sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: unità di misura lineari (braccio, palmo, canna) e di superficie usate a Firenze; area del pentagono; copertura di una piazza quadrata; scudo triangolare; triangolo equilatero; divisione in due parti di un orto quadrato; problemi diretti e indiretti su cerchio, circonferenza e segmento circolare; triangoli inscritti in cerchi e quadrati; cerchi inscritti in triangoli e quadrati; quadratura del cerchio; quadrato inscritto in un cerchio; poligoni regolari (fino all'ottagono) inscritti in un cerchio; area dell'ellisse.

Nota: fra parentesi quadre [...] sono aggiunti commenti dell'autore di questo articolo.

LA GEOMETRIA PIANA DI PAOLO GHERARDI

Gino Arrighi ha studiato due trattati matematici attribuiti all'abacista fiorentino Paolo Gherardi (o Gerardi).

Essi sono intitolati "*Libro di ragioni*" e "*Liber habaci*" e sono scritti in fiorentino. Sono contenuti nei Codici Magliabechiani, Classe XI, nn. 87 e 88 (secolo XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze.

Paolo Gherardi era un mercante e un maestro di abaco fiorentino, vissuto fra Firenze e Montpellier, nel Sud della Francia.

Nel suo articolo citato in bibliografia, Maryvonne Spiesser descrive la importante presenza toscana nelle località del Meridione francese:

"*…È certo che la vicina Italia ha svolto un ruolo nello sviluppo dei trattati commerciali francesi, almeno su quelli che sono originari del Midi. Sono noti due maestri fiorentini, venuti a insegnare la loro arte a Montpellier (Jacopo da Firenze – intorno al 1307 – e Paolo Gherardi – intorno al 1327). La sede del Papato a Avignone nel corso di buona parte del XIV secolo aveva favorito la circolazione degli uomini e incrementato le comunicazioni fra l'Italia e la Francia. A questa epoca, circa il 25% della popolazione di Avignone e dal 10 al 15% di quella di Montpellier era di origine toscana. Un'altra testimonianza dei legami con l'Italia nell'ambito matematico è data da un'aritmetica anonima, l'*Arte dell'Abbaco*, conservata nella Biblioteca Ricardiana di Firenze (manoscritto 2511), che è stata scritta nella regione di Avignone intorno al 1330…*".

Questa nutrita presenza di Toscani spiega la presenza di più maestri d'abaco a Montpellier, a Avignone e in altre località occitane o provenzali.

Il "*Libro di ragioni*" di Paolo Gherardi è stato composto a Montpellier nel 1328 e impiega le cifre indo-arabiche.

Secondo Gino Arrighi, il "*Liber habaci*" sarebbe anteriore al "*Libro di ragioni*": esso usa i *numeri romani*.

Entrambi i trattati contengono problemi aritmetici, alcuni algebrici, baratti di monete e alcuni problemi di geometria piana e di geometria solida.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura lineari

Paolo Gherardi usa come unità di misura il braccio e il braccio quadrato e i loro sottomultipli *palmo* e *canna*.

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

* il braccio *da panno* ("braccio di Calimala", dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l'equivalente di 58,3626 cm;
* al suo fianco, per alcune attività edilizie era usato il *braccio da terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$1 \text{ braccio da terra} = (17/18) * \text{braccio da panno} \approx$$
$$\approx 58{,}3626 * (17/18) \approx 55{,}1202 \text{ cm}\,.$$

Molte grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza.

Come il fiorino, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 denari: furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

La tabella che segue elenca i multipli (il miglio) e molti sottomultipli del braccio da panno:

LUNGHEZZE

RAGGUAGLIO DEL BRACCIO FIORENTINO A PANNO E DELLE SUE FRAZIONI PIU' CITATE DAGLI ACCADEMICI			
Miglio	braccia 2833 1/3		m1653,607
braccio	20 soldi		cm 58,3626
soldo	12 denari	6 piccioli	cm 2,9181
quattrino	4 denari		cm 0,9727
denaro	12 punti		cm 0,2432
punto			cm 0,0203
un braccio e 1/4			cm 72,9532
2/3 di braccio			cm 38,9084
16 soldi			cm 46,69008
3/10 di braccio	18 quattrini		cm 17,50778
3/4 di braccio	15 soldi		cm 43,7718
8 quattrini	1/15 di braccio		cm 7,7816

La tabella è tratta dal sito del Museo Galileo (http://www.museogalileo.it/).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La *canna* usata a Firenze e in altri Comuni della Toscana medievale poteva avere due lunghezze:

* canna mercantile: era lunga 4 braccia da panno;
* canna agrimensoria: era lunga 5 braccia da panno ed era chiamata *pertica*.

Come appenas visto, il braccio da panno di Firenze era lungo 58,3626 cm e di conseguenza le due canne erano lunghe:

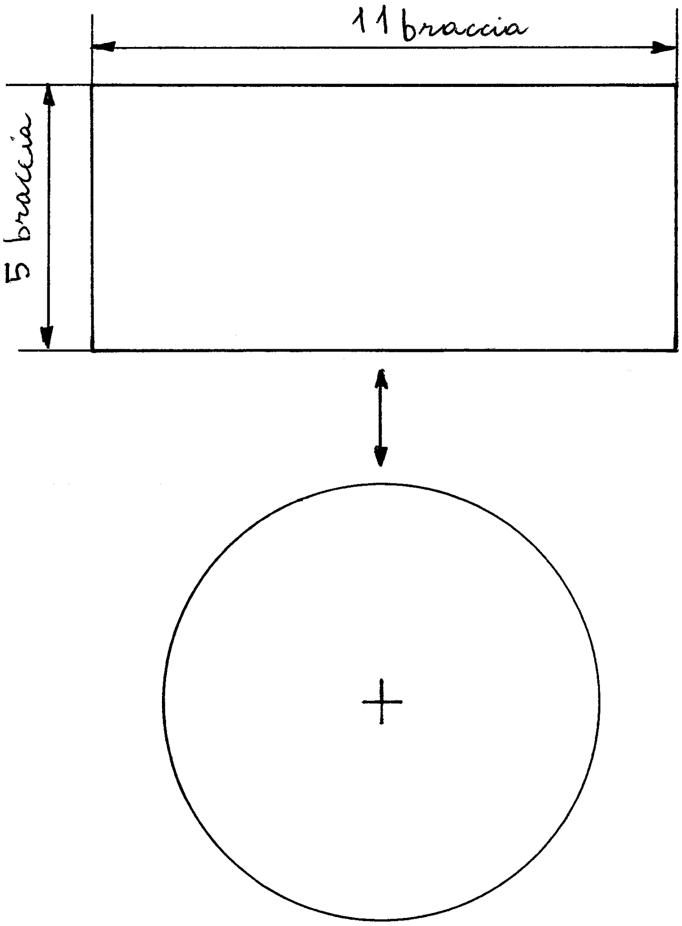
* la canna mercantile 233,45 cm;
* la canna agrimensoria o pertica 291, 813 cm.

- -

LIBRO DI RAGIONI

Cerchio equivalente a un rettangolo

Un rettangolo ha dimensioni 5 * 11 braccia. Deve essere costruito un cerchio con area equivalente.



La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare 5 per 11: 5 * 11 = 55
  [l'Autore non precisa che calcola l'area in braccia^2];
* moltiplicare per 3/11: 55 * 3/11 = 15 ;
* sommare a 55: 15 + 55 = 70 ;
* estrarre la radice quadrata di 70: √70, lunghezza del diametro.

Fin qui ha applicato la formula

$$\text{diametro}^2 = \frac{14}{11} \cdot \text{Area}$$

e

$$\text{diametro} = \sqrt{\frac{14}{11} \cdot \text{Area}}\ .$$

La circonferenza viene calcolata moltiplicando il diametro per la costante (3 + 1/7) che dall'epoca di Archimede approssima il valore di π.

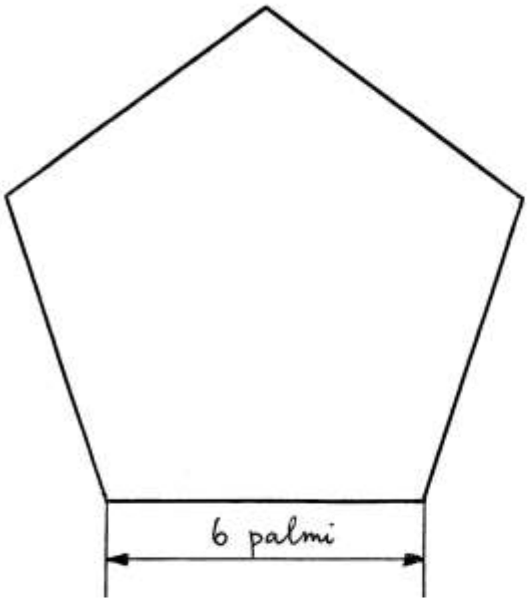
Infine, l'Autore suggerisce di calcolare l'area del cerchio equivalente con la formula

$$\text{Area} = \frac{\text{circonferenza}}{4} \cdot \text{diametro}$$

Le formule impiegate da Gherardi sono quelle più comuni nei trattati medievali.

Area di un pentagono

Un pentagono ha lati lunghi 6 *palmi* [1 palmo vale ½ di braccio da panno]. L'Autore afferma che il poligono è disegnato con il compasso, ma non ne spiega la costruzione.



Il problema chiede di calcolare la sua area.

La procedura usata è:

- * moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 6 * 6 = 36 ;
- * moltiplicare per 3: 36 * 3 = 108 :
- * sottrarre la lunghezza di un lato: 108 – 6 = 102 ;
- * dividere per 2: 102 : 2 = 51 [palmi^2], area del pentagono.

La procedura è riassunta nella formula

$$\text{Area pentagono} = \frac{3 \cdot \text{lato}^2 - \text{lato}}{2} = \frac{\text{lato} \cdot (3 \cdot \text{lato} - 1)}{2}\ .$$

\- APPROFONDIMENTO -

Nel suo *Tractatus Algorismi* Jacopo da Firenze ha usato la stessa formula di Gherardi per calcolare l'area di un pentagono regolare.

L'area di un pentagono regolare viene oggi celermente calcolata usando il *numero fisso* F che è il rapporto fra l'area del poligono e quella di un quadrato costruito su di un suo lato. Per il pentagono F vale 1,72.

L'area del pentagono è:

Area pentagono = F * lato^2 = 1,72 * 6^2 = 61,92 palmi^2.

Il risultato ottenuto da Gherardi, 51 palmi^2, è grandemente errato per difetto.

Nella sua formula vi è forse una tenue traccia delle formule usati dai Gromatici romani per calcolare l'area dei più comuni poligoni regolari?

L'ingegnere e gromatico Frontino (30 – 104) avrebbe calcolato come segue:

$$\text{Area pentagono} = \frac{3 \cdot \text{lato}^2 - \text{lato}}{2} = \frac{3 \cdot 6^2 - 6}{2} = \frac{108 - 6}{2} = 51 \text{ palmi}^2$$

, che è lo stesso risultato calcolato da Gherardi con la medesima formula.

Una seconda formula, più errata di quella di Frontino, venne usata da altri Gromatici:

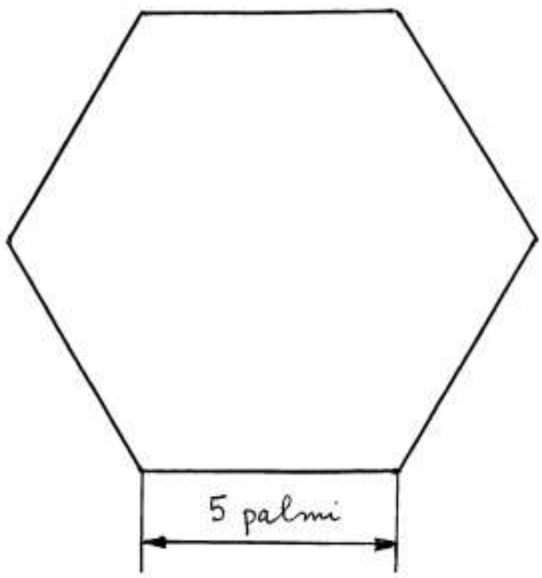
$$\text{Area pentagono} = \frac{3 \cdot \text{lato}^2 + \text{lato}}{2} = \frac{3 \cdot 6^2 + 6}{2} = \frac{108 + 6}{2} = \frac{114}{2} = 57 \text{ palmi}^2$$

Anche Tommaso della Gazzaia ha impiegato la stessa formula *errata* di Jacopo da Firenze e di Paolo Gherardi.

- -

Area di un esagono

Un esagono è costruito con il compasso e ha lati lunghi 5 palmi.



Il problema domanda l'area del poligono.

Il testo fa notare che dal centro dell'esagono fino a ciascuno dei sei vertici, vi è la stessa lunghezza dei lati del poligono.

La procedura usata è:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 5 * 5 = 25 ;
* dividere per 2: 25 : 2 = 12 + ½ [= 12,5: Gherardi non usa il simbolo infisso '+' fra la parte intera, '12', e quella frazionaria, '1/2'];
* moltiplicare per il numero dei lati: 12,5 * 6 = 75 palmi^2, area dell'esagono.

La procedura è riassunta con la formula

$$\text{Area} = \frac{\text{lato}^2}{2} \cdot \text{numero lati}$$

La formula corretta per calcolare l’area di un esagono impiega il *numero fisso* F = 2,598 per il quale moltiplicare il quadrato della lunghezza del lato:

Area esagono = F * lato^2 ≈ 2,598 * 5^2 ≈ 64,95 palmi^2.

Il dato ricavato da Gherardi è errato per *eccesso*.

Copertura di una piazza quadrata

Una piazza ha forma quadrata e il lato è lungo 60 braccia. Deve essere ricoperta con mattoni lunghi ½ braccio e larghi ¼ di braccio.

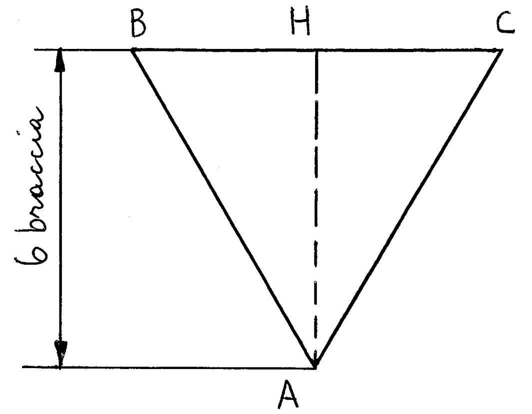
Il problema chiede il numero dei mattoni occorrenti.

La procedura utilizzata è la seguente:

* calcolare l’area di un mattone: lunghezza * larghezza = (1/2) * (1/4) = 1/8 braccia^2 [ne consegue che 8 mattoni coprono la superficie di 1 braccio^2] ;
* calcolare l’area della piazza: Area = lato^2 = 60 * 60 = 3600 braccia^2 ;
* moltiplicare l’area della piazza per 8: 3600 * 8 = 28800 mattoni occorrenti per pavimentare la piazza.

Scudo a forma di triangolo

Uno scudo di forma triangolare ha l’altezza lunga 6 braccia:



Il problema domanda la lunghezza del lato, ma inizialmente non chiarisce la natura del triangolo: la soluzione mostrata lo individua come *equilatero*.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare l’altezza per se stessa: 6 * 6 = 36 ;
* dividere per 3: 36 : 3 = 12 ;
* sommare a 36: 12 + 36 = 48 ;
* estrarre la radice quadrata: √48 braccia, lunghezza dei lati del triangolo [equilatero].

Dall’interpretazione dei passi della procedura, si può dedurre che Gherardi abbia applicato il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli [ABH e AHC] nei quali l’altezza AH divide il triangolo ABC.

Consideriamo il triangolo ABH: l'altezza BH è data da

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = lato^2 - \left(\frac{lato}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot lato^2$$

.

La formula inversa è

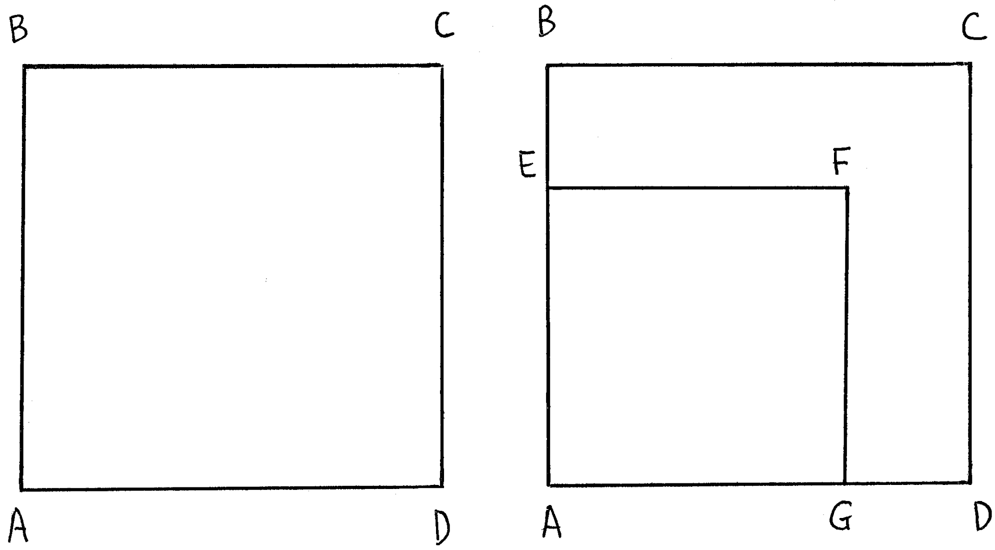
$$lato^2 = AH^2 \cdot \frac{4}{3}$$

, che è quella impiegata da Paolo Gherardi.

Nota: presso gli Abacisti medievali, lo *scudo* ha sempre forma di triangolo (isoscele o equilatero e in qualche caso scaleno), con il lato orizzontale, la *base*, posta superiormente, come è il caso della precedente figura.

<u>Divisione di un quadrato in due quadrati uguali</u>

Due persone possiedono un orto di forma quadrata, ABCD, con lati lunghi 40 braccia:



Il terreno deve essere diviso in due parti uguali: almeno una delle due deve restare quadrata e avere un vertice in uno dei vertici di ABCD.

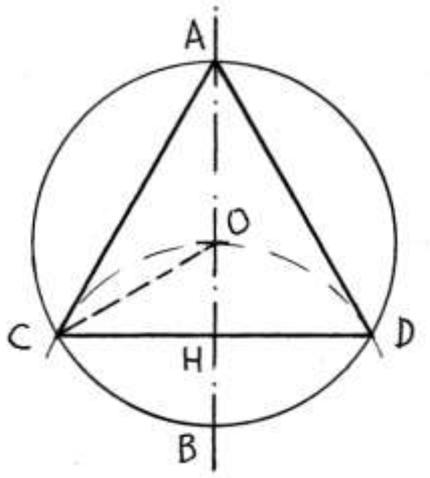
La procedura risolutiva è:

* moltiplicare la lunghezza del lato dell'orto per se stessa: 40 * 40 = 1600 :
* dividere per 2: 1600 : 2 = 800 ;
* estrarre la radice quadrata: √800, lunghezza del lato AE del quadrato AEFG di superficie uguale a metà di quella di ABCD.

<u>Triangolo inscritto in un cerchio</u>

Un cerchio ha diametro di 7 palmi.

Deve esservi inscritto il più grande triangolo possibile. Gherardi non chiarisce che il triangolo è equilatero: la cosa è implicita perché questo tipo di triangolo è sempre il più ampio fra tutti i triangoli inscrivibili (scaleni, isosceli e rettangoli).



Il problema domanda la lunghezza "*per lo ½*" e cioè l'altezza (AH nella figura).
La soluzione è semplice: calcolare i ¾ del diametro del cerchio e cioè
Altezza [AH] = ¾ * 7 = 5 + ¼ palmi.
La soluzione è corretta: infatti, il punto H è medio del raggio OB per cui

AH = AO + OH = (d/2) + ½ * (d/2) = ¾ * d, dove *d* è il diametro.

<u>Triangolo equilatero inscritto in un cerchio</u>

Un cerchio ha diametro 14 braccia e deve esservi inscritto il triangolo più grande possibile.
Il problema è simile al precedente.

Gherardi chiede di calcolare l'area del triangolo, la lunghezza dei suoi lati, quella dell'altezza e la distanza dal centro del cerchio ai vertici del triangolo.

Usiamo la figura impiegata nella soluzione del precedente problema.

