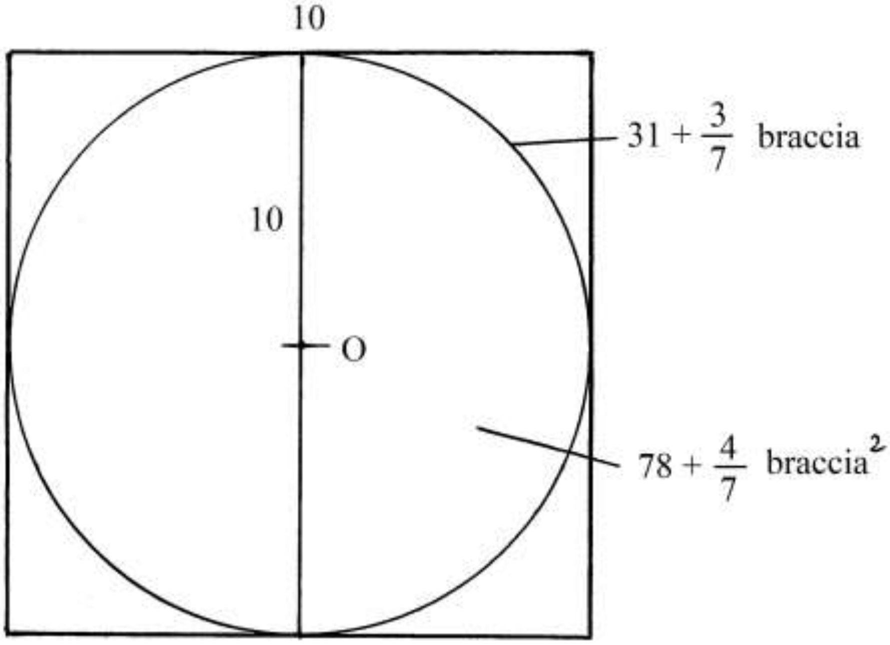
L'area del cerchio è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 – d^2/7 – d^2/(7 * 2) = d^2 – d^2/7 – d^2/14 = 11/14 * d^2.$$

[22.25] Cerchio inscritto

Un quadrato ha lati lunghi 10 braccia e al suo interno è inscritto un cerchio che ha diametro lungo 10 braccia.

Il problema domanda la circonferenza e l'area del cerchio.

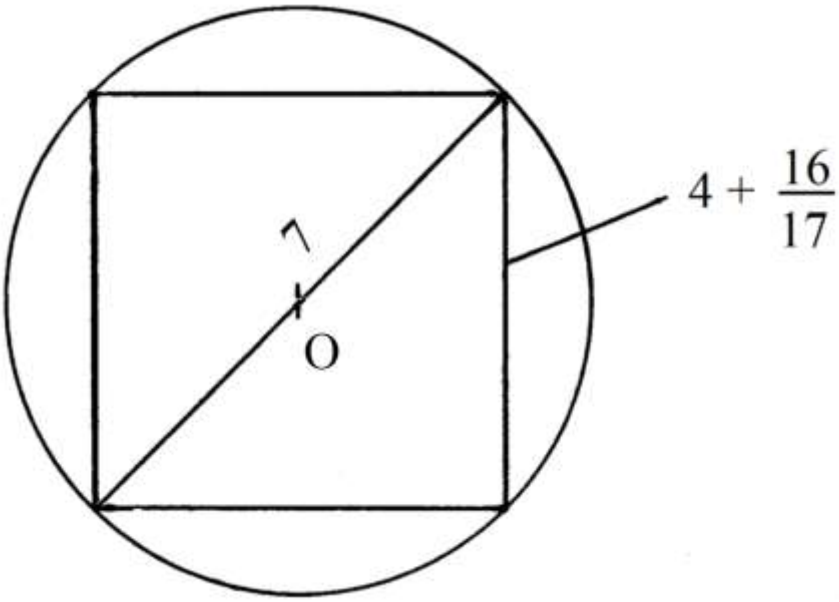


La procedura messa in opera è la seguente:

* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 10 * (3 + 1/7) = 31 + 3/7 braccia, lunghezza della circonferenza;
* moltiplicare il diametro per se stesso: 10 * 10 = 100 ;
* dividere per 7: 100 : 7 = 14 + 2/7 ;
* dividere per 2: (14 + 2/7) : 2 = 7 + 1/7 ;
* sommare i due quozienti: (14 + 2/7) + (7 + 1/7) = 21 + 3/7 ;
* sottrarre da 100: 100 – (21 + 3/7) = 78 + 4/7 braccia^2, area del cerchio.

