sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: Gerberto di Aurillac; Silvestro II; Geometria Gerberti; unità misura romane; triangolo pitagorico; cateti triangoli rettangoli; triangolo equilatero; triangolo rettangolo 15-26-30; triangolo equilatero approssimato; rapporto 6/7; quadratura triangolo quasi equilatero; Boezio; numeri triangolari; numeri figurati; numeri quadrati; gnomone; numeri poligonali; terne primitive; terne derivate; area triangoli rettangoli; misure profondità; triangolo 13-14-15; area del cerchio; approssimazione 22/7 per π; area segmento circolare.

LA GEOMETRIA DI GERBERTO

Gerberto di Aurillac (Aurillac, Francia, circa 940 - 950 – Roma 1003), monaco benedettino, nel 999 fu eletto Papa e prese il nome di Silvestro II.

Gerberto fu un appassionato cultore di materie scientifiche e di matematiche: buona parte delle sue conoscenze derivarono dalla cultura della Spagna islamica con la quale entrò in contatto nel corso della sua permanenza in Catalogna.

Fra i testi a lui attribuiti vi è il trattato *De geometria*.

Alcune conoscenze geometriche furono spiegate da Gerberto in alcune lettere che scrisse a suoi confratelli e allievi.

È assai probabile che nel corso della sua permanenza presso l'Abbazia di Bobbio o Abbazia di San Colombano presso Bobbio, in provincia di Piacenza, (della quale era stato nominato Abate dall'imperatore Ottone II), abbia scoperto nella sua biblioteca uno dei codici manoscritti contenenti i manuali tecnici degli *agrimensori romani*. Gerberto potrebbe aver tratto da questi codici buona parte delle sue conoscenze geometriche.

I testi degli agrimensori romani (raccolti nei *Gromatici Veteres*) fornirono le conoscenze geometriche essenziali per tutto l'alto Medioevo europeo, fino alla trasmissione all'Europa delle opere geometriche dei Greci e degli Arabi da parte di questi ultimi popoli. La svolta può essere fissata con la *De Practica Geometrie* di Leonardo Fibonacci (risalente al 1223).

Fra gli studiosi che, fra il XVII e il XX secolo, si sono interessati all'opera complessiva di Gerberto d'Aurillac e in particolare alla sua *Geometria Gerberti*, pubblicando vari volumi vanno ricordati:

1. Il monaco benedettino austriaco Bernhard Pez (1683-1735).
2. L'economista austriaco Carl Ferdinand Hock (Praga 1808 – Vienna 1869). Egli pubblicò un volume a Vienna nel 1837, edizione tradotta in italiano da Gaetano Stelzi e pubblicata a Milano nel 1846 presso Giovanni Resnati, con il titolo "*Gerberto o sia Silvestro II Papa ed il suo secolo*".
3. Lo storico francese Alexandre Olléris (1808-1895).
4. Lo storico russo Nikolai Bubnov, emigrato in Slovenia (1858-1939).

I testi di Olléris e di Bubnov sono citati in bibliografia.

Lunghezza dei cateti di un triangolo pitagorico

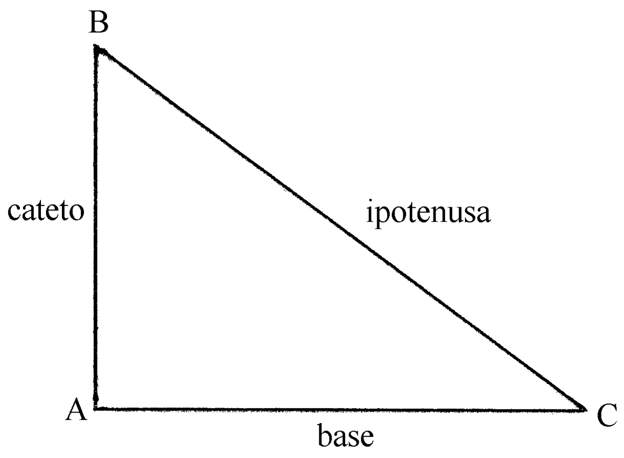
Un *triangolo pitagorico* è rettangolo e le lunghezze dei suoi lati (i due cateti e l'ipotenusa) formano una terna pitagorica.

Le prime 16 terne pitagoriche sono indicate nella seguente tabella:

[3, 4, 5]	[20, 21, 29]	[11, 60, 61]	[13, 84, 85]
[5, 12, 13]	[12, 35, 37]	[16, 63, 65]	[36, 77, 85]
[8, 15, 17]	[9, 40, 41]	[33, 56, 65]	[39, 80, 89]
[7, 24, 25]	[28, 45, 53]	[48, 55, 73]	[65, 72, 97]

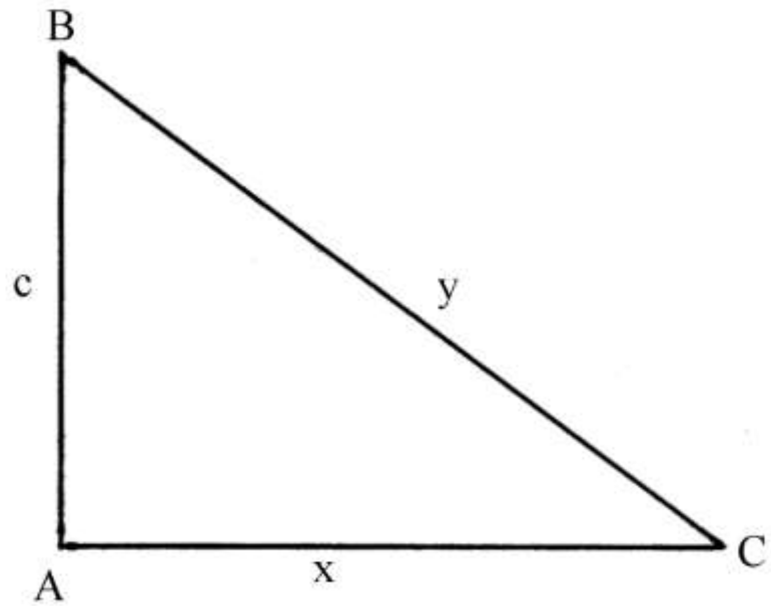
Il più semplice triangolo pitagorico è quello 3-4-5.

Gerberto chiamava *cateto* il lato verticale, *base* il lato orizzontale e *ipotenusa* il lato obliquo:



Conoscendo la lunghezza di un solo cateto di un triangolo rettangolo che ha dimensioni multiple della terna 3-4-5, Gerberto suggeriva un metodo per calcolare le lunghezze incognite del secondo cateto e dell'ipotenusa.