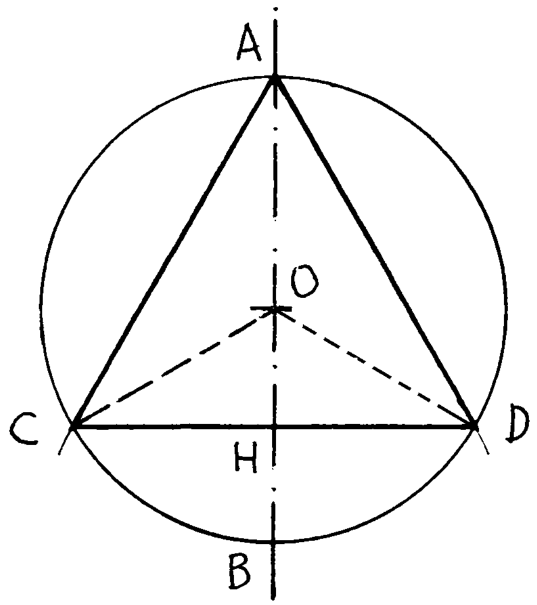
La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7), approssimazione di π:
  14 * (3 + 1/7) = 44 braccia, lunghezza della circonferenza;
* dividere per 4: 44 : 4 = 11 ;
* moltiplicare per il diametro: 11 * 14 = 154 [braccia^2, area del cerchio: Gherardi ha usato la formula
  Area cerchio = diametro * circonferenza/4, formula che può essere scritta nella forma
  Area cerchio = diametro^2 * 11/14 o, più semplicemente, Area cerchio = d^2 *11/14];
* moltiplicare l'area del cerchio per 21/44: 154 * (21/44) = 73,5 braccia^2, area del triangolo equilatero [il risultato è errato per *eccesso* perché il rapporto fra l'area del triangolo equilatero e quella del cerchio in cui è inscritto è (21 * √3) /88 invece di 21/44 e l'area correttamente calcolata è 63,65 braccia^2: nell'APPROFONDIMENTO in calce a questo paragrafo è descritta l'origine del rapporto fra le aree delle due figure];
* moltiplicare per 2 l'area del triangolo e estrarre la radice quadrata del prodotto:

$$2 \cdot \sqrt{\text{Area triangolo}}$$

  [Secondo Gherardi, il risultato sarebbe la lunghezza del lato, ma la soluzione è *errata*. Da questo punto in poi, l'Autore non svolge i calcoli ma fornisce solo indicazioni metodologiche];
* moltiplicare il diametro per 3/4 : 14 * ¾ = 10,5 braccia, altezza [AH nella figura];

* infine, Gherardi calcola in maniera assai contorta la lunghezza dei segmenti che collegano il punto O con i vertici del triangolo [A, C e D] che sono altrettanti raggi del cerchio e il dato iniziale del problema ha fornito il diametro, lungo 14 braccia:



Egli infatti procede come segue:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa e dividere per 3: $\text{lato}^2/3$;

* estrarre la radice quadrata:

$$\frac{\text{lato}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \text{lato}}{3}$$

, che è la lunghezza dei raggi OA, OC e OD.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Il rapporto fra l'area del triangolo equilatero inscritto e quella del cerchio</u>

L'area di un triangolo è data da

$$\text{Area triangolo} = \frac{\text{lato} \cdot \text{altezza}}{2}$$

, ma in un triangolo equilatero

$$\text{altezza} = \frac{3}{4} \cdot \text{diametro}$$

e

$$\text{altezza} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{lato}$$

Da cui

$$\text{lato} = \frac{2 \cdot \text{altezza}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{altezza}}{3} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \text{diametro}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{diametro}$$

Sostituendo questi valori nella formula dell'area del triangolo equilatero si ha:

$$\text{Area triangolo} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{diametro} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\text{diametro}}{2} =$$
$$= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \text{diametro}^2$$

Ne consegue

$$\text{Area triangolo} : \text{Area cerchio} =$$
$$= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \text{diametro}^2 : \text{diametro}^2 \cdot \frac{11}{14} =$$
$$= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{14}{11} = \frac{21 \cdot \sqrt{3}}{88}$$

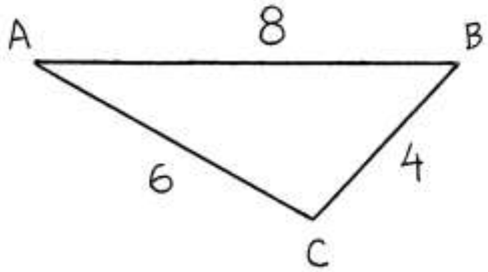
Ecco spiegata l'origine di questo rapporto fra le due aree.

Il coefficiente 21/44 usato da Gherardi non è spiegabile neanche usando l'approssimazione medievale per il rapporto fra l'altezza e il lato di un triangolo equilatero, fissato in 6/7 da Gerberto: usando questa costante e sapendo che l'altezza è lunga i ¾ del diametro, il rapporto fra l'area del triangolo equilatero e quella del cerchio diviene pari a 21/64.

- -

<u>Scudo di forma triangolare</u>

Uno scudo ha la forma di un *triangolo scaleno*, con lati lunghi 4,6 e 8 palmi:



Il problema chiede l'area dello scudo.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

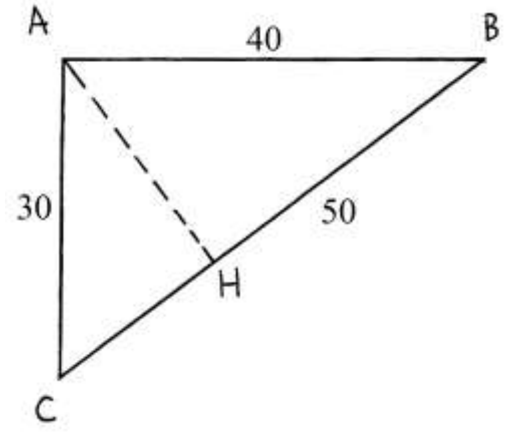
* sommare le lunghezze dei lati: 4 + 6 + 8 = 18 palmi [perimetro];
* dividere per 2: 18 : 2 = 9 [semiperimetro];
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del lato più corto: 9 – 4 = 5 ;
* moltiplicare per il semiperimetro: 5 * 9 = 45 ;
* sottrarre dal semiperimetro il lato intermedio: 9 – 6 = 3 ;
* moltiplicare per 45: 3 * 45 = 135 ;
* sottrarre il lato più lungo dal semiperimetro: 9 – 8 = 1 ;
* moltiplicare per 135: 1 * 135 = 135 ;
* estrarre la radice quadrata:

$\sqrt{135}$ palmi^2, area del triangolo ABC.

Nota: per calcolare l'area del triangolo, Paolo Gherardi ha applicato la formula di Erone.

Triangolo pitagorico

Un terreno ha forma triangolare con lati lunghi 50, 40 e 30 *canne*.



È chiaro che si tratta di un triangolo rettangolo pitagorico, con i lati lunghi 10 volte la più semplce terna pitagorica, quella 3-4-5.

Il problema chiede di calcolare le lunghezze dei segmenti [CH e HB] che rappresentano le proiezioni dei due lati più corti [i cateti AC e AB] sul terzo lato [l'ipotenusa CB] e la lunghezza dell'altezza [AH].

La procedura impiegata è la seguente:

* sommare le lunghezze dei due lati più corti: 30 + 40 = 70 ;
* dividere per la lunghezza del lato maggiore: 70 : 50 = 1 + 2/5 ;
* sottrarre la lunghezza del lato minore da quella del lato intermedio: 40 – 30 = 10 ;
* moltiplicare per (1 + 2/5): 10 * (1 + 2/5) = 14 ;
* sommare alla lunghezza del lato maggiore: 14 + 50 = 64 ;
* dividere per 2: 64 : 2 = 32 canne, lunghezza della proiezione di AB su CB e cioè di HB;
* sottrarre da 50: 50 – 32 = 18 canne, lunghezza della proiezione CH.

Per calcolare l'altezza [AH] che Gherardi chiama "*lista di traverso*", l'Autore usa i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato orizzontale [AB] per se stessa: 40 * 40 = 1600 ;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza di [HB]: 32 * 32 = 1024 ;
* sottrarre da 1600: 1600 – 1024 = 576 ;
* estrarre la radice quadrata: √576 = 24 canne, altezza [AH] [l'Autore ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB];
* moltiplicare per se stessa la lunghezza del lato più corto [il cateto AC]: 30 * 30 = 900 ;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza della proiezione [di AC che è CH]: 18 * 18 = 324 ;
* sottrarre da 900: 900 – 324 = 576 ;
* estrarre la radice quadrata: √576 = 24 canne, altezza [AH] rispetto all'ipotenusa.

Per calcolare l'area, Gherardi usa una procedura un po' contorta:

* sommare le lunghezze del cateto più lungo [AB] e della sua proiezione [HB]: 40 + 32 = 72 ;

* dividere per 2 la “*lista*” [cioè l’altezza AH]: 24 : 2 = 12 ;
* moltiplicare per 2 la proiezione [CH]: 18 * 2 = 36 ;
* moltiplicare per 12: 36 * 12 = 432 canne^2 [area del triangolo rettangolo AHB]:
* sommare le lunghezze del cateto più corto [AC] e della sua proiezione [CH] sull’ipotenusa [CB]: 30 + 18 = 48 ;
* dividere per 2: 48 : 2 = 24 ;
* dividere per 2 l’altezza: 24 : 2 = 12 ;
* moltiplicare per 24: 24 * 12 = 288 canne^2 [area del triangolo ACH];
* sommare le due aree: 432 + 288 = 720 canne^2 [area del triangolo rettangolo ABC].

Nota: il metodo impiegato e i risultati ottenuti da Gherardi riguardo alle aree sono *errati*.
Usando le lettere, descriviamo la procedura messa in atto da Gherardi:

Area AHB = (AB + HB)/2 * AH/2, invece della formula corretta
Area AHB = HB * AH /2.

Area AHC = (AC + CH)/2 * AH/2 invece di
Area AHC = CH * AH /2.

I risultati corretti sono:

Area AHB = (32 * 24)/2 = 384 canne^2 ;
Area AHC = (18 * 24)/2 = 216 canne^2 .

L’area dell’intero triangolo ABC è:

Area ABC = Area AHB + Area AHC = 384 + 216 = 600 canne^2.

La riprova della correttezza di questo risultato è dalle due formule seguenti:

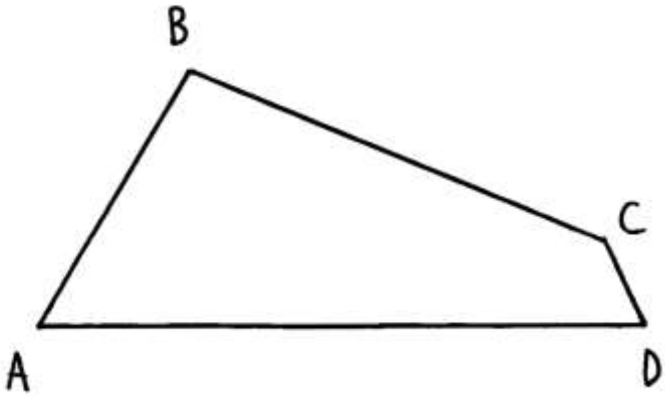
Area ABC = AC * AB/2 = 30 * 40/2 = 600 canne^2 e
Area ABC = CB * AH/2 = 50 * 24 /2 = 600 canne^2 .

- APPROFONDIMENTO -

L’errore metodologico commesso da Paolo Gherardi nella soluzione di questo problema è dovuto all’applicazione dell’antica *formula degli agrimensori*, tramandata anche dai testi dei Gromatici romani?

L’ipotesi sembra fondata.

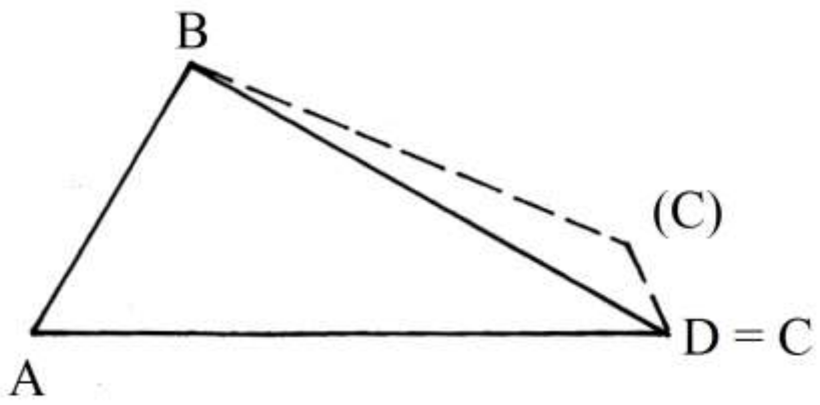
La figura che segue presenta un quadrilatero, ABCD:



La *formula degli agrimensori* calcola la sua area con il prodotto delle *semisomme* delle lunghezze dei lati opposti:

Area ABCD = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2.

Se la lunghezza del lato CD si riduce a *zero*, il quadrilatero si trasforma in un triangolo scaleno ABD: il lato BC viene modificato e i vertici D e C coincidono:



La formula diviene:

Area ABCD = (AB + 0)/2 * (AD + BC)/2 = AB/2 * (AD + BC) .

Le formule usate da Gherardi per calcolare le aree dei triangoli rettangoli AHB e AHC

Area AHB = (AB + HB)/2 * AH/2 e

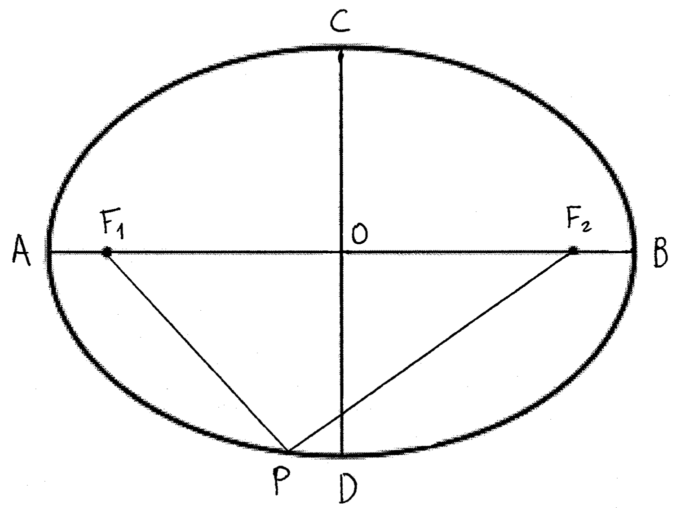
Area AHC = (AC + CH)/2 * AH/2

sembrano confermare l'ipotesi dell'impiego della *formula degli agrimensori*, con le conseguenze viste.

- -

Ellisse

Una figura circolare ("*uno tondo*") ha la forma di un'ellisse:



L'ellisse è una curva chiusa che possiede una proprietà geometrica: la somma delle distanze di un suo punto qualsiasi (P nella figura) da due punti interni e fissi, i *fuochi* F_1 e F_2, è *costante*:

$PF_1 + PF_2$ = costante = AB .

I fuochi sono collocati sull'asse maggiore AB e sono fra loro simmetrici:

$OF_1 = OF_2$.

CD è l'asse minore che ha lunghezza ridotta rispetto a quella dell'asse maggiore AB: i due assi si intersecano perpendicolarmente nel centro O.

Il problema chiede la lunghezza della curva e l'area da essa racchiusa: l'asse maggiore AB è lungo 6 braccia e quello minore Cd 4 braccia.

Gherardi risolve il problema con i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei due assi: 4 + 6 = 10 ;
* dividere per 2: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare per la costante (3 + 1/7): 5 * (3 + 1/7) = 15 + 5/7 ;
* moltiplicare per 4: (15 + 5/7) * 4 = 62 + 6/7 ;
* sottarre la lunghezza dell'asse minore da quella dell'asse maggiore: 6 – 4 = 2 ;
* moltiplicare per la lunghezza dell'asse minore: 2 * 4 = 8 ;
* moltiplicare per 2: 8 * 2 = 16 ;
* sommare a (62 + 6/7): 16 + (62 + 6/7) = 78 + 6/7 ;
* dividere per 4: (78 + 6/7) : 4 = 19 + 5/7 braccia^2, area dell'ellisse.

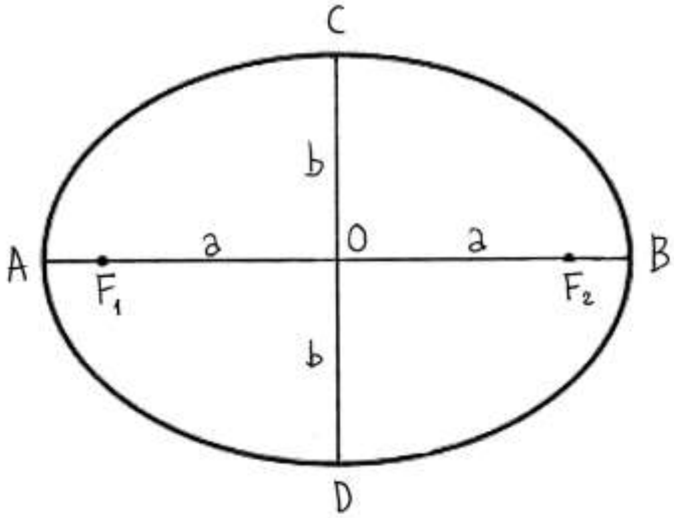
La procedura è riassunta nella complessa formula che segue:

$$\frac{\left[\frac{\text{asse minore} + \text{asse maggiore}}{2}\cdot\left(3+\frac{1}{7}\right)\cdot 4 + \frac{\text{asse maggiore} - \text{asse minore}}{2}\cdot \text{asse minore}\cdot 2\right]}{4}$$

- APPROFONDIMENTO -

L'area di un ellisse è oggi calcolata con la formula

Area ellisse = π * a * b , dove *a* e *b* sono i *semiassi* rispettivamente maggiore e minore.



Il semiasse *a* è lungo 3 braccia e il semiasse *b* è 2 braccia. L'area dell'ellisse è:

Area ellisse = (3 + 1/7) * 3 * 2 = (22/7) * 6 = 18 + 6/7 braccia^2: il dato calcolato da Gherardi, (19 + 5/7), è errato per eccesso.

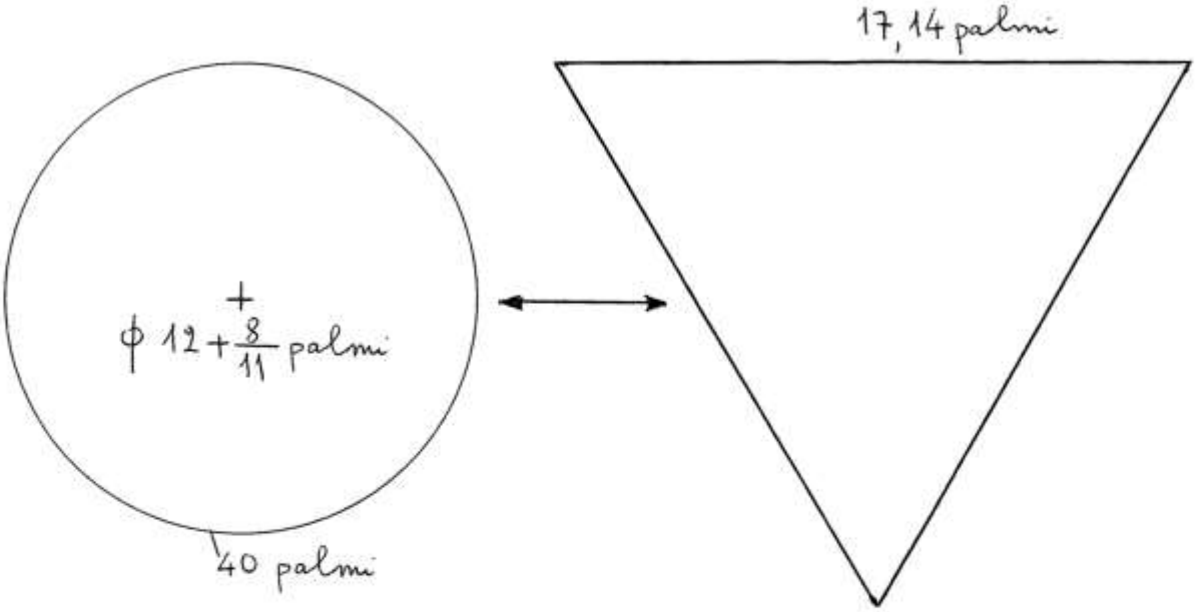
Nella soluzione del problema, l'Autore ha tralasciato di calcolare la lunghezza della curva: a questo scopo è attualmente usata la seguente formula *approssimata*:

$$P \approx \pi\cdot\sqrt{2\cdot\left(a^2+b^2\right)} \approx \left(3+\frac{1}{7}\right)\cdot\sqrt{2\cdot\left(3^2+2^2\right)} \approx \frac{22}{7}\cdot\sqrt{2\cdot 13} \approx 16{,}025 \text{ braccia}$$

- -

<u>Triangolo equilatero equivalente a un cerchio</u>

Un cerchio ha la circonferenza lunga 40 palmi. Deve essere costruito uno *scudo* (un triangolo equilatero) che abbia la stessa superficie.



La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la circonferenza per 2: 40 * 2 = 80 ;

* moltiplicare per 2/13: 80 * 2/13 = 12 + 4/13 ;

* sommare a 80: 80 + (12 + 4/13) = 92 + 4/13

palmi, lunghezza dei lati dello scudo.

\- APPROFONDIMENTO -

La soluzione offerta da Gherardi è assai discutibile: infatti, non è possibile che la lunghezza di un lato del triangolo equilatero equivalente sia maggiore della circonferenza del cerchio. Forse, Gherardi ha scambiato il *perimetro* dello scudo per un suo lato, omettendo di dividere per 3 il suo risultato:

lato = 1/3 * perimetro = 1/3 * (92 + 4/13) = 30 + 10/13 palmi.

Il diametro di una circonferenza è lungo

$$\text{diametro} = \frac{\text{circonferenza}}{\pi} = \frac{\text{circonferenza}}{\frac{22}{7}} = \frac{7 \cdot \text{circonferenza}}{22} = \frac{7 \cdot 40}{22} = 12 + \frac{8}{11} \text{ palmi}$$

.

L'area di un cerchio è data da

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{circonferenza}}{2} \cdot \frac{\text{diametro}}{2} =$$
$$= \frac{\text{circonferenza}}{2} \cdot \frac{\text{diametro}}{2 \cdot \pi} =$$
$$= \frac{\text{circonferenza}^2}{4\pi}$$
.

Sostituendo a π il valore approssimato (3 + 1/7) = 22/7, la formula precedente diviene

$$\text{Area cerchio} = \frac{40^2 \cdot}{4 \cdot \frac{22}{7}} = \frac{40^2 \cdot 7}{4 \cdot 22} = 127 + \frac{3}{11}\ \text{palmi}^2$$
.

L'area di un triangolo equilatero è data da

$$\text{Area}_{\text{triangolo equilatero}} = \frac{\text{lato} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \text{lato}^2}{4}$$
, da cui viene

$$\text{lato}^2 = \frac{4 \cdot \text{Area}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{Area}}{3}$$
.

Il lato del triangolo equilatero equivalente al cerchio è

$$\text{lato} = \sqrt{\frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{Area}}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(127 + \frac{3}{11}\right)}{3}} \cong 17{,}14\ \text{palmi}$$
.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura impiegata da Gherardi è sintetizzata con la formula che segue:

$$\text{lato triangolo} = 2 \cdot \text{circonferenza} \cdot \left(1 + \frac{2}{13}\right) =$$
$$= \frac{2 \cdot 15 \cdot \text{circonferenza}}{13} = \frac{30}{13} \cdot \text{circonferenza}$$
.