[22.26] Quadrato inscritto

Un cerchio ha diametro lungo 7 braccia e al suo interno è inscritto un quadrato che, ovviamente, ha le diagonali lunghe 7 braccia.

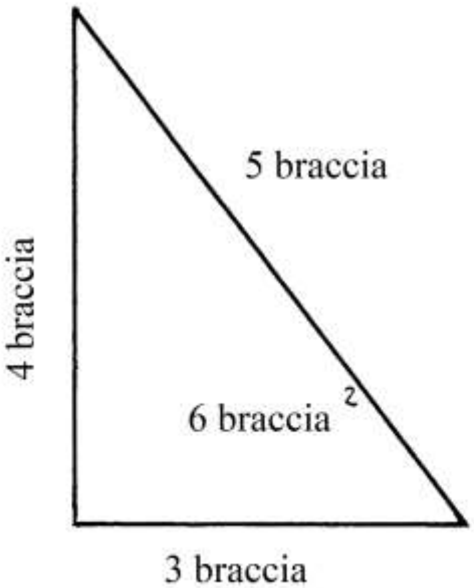


Il problema chiede la lunghezza dei lati del quadrato.
La procedura risolutiva è:

* moltiplicare il diametro per se stesso: $7 * 7 = 49$;
* dividere per 2: $49 : 2 = 24,5$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{24,5} \approx 4 + 16/17$, lunghezza dei lati del quadrato, valore approssimato di poco per difetto.

[22.27] <u>Terreno triangolare</u>

Un campo ha la forma di un triangolo rettangolo con le dimensioni indicate nella figura:



Jacopo chiama *facce* i due cateti e *schifo* l'ipotenusa.
Il problema domanda l'area del triangolo rettangolo.
La procedura è molto semplice:

*	moltiplicare le lunghezze dei due cateti: 3 * 4 = 12 ;
*	dividere per 2: 12 : 2 = 6 braccia^2, area del terreno.

Jacopo ha scelto, in questo e in altri esempi, il triangolo rettangolo che rappresenta la più semplice terna pitagorica, quella 3 – 4 – 5.

SECONDA PARTE – LE VERSIONI COLLAZIONATE DI FIRENZE E DI MILANO

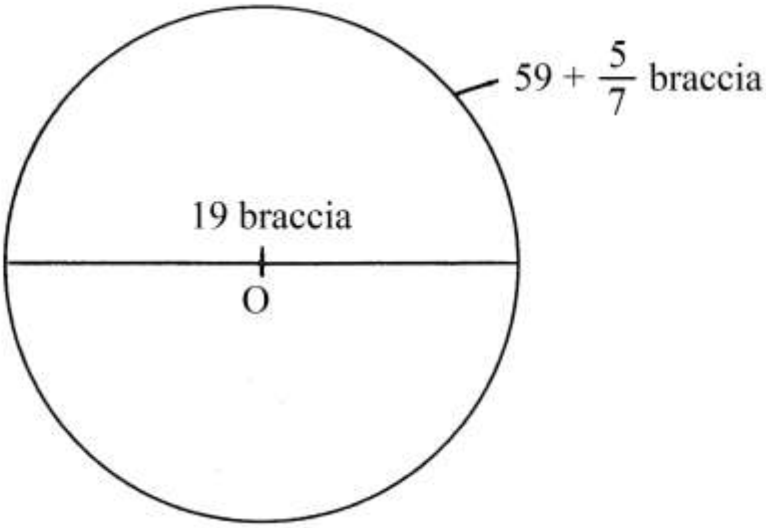
Nel suo approfondito studio, Jens Høyrup ha collazionato i testi dei manoscritti di Firenze e di Milano.