AB è il cateto minore, di lunghezza nota c, verticale; AC è la *base*, il cateto orizzontale di lunghezza incognita x e BC è l'ipotenusa di lunghezza y:



Gerberto propose l'uso di due formule per calcolare x e y:

$$x = \frac{(3*c - \frac{3}{9} * c)}{2} = \frac{(3*c - \frac{1}{3} * c)}{2} = \frac{(9-1)*c}{3*2} = \frac{4}{3} * c$$

e

$$y = \frac{(3*c + \frac{3}{9} * c)}{2} = \frac{(3*c + \frac{1}{3} * c)}{2} = \frac{(9+1)*c}{3*2} = \frac{5}{3} * c$$

La differenza fra le due formule è minima: nella prima viene *sottratta* l'espressione (3c/9 = 1/3 c) e nella seconda tale espressione viene *addizionata*.

Riassumendo:

AB = c
AC = 4/3 * c
BC = 5/3 * c ,

Verifichiamo l'esattezza delle formule di Gerberto per il caso di c = 6:

AC = (4/3) * 6 = 8
BC = (5/3) * 6 = 10 .

La terna 6-8-10 è un multiplo della terna 3-4-5:

6-8-10 ≡ 2 [3-4-5]

Infatti:

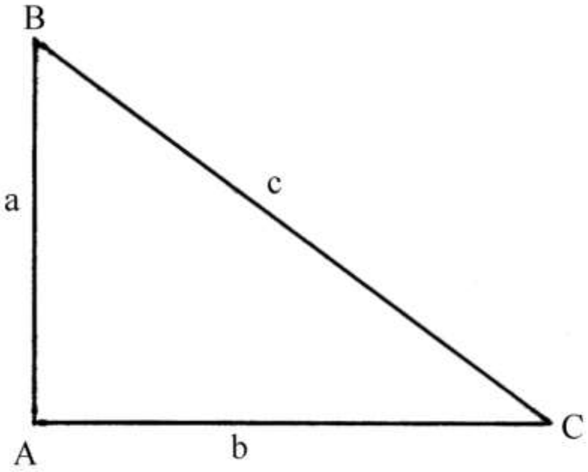
$AB^2 + AC^2 = BC_2$ e
$6^2 + 8^2 = 10^2$

Le formule di Gerberto sono verificate e sono corrette.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO -

Un triangolo pitagorico ha le lunghezze dei suoi lati connesse da semplici relazioni aritmetiche.

Nel caso che il lato più corto (il cateto minore), a, sia un numero *dispari*, valgono le seguenti formule (con a, b e c sono indicate le lunghezze dei tre lati):



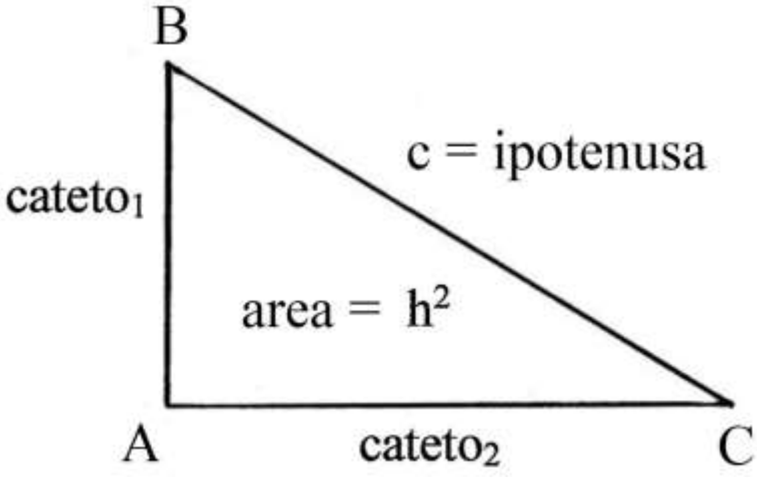
$b = (a^2 - 1)/2$ e $c = (a^2 + 1)/2$

Le due formule non valgono per tutte le terne presentate nel precedente paragrafo.

- -

<u>Determinazione delle lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo</u>

Di un triangolo rettangolo sono conosciuti la lunghezza dell'ipotenusa **c** e l'area h^2:



$BC = c$

$\text{Area}_{ABC} = AB * BC/2 = h^2$.

Devono essere calcolate le lunghezze dei due cateti AB e BC).
Gerberto propose una formula per calcolare le due lunghezze:

$$cateto_1 = ½ * [\sqrt{(c^2 + 4*h^2)} + \sqrt{(c^2 - 4*h^2)}]$$

$$cateto_2 = ½ * [\sqrt{(c^2 + 4*h^2)} - \sqrt{(c^2 - 4*h^2)}]$$

La somma delle espressioni contenute nelle due formule dà il seguente risultato:

$$cateto_1 + cateto_2 = \sqrt{(c^2 + 4*h^2)}$$

Verifichiamo la validità delle formule con un esempio concreto. Abbiamo un triangolo rettangolo con ipotenusa c lunga 13 e area $h^2 = 30$.

Sostituendo nelle formule questi valori si ha:

$cateto_1 = 12$ (= AC, il più lungo)

$cateto_2 = 5$ (= AB, il più corto)

$cateto_1 + cateto_2 = 17$.

Il triangolo 5 – 12 – 17 ha lati di lunghezze che formano una *terna pitagorica*.

Nota: La formula si trovava già nel manoscritto contenente testi dei Gromatici Romani, conosciuto come *Codice Arceriano*, oggi conservato in Germania, ma un tempo presente nella biblioteca dell'Abbazia di Bobbio dove Gerberto poté consultarlo. In realtà i codici sono due e sono indicati con le lettere A e B.

Il triangolo equilatero secondo Gerberto

Gerberto criticò il metodo proposto da Boezio per calcolare l'area di un triangolo equilatero e suggerì di fissare l'altezza *approssimata* del triangolo equilatero pari a 6/7 della lunghezza del lato.

Il rapporto 6/7 è uguale a 0,857, di poco più piccolo del valore esatto $(\sqrt{3})/2 = 0,866$.

Moltiplicando per 2 il rapporto 6/7 si ha:

$6/7 * 2 = 12/7 \approx 1,71428$

Ma:

$\sqrt{3} \approx 1,732$.

Ne consegue che:

$1,71428 < 1,732$ e cioè $12/7 < \sqrt{3}$.

Applicando questo coefficiente approssimato per il rapporto fra le lunghezze dell'altezza e del lato, l'area di un triangolo equilatero è data da:

$Area_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} = lato * altezza/2 = \approx lato * (lato * 6/7)/2 \approx 3/7 * lato^2$.