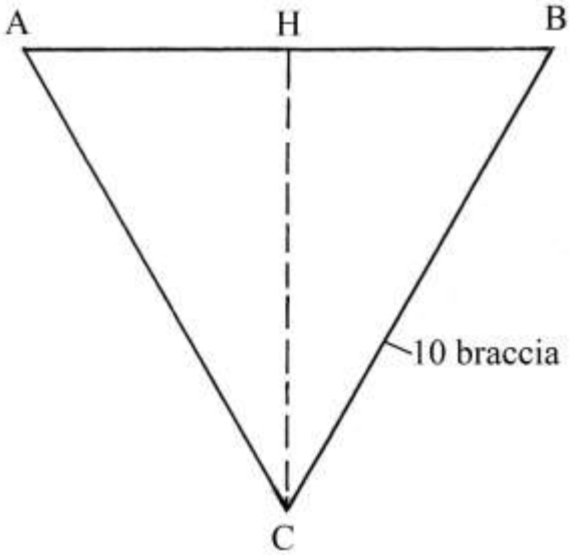
La presenza del coefficiente 30/13 rimanda forse alla formula approssimata di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo equilatero

Area = (13/30) * lato^2 ?

- -

Quadrato inscritto in un triangolo equilatero

Uno *scudo* (un triangolo equilatero) ha lati lunghi 10 braccia. Vi deve essere inscritto un quadrato:



Il problema chiede la lunghezza del lato del quadrato e la sua area.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato del triangolo per se stessa: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 2 la lunghezza di un lato: $10 : 2 = 5$;
* moltiplicare per se stesso: $5 * 5 = 25$;
* sottrarre dal quadrato del lato: $100 – 25 = 75$;
* estrarre la radice quadrata:

$\sqrt{75}$ braccia, lunghezza dell'altezza [CH] del triangolo;

* dividere per 2 l'altezza:

$$\frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{\frac{75}{4}}$$;

* moltiplicare per se stesso:

$$\sqrt{\frac{75}{4}} \cdot \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{75}{4} = 18 + \frac{3}{4}$$;

* sottrarre dal quadrato della metà di un lato: $25 – (18 + \frac{3}{4}) = 6 + \frac{1}{4}$;
* estrarre la radice quadrata:

$\sqrt{6 + \frac{1}{4}}$ braccia, lunghezza del lato del quadrato;

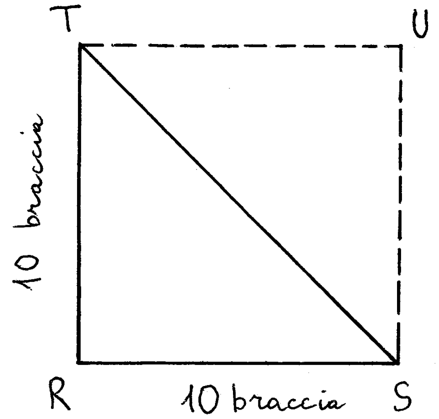
[a questo punto, l'Autore calcola l'area del quadrato moltiplicando 5, lunghezza di metà del lato del triangolo, per se stesso: $5 * 5 = 25$ braccia^2, ma il calcolo è errato perché aveva appena calcolato la lunghezza del lato del quadrato].

Sono omessi i successivi passaggi perché basati su dati e metodi errati.

Infine, l'Autore calcola l'area dello scudo che, ricordiamo, è un *triangolo equilatero*, moltiplicando la lunghezza di un lato per la sua metà:

Area scudo = lato * lato/2 = $10^2/2 = 50$ braccia^2.

La formula è errata perché un’altezza non è lunga quanto un lato. La formula è quella del calcolo dell’area di un triangolo rettangolo isoscele con cateti lunghi 10 braccia:

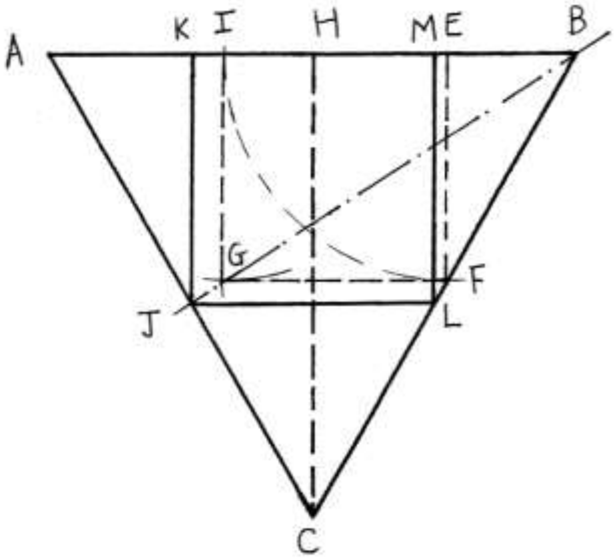


Forse, l’Autore ha per distrazione unito assieme due problemi.
Vediamo di chiarire la situazione con la scheda che segue.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Quadrato inscritto in un triangolo equilatero</u>

ABC è lo scudo a forma di triangolo equilatero con lati lunghi 10 braccia (come nel problema di Gherardi sopra presentato) e CH è una sua altezza:



Presentiamo una costruzione esatta per inscrivervi un quadrato.

Costruire un quadrato generico EFGI con *tre* soli vertici collocati sui lati del triangolo equilatero.

Tracciare la retta passante per i punti B e G: essa taglia il lato AC nel punto J.

Da questo ultimo punto disegnare due segmenti paralleli a HC e a AB: sono JK e JL.

Dal punto L elevare la parallela a HC e a JK: LM è il quarto lato del quadrato inscritto nel triangolo ABC.

Il triangolo equilatero è ora diviso in *quattro* poligoni:

* il quadrato JKML con lato di lunghezza *incognita*;
* il triangolo equilatero (per ragioni di similitudine con ABC)CJL che ha lati lunghi quanto quelli del quadrato;
* i due triangoli rettangoli AKJ e BML che hanno uguali dimensioni.

Questi ultimi hanno angoli di 30°, 60° e 90°:

* KAJ = MBL = 60° ;
* AKJ = BML = 90° ;
* AJK = MLB = 30°.

Fissiamo il valore incognito del lato del quadrato: JL = x. Ne consegue che

AJ = AC – JC = AC – x.

Il seno dell'angolo KAJ è dato da

$$\text{sen}\ K\hat{A}J = \frac{KJ}{AJ} = \frac{x}{AC-x}$$
.

Essendo questo angolo ampio 60°, il suo seno vale (√3)/2.

Il lato AC è lungo 10 braccia per cui vale la seguente relazione:

$$\frac{x}{10-x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
.

Sviluppando l'equazione risulta:

$$x = (10-x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 5\cdot\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x$$

$$x\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\cdot\sqrt{3}$$

$$x = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{10+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cong \frac{10\cdot 1{,}732}{2+1{,}732} \cong 4{,}641 \text{ braccia}$$

, lato del quadrato inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Calcoliamo le aree dei poligoni residuali contenuti in ABC.

Il triangolo equilatero JLC ha lati lunghi 4,641 braccia e la sua area è

$$\text{Area}_{JLC} = \frac{\text{lato}\cdot\text{lato}\cdot\sqrt{3}}{4} \cong 9{,}327 \text{ braccia}^2$$
.

I due triangoli rettangoli AKJ e BML hanno uguali dimensioni e aree identiche. L'area di AKJ è data da

$$\text{Area}_{AKJ} = \frac{AK\cdot KJ}{2}$$
.

I segmenti AK e MB sono lunghi AK + MB = AB – KM, da cui

$$AK = \frac{AB-KM}{2} = \frac{10-4{,}641}{2} = 2{,}6795 \text{ braccia}$$
.

L'area di AKJ è

$$\text{Area } AKJ = \frac{2{,}6795 \cdot 4{,}641}{2} \cong 6{,}218 \text{ braccia}^2$$

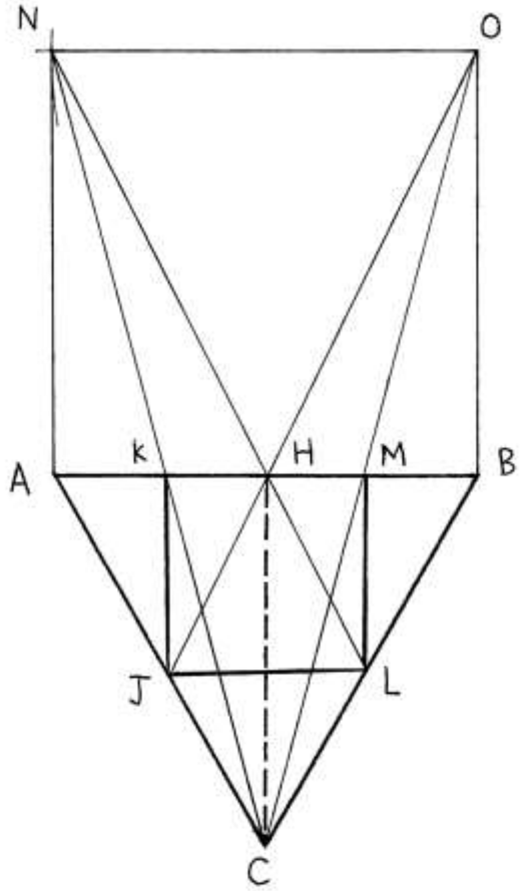
Gherardi calcola l’area di AKJ (e di BML) in (6 + ¼) braccia^2, con un risultato quasi corretto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il metodo grafico di Samuel Marolois

Il matematico e ingegnere olandese Samuel Marolois (1572 – 1627) propose una costruzione geometrica per l’inscrizione di un quadrato in un triangolo qualsiasi.

La figura che segue è un’applicazione del suo metodo:



ABC è il triangolo dato. Costruire un quadrato, ANOB, sul lato AB.

Dal punto C tracciare due segmenti fino ai vertici N e O: essi fissano i punti K e M.

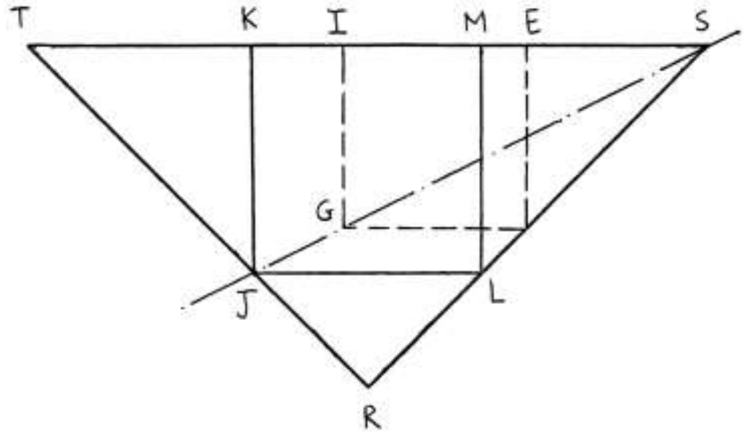
Dai vertici N e O disegnare due segmenti passanti per il punto H: essi tagliano i lati obliqui del triangolo nei punti J e L.

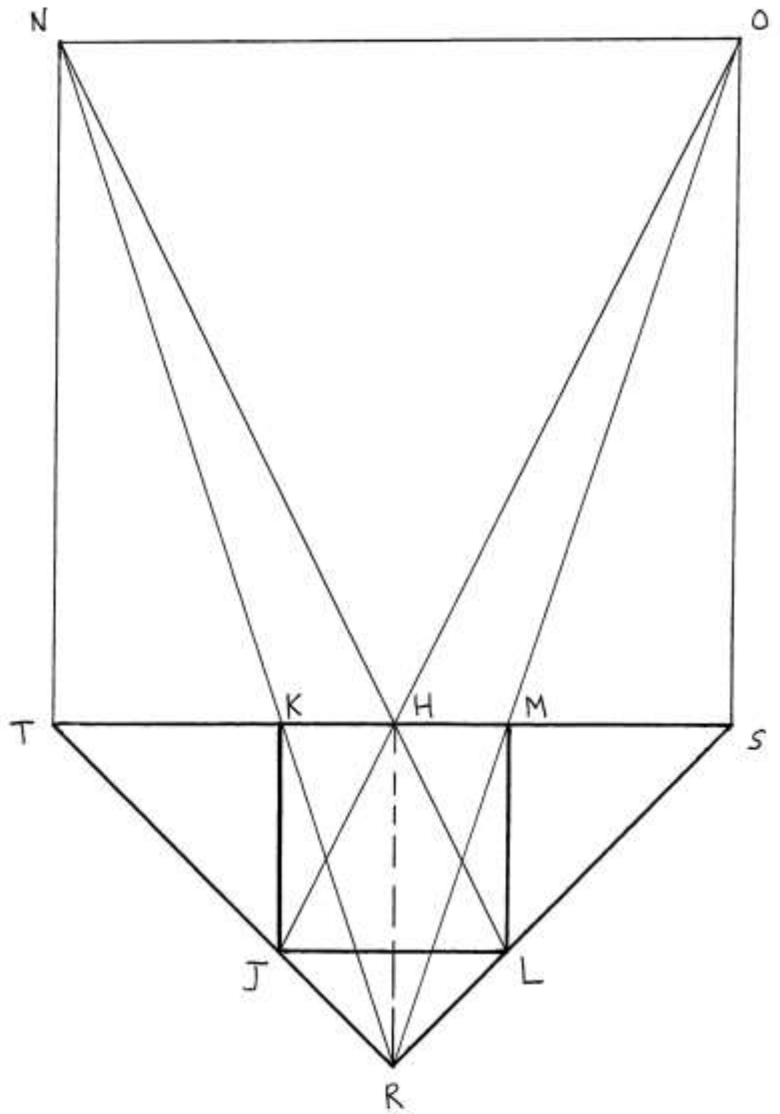
JKML è il quadrato inscritto cercato.

Il metodo di Marolois fornisce un risultato identico a quello ottenuto con la proma costruzione.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

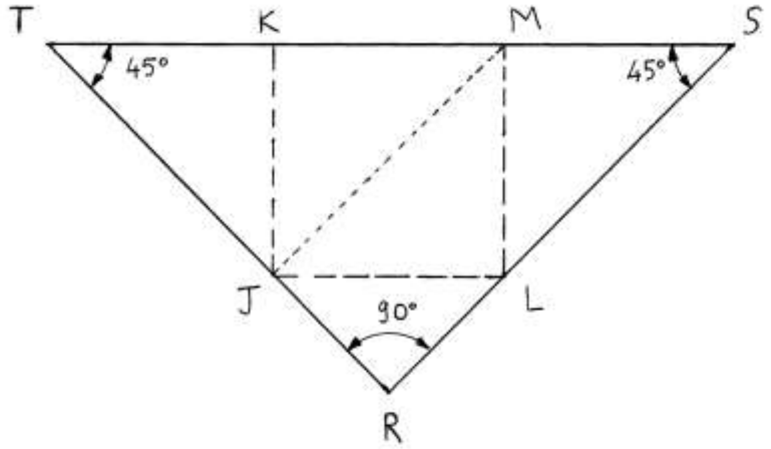
Non sempre questi due metodi forniscono la soluzione ottimale. Per dimostrare questa ipotesi, riprendiamo in considerazione il triangolo rettangolo isoscele visto alla fine del precedente paragrafo: i due metodi grafici inscrivono nel triangolo TSR un identico quadrato JKML, come mostrano le due figure che seguono:





Questo quadrato – JKML – non è quello più grande possibile e i due metodi non hanno validità generale, come dimostrano le due figure che seguono.

Nella figura qui sotto, è riprodotto il quadrato inscritto eliminando tutta la costruzione (primo o secondo metodo che siano): JM è una sua diagonale.



Sono pure indicati gli angoli interni del triangolo TSR.

Il quadrato è ora diviso nei due triangoli rettangoli isosceli KJM e JML che hanno uguali dimensioni.

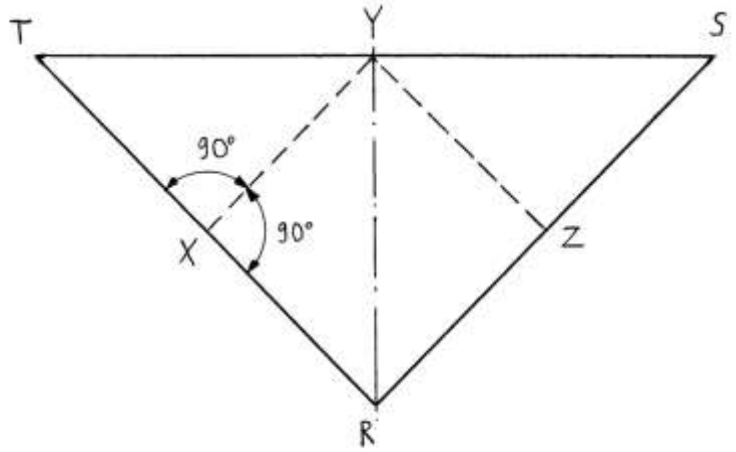
Il triangolo TKJ ha le stesse dimensioni di quello KJM (per conferma basta ruotare TKJ intorno al cateto KJ fino a sovrapporlo a KJM).

Inoltre, il triangolo rettangolo LMS è equivalente a quello JML.

Resta fuori da questa comparazione il triangolo rettangolo isoscele JLR.

La conclusione è ovvia: il quadrato JKML occupa un'area *inferiore* alla metà di quella di TSR.

Nella figura che segue abbiamo il solito triangolo rettangolo isoscele TSR nel quale è inscritto il quadrato XYZR:



La sua costruzione è semplice: dal vertice R condurre l'altezza a TS: è RY e Y è il punto medio dell'ipotenusa TS.

Dal punto Y disegnare due perpendicolari ai lati TR e SR: sono YX e YZ.

XYZR è un quadrato inscritto che viene diviso da RY in due triangoli rettangoli isosceli di uguali dimensioni: sono XYR e ZYR.

Il triangolo TYX ha le stesse dimensioni di quello XYR e la stessa relazione vige fra i triangoli YSZ e ZYR.

In conclusione, il quadrato XYZR ha superficie uguale alla metà di quella di TSR: questa costruzione offre un risultato migliore delle precedenti, perché XYZR occupa un'area maggiore di quella del quadrato JKML e l'area iniziale è meglio sfruttata.

- -

Quadratura di un cerchio

Alcuni paragrafi sono dedicati dall'Autore alla descrizione dei metodi di calcolo relativi al cerchio e alla sua quadratura. Ecco quelli descritti:

* circonferenza = (3 + 1/7) * diametro ;
*

$$\text{diametro} = \frac{\text{circonferenza}}{\left(3 + \frac{1}{7}\right)}$$;

*

$$\text{area cerchio} = \frac{\text{circonferenza}}{4} \cdot \text{diametro}$$;

* area del quadrato inscritto nel cerchio:
  Area quadrato = Area cerchio * (7/11) ;
* lato del quadrato inscritto in un cerchio:

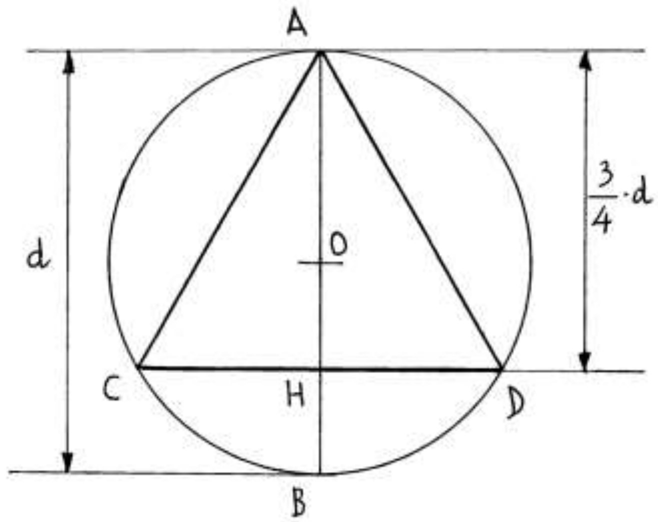
$$\text{lato} = \sqrt{\frac{7}{11} \cdot \text{area cerchio}}$$;

* are del cerchio inscritto in un quadrato inscritto nel primo cerchio:
  Area = (11/17) * area quadrato inscritto.

Poligoni inscritti in un cerchio

Il problema chiede di calcolare le lunghezze dei lati di diversi poligoni inscritti in un cerchio la cui circonferenza è lunga 44 *palmi*.

Nel caso del triangolo equilatero l'Autore calcola l'altezza [AH] nella figura che segue come i ¾ del diametro *d* del cerchio:



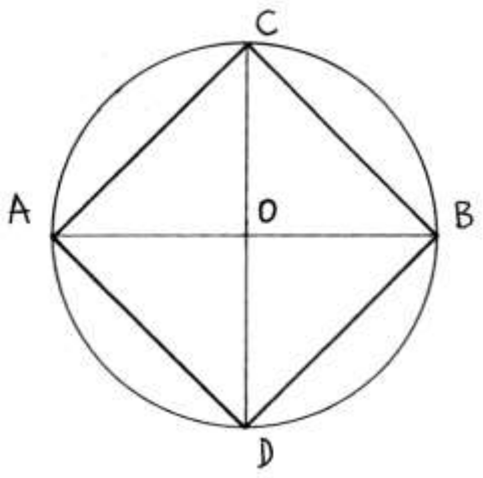
Per il punto H passa il lato orizzontale CD del triangolo equilatero:

AH = (3/4) * AB .

[La soluzione del problema si arresta a questo punto e Gherardi non fornisce la lunghezza dei lati del triangolo ACD].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso del quadrato inscritto, la lunghezza del lato viene calcolata in modo corretto:



* moltiplicare la lunghezza del diametro per se stessa;
* dividere per 2;
* estrarre la radice quadrata
  [Gherardi non fornisce dati, ma soltanto il metodo].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per i poligoni regolari con numero di lati maggiore di 4, l'Autore fornisce una serie di *costanti* per le quali occorre moltiplicare il diametro del cerchio e i risultati sono le lunghezze dei rispettivi lati.

Gherardi non effettua i calcoli: la tabella che segue è basata sul dato inziale della circonferenza lunga 44 palmi.