Di seguito sono descritti i problemi di geometria piana dei due manoscritti che mostrano alcune difformità rispetto agli analoghi testi del manoscritto Vaticano.

La numerazione dei problemi segue quella di Høyrup: tutti sono contrassegnati dalla lettera F per Firenze e M per Milano.

[F.vi.2][M.15.3] Cerchio dato il diametro

Un cerchio ha diametro lungo 19 braccia. Il problema vuole conoscere la lunghezza della circonferenza:

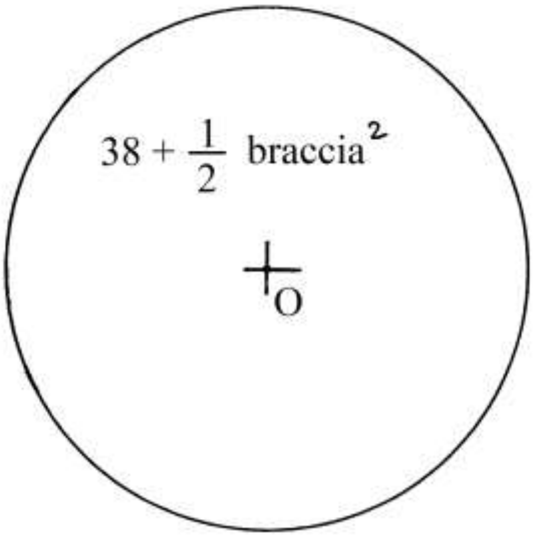


La soluzione è:
moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 19 * (3 + 1/7) = 59 + 5/7 braccia

[È il problema [15.3] del manoscritto Vaticano].

[F.vi.3][M.15.4] Area di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 22 braccia. Il problema domanda la sua area.



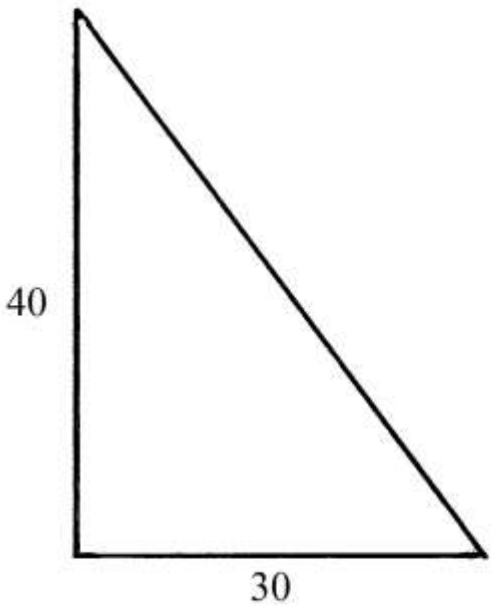
La procedura risolutiva è la seguente:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 22 : (3 + 1/7) = 7 braccia, diametro del cerchio;
* moltiplicare la circonferenza per il diametro: 22 * 7 = 154 ;
* dividere per 4: 154 : 4 = 38 + ½ braccia^2, area del cerchio

[È il problema [15.4] del manoscritto Vaticano].

[F.vi.4][M.15.5] Area di un triangolo rettangolo

Un terreno ha tre *cantoni* e cioè ha la forma di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno le lunghezze espresse in braccia riportate sulla figura:



La lunghezza dell'ipotenusa (*squadrante* per Jacopo) è *sconosciuta* e deve essere calcolata.
La soluzione è la seguente:

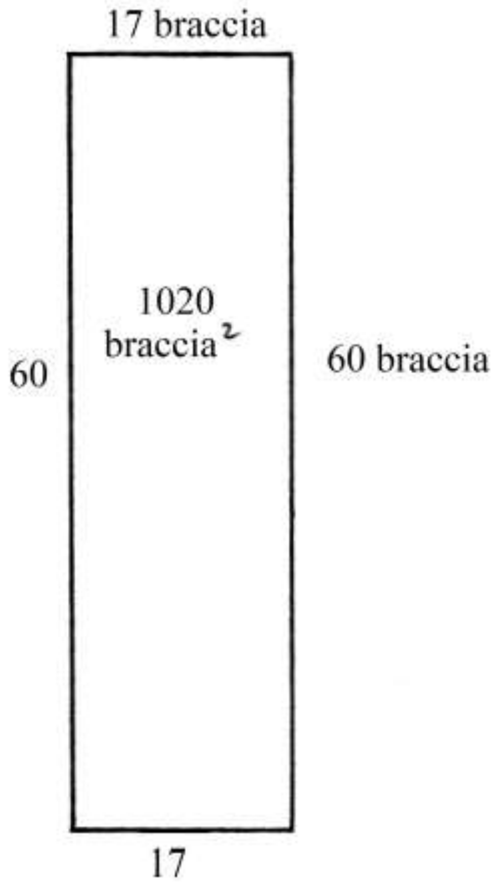
* moltiplicare la lunghezza del cateto minore per se stessa: 30 * 30 = 900 ;
* moltiplicare il cateto maggiore per se stesso: 40 * 40 = 1600 ;
* sommare i due prodotti: 900 + 1600 = 2500 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{2500} = 50$ braccia, lunghezza dell'ipotenusa.

Nota: il problema è presente nel manoscritto Vaticano sia con le stesse dimensioni [15.5] che con dimensioni ridotte a 1/10 di queste [problema 22.27) Si tratta sempre della terna pitagorica 3-4-5.

[F.vi.7][M.15.8] <u>Area di un rettangolo</u>

Un terreno ha la forma di un rettangolo con le dimensioni in braccia scritte sulla figura.
Il problema chiede l'area del terreno.
La soluzione è: moltiplicare la *longheza* (il lato più lungo) per l'*ampiezza* (il lato più corto):
Il risultato è:

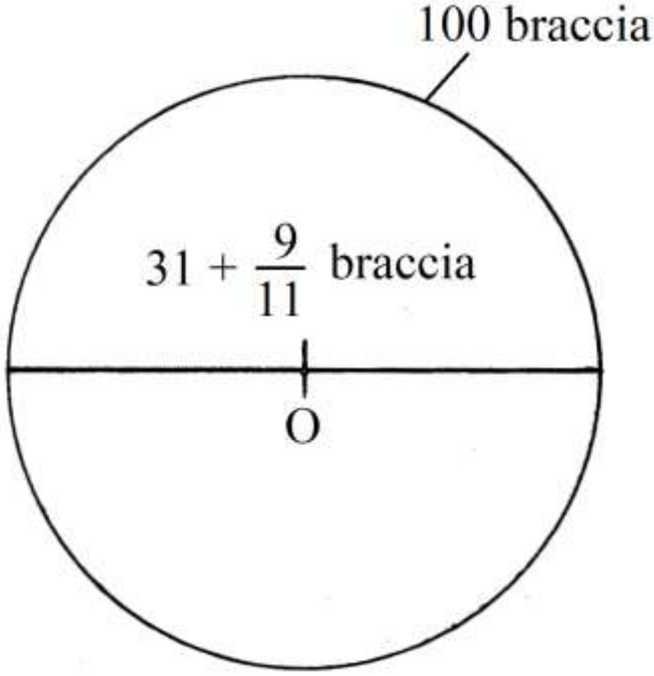
Area rettangolo = *longheza* * *ampiezza* = 60 * 17 = 1020 braccia^2 .



[È il problema [15.8] del manoscritto Vaticano].

[F.vi.10][M.15.11] Diametro di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 100 braccia: il problema vuole la lunghezza del diametro.



La soluzione è la seguente:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 100 : (3 + 1/7) = 31 + 9/11 braccia.

Jacopo usa una procedura più lunga benché anch'essa corretta:

* egli converte la costante (3 + 1/7) nel suo equivalente 22/7 ;
* divide la circonferenza per l'equivalente della costante: 100 : (22/7) ;
* moltiplica la circonferenza per l'inverso della costante:

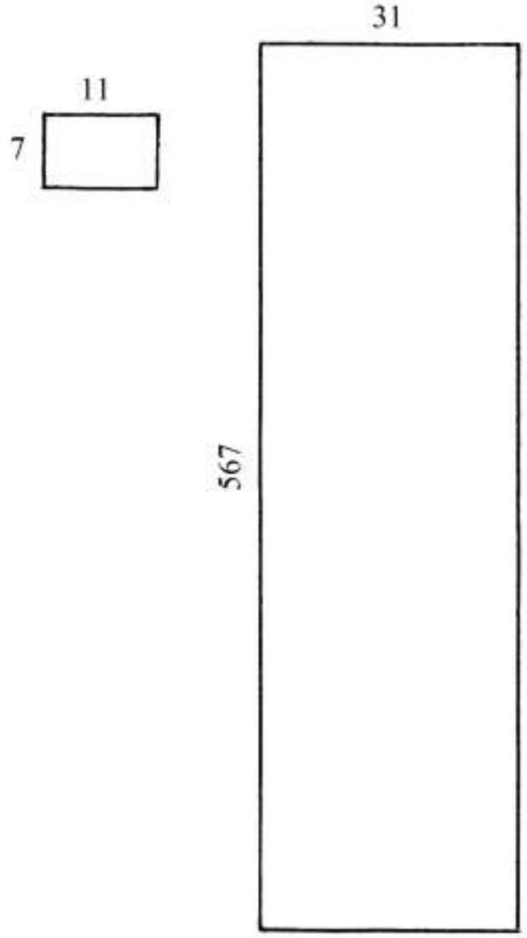
100 * (7/22) = 31 + 9/11 braccia, che è il diametro cercato.

[È il problema [15.11] del manoscritto Vaticano].

Evidentemente, Jacopo si rivolgeva a mercanti, artigiani e agrimensori per i quali era più facile usare questa soluzione con la moltiplicazione per l'inverso invece che con la divisione per un numero misto formato da un *sano* (il 3) e da un *rotto* (il 1/7).

[F.vi.14][M.15.17] <u>Case da costruire in un terreno</u>

Un terreno è lungo 567 braccia ed è largo 31 braccia.



Il problema domanda il numero di *case* di dimensioni 11x7 braccia che è possibile costruire nel terreno.

La procedura risolutiva è la seguente:

* moltiplicare la larghezza per la lunghezza del terreno: $31 * 567 = 17577$ braccia^2, area del terreno;
* moltiplicare la larghezza per la lunghezza di una *casa*: $7 * 11 = 77$ braccia^2, area di una *casa*;
* dividere l'area del terreno per quella di una *casa*: $17577 : 77 \approx 228 + 3/11$ *case* che è possibile costruirvi

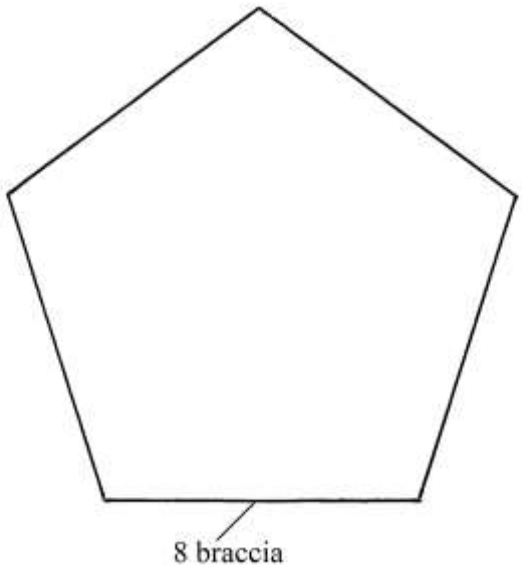
[È il problema [15.17] del manoscritto Vaticano].

Nota: la figura è chiaramente *fuori scala*.

Inoltre, il problema è un po' superficiale: se si tratta veramente di *case*, dovrà esservi dello spazio per la circolazione delle persone.

[F.vi.16][M.15.19] Area di un pentagono

Un terreno ha la forma di un pentagono regolare con i lati (*facie*) lunghi 8 braccia.



Il problema vuole conoscere la superficie del terreno.

La procedura impiegata da Jacopo è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: $8 * 8 = 64$;
* moltiplicare per 3: $64 * 3 = 192$;
* sottrarre la lunghezza di un lato: $192 – 8 = 184$ braccia^2, area del pentagono

[È il problema [15.19] del manoscritto Vaticano].

- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata da Jacopo è riassunta nella formula che segue:

$$\text{Area pentagono} = (3 * \text{lato}^2) - \text{lato} = 3*\text{lato}*(\text{lato} - 1) .$$

L’area di un pentagono regolare viene oggi celermente calcolata usando il *numero fisso* F che è il rapporto fra l’area del poligono e quella di un quadrato costruito su di un suo lato. Per il pentagono F vale 1,72.

L’area del pentagono è:

Area pentagono = F * lato^2 = 1,72 * 8^2 = 110,08 braccia^2.

Il risultato ottenuto da Jacopo è grandemente errato per eccesso.

Nella sua formula vi è forse una tenue traccia delle formule usate dai Gromatici romani per calcolare l’area dei più comuni poligoni regolari?

L’ingegnere e gromatico Frontino (30 – 104) avrebbe calcolato come segue:

Area PENTAGONO = (3 * lato^2 – lato)/2 = (3 * 8^2 – 8)/2 = 184/2 = 92 braccia^2.

Una seconda formula, più errata di quella di Frontino, venne usata da altri Gromatici:

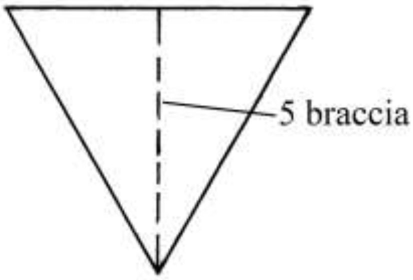
Area PENTAGONO = (3 * lato^2 + lato)/2 = (3 * 8^2 + 8) = 200/2 = 100 braccia^2.

È bene ricordare che i Romani misuravano in *piedi* e Jacopo in *braccia*. Un piede romano valeva 29,57 cm (o 295,7 mm), secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma. Non sempre fu rispettata questa misura standard.

- -

[F.vi.18][M.15.21A(20)] <u>Lato di un triangolo equilatero</u>

"*Uno schudo, cioè uno trianghola …*" ha altezza (*drito di mezo*) lunga 5 braccia.
Il problema chiede la lunghezza dei lati.

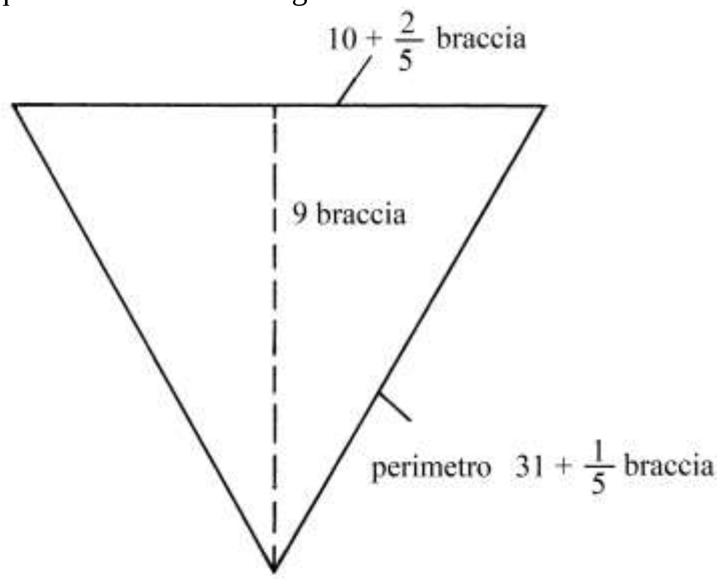


La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare l'altezza per se stessa: $5 * 5 = 25$;
* dividere per 3: $25 : 3 = 8 + 1/3$;
* addizionare a 25: $25 + (8 + 1/3) = 33 + 1/3$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(33 + 1/3)} \approx 5 + 5/6 - 17/54$ braccia, lunghezza dei tre lati del triangolo.

[F.vi.19][M.15.22] <u>Triangolo equilatero data l'altezza</u>

Un triangolo equilatero ha altezza lunga 9 braccia.