Il metodo proposto da Gerberto offre una soluzione *approssimata per difetto.*

Gerberto prese in considerazione un secondo rapporto: in un triangolo con lato lungo 30, disegnò l'altezza lunga 26, con un rapporto 26/30 = 0,8666, approssimativamente vicino a quello corretto.

La formula per calcolare l'area del triangolo equilatero diviene:

$Area_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} = (lato * 26/30 * lato)/2 = 13/30 * lato^2$.

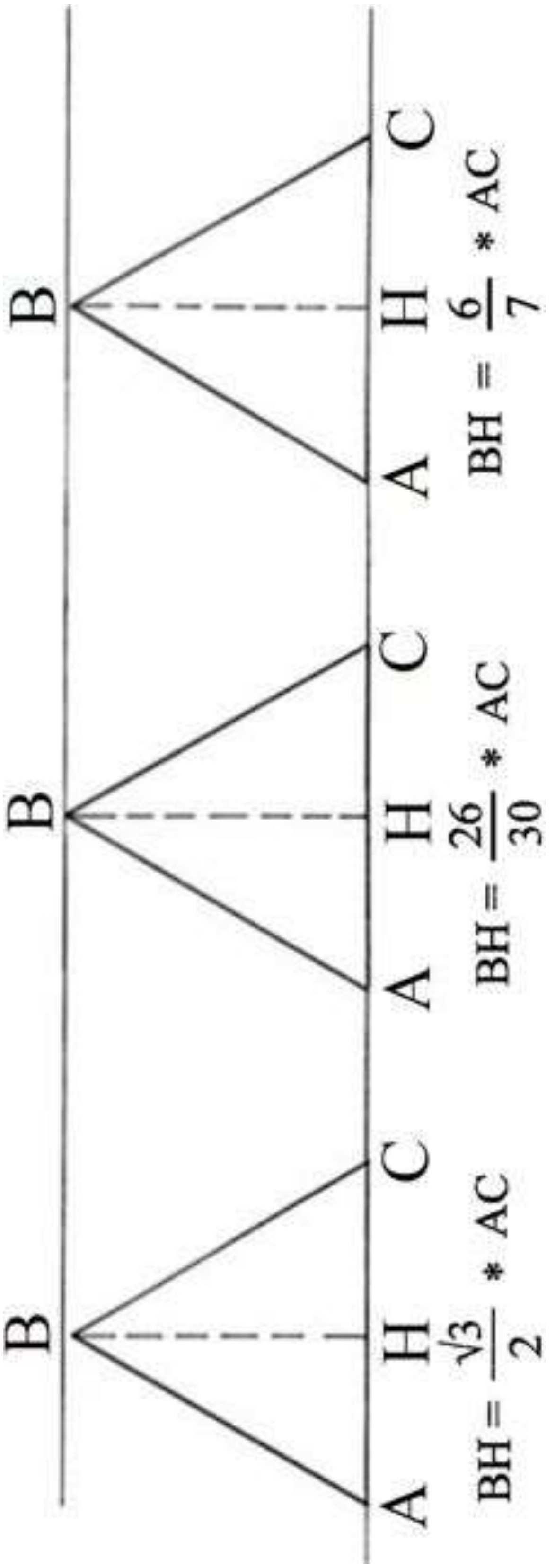
Questa formula *approssimata* è dovuta a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

La frazione 13/30 vale ≈ 0,43333 e cioè la metà di 0,86666.

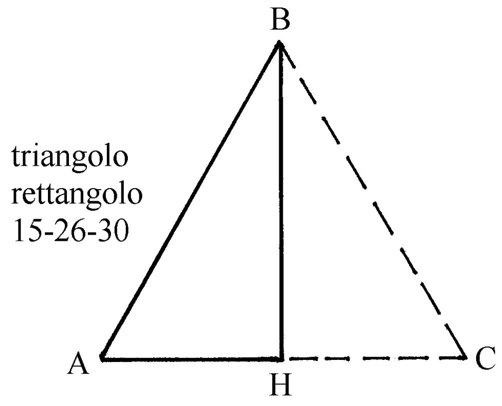
La tabella che segue confronta i dati relativi ai tre rapporti:

Rapporto corretto	Rapporto 26/30 (o 13/15)	Rapporto 6/7
$(\sqrt{3})/2 \approx 0{,}866$	$\approx 0{,}8666$	$\approx 0{,}857$

La figura seguente riporta tre triangoli: il primo è equilatero mentre il secondo e il terzo sono nei rapporti 26/30 e 6/7. Essi sono disegnati nella stessa scala e i loro lati di base sono allineati su di una retta. Per il vertice del triangolo al centro è tracciata una seconda retta parallela alla prima: gli scostamenti verso il basso degli altri due vertici sono minimi:

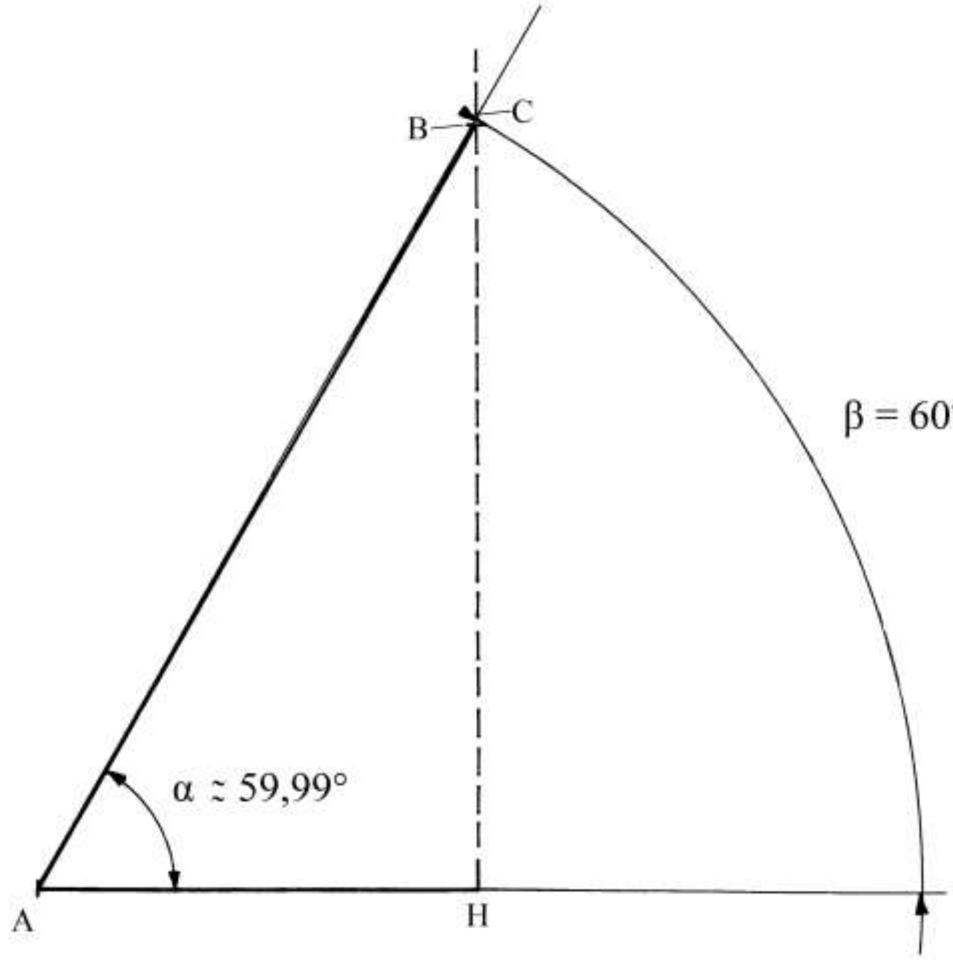


L’approssimazione fornita dal rapporto 26/30 si avvicina alla misura corretta, come mostra l’esempio della figura che segue con il triangolo diviso in due triangoli rettangoli: AHB (e CHB) hanno i lati lunghi in proporzione a 15-26-30.



Per le necessità pratiche degli artigiani del Medioevo le due soluzioni offerte da Gerberto erano quasi perfette.

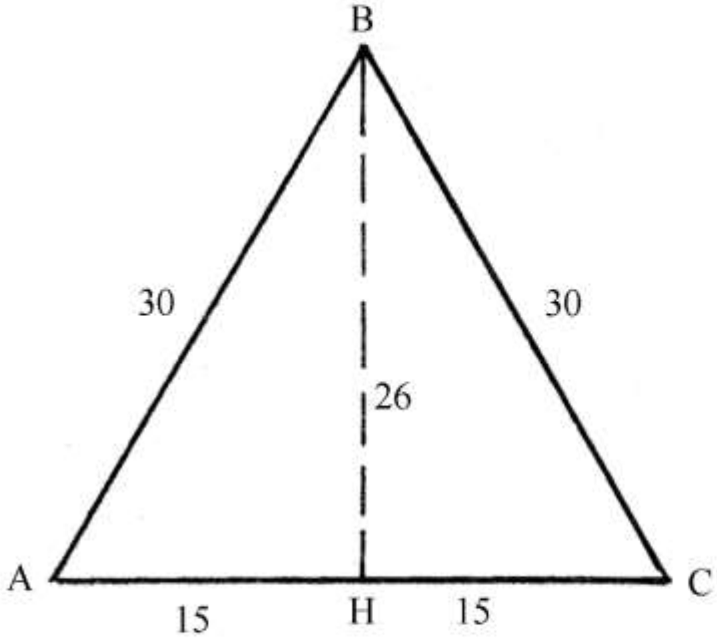
Lo schema che segue confronta due triangoli rettangoli:



ABH è un triangolo 41-71-82 e l'angolo α è ampio 59,99° e cioè *quasi* 60°. ACH è un triangolo rettangolo uguale a metà di un triangolo equilatero e l'angolo β è ampio 60°.
I segmenti AB e AC risultano vicinissimi.

Gerberto calcolò correttamente l'area del triangolo ABC moltiplicando la base (AC) per l'altezza (BH) e dividendo per 2:

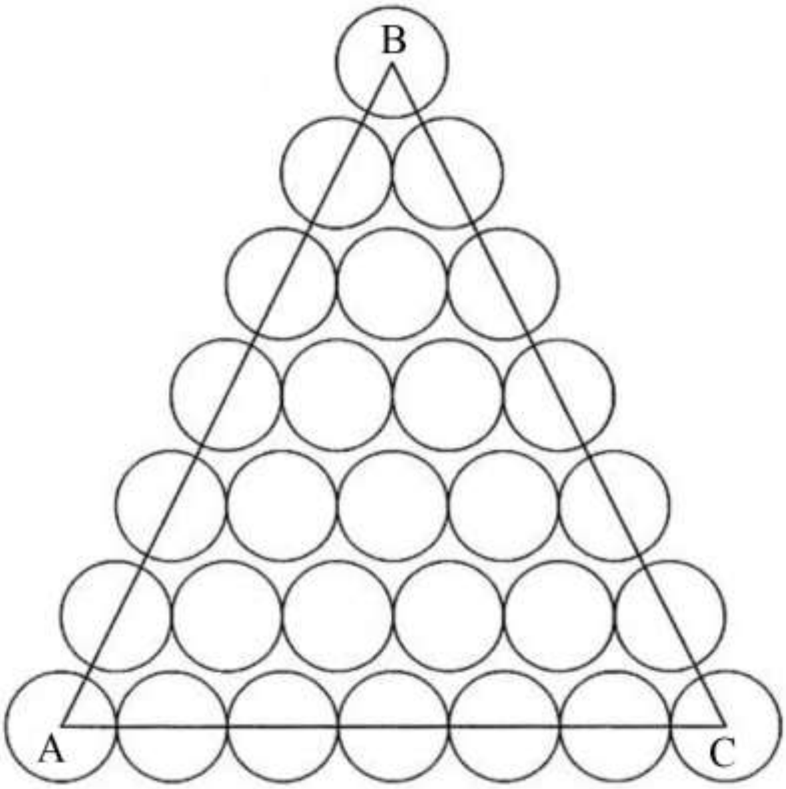
$$\text{Area}_{ABC} = AC * BH/2 = 30*26/2 = 390 \text{ piedi}^2.$$



Il risultato corretto fu ricavato anche moltiplicando il cateto AH per l'altezza BH:

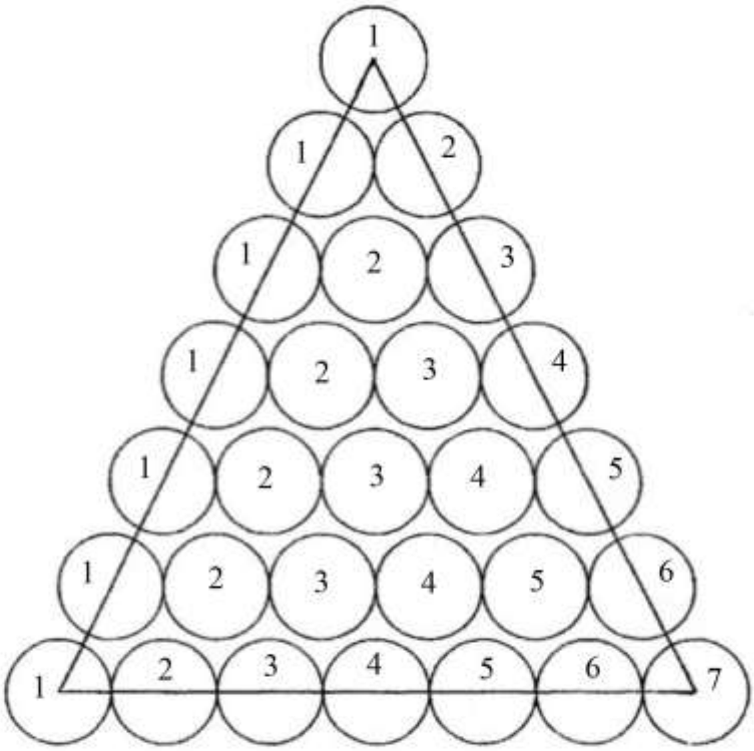
Area $_{ABC}$ = AH * BH = 15*26 = 390 piedi^2.

Boezio immaginò di calcolare l'area del triangolo equilatero costruendo una figura basata su una serie di righe di cerchietti affiancati, in numero decrescente dal basso verso l'alto, come spiega la figura che segue:

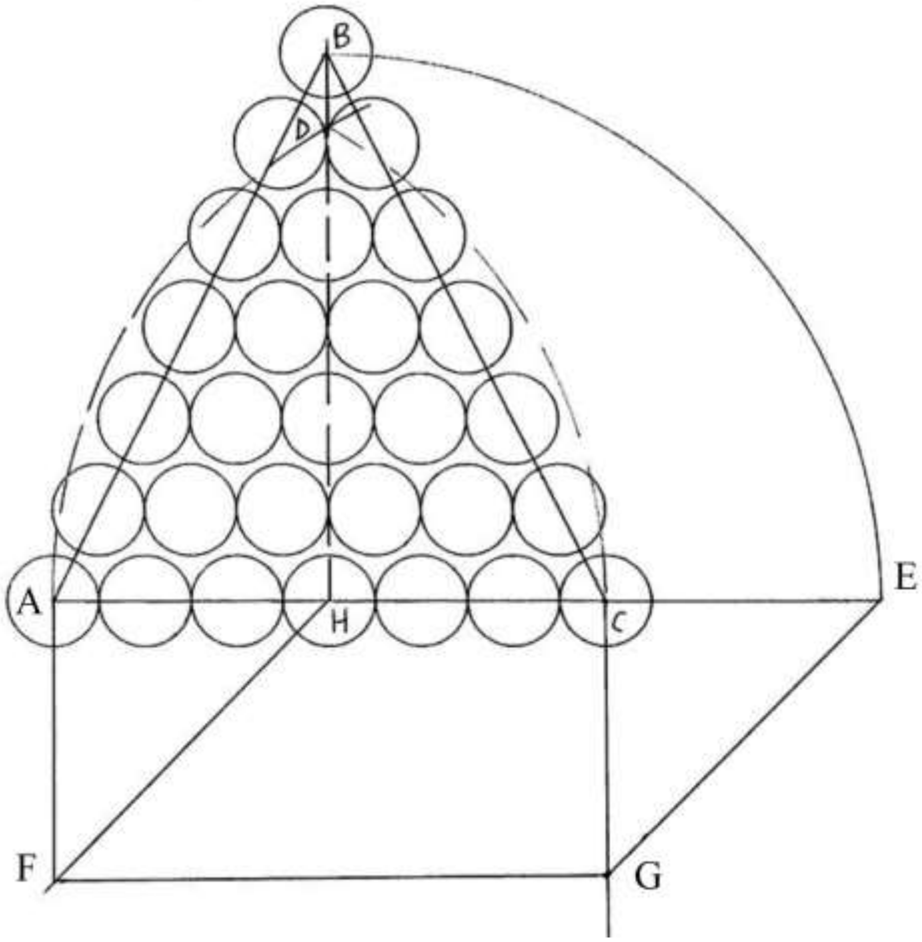


I vertici del triangolo (A, B e C) coincidono con i centri dei tre cerchi più esterni.

Boezio propose di calcolare l'area sommando il numero dei cerchi collocati su ciascuna riga:



Lo schema di Boezio contiene un errore: a causa del mancato rispetto della regola dell'impacchettamento dei cerchi, il triangolo ABC *non* è equilatero ma isoscele: infatti, l'altezza BH è lunga quanto il lato di base AC, come spiega la costruzione che segue:



Ecco descritta la precedente costruzione. Tracciare l'altezza BH; fare centro in A e in C e, con raggio AC, disegnare due archi: essi si intersecano in un punto, D, collocato sull'altezza BH. Questa è la dimostrazione geometrica che ABC è un *triangolo isoscele*.

Prolungare il lato AC verso destra e tracciare, verso il basso, le perpendicolari a AC a partire dai suoi estremi.

Fare centro nel punto H e, con raggio HB, disegnare un arco da B fino a terminare il punto E (sul prolungamento di AC).

Dai punti H e E tracciare due linee parallele fino a intersecare le perpendicolari a AC in due nuovi punti: F e G.

Se il segmento FG è parallelo al lato AC, i due segmenti hanno uguale lunghezza: ciò dimostra che BH è lunga quanto AC.