Il diametro è dato da

Diametro = circonferenza /(3 + 1/7) = 44/(3 + 1/7) = 14 palmi.

La tabella che segue contiene le *costanti* e le lunghezze dei lati (non calcolate dall'Autore):

poligoni	costante	lunghezza dei lati in palmi
pentagono	33/56 ≈ 0,589	8 + 1/4
esagono	½	7
ettagono	55/126 ≈ 0,4365	6 + 1/9
ottagono	109/280 ≈ 0,389	5 + 9/20

Nell'*esagono* inscritto il lato è lungo quanto il raggio del cerchio circoscritto e quindi la costante è correttamente pari a ½.

Oggi sono disponibili tabelle con costanti approssimate quasi esatte che forniscono la lunghezza dei lati dei poligoni regolari inscritti:

poligoni	costante riferita al raggio	costante riferita al diametro
pentagono	1,176	0,588
ettagono	0,868	0,434
ottagono	0,765	0,3825

I valori delle costanti usate da Gherardi sono sostanzialmente corretti.

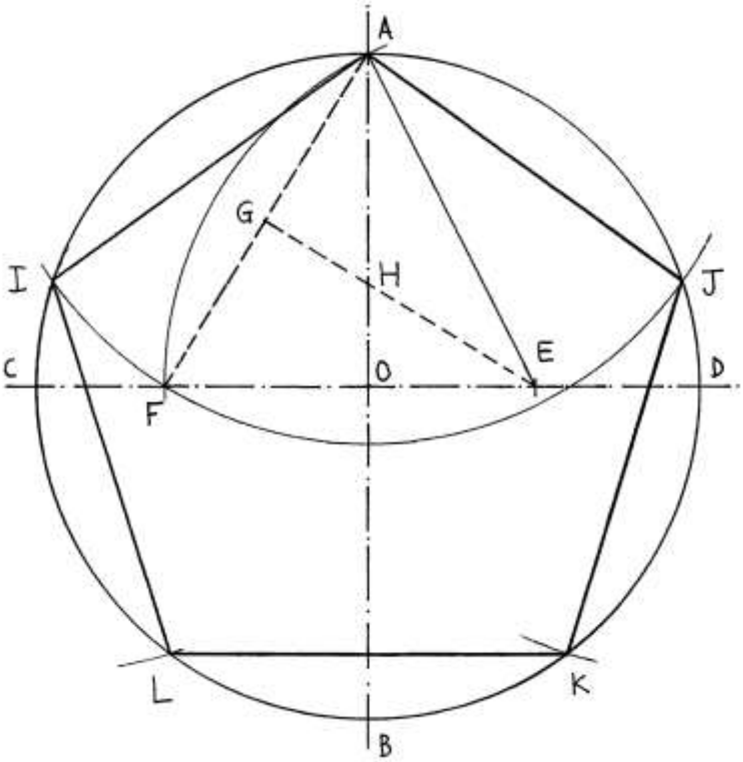
Pentagono inscritto in un cerchio

In un cerchio di diametro 16 braccia deve essere disegnato il più grande possibile poligono con 5 lati e cioè un *pentagono*, termine che Gherardi non usa mai nella descrizione di questo problema.

È chiesta la lunghezza del lato del pentagono.

Il testo del problema è piuttosto contorto: ad esempio è usato il termine *palmi* per indicare i lati (o *faccie* nel toscano dell'epoca). L'uso errato di questo termine è fonte di confusione perché il *palmo* era un'unità di misura della lunghezza equivalente a mezzo braccio fiorentino da panno.

La figura che segue presenta la tradizionale costruzione dovuta a Tolomeo e ad essa si fa riferimento nella risoluzione di questo problema. Il segmente EG è un'altezza del triangolo isoscele EAF ed è relativa alla base AF.



La procedura risolutiva è la seguente:

* dividere per 2 il diametro: 16 : 2 = 8 braccia;
* moltiplicare per se stesso: 8 * 8 = 64 ;
* dividere la lunghezza del raggio per 2: 8 : 2 = 4 ;
* moltiplicare per se stesso: 4 * 4 = 16 ;
* sommare i due quadrati: 64 + 16 = 80 ;
* estrarre la radice quadrata: √80.

A questo punto è necessario chiarire il significato dei passi finora descritti.

AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari. Fissare il punto medio del raggio OD: è E. Il diametro del cerchio è 16 braccia e il raggio, OA = OD, è lungo 8 braccia. I segmenti OE e ED sono entrambi lunghi 4 braccia.

Tracciare il segmento AE. Esso è lungo

$$AE = \sqrt{OA^2 + OE^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

Fare centro nel punto E e con raggio AE tracciare un arco da A fino a intersecare il diametro orizzontale nel punto F.

Collegare i punti A e F con un segmento che è la lunghezza del *lato del pentagono*.

L'uso del compasso è *simulato*: il diametro di 16 braccia equivale a

58,3626 * 16 = 933,8 cm = 9,338 m.

Con queste dimensioni in campo era impossibile avere a disposizione un compasso così grande: esso veniva sostituito con una corda ben tesa.

Occorre ora calcolare la lunghezza del lato AF. Il segmento OF è lungo:

$$OF = FE - OE = \sqrt{80} - 4.$$

Il lato AF è dato da

$$AF^2 = AO^2 + OF^2 = 8^2 + (\sqrt{80} - 4)^2$$ da cui

$$AF = 4 \cdot \sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}} \cong 9{,}4045 \text{ braccia},$$ lunghezza dei lati del pentagono.

Gherardi suggerisce un ulteriore passaggio: condurre la perpendicolare dal punto E fino a incontrare in G la corda AF: EG taglia in H il raggio OA e il segmento EH è lungo la *metà* del lato del pentagono inscritto.

È bene notare che la precedente figura non è contenuta nel manoscritto originale: è sta qui inserita per facilitare la comprensione della procedura attivata da Gherardi.

Usando la costante di Gherardi per calcolare la lunghezza del lato si ha:

lato pentagono = costante * diametro cerchio ≈ (33/56) * 16 = 9 + 3/7 ≈ 9,4286 braccia, valore assai prossimo a quello sopra ricavata per via aritmetica.

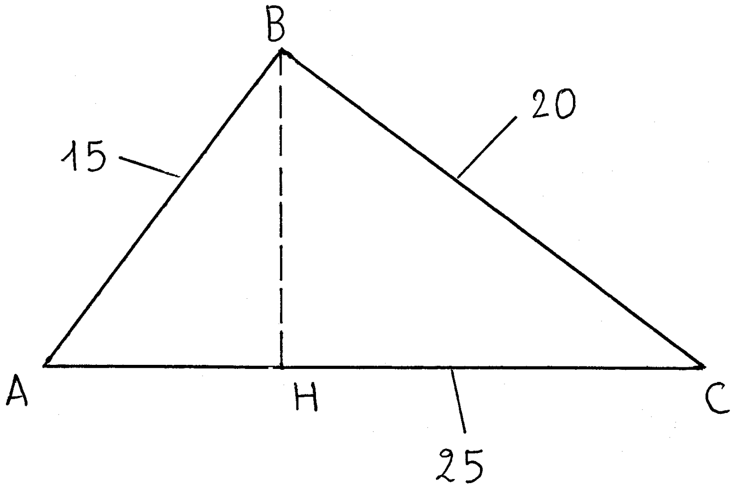
Con la moderna costante, la lunghezza del lato è:

lato pentagono = costante * raggio cerchio ≈ 1,176 * 8 ≈ 9,408 braccia .

AJKLI è il pentagono inscritto nel cerchio (*tondo* nella lingua dell'Autore).

Triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ha lati lunghi 15, 20 e 25 *unità* [in alcuni casi Gherardi non indica alcuna unità di misura: qui e in seguito è indicata la generica espressione *unità* di misura].



Il problema chiede la lunghezza dell'altezza (lo *stendacolo*) tracciata dal vertice [B] opposto al lato più lungo, 25 unità [AC].

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato maggiore [AC] per se stessa: 25 * 25 = 625 ;
* moltiplicare la lunghezza del lato intermedio [BC] per se stessa: 20 * 20 = 400 ;
* sommare i due quadrati: 625 + 400 = 1025 ;
* moltiplicare la lunghezza del lato più corto [AB] per se stessa: 15 * 15 = 225 ;
* sottarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due: 1025 – 225 = 800 ;
* moltiplicare per 2 la lunghezza del lato [AC] sul quale cade l'altezza [BH]: 25 * 2 = 50 ;
* dividere 800 per 50: 800 : 50 = 16, lunghezza della proiezione [HC] del lato intermedio [BC] sulla base [AC];
* sottrarre la lunghezza di [HC] da quella del lato più lungo [AC]: 25 – 16 = 9, lunghezza della proiezione [AH] del lato più corto [AB];
* moltiplicare la lunghezza del lato più corto [AB] per se stessa: 15 * 15 = 225 ;
* moltiplicare la lunghezza della proiezione di [AB] per se stessa: 9 * 9 = 81 ;
* sottrarre 81 da 225: 225 – 81 = 144 ;
* estrarre la radice quadrata: √144 = 12, altezza [BH].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Gherardi ha applicato le formule elaborate da Erone per calcolare le lunghezze delle proiezioni dei lati inclinati sul terzo lato.

Le formule applicate al triangolo ABC sono:

a) $HC^2 = AC^2 + BC^2 – AB^2$ da cui

$$HC = \sqrt{AC^2 + BC^2 - AB^2}$$

b) $AH^2 = AB^2 + AC^2 – BC^2$ da cui

$$AH = \sqrt{AB^2 + AC^2 - BC^2}$$

Infine, per calcolare l'altezza [BH] Gherardi applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo [ABH]:

$BH^2 = AB^2 – AH^2$ da cui

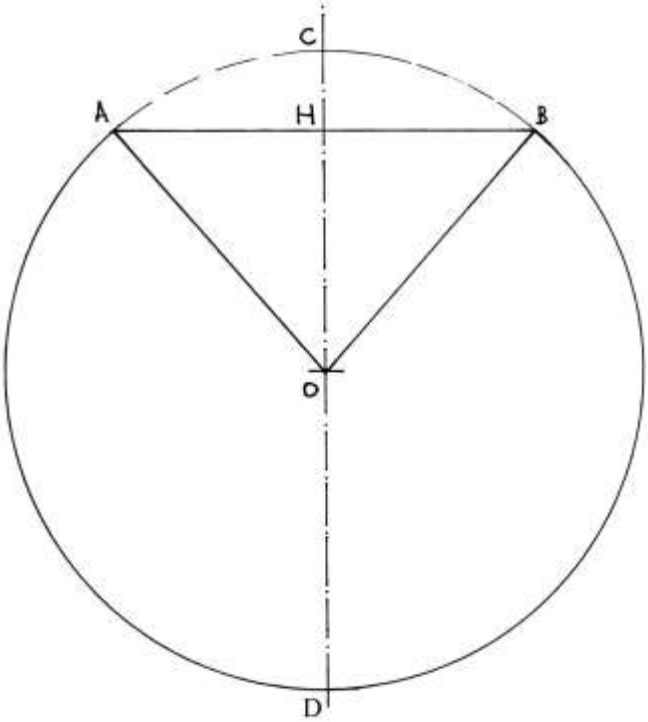
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$$.

Nota: il triangolo 15-20-25 è *rettangolo* e le lunghezze dei suoi lati formano una terna pitagorica *derivata* ottenuta moltiplicando per *cinque* i componenti della terna pitagorica *primitiva* 3-4-5.

Cerchio sezionato

Un cerchio ha diametro lungo 14 *unità*: è stato tagliato un segmento circolare che ha freccia [CH] lunga 2 unità.

Per chiarire la situazione è utile riferirsi allo schema della figura che segue:



AB è la corda che taglia il cerchio. OA e OB sono due raggi.

OAH e OBH sono due triangoli rettangoli.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza della corda [AB].

La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del raggio [OA] per se stessa: 7 * 7 = 49 ;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza di [HO = CO – CH = 7 – 2 = 5]: 5 * 5 = 25 ;
* sottrarre l'ultimo quadrato dal precedente: 49 – 25 = 24 ;
* moltiplicare per 4: 24 * 4 = 96 ;
* estrarre la radice quadrata: √96, lunghezza della corda [AB].

La procedura è riassunta nella formula

$$\text{corda} = \sqrt{4 \cdot \left[\text{raggio}^2 - (\text{raggio} - \text{freccia})^2 \right]}$$.

- APPROFONDIMENTO -

Paolo Gherardi ha applicato alla soluzione del problema il *teorema delle corde*.

Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nella stessa circonferenza e si intersecano ad angolo retto nel punto H, tagliando in due parti uguali la corda AB.

I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) formano i *medi* e i due segmenti dell'altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:

$$\underbrace{CH : \underbrace{AH = HB}_{\text{medi}} : HD}_{\text{estremi}}$$

Dato che AH e HB hanno uguale lunghezza, la proporzione può essere scritta come segue:

CH : AH = AH : HD , da cui

$AH^2 = CH * HD = 2 * (14 – 2) = 2 * 12 = 24$.

La semicorda AH vale:

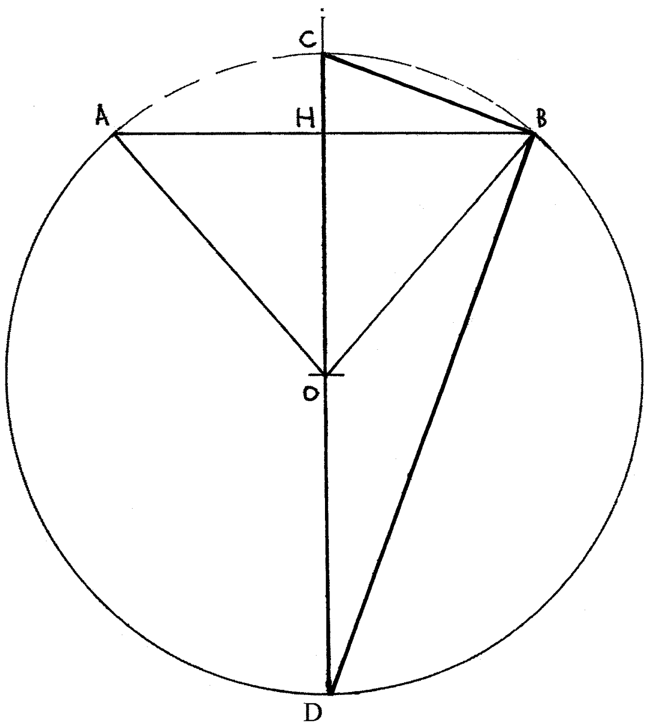
$AH = \sqrt{24}$;

$AB = 2 * AH = 2 * \sqrt{24} = \sqrt{4 * 24} = \sqrt{96}$ che è lo stesso risultato ricavato da Gherardi con la sua procedura.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo teorema di Euclide

In questo caso particolare le corde AB e CD si intersecano ad angolo retto: CD è un diametro del cerchio. L'impiego del *teorema delle corde* può essere sostituito con l'applicazione del *2° teorema di Euclide*.



Il triangolo CBD è rettangolo perché è inscritto in una semicirconferenza e CD è la sua ipotenusa.

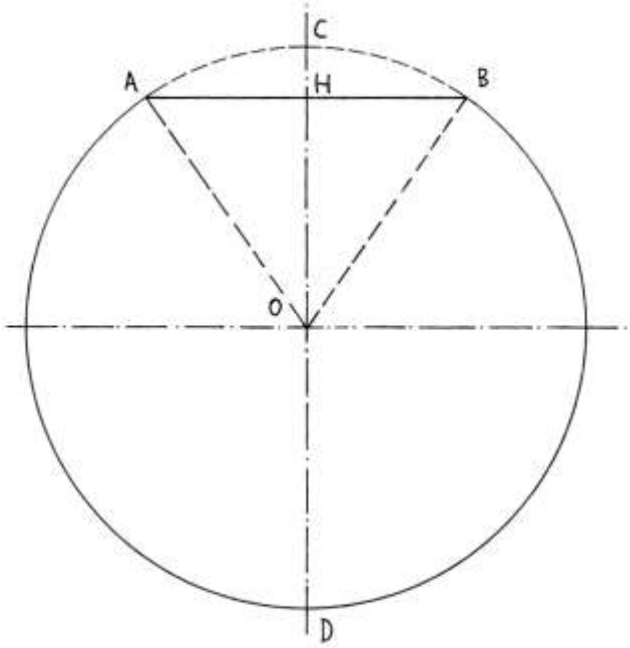
Per il secondo teorema di Euclide relativo ai triangoli rettangoli, l'altezza HB (che è metà della corda AB) è *medio proporzionale* fra le lunghezze delle proiezioni (CH e HD) dei cateti (CB e BD) sull'ipotenusa CD:

CH : HB = HB : HD, proporzione che riproduce quella già ricavata con l'applicazione del teorema delle corde.

- -

<u>Altro cerchio sezionato</u>

Un cerchio ha diametro [CD] lungo 14 *unità* e viene tagliato un *segmento circolare* che ha corda [AB] lunga 8:



Il problema chiede di calcolare la distanza del punto medio della corda [H] dal centro del cerchio [O].

La procedura è la seguente:

*	dividere per 2 il diametro:	14 : 2 = 7 ;
*	moltiplicare il raggio per se stesso:	7 * 7 = 49 ;
*	dividere per 2 la lunghezza della corda:	8 : 2 = 4 ;
*	moltiplicare per se stesso:	4 * 4 = 16 ;
*	sottrarre l'ultimo quadrato dal precedente:	49 – 16 = 33 ;
*	estrarre la radice quadrata:	√33, lunghezza del segmento [HO].

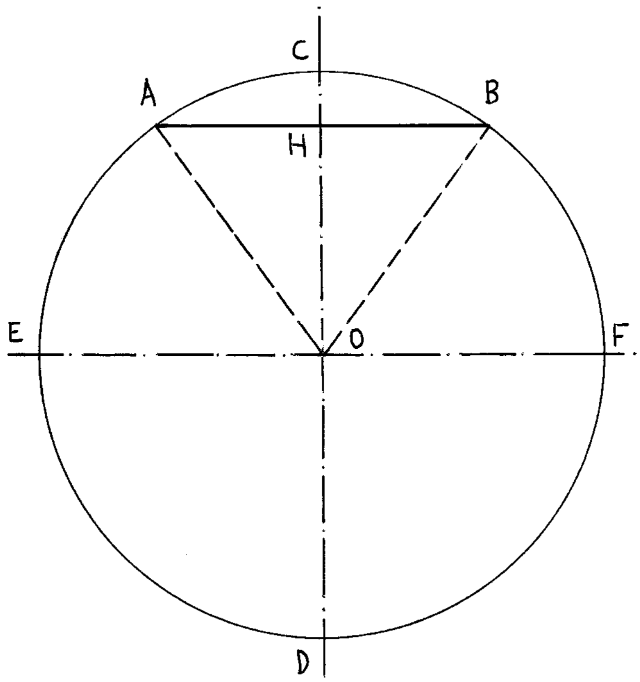
Nella soluzione, Gherardi ha applicato il teorema di Pitagora a uno dei triangoli rettangoli [OAH[oppure [OBH].

<u>Segmento circolare</u>

Un cerchio ha la circonferenza lunga 200 *unità*: ne viene tagliata una lunghezza di 40 unità, ma l'Autore non precisa se questa sia l'arco [ACB] o la corda [AB].

Gino Arrighi segnala la presenza di uno "*spazio in bianco*" nel testo che rende difficile la sua comprensione.

La figura che segue è in scala e opta per la corda [AB] lunga 40 unità.



La procedura impiegata è la seguente (o almeno la parte che è stata trascritta da Gino Arrighi):

* dividere per 2 la lunghezza della corda: 40 : 2 = 20 ;
* dividere per 2 la lunghezza delle circonferenza: 200 : 2 = 100 ;
* moltiplicare per se stesso: 100 * 100 = 10 000 ;
* moltiplicare 20 per se stesso: 20 * 20 = 400 ;
* sottrarre l’ultimo quadrato dal primo: 10 000 – 400 = 9 600 ;
* estrarre la radice quadrata: √9600 ;
* sottrarre dalla semicirconferenza: (100 – √9600) ≈ 2,0204 unità, lunghezza della freccia [CH].

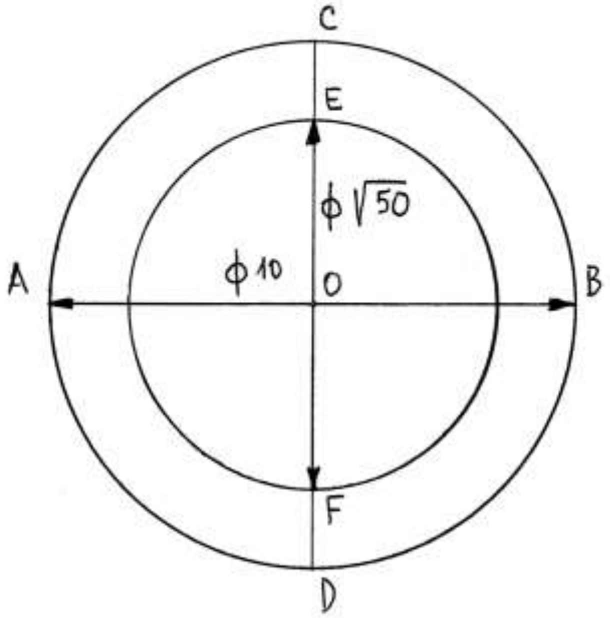
Dato che, come già spiegato in precedenza, il disegno è in scala, è evidente che la freccia CH è assai più lunga di quanto appena ricavato da Gherardi. La situazione cambierebbe di poco ritenendo la lunghezza di 40 unità attribuibile all’arco ACB.

La procedura impiegata da Gherardi è riassunta nella formula che segue:

$$\text{freccia} = \frac{\text{circonferenza}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\text{circonferenza}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{corda}}{2}\right)^2}\ .$$

Un cerchio da dividere

Un *pane di cera* del diametro di 10 *unità* deve essere diviso fra due uomini in parti uguali di forma circolare:



Il problema chiede di calcolare lo spessore di ciascuna parte.