Il problema domanda la lunghezza dei lati e il perimetro.
La procedura attivata da Jacopo è la seguente:

* moltiplicare l’altezza per se stessa: $9 * 9 = 81$;
* dividere per 3: $81 : 3 = 27$;
* aggiungere a 81: $27 + 81 = 108$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{108} \approx 10 + 2/5$ braccia,
  lunghezza dei tre lati;
* moltiplicare per 3: $(10 + 2/5) * 3 = 31 + 1/5$ braccia,
  perimetro del triangolo equilatero.

Nota: il problema è identico a quello [15.22] del manoscritto Vaticano, con una piccola differenza: in quel testo la lunghezza calcolata dei lati del triangolo equilatero è più precisa e cioè: $(10 + 2/5 – 4/25)$ invece di $(10 + 2/5)$ braccia.

APPENDICE

I termini matematici del Trattato di Jacopo

Nella sua interessante e utile tesi di laurea in Lettere (citata in bibliografia [7]), Barbara McGillivray ha approfondito lo studio del lessico di uno dei manoscritti contenenti il Trattato di Jacopo, quello n. 2236 della Riccardiana e ha individuato una serie di termini di interesse matematico (compresi i tecnicismi collaterali) la cui prima attestazione in italiano compare proprio nel Trattato di Jacopo.

Per questa analisi, il suo studio ha utilizzato i più importanti dizionari della lingua italiana e un nuovo importante strumento di ricerca, il TLIO.

Non sempre i dizionari sono esenti da errori e lacune, forse dovuti alla scarsa considerazione che la cultura italiana di stampo c.d. “umanistico” riserva ai testi di natura tecnica e scientifica.

Che cosa è TLIO

L’*Opera del Vocabolario Italiano* (OVI) del “Consiglio Nazionale delle Ricerche” ha progettato la compilazione di un vocabolario storico dell’italiano: ulteriori informazioni sono sul sito http://www.ovi.cnr.it/index.php/it/?page=il-vocabolario

La prima parte del progetto è data dal *Tesoro della Lingua Italiana delle Origini* (TLIO): esso prevede la schedatura dei testi in volgare italiano compilati entro il 1375.

La sede dell’OVI è presso l’Accademia della Crusca, a Firenze.

Il progetto è consultabile sul sito http://tlio.ovi.cnr.it/TLIO/.

Alla data del 8 maggio 2019 sul sito TLIO sono già consultabili 36597 voci, ricavate da testi di tutti gli argomenti e compilati nei diversi dialetti italiani: fra gli Autori esaminati è anche Jacopo da Firenze con il suo *Tractatus Algorismi*.

Il progetto prevede la schedatura di un numero di voci compreso fra 50.000 e 60.000.

BIBLIOGRAFIA

1. Caianiello Eva, "Les sources des textes d'abaque italiens du XIV^{e} siècle: les échos d'un débat en cours", "Reti Medievali Rivista", 14, 2(2013), Firenze University Press, pp. 188-209.
2. Høyrup Jens, "L'Algèbre de Jacopo de Florence: un défi a l'historiographie de l'algèbre presque-moderne", 2000, pp. 18 (MARRAKECH_2002_Conference_contribution.pdf).
3. Høyrup Jens, "VAT. LAT. 4826 *Jacopo da Firenze, Tractatus algorismi*". Preliminary transcription of the manuscript, with occasional commentaires, 1999, pp. 114.
4. Høyrup Jens, "Jacopo da Firenze, *Tractatus algorismi*": An edition of the manuscript Milan, Trivulziana MS 90, collated with Florence, Riccardiana MS 2236, 2007, pp. 83.
5. Høyrup Jens, "Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra", Historia Mathematica, 33 (2006), pp. 4 – 42.
6. Høyrup Jens, "Jacopo da Firenze's *Tractatus Algorismi* and Early Italian Abbacus Culture", Basel – Boston – Berlin, Birkhäuser, 2007, pp. xii-482.
7. McGillivray Barbara, "Il lessico del *Tractatus Algorismi* di Jacopo da Firenze (Codice Riccardiano 2236), Firenze, anno accademico 2004/2005, pp. 66. (https://www.academia.edu/3560806/lessico_del_Tractatus_Algorismi_di_Jacopo_da_Firenze.pdf).
8. Travaini Lucia, "Monete mercanti e matematica", Roma, Jouvence, 2003, pp. 319 con tavole fuori testo.