La corretta area del triangolo ABC è data da:

$$\text{Area}_{ABC} = AC * BH/2 .$$

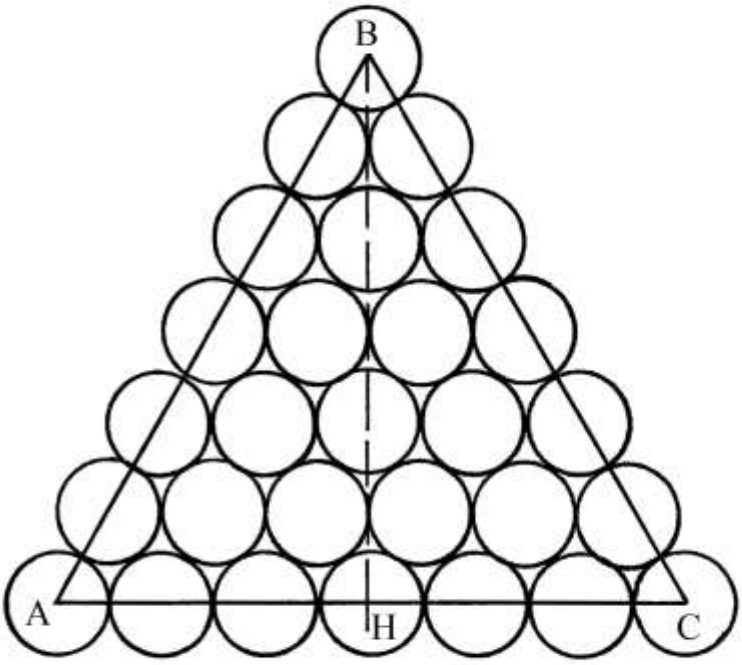
Se AC = BH = 7 piedi, l'area è:

$$\text{Area}_{ABC} = 7*7/2 = 49/2 = 24{,}5 \text{ piedi}^2 .$$

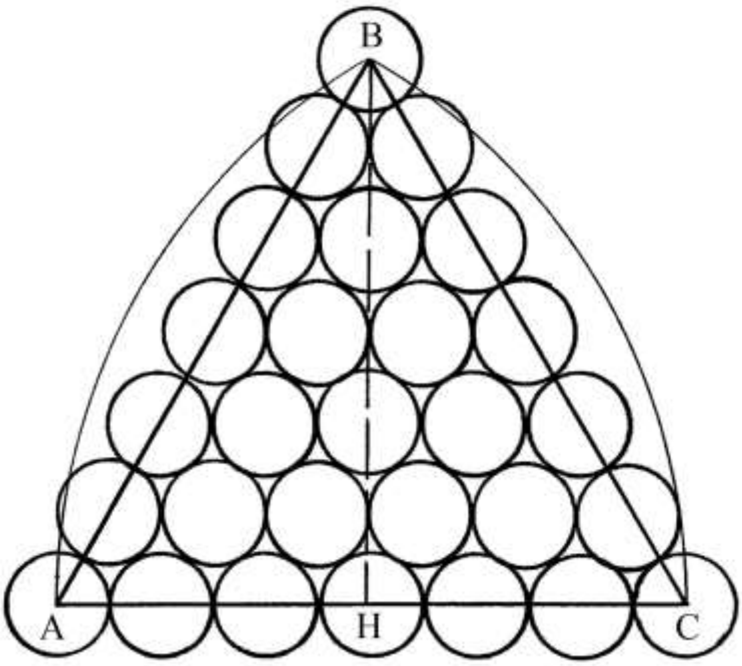
La cifra è inferiore a quella, *errata*, di 28 piedi^2 fornita da Boezio.

Gerberto contestò l'errore di Boezio riguardo al mancato impacchettamento dei cerchi (o delle sfere) per cui la superficie si riduce.

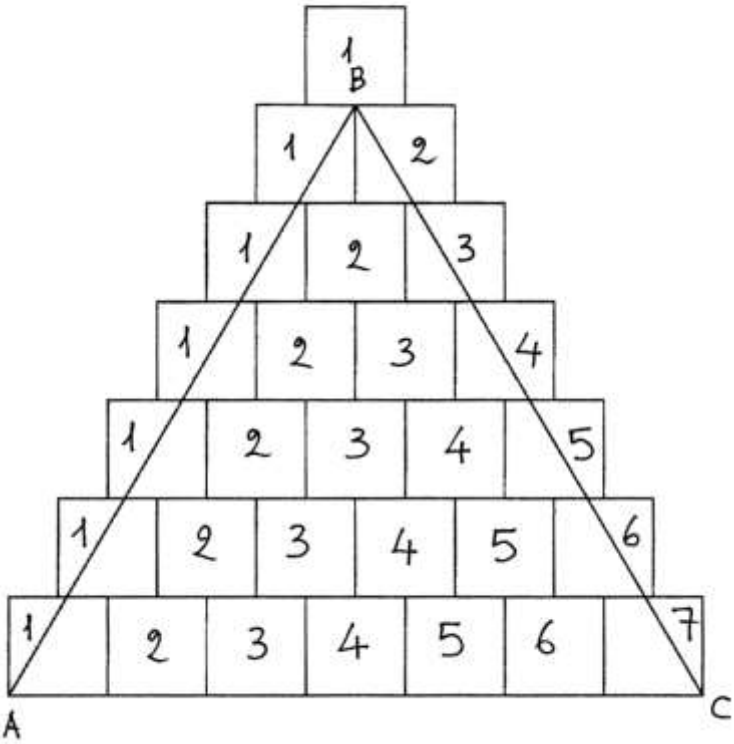
La figura che segue mostra gli effetti dell'impacchettamento dei cerchi:



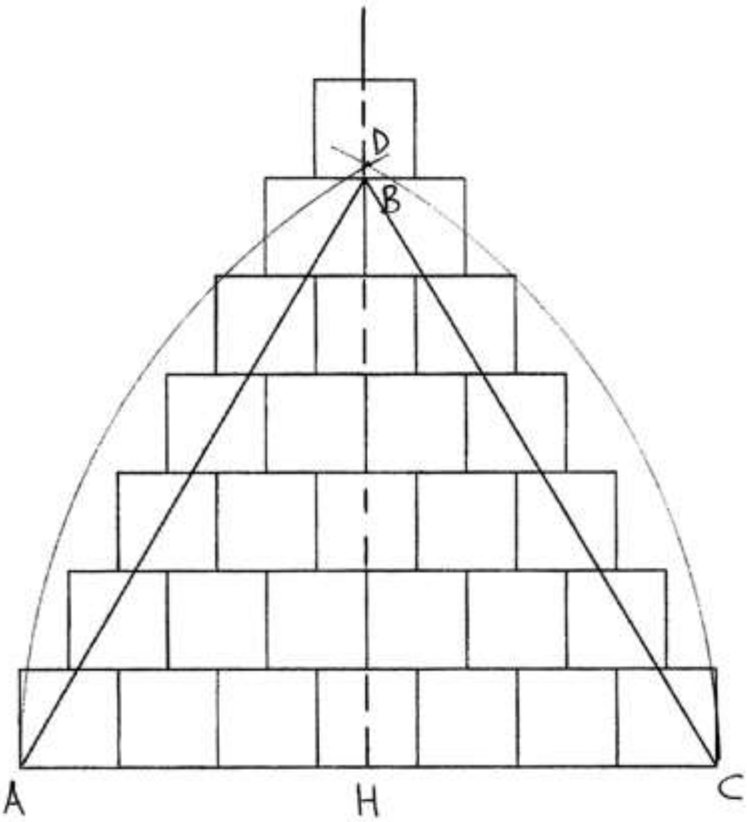
Il triangolo ABC è *equilatero* come spiega la costruzione realizzata nella figura che segue:



Gerberto realizzò una diversa costruzione: sovrappose sette righe di quadrati uguali con lato di lunghezza 1 piede (uguale al diametro dei cerchi di Boezio):



Nello schema di Gerberto, il triangolo ABC è *quasi equilatero*:



Con la costruzione descritta nella figura precedente, ABD è un triangolo equilatero: il suo vertice D è poco sopra al vertice B del triangolo isoscele di Gerberto (ABC).