Esso è stato riproposto nel "*Trattato d'Aritmetica*" di Paolo dell'Abbaco (1282 – 1374), con le stesse dimensioni: egli misura in *braccia* mentre Gherardi trascura l'unità di misura. Infine, Paolo dell'Abbaco non specifica la natura del materiale, limitandosi a dire che si tratta di una *ruota*.

La procedura di Gherardi – pur se abbastanza contorta – contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro per se stesso: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 4: $100 : 4 = 25$;
* sottrarre da 100: $100 – 25 = 75$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{75}$ [non si capisce a cosa serve questo dato];
* dividere per 2 il quadrato del diametro: $100 : 2 = 50$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{50} \approx 7{,}071$ diametro del cerchio interno che separa le due parti [nella figura è EF].

Ad un socio va la corona circolare che ha spessore

$EC = (CD – EF)/2 = (10 – \sqrt{50})/2$ [che Gherardi non calcola] e all'altro socio va il cerchio di raggio OE e cioè

$OE = EF/2 = (\sqrt{50})/2$.

Le due figure circolari, la corona esterna e il cerchio interno, hanno la stessa area, pari a metà di quella dell'intera ruota.

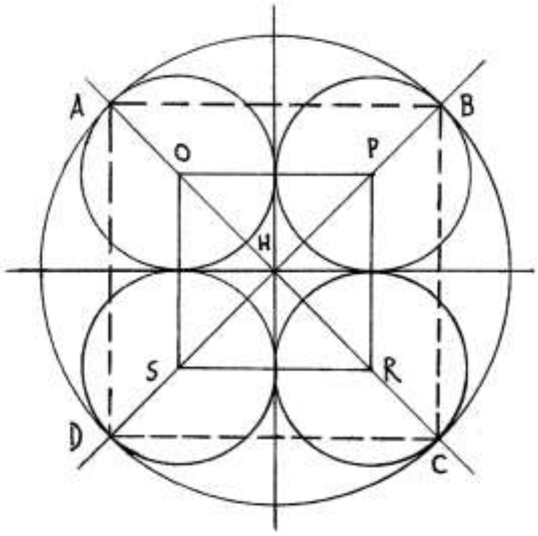
Infatti, l'area di un cerchio è proporzionale al *quadrato* del suo diametro:

Area cerchio AB : Area cerchio CD = $10^2 : (\sqrt{50})^2 = 100 : 50 = 2 : 1$.

I risultati di Paolo Gherardi e di Paolo dell'abbaco sono identici.

Cerchi inscritti in un cerchio più grande

Un cerchio ha diametro 14 *unità*: devono esservi inscritti quattro cerchi di uguale diametro.



Gherardi calcola il diametro dei quattro cerchi inscritti in 5/22 di quello del cerchio esterno:

OP = (5/22) * AC = (5/22) * 14 = 35/11 = 3 + 2/11.

La figura mostra i due diametri AC e BD che si intersecano perpendicolarmente nel centro H: i quattro cerchi interni sono tangenti fra loro e con la circonferenza del cerchio circoscritto.

I quattro centri – O, P, R e S – formano un quadrato che ha lati lunghi quanto i loro diametri.

Il diametro AC è scomposto in *quattro* segmenti:

AC = AO + OH + HR + RC.

AO e RC sono due raggio dei cerchi inscritti: AO = RC.

OH e HR sono le diagonali di due quadrati che hanno lati lunghi quanto il raggio OA:

OH = OA * √2 .

Di conseguenza, il diametro AC è lungo

AC = 2 * OA + 2 * OA * √2 = 2 * OA * (1 + √2).

Da questa formula è possibile ricavare la lunghezza di OA:

$$OA = \frac{AC}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{14}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{7}{1+\sqrt{2}} \cong \frac{7}{2{,}4142} \cong 2{,}9$$

Il rapporto fra il diametro dei quattro cerchi inscritti e quello del cerchio circoscritto è:

$$\frac{1}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cong 0{,}207$$

, risultato inferiore a quello fissato da Gherardi

5/22 ≈ 0,227 .

- APPROFONDIMENTO -

Forse, questo problema costituisce il primo esplicito tentativo rivolto ad affrontare il noto *problema di Malfatti* (dal nome del matematico italiano Gian Francesco Malfatti, 1731-1807) che lo definì.

Si tratta di problemi di ottimizzazione per ottenere il più efficiente utilizzo dei materiali.

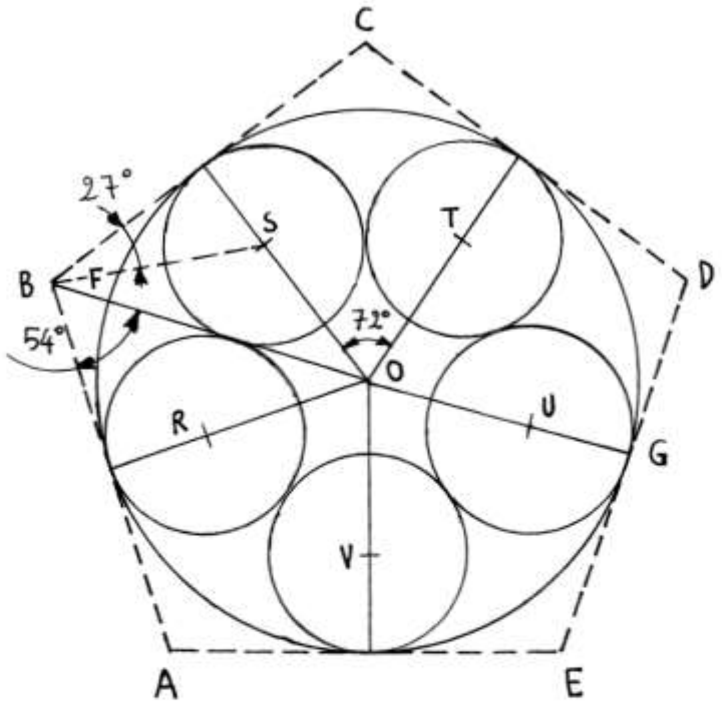
- -

Cerchi inscritti in un cerchio

Il problema non è esattamente definito perché nel manoscritto vi è uno *spazio in bianco*, correttamente segnalato da Gino Arrighi nella sua trascrizione.

Un cerchio ha diametro lungo 14 *unità* e deve essere diviso in *cinque* parti.

Le soluzioni possibili sono almeno due: la *prima* è mostrata nella figura che segue:



FG è il diametro del cerchio esterno lungo 14 unità e O è il suo centro.

I punti R, S, T, U e V sono i centri dei cinque cerchi inscritti e tangenti.

Usando la trigonometria, il raggio UG è lungo

$$UG = \frac{\text{raggio cerchio}}{tg\,54°} \cdot tg\,27° \cong 0{,}37 \cdot \text{raggio cerchio}$$

.

Essendo noto il raggio OG, che è lungo 7, sostituendo nella formula precedente si ha:

UG ≈ 7 * 0,37 ≈ 2,59 unità.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La *seconda* soluzione è descritta di seguito.

L’area del cerchio di partenza è data da

Area = (circonferenza/2) * (diametro/2) .

Il diametro [AB] è indicato con *D* e la formula diviene:

$$\text{Area cerchio} \cong \frac{22}{7} \cdot \frac{D^2}{4} \cong \frac{11}{14} \cdot D^2$$

.

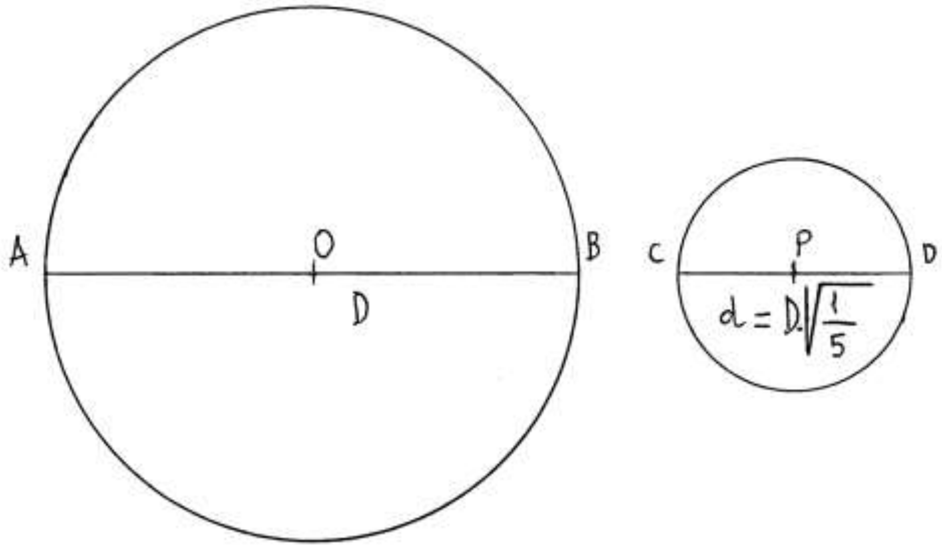
I cinque più piccoli cerchi hanno aree uguali a 1/5 di quella del cerchio di partenza e cioè:

$$\text{Area piccolo cerchio} = \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{14} \cdot D^2$$

.

L’area di un piccolo cerchio di diametro *d* è data da:

$$\text{Area piccolo cerchio} = \frac{11}{14} \cdot d^2$$



Uguagliando i due dati è possibile ricavare l’incognita *d* (e cioè CD):

$$d = D \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cong 14 \cdot 0,4472 \cong 6,26 \text{ unità}$$

.

La figura mette a confronto, nella stessa scala, il cerchio originario (a sinistra) e uno dei cinque cerchi più piccoli (a destra).

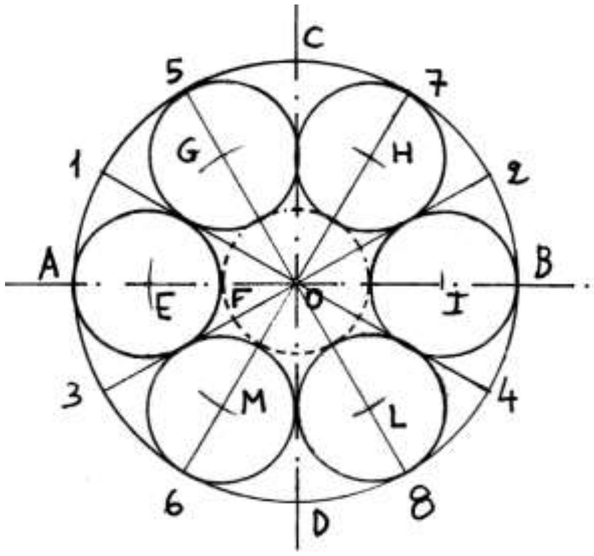
Sei cerchi inscritti in un cerchio

Un problema è descritto con il seguente periodo, estremamente sintetico:

"*Et fare d'uno ritondo 6 parte, ciascuno volge lo terzo del magiore di sopra che, se 'l magiore volge 30, ciascuno volgere 10…*".

Ritondo sta per "cerchio".

Con questi pochi dati sembra ragionevole descrivere la soluzione mostrata nella figura che segue:



Il cerchio di partenza ha la circonferenza lunga 30 unità: AB e CD sono due diametri perpendicolari che si intersecano nel centro O.

I diametri 1-4, 2-3, 5-8 e 6-7 dividono la il cerchio e la circonferenza in 12 parti uguali.

Dividere in *tre* parti uguali il raggio OA: i punti E e F sono fra loro a distanza uguale a AE e a FO.

Con centro in O e raggio OE disegnare degli archi che tagliano i diametri nei punti G, H, I, L e M: essi sono i centri dei *sei* cerchi fra loro tangenti.

In teoria, esiste un *settimo* cerchio che ha il suo centro in O e sempre con raggio lungo 1/3 di OA: nella figura è disegnato *tratteggiato*.

Una circonferenza ha lunghezza proporzionale al suo raggio. Chiamando *c* la circonferenza di raggio OA e *R* il suo raggio e *k* la circonferenza di raggio *r*, i loro rapporti sono in proporzione:

c : R = k : r   da cui   c : k = R : r .

Ma

$$r = \frac{1}{3} \cdot R$$

per cui

$$K = \frac{c \cdot r}{R} = \frac{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot R}{R} =$$

$$= \frac{30}{3} = 10$$

, lunghezza della circonferenza dei sei più piccoli cerchi.

La soluzione di Gherardi è corretta.

Pentagono

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del "*dricto meçço*" e cioè l'altezza da un vertice al punto medio del lato opposto di un pentagono (che si presume regolare).

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: lato * lato = $lato^2$;
* dividere per 4: $lato^2/4$;
* sottrarre dal primo quadrato: $lato^2 - lato^2/4 = (3/4) * lato^2$;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot lato^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot lato$$

.

Il trattato fornisce un esempio di applicazione della procedura: un pentagono ha lati lunghi 6 unità.

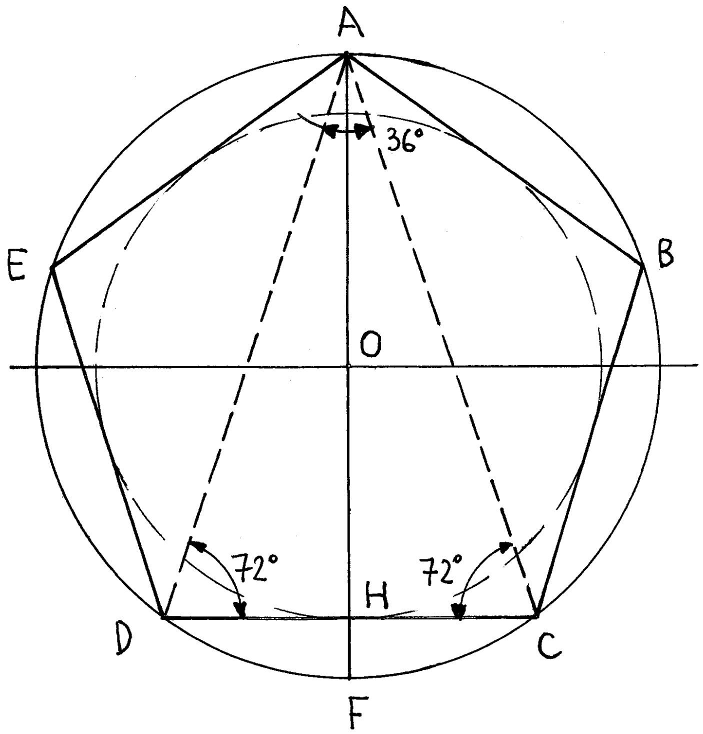
Applicando questo dato alla procedura si hanno i seguenti risultati:

* lato * lato = 6 * 6 = 36;
* dividere per 4: 36 : 4 = 9 ;
* sottrarre da 36: 36 – 9 = 27 ;
* estrarre la radice quadrata: √27, lunghezza dell'"altezza" del pentagono.

La procedura di Paolo Gherardi è *errata*.

------------------------- APPROFONDIMENTO -------------------------

La figura che segue contiene il pentagono ABCDE inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA:



AF è il diametro verticale.

Il segmento AH è formato dal *raggio* AO e dall'*apotema* OH.
È utile ricordare che l'*apotema* è il raggio del cerchio inscritto nel pentagono, la cui circonferenza disegnata tratteggiata.

AH è l'*altezza* del pentagono calcolata da Gherardi, ma è anche l'altezza del triangolo DAC: gli angoli ADC e ACD hanno entrambi ampiezza di 72° e l'angolo DAC è ampio 36°. Il triangolo DAC è *isoscele* e non equilatero.

AD e AC sono due *diagonali* del pentagono e sono lunghe

AD = DC * Φ , dove Φ è il *numero aureo* che vale 1,618 …

Consideriamo il triangolo rettangolo ADH: l'angolo DAH è ampio la metà di DAC e cioè 18°. La tangente di questo angolo è data dal rapporto fra i cateti DH e AH:

$$tg\ \widehat{DAH} = \frac{DH}{AH}$$

Da questa formula ricaviamo AH:

$$AH = \frac{DH}{tg\ \widehat{DAH}} = \frac{\frac{lato}{2}}{tg\ 18°} \cong \frac{\frac{lato}{2}}{0{,}3249} \cong 1{,}5389 \cdot lato \cong 1{,}5389 \cdot 6 \cong 9{,}234$$

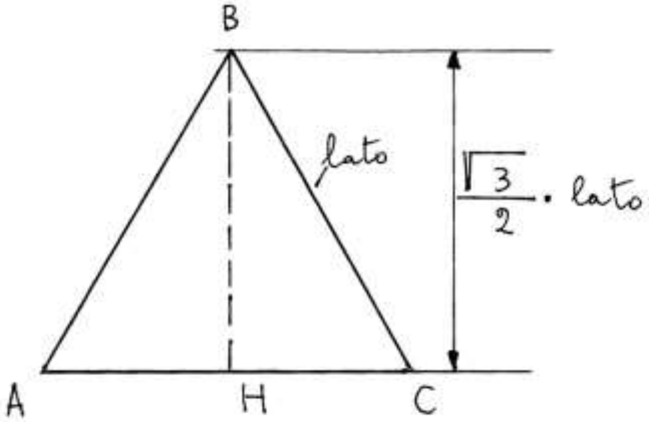
Il risultato è maggiore di quello calcolato da Gherardi, √27 ≈ 5,196.

L'*apotema* OH del pentagono è oggi calcolata moltiplicando la lunghezza del lato per il relativo numero fisso *f*:

apotema pentagono ≈ lato * f ≈ lato * 0,688.

Probabilmente, Gherardi ha ritenuto che il triangolo isoscele DAC fosse *equilatero*: nel caso del triangolo equilatero, l'altezza è lunga

altezza = (√3)/2 * lato .



- -

LIBER HABACI

Nota: mentre nel "*Libro di ragioni*" sono usate le cifre indoarabiche, nel "*Liber habaci*" sono impiegate le cifre romane.

Una curiosità: nel caso di numeri romani che contengono una successione di "I" (scritti con la lettera minuscola "i" nella trascrizione di Gino Arrighi), l'ultimo a destra è scritto "j" invece di "i".

Nei paragrafi che seguono le cifre romane sono convertite nelle equivalenti cifre indo-arabiche.

Le unità di misura della superficie di Firenze

Un paragrafo del "*Liber habaci*" è riservato all'illustrazione delle untà di misura usate per i terreni a Firenze:

* 1 staioro = 144 pugnora ;
* 1 panora (o panoro) = 12 pugnora ;
* 1 pugnora = 12 braccia^2 a terra ;
* 1 staioro = 1728 braccia^2 a terra ;
* 1 staioro = 6912 piedi^2 ;
* 1 panoro = 144 piedi^2.

- APPROFONDIMENTO -

Nei due studi su Palazzo Vecchio, citati in bibliografia, Maria Teresa Bartoli afferma che le unità di misura dei terreni usate a Firenze nel Medioevo siano state influenzate da quelle impiegate a Pisa e descritte da Leonardo Fibonacci nel suo "*Practica Geometriae*".

L'unità fondamentale a Pisa era la *pertica quadrata*, un quadrato con lato lunga 1 *pertica*, equivalente alla lunghezza di 6 *piedi lineari*.

Il *piede quadrato* corrispondeva a un rettangolo con lati lunghi 6 e 1 piedi e quindi valeva 1/6 della pertica quadrata.

Il quadrato con lato lungo 1 piede era chiamato *denaro quadrato* e corrispondeva a 1/36 della pertica quadrata.

Il multiplo *staioro* venne fissato da Fibonacci pari a 66 pertiche quadrate.

La *scala* equivaleva a 4 pertiche quadrate e il *panoro* a 5,5 pertiche quadrate.

Di conseguenza il panoro valeva (5,5/66) e cioè 1/12 dello staioro.

Nel 1494, Luca Pacioli nella "*Summa de Aritmetica et Geometria, Proporzioni et Proporzionalità*" descrisse le unità di misura dei terreni in uso nelle campagne della Toscana e in quelle di Firenze in particolare: egli sostenne che la base del sistema di misura era sul *braccio da terra*, equivalente a 17/18 della lunghezza del *braccio da panno* e, come già indicato all'inizio di questo articolo, era lungo (17/18) * 58,3626 ≈ 55,1202 cm.

Sempre a Firenze, il *braccio quadrato* era l'area di un quadrato di lato 1 braccio.

I multipli del braccio quadrato erano:

* staioro = 1728 (= 12^3) braccia quadrate;
* 1 staioro = 12 panori; 1
* 1 panoro = 144 (= 12^2) braccia quadrate;
* 1 panoro = 12 pugnori;
* 1 pugnoro = 12 braccia quadrate.

Infine, lo staioro equivaleva a
$(17/18)^2 * 1728 = 1541,33$ braccia da panno quadrate.

La tabella che segue contiene un più ampio riepilogo delle unità di misura pisane ed è ricavata da pagina 18 de “*La pratica di geometria*” trascritta da Gino Arrighi e citata in bibliografia:

MISURE PISANE

Misure lineari.

1 pertica = 6 piedi
1 piede = 18 once
1 oncia = 18 punti

Misure superficiali.

pertica superficiale = pertica × pertica
piede superficiale = piede × pertica
denaro di misura = piede × piede

---

1 scala = 4 pertiche superficiali
1 panoro = 5 1/2 pertiche superficiali
1 staioro = 66 pertiche superficiali
1 moggioro = 24 staiora
1 soldo di misura = 12 denari di misura

---

1 staioro = 12 panora
1 staioro = 16 1/2 scale
1 pertica superficiale = 36 denari di misura
1 pertica superficiale = 3 soldi di misura
1 pertica superficiale = 6 piedi superficiali
1 piede superficiale = 6 denari di misura
1 scala = 12 soldi di misura
1 staioro = 198 soldi di misura

---

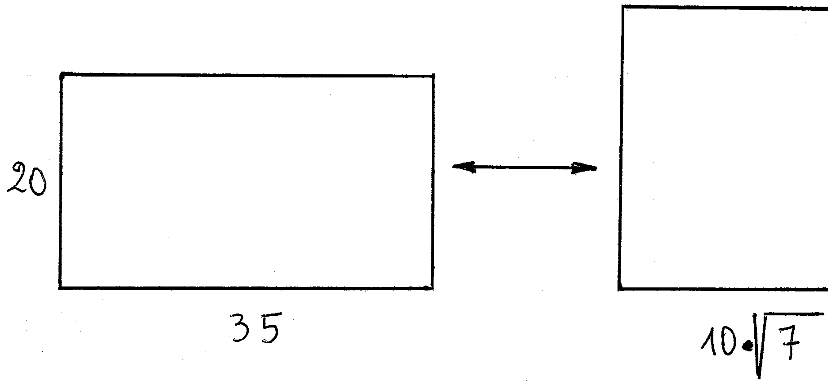
oncia × oncia = 1/18 1/18 di denaro di misura
oncia × piede = 1/18 di denaro di misura
oncia × pertica = 1/3 di denaro di misura

- -

Quadratura di un bislungo

Un rettangolo deve essere convertito in un quadrato; il metodo è semplice: moltiplicare la lunghezza per la larghezza e estrarre la radice quadrata del risultato, operazione che fornisce il lato del quadrato equivalente.

Un terreno è lungo 35 braccia ed è largo 20. Il problema domanda la lunghezza del lato del quadrato equivalente.



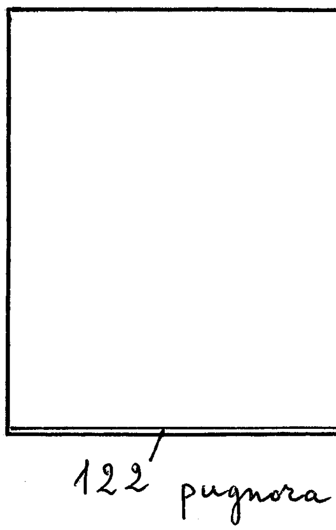
La procedura è la seguente

* moltiplicare i due lati del rettangolo: $35 * 20 = 700$
  [area del rettangolo in braccia^2];
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{700} = 10 * \sqrt{7} \approx 26 + ½$ braccia, lunghezza del lato del quadrato equivalente.

Nota: il termine *bislungo* significava una figura, generalmente rettangolare, più lunga che larga, con un rapporto fra le due dimensioni almeno uguale a 2.
Il termine *bislungo* è stato impiegato in relazione a problemi di *geometria piana* contenuti, fra gli altri, nei trattati di Paolo dell'Abbaco e di Orbetano da Montepulciano.

Conversione di unità di misura

Un terreno ha forma quadrata con lati lunghi 122 *pugnora*: il problema chiede di calcolare la superficie in *panora* e in *staiora*:



Ricordando che 1 panoro vale 12 pugnora è facile calcolare il risultato:
Area = 122 * 122 = 14 884 pugnora.
Dividendo il risultato per 12 si ha:

Area = 14 884/12 = 1240 + 1/3 panora.

Per calcolare l’area in *staiora* è necessario dividere l’ultimo risultato per 12:

Area = (1240 + 1/3)/ 12 = 103 staiora + 3 panora.

Quadratura del cerchio

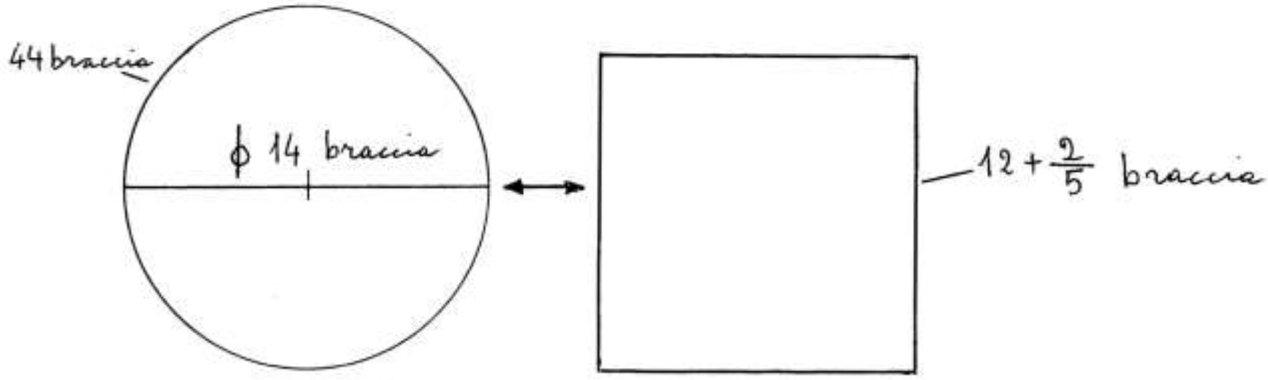
Conoscendo la circonferenza, il diametro (*miluogho* nel linguaggio di Paolo Gherardi) viene calcolato dividendo la circonferenza per la costante (3 + 1/7).

La soluzione inversa è: dato il diametro, la circonferenza è ottenuta moltiplicandolo per la costante (3 + 1/7).

L’area di un cerchio è ricavata dal prodotto della circonferenza per il diametro e dividendo il risultato per 4.

L’Autore applica le regole a degli esempi.

Un terreno ha la forma di un cerchio e ha circonferenza lunga 44 braccia.



Il problema chiede di calcolare l’area del cerchio e quella del lato del quadrato equivalente.

Ecco la procedura:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1//): 44 : (3 + 1//) = 14 [diametro del cerchio];
* moltiplicare la circonferenza per il diametro: 44 * 14 = 616 ;
* dividere per 4: 616 : 4 = 154 braccia^2 [area del cerchio];
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{154} \cong \left(12 + \frac{2}{5} + \text{poca cosa}\right) \cong 12{,}4096 \text{ braccia}$$

, lunghezza del lato del quadrato *equivalente* al cerchio.

%%

Un terreno ha forma circolare con diametro lungo 21 braccia.

Il problema chiede la circonferenza, l’area e il lato del quadrato equivalente.

La procedura è la seguente:

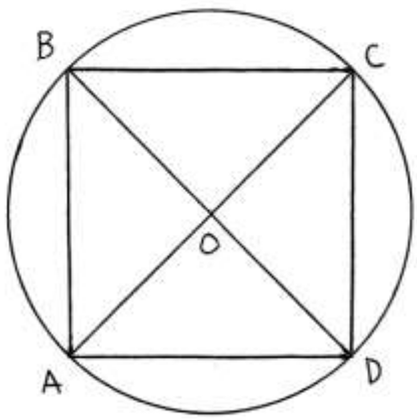
* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 21 * (3 + 1/7) = 66 braccia [circonferenza];
* moltiplicare la circonferenza per il diametro: 66 * 21 = 1386 ;
* dividere per 4: 1386 : 4 = 346 + ½ braccia^2, area del terreno;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{346 + \frac{1}{2}} \cong \left(18 + \frac{5}{8} + \text{poca cosa}\right)$$,braccia, lato del quadrato equivalente.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un cerchio ha la circonferenza lunga 22 braccia e deve esservi inscritto il più grande quadrato possibile. Il problema chiede la lunghezza del lato del quadrato.

I diametri AC e BD sono le due diagonali del quadrato da inscrivere.



La procedura impiegata è la seguente:

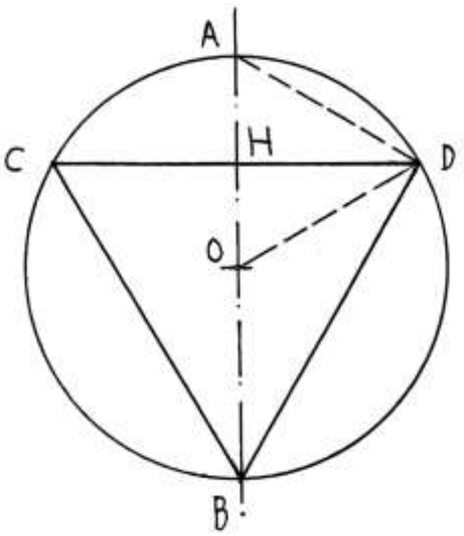
* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1//): 22 : (3 + 1/7) = 7 braccia
  [diametro o *miogho* nel toscano di Gherardi];
* moltiplicare il diametro per se stesso: 7 * 7 = 49 ;
* dividere per 2: 49 : 2 = 24 + ½, braccia^2
  [area del quadrato inscritto];
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{24 + \frac{1}{2}}$$ ≈ 5 “*pocha cosa meno*” braccia, lunghezza dei lati del quadrato ABCD.

Scudo inscritto

Un cerchio ha la circonferenza lunga 44 braccia e deve esservi inscritto uno “*... schudo che vi si possa mettere…*”: come noto, per gli Abacisti medievali, uno *scudo* è un triangolo, generalmente equilatero (ma non sempre), con il lato orizzontale disposto in alto.

Il problema domanda la lunghezza dei lati del triangolo.



La procedura impiegata è la seguente:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 44 : (3 + 1/7) = 14 braccia, lunghezza del *miluogho* e cioè il diametro;
* moltiplicare il diametro per ¾: 14 * ¾ = 10 + ½ braccia [altezza HB];
* moltiplicare per se stesso: (10 + ½) * (10 + ½) = 110 + ¼ ;
* moltiplicare per 1/3: (110 + ¼) * 1/3 = 36 + ¾ ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{36+\frac{3}{4}} = 6+\frac{1}{16}\ \text{braccia}.$$

Nota: l'altezza BH è lunga i ¾ del diametro AB perché il segmento AH è lungo *metà* del raggio.

La corda CD è un lato del triangolo equilatero ed è divisa da AB in due segmenti di uguale lunghezza: sono CH e HD.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHD:

$$HD^2 = OD^2 - OH^2 = OD^2 - \left(\frac{OH}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\cdot OH^2.$$

Da essa deriva che

$$HD = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OH.$$

Il lato CD è lungo

$$CD = 2\cdot HD = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OH = \sqrt{3}\cdot OH.$$

Ma

$$OH = \frac{1}{4}AB$$

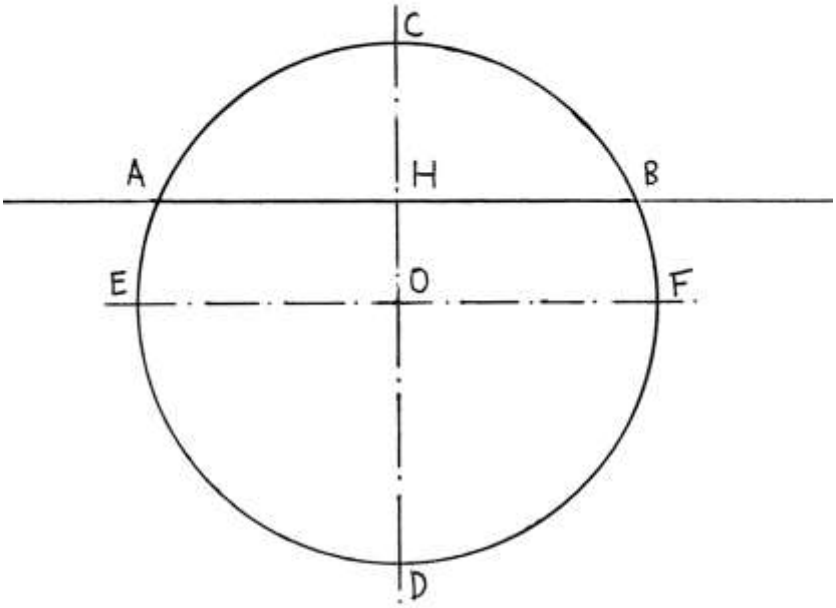
, quindi

$$CD = \sqrt{3}\cdot\frac{14}{4} \cong 6+\frac{1}{16}\ \text{braccia}$$

: la soluzione di Gherardi è corretta.

<u>Ruota parzialmente sotterrata</u>

Una ruota è in parte sotterrata verticalmente: sporge per 6 braccia (ed è la *freccia* CH del segmento circolare) e la *corda* a contatto con il terreno (AB) è lunga 18 braccia:



Il problema chiede la lunghezza della circonferenza.

ACB è un *segmento circolare*.

La procedura risolutiva è la seguente:

* dividere per 2 la corda: 18 : 2 = 9 :
* moltiplicare per se stesso: 9 * 9 = 81 ;
* dividere per la lunghezza della freccia: 81 : 6 = 13 + 1/2 braccia, lunghezza della freccia [HD] del segmento circolare sotterrato;
* sommare le lunghezze delle due frecce 6 + (13 + ½) = 19 + ½ braccia, diametro della ruota;
* moltiplicare per la costante (3 + 1/7): (19 + ½) * (3 + 1/7) = 61 + 2/7 braccia, lunghezza della circonferenza.

La procedura usata per calcolare il diametro è riassunta nella formula che segue:

$$\frac{\left(\frac{corda}{2}\right)^2}{freccia} + freccia = diametro$$

e in lettere:

$$\frac{\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{CH} + CH = CD$$

.

- APPROFONDIMENTO -

La corda AB divide il cerchio in due *segmenti circolari*: ACB (che emerge dal terreno) e ADB (che è interrato).

Pur se con dati differenti, il problema è riprodotto nel trattato di Paolo dell'Abbaco ed è risolto, qui e là, applicando il *teorema delle corde*.

Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nello stesso cerchio e si intersecano ad angolo retto nel punto H, tagliando in due parti uguali la corda AB.

I due segmenti che costituiscono una corda (ad esempio AH e HB) formano i *medi* e i due segmenti dell'altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:

CH : AH = HB : HD , da cui

HD = (AH * HB)/ CH = (9 *9)/6 = 13 + ½ braccia.

Sommando a questo risultato parziale la lunghezza di CH si ha:

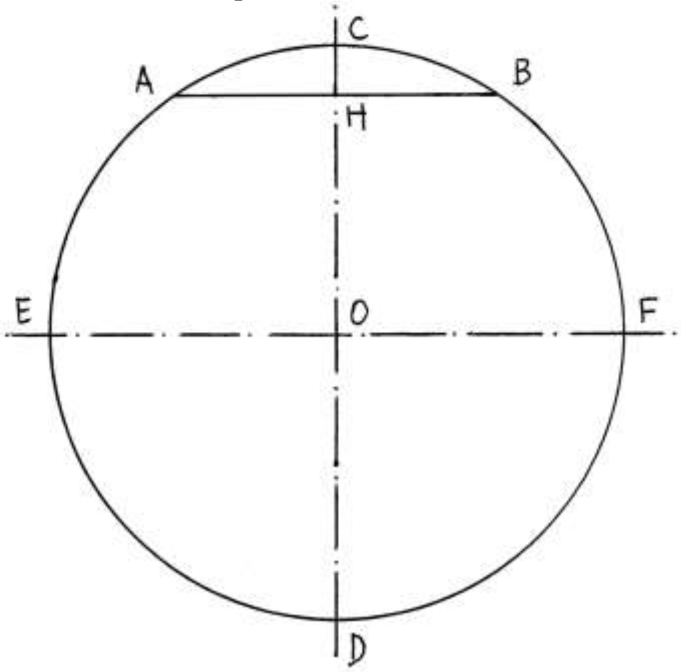
CD = CH + HD = 6 + (13 + ½) = 19 + ½ braccia : la soluzione di Gherardi è corretta: anche egli ha applicato il *teorema delle corde*.

- -

<u>Area di un segmento circolare</u>

Un segmento circolare è delimitato da una corda lunga 25 braccia e ha una freccia di 4 braccia.

Il problema domanda l'area del segmento circolare.



La procedura impiegata è la seguente:

- moltiplicare la corda per la freccia: 25 * 4 = 100 ;
- moltiplicare per 11/14: 100 * 11/14 = 78 + 4/7 braccia^2, area del segmento circolare [Gherardi fornisce un risultato leggermente diverso: 78 + 2/14].

La procedura può essere riassunta con la formula che segue:

Area segmento circolare = (11/14) * corda * freccia.

Essa è di chiara derivazione dalla formula usata per calcolare l'area del cerchio:

Area cerchio = (11/14) * diametro * diametro. = (11/14) * diametro^2.

- APPROFONDIMENTO -

La formula di Gherardi non deriva da quelle, approssimate, applicate da Columella e dai Gromatici latini (nel *Podismus*).

La formula di Columella è:

$$\text{Area segmento circolare} = \frac{c+f}{2} \cdot f + \frac{1}{14} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

mentre quella proposta dall'Anonimo Gromatico del *Podismus* è:

$$\text{Area segmento} = \frac{c+f}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{14}$$

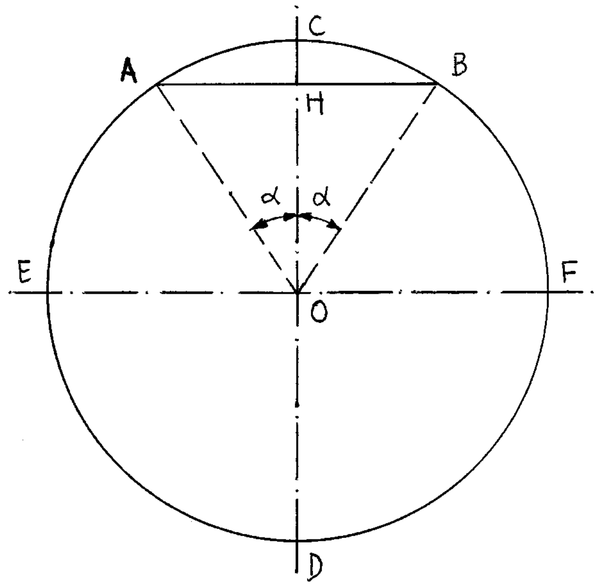
.

In entrambe le formule, *c* è la corda e *f* la freccia.

Con la prima formula, l'area del segmento circolare è 69,16 braccia^2, mentre con quella del *Podismus* il risultato è inferiore: 40,16 braccia^2. Entrambi i risultati sono inferiori a quello calcolato da Gherardi.

Paolo dell'Abbaco affrontò lo stesso problema pur se con lunghezze differenti.

Proviamo a calcolare l'area del segmento circolare in modo corretto.



Occorre per prima cosa ricavare la lunghezza del diametro CD applicando il *teorema delle corde*:

CH : AH = HB : HD , da cui

$$HD = \frac{AH \cdot HB}{CH} = \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2}}{4} = 39{,}0625 \text{ braccia}$$

.

Il diametro CD è lungo:

CD = CH * HD = 4 + 39,0625 = 43,0625 braccia.

Nella figura qui sopra sono tracciati i raggi OA e OB: essi formano con il diametro CD due angoli di uguale ampiezza, α e α.

Riassumiamo le lunghezze, in braccia, dei segmenti presenti nella figura:

* CH = 4 ;
* AB = 25 ;
* AH = HB = 12,5 (o 12 + ½, secondo l'uso di Gherardi) ;

* HD = 39,0625;
* CD = 43, 0625 ;
* HO = HD – OD = HD – (CD/2) =

$$= HD - \frac{CD}{2} = 39{,}0625 - \frac{43{,}0625}{2} = $$
$$= 17{,}53125 \text{ braccia}$$

La tangente dell'angolo α è data da:

$$tg\,\alpha = \frac{HB}{HO} = \frac{12{,}5}{17{,}53125} \cong 0{,}713$$

Ad essa corrisponde un angolo α ≈ 35,489°.

L'angolo AOB è ampio 2 * α ≈ 2 * 35,489° ≈ 70,978°.

L'arco ACB ha lunghezza proporzionale all'ampiezza dell'angolo 2 * α. Possiamo ricavare la lunghezza dell'arco con la seguente proporzione:

$$\overset{\frown}{ACB} : \text{circonferenza} = 2 \cdot \alpha : 360$$, da cui

$$\overset{\frown}{ACB} = \frac{\text{circonferenza} \cdot 2\alpha}{360} = \frac{22}{7} \cdot \frac{43{,}0625 \cdot 70{,}978}{360} =$$
$$\cong 26{,}68 \text{ braccia}$$

L'area di un segmento circolare è attualmente calcolata con la formula

$$\text{Area segmento}_{ACB} = \frac{\text{raggio} \cdot (\text{arco} - \text{corda}) + \text{corda} \cdot \text{freccia}}{2} =$$
$$= \frac{21{,}53125 \cdot (26{,}68 - 25) + 25 \cdot 4}{2} \cong 68{,}08 \text{ braccia}^2$$

Il risultato conseguito da Gherardi – 78 + 4/7 – è errato per *eccesso*.

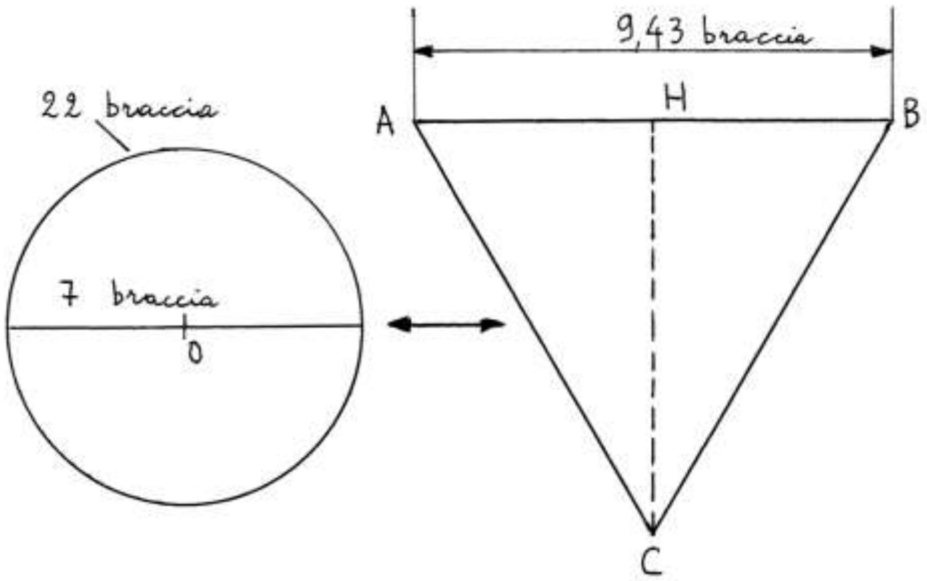
- -

Triangolo equilatero equivalente a un cerchio

Un cerchio ha circonferenza lunga 22 braccia. Deve essere costruito uno *schudo* di area equivalente.

Il problema contiene solo l'enunciazione ma non offre alcuna soluzione.