ABC è un triangolo isoscele con lato AC lungo 7 piedi e altezza BH lunga 6 piedi (i 6/7 di AC) e la sua area è:

$$Area_{ABC} = AC * BH/2 = 7*6/2 = 42/2 = 21 \text{ piedi}^2.$$

L'area del triangolo equilatero ABD è:

$$Area_{ADC} = AC * DH/2 = AC/2 * (\sqrt{3})/2 * AC = (\sqrt{3})/4 * AC^2 =$$
$$= (\sqrt{3})/4 * 7^2 \approx 21{,}21 \text{ piedi}^2.$$

La differenza fra le due aree è minima: l'errore *per difetto* è uguale al solo 1%.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo *quasi* equilatero secondo Gerberto - La corrispondenza di Gerberto

Gerberto intrattenne una notevole corrispondenza con allievi e altri prelati. Particolarmente importante è quella rivolta a Adelboldo, a sua volta autore di un piccolo trattato sul calcolo del volume della sfera.

Adelboldo nacque forse a Liegi intorno al 970 e morì a Utrecht nel 1026.

Esponente del clero, studiò nella Scuola cattedrale di Liegi dove approfondì la conoscenza della matematica e dell'astronomia.

Con il nome di Adelboldo II fu vescovo di Utrecht dal 1010 fino all'anno della sua morte.

La lettera di Gerberto a Adelboldo

Di seguito, dalle pagine 194-195 del testo di Paolo Rossi [16] è riprodotta la traduzione della lettera di Gerberto a Adelboldo. La lettera risalirebbe agli anni 997-999.

Gerberto ad Adelboldo finora sempre prediletto e sempre da prediligere [augura] l'integrità della fede e la costanza dell'integrità

In queste figure geometriche, che hai ricevuto da noi, c'era un certo triangolo equilatero, il cui lato era di trenta piedi, il cateto di ventisei, e secondo la moltiplicazione del lato e del cateto l'area di trecentonovanta. Se tu misuri questo medesimo triangolo senza tener conto del cateto secondo la regola aritmetica, cioè che un lato sia moltiplicato per se stesso e alla sua moltiplicazione si aggiunga il numero di un lato, e da questa somma si prenda la metà, l'area sarà quattrocentosessantacinque. Non vedi in che modo queste due regole siano in contrasto? Ma quella geometrica, che mediante la misura del cateto misurava l'area in trecentonovanta piedi è stata da me discussa più accuratamente ed io non concedo al suo cateto se non venticinque e cinque settimi, e all'area trecentoottantacinque e cinque settimi.

E sia per te regola universale per trovare in ogni triangolo equilatero il cateto, attribuisci sempre la settima parte al lato, e le sei rimanenti parti concedile al cateto.

Affinché tu comprenda meglio ciò che è detto, piace esemplificare con numeri minori. Ti do un triangolo che ha nel lato una lunghezza di sette piedi. Misuro questo così secondo la regola geometrica. Prendo la settima parte del lato e le sei che restano le do all'altezza. Moltiplico per questa il lato e dico sei volte sette, che fanno quarantadue. Di queste la metà, ventuno, è l'area del detto triangolo.

Se questo medesimo triangolo lo misuri con la regola aritmetica, e dici, sette volte sette, che fanno quarantanove e aggiungi il lato, che sono cinquantasei, e dividi fino a pervenire all'area, troverai ventotto. Ecco che così in un triangolo di una sola grandezza le aree sono diverse, cosa che non può accadere.

Ma affinché non ti stupisci più a lungo ti svelerò la causa della differenza. Credo che ti sia noto che si parla di piedi di lunghezza, di piedi quadrati e di piedi cubici, e che per misurare le aree noi non siamo soliti usare se non piedi quadrati. Di questi per quanto piccola parte il triangolo occupi, la regola aritmetica li calcola per interi. Piace disegnare, affinché sia più manifesto, ciò che si dice.

Ecco in questa piccola descrizione ci sono ventotto piedi, sebbene non interi. Per cui la regola aritmetica, prendendo la parte per il tutto, prende i dimezzati con gli interi. Tuttavia la solerzia della disciplina geometrica rigettando le piccole parti che eccedono i lati e componendo le parti dimezzate da tagliare che restano dentro i lati conta soltanto ciò che è racchiuso dalle linee. In effetti in questa piccola descrizione, che misura sette per i lati, se cerchi l'altezza è sei. Moltiplicando questo per sette riempi quasi un quadrato, la cui fronte sia di sei piedi, il lato di sette, e l'area di questo la stabilisci in quarantadue piedi. Se lo dimezzi, lasci un triangolo di ventuno piedi.

Per comprendere più chiaramente avvicina gli occhi e ricordati sempre di me.

La scelta del rapporto 6/7

Come visto in precedenza, il rapporto 26/30 (o il suo equivalente 13/15) fra l'altezza e il lato di un triangolo equilatero si avvicina maggiormente al rapporto corretto, ($\sqrt{3}$)/2, rispetto a quello scelto da Gerberto, 6/7.

Perché scelse questo ultimo rapporto? La risposta la fornisce Paolo Rossi in "Che cosa possiamo ancora imparare dalla scienza medievale?", un articolo contenuto alle pp. 100-104 del volume citato in bibliografia al n. [19] e la sintetizza in una parola: *semplicità*. Ecco alcuni passi dell'articolo:

"…Vorrei rapidamente illustrare queste considerazioni con un esempio, aggiunto ai precedenti, che traggo da una lettura di una delle lettere meno commentate e (forse) meno comprese di Gerbert, quella sul calcolo dell'area del triangolo equilatero, indirizzata ad Adelbold (autore del breve saggio sul volume della sfera) e scritta probabilmente verso i1 997-999. Gerbert parte da una formula, tratta da Boezio, che egli definisce "regola aritmetica" e che utilizza l'antico concetto di "numeri triangolari" per calcolare la somma dei primi N numeri interi a partire dall'area di un triangolo (rettangolo). Gerbert argomenta l'inadeguatezza di questa formula per il calcolo dell'area del triangolo equilatero (ipotesi forse nata dall'osservazione che il triangolo equilatero può essere ottenuto disponendo cerchi in numero crescente su righe in configurazione di massimo impacchettamento, per cui il numero dei cerchi è appunto legato alla somma degli interi, ma che trascura di considerare il fatto che l'impacchettamento riduce la distanza verticale tra le righe di un fattore esattamente uguale al rapporto tra altezza e base dell'equilatero).