Tentiamo di risolverlo partendo dall'ipotesi che lo scudo abbia la forma di un triangolo equilatero:



I passi occorrenti sono:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 22 : (3 + 1/7) = 7 braccia;
* moltiplicare la circonferenza per il diametro: 22 * 7 = 154 ;
* dividere per 4: 154 : 4 = 38 + ½ braccia^2, area del cerchio [e dello scudo].

L'area del triangolo equilatero è:

$$Area_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2}$$, ma

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB$$, per cui l'area è:

$$Area_{ABC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2$$.

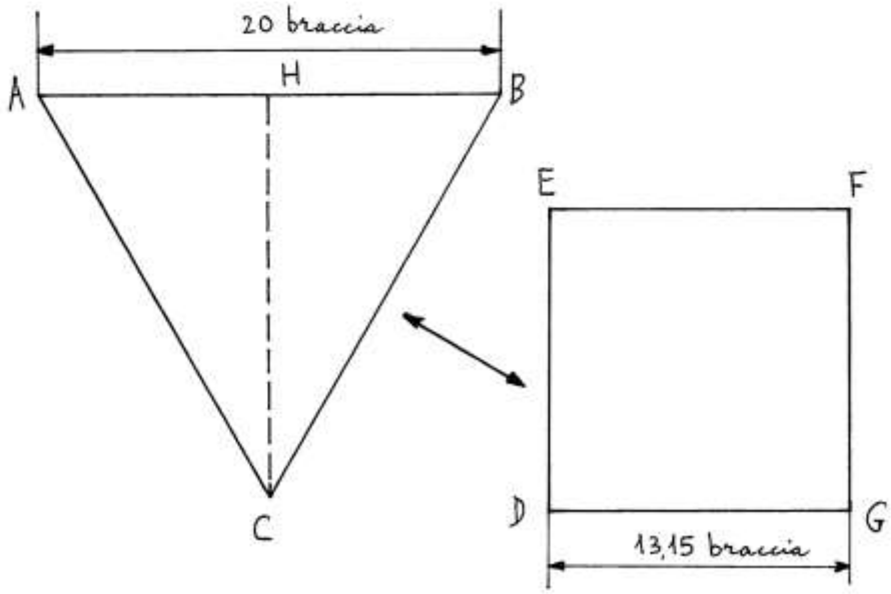
Conoscendo l'area, è facile ricavare la lunghezza del lato AB dalla formula precedente:

$$AB = \sqrt{\frac{4 \cdot Area_{ABC}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 38{,}5}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot 38{,}5}{3}} \cong 9{,}43 \text{ braccia}$$, lunghezza del lato dello scudo ABC.

<u>Quadratura di uno scudo</u>

Uno scudo ha la forma di un triangolo equilatero e ha lati lunghi 20 braccia. Deve essere calcolata la lunghezza del lato del quadrato equivalente.



La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato del triangolo per se stessa: 20 * 20 = 400

[come già accennato in precedenza, nel "*Liber habaci*", Paolo Gherardi usa i *numeri romani*, cosicché il precedente prodotto è scritto: *xx via xx = iiij*^{c} Il simbolo ^{c}, scritto all'*apice* , sta per il numero romano 100, mentre il prodotto andrebbe scritto

XX * XX = CCCC = CD.

Il termine *via* significa moltiplicare.

Infine, è da notare che per scrivere le cifre romane Gherardi usa le lettere *minuscole*];

* dividere per 4: 400 : 4 = 100 ;

* sottarre da 400: 400 – 100 = 300 ;

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{300} \cong \left(17 + \frac{1}{3} - \text{pocha cosa}\right) \text{braccia},$$

altezza del triangolo (o *miluogho*] [per indicare una frazione di importo trascurabile, Gherardi usa l'espressione *pocha cosa*];

* dividere per 2 la lunghezza di un lato del triangolo: 20 : 2 = 10 ;

* moltiplicare per l'altezza: 10 * (17 + 1/3) = 173 braccia^2, area del triangolo equilatero [e del quadrato equivalente];

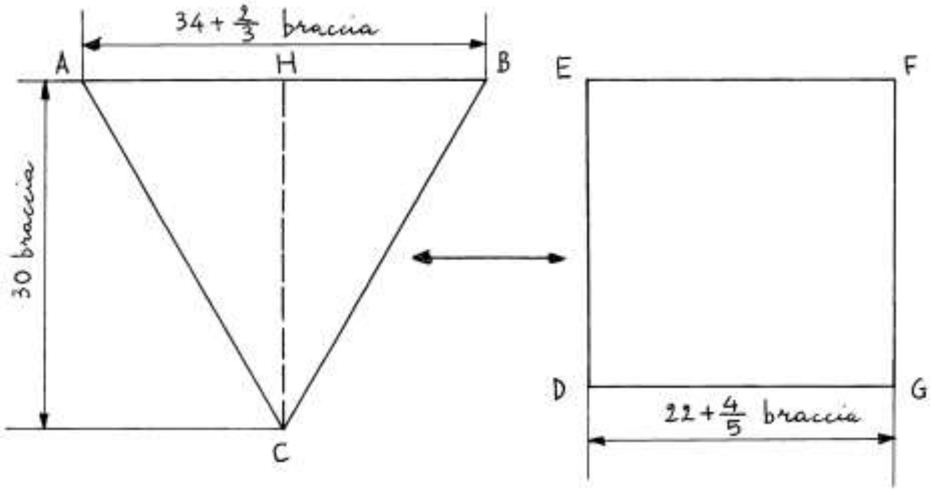
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{173} \cong 13{,}15 \text{ braccia},$$

lunghezza del lato del quadrato equivalente.

Lato di uno scudo

Uno *schudo* ha la forma di un triangolo equilatero e la sua altezza ("*lo diritto del miluogho*") è lunga 30 braccia. Il problema domanda la lunghezza dei lati del triangolo e del quadrato equivalente.



La procedura è la seguente:

*	moltiplicare l’altezza per se stessa:	30 * 30 = 900 ;
*	dividere per 3:	900 : 3 = 300 ;
*	sommare a 900:	300 + 900 = 1200 ;
*	estrarre la radice quadrata:	

$$\sqrt{1200} \cong \left(34 + \frac{2}{3} - \underline{\text{pocha cosa}}\right)$$

braccia, lunghezza dei lati del triangolo;

*	dividere per 2:	(34 + 2/3) : 2 = 17 + 1/3 ;
*	moltiplicare per l’altezza:	(17 + 1/3) * 30 ≈ 520 braccia^2, area del

triangolo equilatero [e del quadrato equivalente];

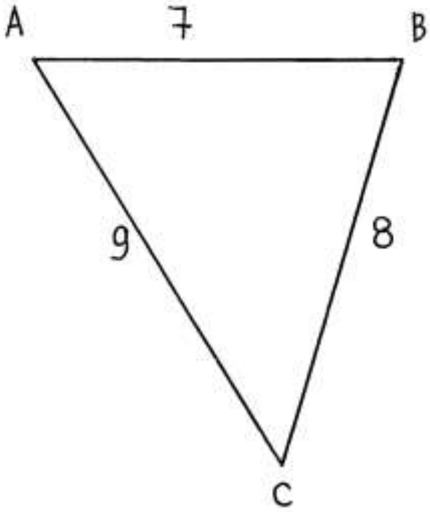
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{520} \cong 22 + \frac{4}{5} \text{ braccia}$$

, lunghezza dei lati del quadrato equivalente.

<u>Area di un triangolo scaleno</u>

Uno scudo ha la forma di un *triangolo scaleno,* con i lati lunghi 7, 8 e 9 braccia.



Il problema domanda la sua area.
La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

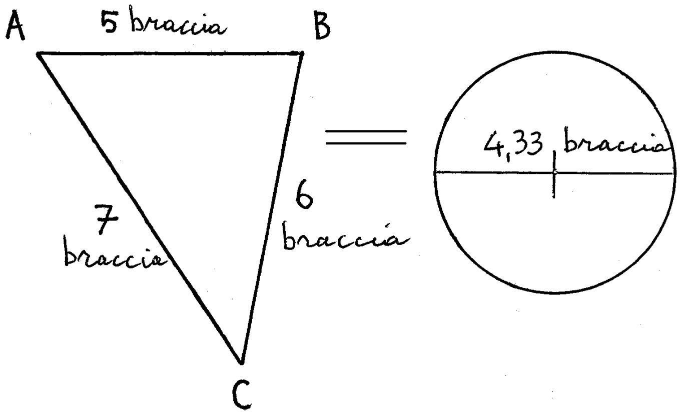
*	sommare le lunghezze dei tre lati:	7 + 8 + 9 = 24 braccia [perimetro];
*	dividere per 2:	24 : 2 = 12 [semiperimetro];
*	sottrarre la lunghezza del lato più corto:	12 – 7 = 5 ;
*	moltiplicare per 12 [il semiperimetro]:	5 * 12 = 60 ;
*	sottrarre la lunghezza del lato intermedio da 12:	12 – 8 = 4 ;
*	moltiplicare per 60:	4 * 60 = 240 ;
*	sottrarre il lato più lungo da 12:	12 – 9 = 3 ;
*	moltiplicare per 240:	3 * 240 = 720 ;
*	estrarre la radice quadrata:	

$$\sqrt{720} \cong 26 + \frac{5}{6} \text{ braccia}^2$$, area dello scudo ABC.

Nota: evidentemente, Gherardi ha applicata, senza citarla, la nota formula di Erone per il calcolo dell’area di un generico triangolo di cui siano le lunghezze dei tre lati.

<u>Cerchio equivalente a un triangolo scaleno</u>

Uno scudo ha la forma di un triangolo scaleno con lati lunghi 5, 6 e 7 braccia.
Deve essere costruito un cerchio con la stessa superficie.



La procedura risolutiva utilizza di nuovo la formula di Erone per calcolare l’area del triangolo:

*	sommare le lunghezze dei tre lati:	5 + 6 + 7 = 18 braccia [perimetro];
*	dividere per 2:	18 : 2 = 9 ;
*	sottrarre il lato più corto:	9 – 5 = 4 ;
*	moltiplicare per il semiperimetro:	4 * 9 = 36 ;
*	sottrarre da 9 la lunghezza del lato intermedio:	9 – 6 = 3 ;
*	moltiplicare per 36:	3 * 36 = 108 ;
*	sottrarre da 9 il lato più lungo:	9 – 7 = 2 ;
*	moltiplicare per 108:	2 * 108 = 216 ;
*	estrarre la radice quadrata:	

$$\sqrt{216} \cong 14 + \frac{5}{7} \text{ braccia}^2$$ area dello scudo;

* moltiplicare per la costante (12 + 4/7) [vedere il successivo APPROFONDIMENTO] :

(14 + 5/7) * (12 + 4/7) = 185 ;

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{185} \cong 13 + \frac{6}{10} \text{ braccia}$$

, lunghezza della circonferenza del cerchio equivalente.

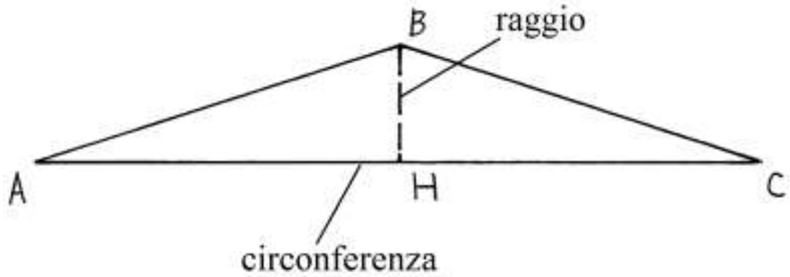
Dividendo la circonferenza perr la costante (3 + 1/7) si ricava il diametro:

diametro = circonferenza/(3 + 1/7) = (13 + 6/10) : (3 + 1/7) ≈ 4,33 braccia.

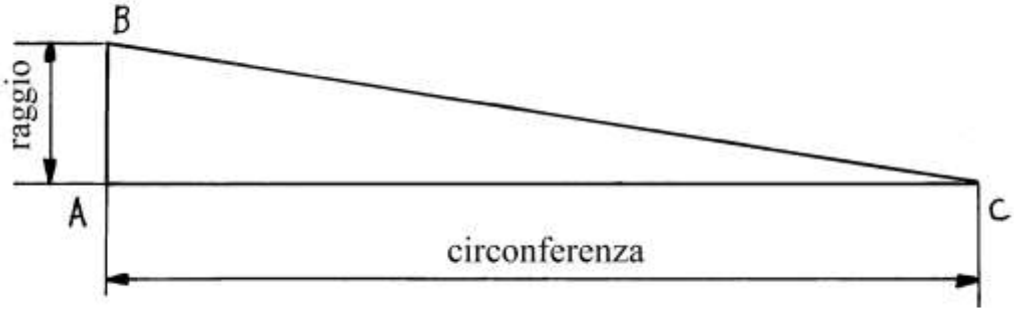
- APPROFONDIMENTO -

L’origine della costante (12 + 4/7), che può essere scritta anche nella forma “88/7”, è spiegata di seguito. Questa costante può essere definita con l’espressione *moltiplicatore della superficie*.

L’area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza e altezza CH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l’area è data da:

$$\text{Area}_{ABC} = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{\text{circonferenza} \cdot \text{raggio}}{2}$$

Nel secondo caso:

$$\text{Area}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\text{raggio} \cdot \text{circonferenza}}{2}$$

Ma

$$\text{circonferenza} = \text{diametro} \cdot \frac{22}{7} = $$
$$= 2 \cdot \text{raggio} \cdot \frac{22}{7} = \frac{44}{7}\,\text{raggio}$$

Da cui

$$\text{raggio} = \text{circonferenza} \cdot \frac{7}{44}$$

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha

$$\text{Area} = \text{circonferenza}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{44} =$$
$$= \text{circonferenza}^2 \cdot \frac{7}{88}$$

La lunghezza della circonferenza è data da

$$\text{circonferenza} = \sqrt{\text{area} \cdot \frac{88}{7}}$$

La frazione 88/7 vale

$$\frac{88}{7} = 12 + \frac{4}{7}$$

ed è il *moltiplicatore della superficie* che verrà poi usato anche da *Orbetano da Montepulciano* nel suo trattato; esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

circonferenza^2 = Area cerchio * 88/7.

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio r è data da: Area cerchio = π * r^2, mentre la circonferenza è lunga: circonferenza = 2 * π * r.

Ne consegue che:

$$\frac{\text{circonferenza}^2}{\text{Area}} = \frac{4\pi^2 r^2}{\pi r^2} = 4\pi$$

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

$$4 \cdot \frac{22}{7} = \frac{88}{7} = 12 + \frac{4}{7}$$

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di 4*π.

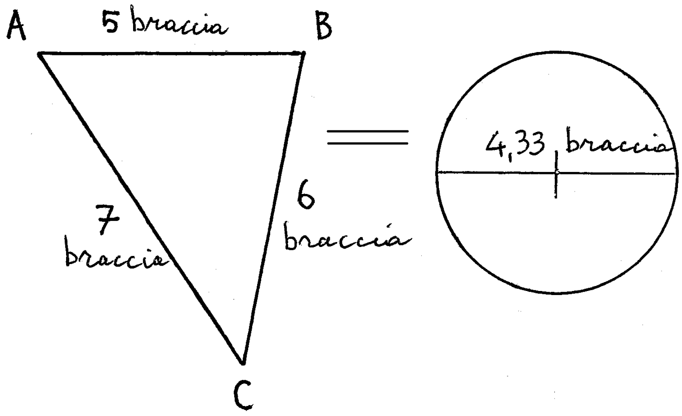
Nel Medioevo per i calcoli era più facile usare la frazione 88/7 invece dell'equivalente *numero misto* (12 + 4/7).

- -

<u>Cerchio equivalente a un triangolo scaleno</u>

Uno scudo ha la forma di un triangolo scaleno con lati lunghi 5, 6 e 7 braccia.

Deve essere convertito in un cerchio di uguale superficie: il problema chiede la lunghezza della sua circonferenza.



La procedura si muove dal calcolo dell’area del triangolo con la formula di Erone (applicata ma non espressamente citata):

*	sommare le lunghezze dei tre lati del triangolo:	5 + 6 + 7 = 18 [perimetro];
*	dividere per 2:	18 : 2 = 9 ;
*	sottrare il lato più corto:	9 – 5 = 4 ;
*	moltiplicare per il semiperimetro:	4 * 9 = 36 ;
*	sottrarre il lato intermedio dal semiperimetro:	9 – 6 = 3 ;
*	moltiplicare per 36:	3 * 36 = 108 ;
*	sottrarre il lato più lungo dal semiperimetro:	9 – 7 = 2 ;
*	moltiplicare per 108:	2 * 108 = 216 ;
*	estrarre la radice quadrata:	

$$\sqrt{216} \cong 14 + \frac{5}{7} \text{ braccia}^2,$$ area dello scudo;

*	moltiplicare per la costante (12 + 4/7):	(14 + 5/7) * (12 + 4/7) ≈ 185 ;
*	estrarre la radice quadrata:	

$$\sqrt{185} \cong 13 + \frac{4}{7} \text{ braccia},$$ circonferenza del cerchio equivalente

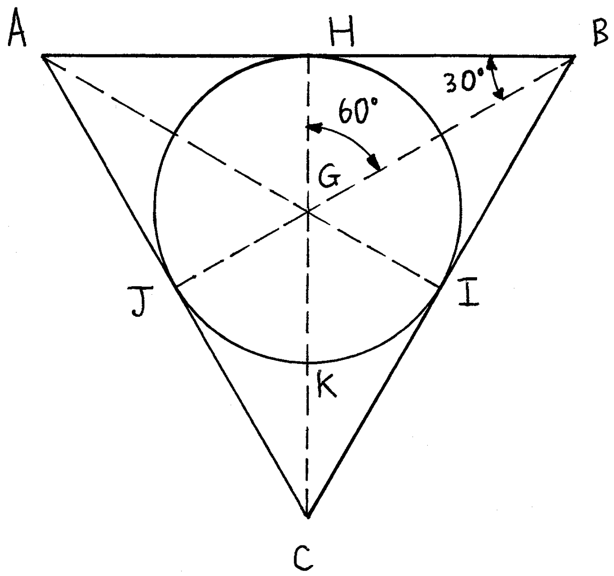
[il risultato è leggermente errato: quello corretto è (13 + 3/5)].

Dividendo la corretta lunghezza della circonferenza per la costante (3 + 1/7) si ottiene il diametro:

(13 + 3/5) : (3 + 1/7) ≈ 4,33 braccia.

<u>Cerchio inscritto in un triangolo equilatero</u>

Uno scudo ha la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 10 braccia: deve esservi inscritto il più grande cerchio possibile.



Il problema domanda la lunghezza della circonferenza del cerchio inscritto.

La procedura prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato del triangolo per se stessa: 10 * 10 = 100 ;
* dividere per 4: 100 : 4 = 25 ;
* sottrarre da 100: 100 – 25 = 75 ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{75} \cong 8 + \frac{2}{3} \text{ braccia}$$

, lunghezza del *miluogho* (altezza del triangolo);

* moltiplicare 75 per 4/9 [per questa costante vedere nell'APPROFONDIMENTO che segue]:

75 * (4/9) = 33 + 1/3 ;

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{33 + \frac{1}{3}} \cong 5 + \frac{3}{4} \text{ braccia}$$

, diametro del cerchio inscritto;

* moltiplicare per la costante (3 + 1/7): (5 + ¾) * (3 + 1/7) ≈ 18 + 1/14 braccia, circonferenza del cerchio inscritto.

------------------------- APPROFONDIMENTO -------------------------

Il punto G divide l'altezza HC in due segmenti che hanno lunghezze proporzionali a 1 e a 2:

HG : 1 = GC : 2 .

Quindi, il diametro del cerchio inscritto ha lunghezza uguale a 2 * HG e ciè è lungo quanto il segmento GC.

Ne consegue che il diametro è lungo 2/3 dell'altezza HC e i loro quadrati stanno in una proporzione che vale:

diametro^2 = (2/3)^2 * altezza^2 = (4/9) * HC^2 . Ecco spiegata l'origine della costante 4/9 usata da Gherardi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In un triangolo equilatero le altezze si incontrano nell'*ortocentro*, le mediane nel *baricentro*, le bisettrici degli angoli interni nell'*incentro* e gli assi dei lati nel *circocentro*. In questo genere di triangoli i quattro tipi di linee coincidono e lo stesso accade ai quattro punti significativi che si sovrappongono in G.

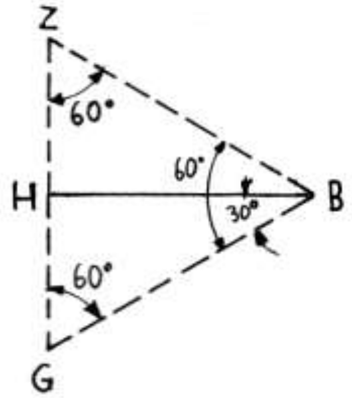
Il metodo usato da Gherardi per calcolare l'altezza CH a partire dal lato (AB) è corretto:

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB \,.$$

Il cerchio inscritto ha raggio GH = GI = GJ = GK.

Consideriamo il triangolo rettangolo HGB: l'angolo HGB è ampio 60° e quello HBG è 30°.

Il triangolo rettangolo HGB è metà dell'ipotetico triangolo equilatero GZB:



La sua altezza HB è lunga *metà* del lato del triangolo equilatero ABC.

Le proprietà del triangolo equilatero consentono di stabilire la relazione fra l'altezza e un lato:

$$\text{altezza} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{lato}$$ e cioè

$$HB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot ZG = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2 \cdot HG) = \sqrt{3} \cdot HG \,.$$

Da questa formula ricaviamo HG:

$$HG = \frac{HB}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3} \cong 2{,}886 \text{ braccia},$$ raggio del cerchio inscritto.

Il diametro HK è: HK = 2 * HC ≈ 2 * 2,886 ≈ 5,77 braccia, valore pressoché uguale a quello (5 + ¾) calcolato da Gherardi.

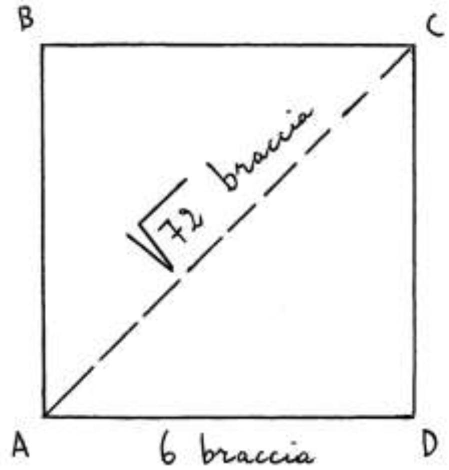
Paolo Gherardi ha risolto il problema senza fare ricorso alla *trigonometria*, come è stato fatto in questo paragrafo.

- -

Diagonale di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 6 braccia.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza di una diagonale (*per chanto*”).

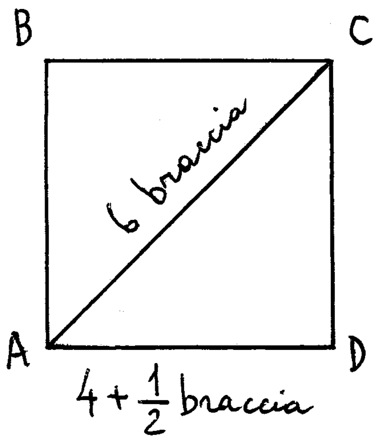


La procedura impiegata è:

*	moltiplicare il lato per se stesso:	6 * 6 = 36 ;
*	moltiplicare, di nuovo, il lato per se stesso:	6 * 6 = 36 ;
*	sommare i due prodotti:	36 + 36 = 72 ;
*	estrarre la radice quadrata:	√72 [≈ 8 + ½] braccia, lunghezza della diagonale.

Lato di un quadrato

Un quadrato ha una diagonale lunga 6 braccia: deve essere calcolata la lunghezza dei suoi lati.



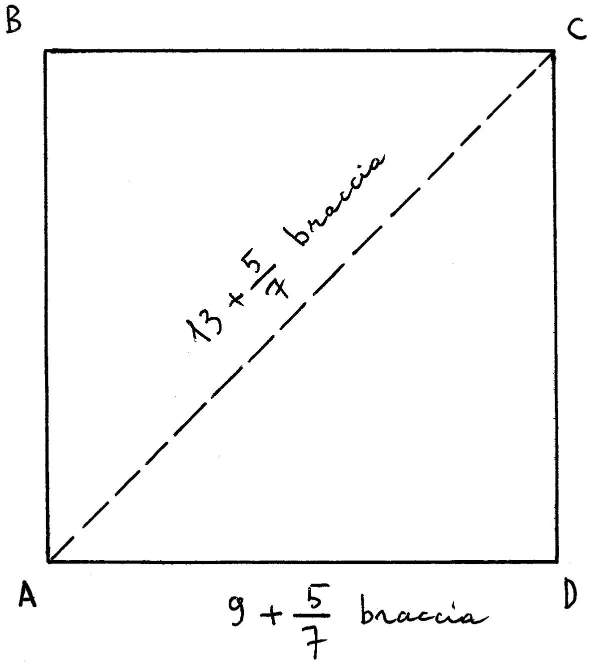
La procedura usata è la seguente:

*	moltiplicare la lunghezza della diagonale per se stessa:	6 * 6 = 36 ;
*	dividere per 2:	36 : 2 = 18 ;
*	estrarre la radice quadrata:	

$\sqrt{18} = [3 \cdot \sqrt{2}] \cong 4 + \frac{1}{2}$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

<u>Quadrato data la diagonale</u>

Un quadrato ha le diagonali lunghe 4 braccia *più la lunghezza di un lato*.
Il problema domanda le lunghezze delle diagonali e dei lati.



La procedura applicata è la seguente:

* moltiplicare la differenza per se stessa: 4 * 4 = 16 ;
* moltiplicare per 2: 16 * 2 = 32 ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{32} \cong 5 + \frac{5}{7} \text{ braccia}$$

[Gherardi ha arrotondato per eccesso];

* sommare con la differenza: (5 + 5/7) + 4 = 9 + 5/7 braccia, lunghezza dei lati del quadrato;
* sommare con la differenza: (9 + 5/7) + 4 = 13 + 5/7 braccia, lunghezza delle diagonali.

La procedura è riassunta con le formule che seguono, nelle quali *d* è la differenza fra le lunghezze di una diagonale, *D*, e quella di un *lato*:

d = D – lato = 4 braccia ;

$$\sqrt{2 \cdot d^2} + d = \text{lato}$$

, formula che può essere semplificata in

$$d \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) = \text{lato}$$

.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione può essere ricavata con il metodo che segue:

SC = AD + 4 = lato + 4.

Ma AC = (√2) * lato.

Eguagliando le due espressioni di AC si ha

lato + 4 = (√2) * lato   da cui

lato * (√2 – 1) = 4   e

$$\text{lato} = \frac{4}{\sqrt{2}-1} \cong 9{,}657 \text{ braccia}$$

, arrotondate a (9 + 5/7) braccia, lunghezza dei lati.

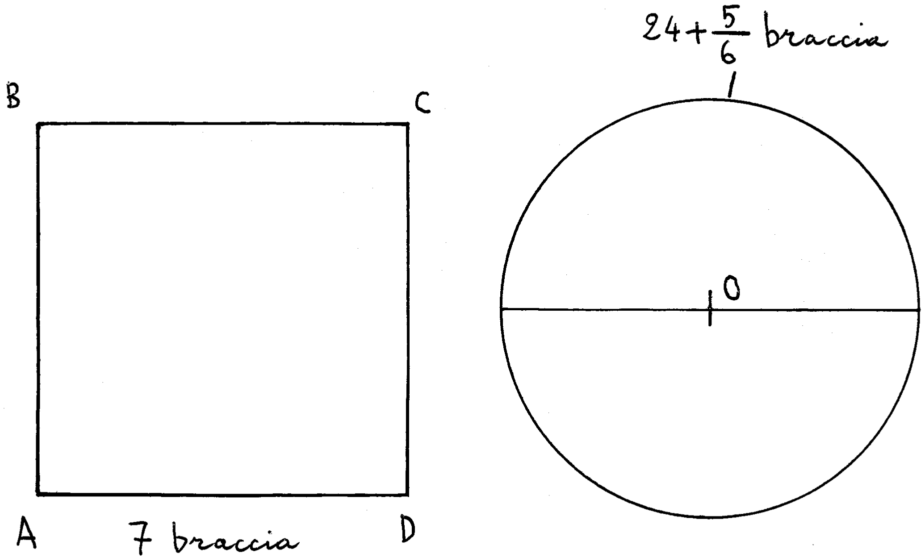
La lunghezza delle diagonali, *D*, è data dalla somma delle lunghezze di un *lato* e della differenza *d*:

D = lato + d = (9 + 5/7) + 4 = 13 + 5/7 braccia.

- -

<u>Cerchio equivalente a un quadrato</u>

Un quadrato ha lati lunghi 7 braccia e deve essere costruito un cerchio di uguale superficie. Il problema chiede la lunghezza della circonferenza del cerchio.



La procedura utilizzata è:

* moltiplicare il lato per se stesso: 7 * 7 = 49 [braccia^2, area del quadrato];
* moltiplicare per la *costante* (12 + 4/7): 49 * (12 + 4/7) = 616 ;
* estrarre la radice quadrata:

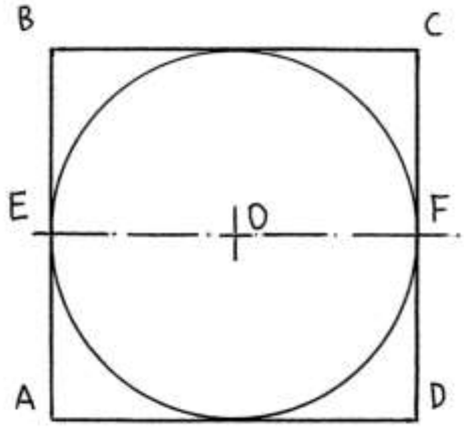
$$\sqrt{616} \cong 24 + \frac{5}{6} \text{ braccia}$$

, lunghezza della circonferenza.

Nota: per la soluzione di questo problema, Gherardi ha di nuovo impiegato il *moltiplicatore della superficie*   (12 + 4/7) = 88/7.

Cerchio inscritto in un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 7 braccia e deve esservi inscritto il più grande cerchio possibile. Ovviamente, il diametro del cerchio inscritto è lungo quanto i lati del quadrato.



La procedura è la seguente:

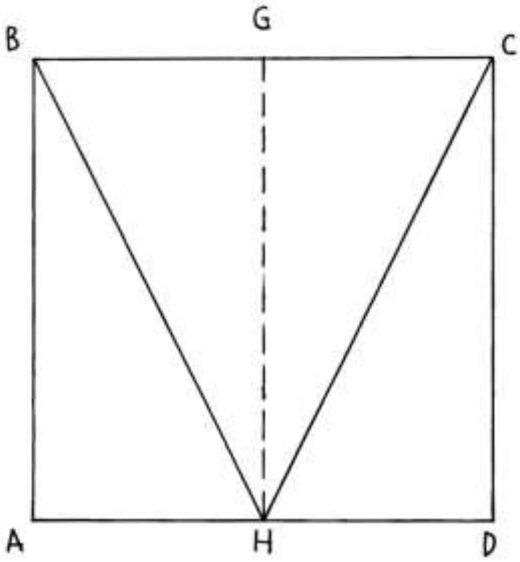
* moltiplicare il diametro [EF nella figura] per la costante (3 + 1/7):

7 * (3 + 1/7) = 22 braccia,

circonferenza del cerchio inscritto.

Scudo inscritto in un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 10 braccia. Deve esservi inscritto il più grande scudo.



La procedura impiegata è:

* moltiplicare la lunghezza del lato del quadrato per se stessa:	10 * 10 = 100 ;
* dividere per 2 la lunghezza del lato:	10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare per se stesso:	5 * 5 = 25 ;
* sommare i due quadrati:	100 + 25 = 125 ;
* estrarre la radice quadrata:	

$\sqrt{125} \cong 11 + \frac{2}{11}$ braccia, lunghezza di un lato dello scudo [BH].

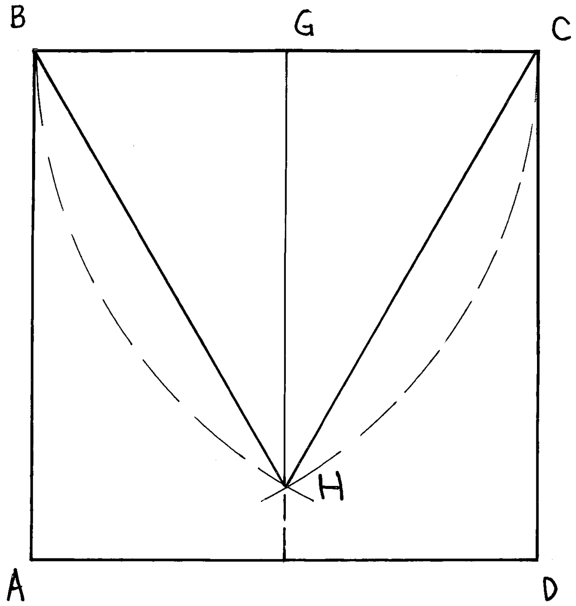
Il secondo lato obliquo è HC che è lungo quanto quello BH.
Il terzo lato dello scudo è la base BC.
Lo scudo BCH è un *triangolo isoscele*.

- APPROFONDIMENTO -

Come è evidente dalla precedente figura, l'area del triangolo isoscele BCH è uguale a metà di quella del quadrato ABCD e cioè è 50 braccia^2.

È possibile inscrivere nel quadrato ABCD un triangolo equilatero impiegando due diverse costruzioni.

La prima è molto semplice:



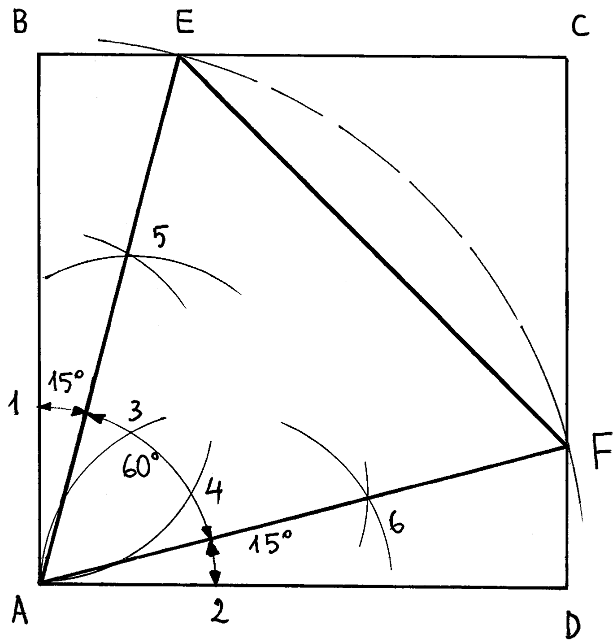
Il triangolo equilatero BCH ha lati lunghi 10 braccia, come i lati del quadrato. La sua area è:

$$\text{Area}_{BCH} = \frac{BC \cdot GH}{2} = \frac{BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC}{2} = \frac{100 \cdot \sqrt{3}}{4} \cong 43,30 \text{ braccia}^2$$

L'area di questo triangolo è più piccola di quella del triangolo isoscele calcolato da Gherardi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo è più complesso:



Fare centro in A e con raggio a piacere tracciare un arco di circonferenza: i suoi estremi sono i punti 1 e 2. L'arco sottende un angolo retto.

Con la stessa apertura fare centro nei punti 1 e 2 e disegnare due archi che intersecano il precedente nei punti 3 e 4.

Fare centro nelle coppie di punti 1-3 e 2-4 e tracciare quattro archi che si incontrano nei punti 5 e 6.

Dal vertice A disegnare due corde passanti per 5 e per 6, fino a incontrare il quadrato nei punti E e F.

Le due corde formano due angoli di 15°:

$$B\hat{A}E = F\hat{A}D = 15°$$

A sua volta, l'angolo EAF è ampio 60°.

Per verificare il risultato, fare centro nel vertice A e con raggio AE tracciare un arco da fino a passare per il punto F: le corde AE e AF hanno uguale lunghezza e sono due dei tre lati del triangolo equilatero inscritto AEF.

Consideriamo il triangolo rettangolo AFD; vale la relazione

AD = AF * cos FAD = AF * cos 15°. Da cui:

$$AF = \frac{AD}{\cos 15°} \cong \frac{10}{0{,}966} \cong 10{,}35 \text{ braccia}$$

L'area del triangolo equilatero AEF è data da:

$$\text{Area}_{AEF} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{\text{base} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{base}}{2} \cong$$

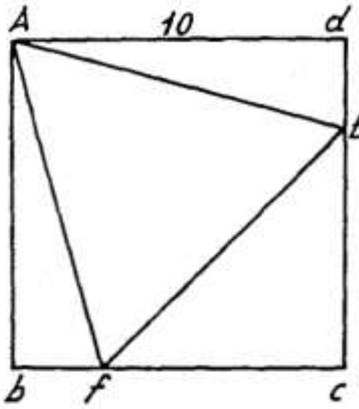
$$\cong 10{,}35^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cong 46{,}385 \text{ braccia}^2$$

Questo secondo triangolo equilatero ha area maggiore di quella del precedente.

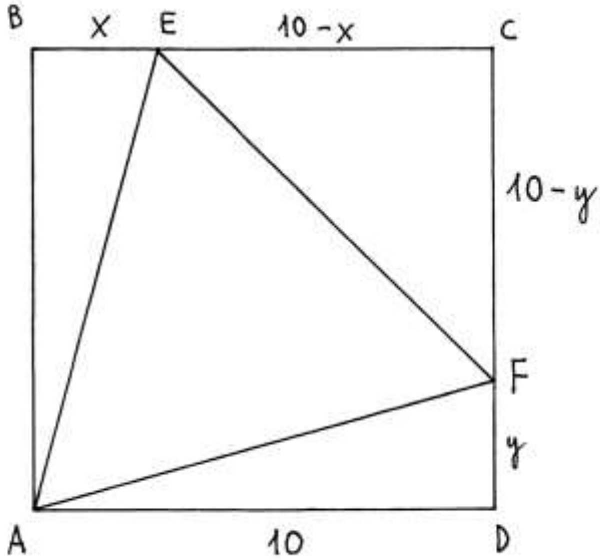
La conclusione è semplice: il triangolo isoscele costruito e calcolato da Gherardi ha area più grande di quella dei due triangoli equilateri.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema fu riproposto con le stesse dimensioni nel *Trattato di geometria pratica* di *Anonimo Fiorentino* (citato in bibliografia), con il n. 160 a pagina 160:



Calcoliamo ora la lunghezza dei lati del triangolo equilatero con l'aiuto della figura che segue:



Indichiamo con *x* la lunghezza di BE e con *y* quella di FD.

I lati del triangolo equilatero AEF hanno uguale lunghezza perché è equilatero.

Valgono le seguenti relazioni:

$EC = BC – x = 10 – x$

$CF = CD – y = 10 – y$

Il lato AE è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABE:

$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 10^2 + x^2$.

Il lato AF è l'ipotenusa di AFD:

$AF^2 = AD^2 + FD^2 = 10^2 + y^2$.

Ma AE = AF e $AE^2 = AF^2$, quindi $10^2 + x^2 = 10^2 + y^2$ e

$x^2 = y^2$ e $x = y$.

Infine, il lato EF è l'ipotenusa di ECF:

$EF^2 = EC^2 + CF^2 = (10 – x)^2 + (10 – y)^2 = (10 – x)^2 + (10 – x)^2 = 2 * (10 – x)^2$.

Ma $AE^2 = EF^2$, ne consegue

$(10^2 + x^2) = 2 * (10 – x)^2$

$100 + x^2 = 200 – 40*x + 2*x^2$

$x^2 – 40*x + 100 = 0$, da cui

$$X = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 400}}{2} = \frac{40 - \sqrt{1200}}{2} \cong 2,68 \text{ braccia}$$

La seconda radice di questa equazione non è presa in considerazione perché fornisce un risultato errato.

La lunghezza del lato AE è data da:

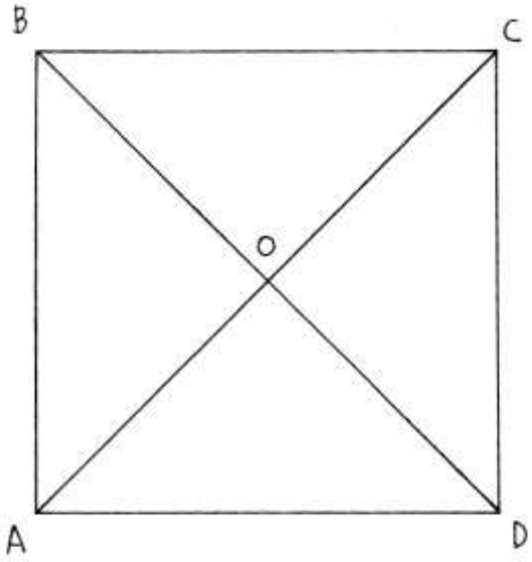
$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} \cong \sqrt{100 + 2,68^2} \cong 10,35 \text{ braccia.}$$

La lunghezza dei lati del triangolo equilatero, 10,35 braccia. È identica a quella calcolata in precedenza con l'aiuto della trigonometria. Semplici regole di algebra hanno portato a un risultato identico.

- -

<u>Quattro scudi inscritti in un quadrato</u>

Un quadrato ha lati lunghi 10 braccia. Vi devono essere inscritti quattro scudi aventi le maggiori dimensioni possibile e senza alcuno spreco di spazio.



La procedura risolutiva è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per 2: $100 * 2 = 200$;
* estrarre la radice quadrata

$$\sqrt{200} \;;$$

* dividere per 2:

$$\frac{\sqrt{200}}{2} = \sqrt{50} \cong 7 + \frac{1}{14} \text{ braccia}$$

, lunghezza di due dei lati di ciascuno scudo.

I lati del quadrato sono le basi dei quattro scudi e i loro lati obliqui sono OA, OB, OC e OD e cioè le *semidiagonali* del quadrato, ciascuna lunga (7 + 1/14) braccia.

I quattro scudi hanno la forma di *triangoli isosceli*.

Nessuna porzione dello spazio disponibile è stata sprecata.

Bibliografia

1. Anonimo Fiorentino, "Trattato di geometria pratica". Dal Codice L.IV.18 (sec. XV) della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di Alessandra Simi, Università di Siena, "Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale" n. 21, Pisa, Edizioni ETS, 1993, pp. 194).
2. Arrighi Gino, "Due trattati di Paolo Gherardi matematico fiorentino", in "Accademia delle scienze di Torino. Atti. Classe di scienze morali storiche e filologiche", Torino, v. 101 (1966-67), pp. 61-82 [ristampato in Gino Arrighi, "La matematica dell'età di mezzo", Pisa, Edizioni ETS, 2004, pp. 81-98].
3. Arrighi Gino (a cura e con introduzione di), "La pratica di geometria". Volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano, dal Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, Pisa, Domus Galilæana, 1966, pp. 97.
4. Bartoli Maria Teresa, "Musso e non quadro". La strana figura di Palazzo Vecchio a Firenze, in "Musso e non quadro", Firenze, Edizioni Edifir, 2007, pp. 11-52.
5. Bartoli Maria Teresa, "Il cortile della Dogana in Palazzo Vecchio, il dettaglio che illumina la regola", in "DisegnareCon", n. 9, giugno 2012, pp. 55-64.
6. Caianiello Eva, "Les sources des textes d'abaque italiens du XIV^{e} siècle: les échos d'un débat en cours", "Reti Medievali Rivista", 14, 2 (2013), Firenze University Press, pp. 188-209.
7. Gherardi Paolo, "Opera matematica. Libro di ragioni – Liber habaci", Codici Magliabechiani Classe XI, nn. 87 e 88 (sec. XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze (a cura e con introduzione di Gino Arrighi), Lucca, Maria Pacini Fazzi Editore, 1987, pp. 173.
8. Spiesser Maryvonne, "Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XV^{e} siècle", in "Bulletin de l'APMEP", n° 444, 2003, pp. 32-50.