"Fin qui niente di particolare, se non che Gerbert si sente in dove di offrire un'alternativa per il calcolo dell'area dell'equilatero, e qui si scontra con le difficoltà di calcolo e di notazione di una matematica che non usa la notazione posizionale né il calcolo simbolico. Propone quindi il valore frazionario 6/7 (= 0,8571...) come misura del rapporto tra altezza e base, al posto del valore esatto $\sqrt{3}/2$ (0,8660...) facilmente deducibile dal teorema di Pitagora. La proposta è salutata con sufficienza dai commentatori moderni, da Bubnov in "*Gerberti Opera matematica*" fino a Riché nella propria traduzione della "*Correspondance*" e a Heilbron su *Nature* nel 2000.

"Questo tipo di commenti è a mio pare veramente esemplare di quanto possa essere frainteso lo spirito della scienza medievale, e fa meritatamente il paio con i giudizi liquidatori, tanto numerosi quanto nella sostanza infondati, espressi a proposito del famoso dibattito filosofico di Ravenna tra Gerbert e Otric di Magdeburgo, narratoci da Richer con dovizia di particolari, ma forse con scarsa comprensione dei termini reali della discussione, e nel quale era precocemente affrontato uno dei temi più importanti per la futura filosofia scolastica, la questione degli "universali".

“Nel caso che ci interessa notiamo infatti innanzitutto che Gerbert conosce molto bene il valore "vero" del rapporto altezza-base nel triangolo equilatero. Ciò è provato da un argomento indiretto ma difficilmente confutabile. Egli infatti avvia il suo ragionamento dal confronto dell'area ottenuta con la “regola aritmetica” con quella calcolata per un triangolo che abbia una base di 30 piedi e un’altezza di 26 piedi, ottenendo nel primo caso 465 e nel secondo caso 390 piedi quadrati.

“Perché mai egli sceglie questo particolare esempio? Nella lettera che ancora possediamo Gerbert non lo dichiara, rinviando Adelbold a un proprio precedente invio di figure geometriche di cui non ci è purtroppo rimasta traccia. Ma possiamo ben apprezzare il fatto che il rapporto 13/15 (= 0,8667…) differisce dal valore esatto per meno di una parte su mille, e che la terna 30-26-15 è la prima tema di interi (maggiori di 10), di cui il minore sia metà del maggiore, che viola la relazione pitagorica per una sola unità, essendo 26x26 +15x15 = 30x30 +1.

“Se ricordiamo che, anche per motivi di notazione, i medievali preferivano ragionare per frazioni e non introdurre numeri irrazionali (da cui anche l'uso sistematico di 22/7 in luogo di π che troviamo ad esempio nel trattato di Adelbold), capiamo bene che la prima "imputazione" di ignoranza matematica viene a cadere. Ma allora perché Gerbert propone il valore 6/7 anziché appunto 13/15? Qui vediamo emergere con chiarezza l'esigenza di un "sapere pratico" che, non essendo ancora schiavo della "precisione" nel senso di Koyré, punta al massimo della semplicità compatibile con una sostanziale correttezza d'impostazione.

“Notiamo quindi che, a partire da 13/15, i rapporti di numeri semplici che possono sostituire questo valore sono soltanto 12/14 (= 6/7) e 14/16 (= 7/8 = 0,875), e notiamo anche che, tra le corrispondenti terne 14-12-7 e 16-14-8, la prima viola la relazione pitagorica per tre unità e la seconda per quattro, per cui con una precisione che è migliore soltanto per una patte su diecimila Gerbert sceglie la prima. L'argomento non è esplicitato e la scelta potrebbe essere anche stata casuale, o dettata da un significato simbolico (6/7 come i giorni della Creazione, nel contesto di un simbolo trinitario, oppure un richiamo alla frazione 1/7 che già compare nell'approssimazione succitata di π). Tuttavia il mancato utilizzo del più maneggevole rapporto di 7/8 ci lascia almeno il sospetto [di] un ragionamento che, lungi dall'essere "ingenuo", è invece sofisticato, anche se non perde di via la "ragion pratica" che impone l'introduzione di un'approssimazione in termini di frazioni semplici…”.

Sempre dal già citato articolo di Paolo Rossi [17] riproduciamo i seguenti passi [pp. 21-22]:

“…Gerbert propone come alternativa per il calcolo l'uso della frazione 6/7 per il rapporto tra l'altezza e la base del triangolo. Si noti innanzitutto che 6/7 è l'inverso di un rapporto superparticolare (sesquisesto), e che per di più la frazione 1/7 entra anche nella formula per l'area del cerchio adottata da Adelboldo, che usa 3+1/7 = 22/7 = 3,14285... al posto di π = 3,14159...

Quanto all'accuratezza dell'approssimazione, notiamo che 6/7 = 0,85714... differisce dal valore corretto √/2 = 0,86602... per non più dell'l%, ed era quindi una stima accettabile, all'epoca di Gerbert, per la maggior parte dei fini pratici. Ma la domanda cui ci piacerebbe maggiormente poter dare una risposta è un'altra: Gerbert conosceva il valore vero del rapporto (e quindi il teorema di Pitagora)? Possiamo ricostruire con una certa accuratezza le conoscenze di Gerbert a partire dal fatto che il suo punto di partenza è l'analisi di un triangolo in cui il rapporto tra altezza e base è 26/30 (= 0,86666...). Non soltanto merita notare che il rapporto 13/15 differisce dal valore esatto per meno di una parte su mille, ma ancor più interessante è il fatto che la terna 15-26-30 è la prima terna di interi maggiori di 10, di cui il minore è la metà del maggiore, ché viola la relazione pitagorica di una sola unità:

26*26 + 15*15 = 30*30 + 1.

Si noti che √3 è irrazionale, quindi non esistono terne esattamente pitagoriche del tipo indicato, e 26/30 è senza dubbio la miglior approssimazione razionale ottenibile con numeri "piccoli": un miglioramento si otterrebbe soltanto con la terna 41-71-82, in quanto

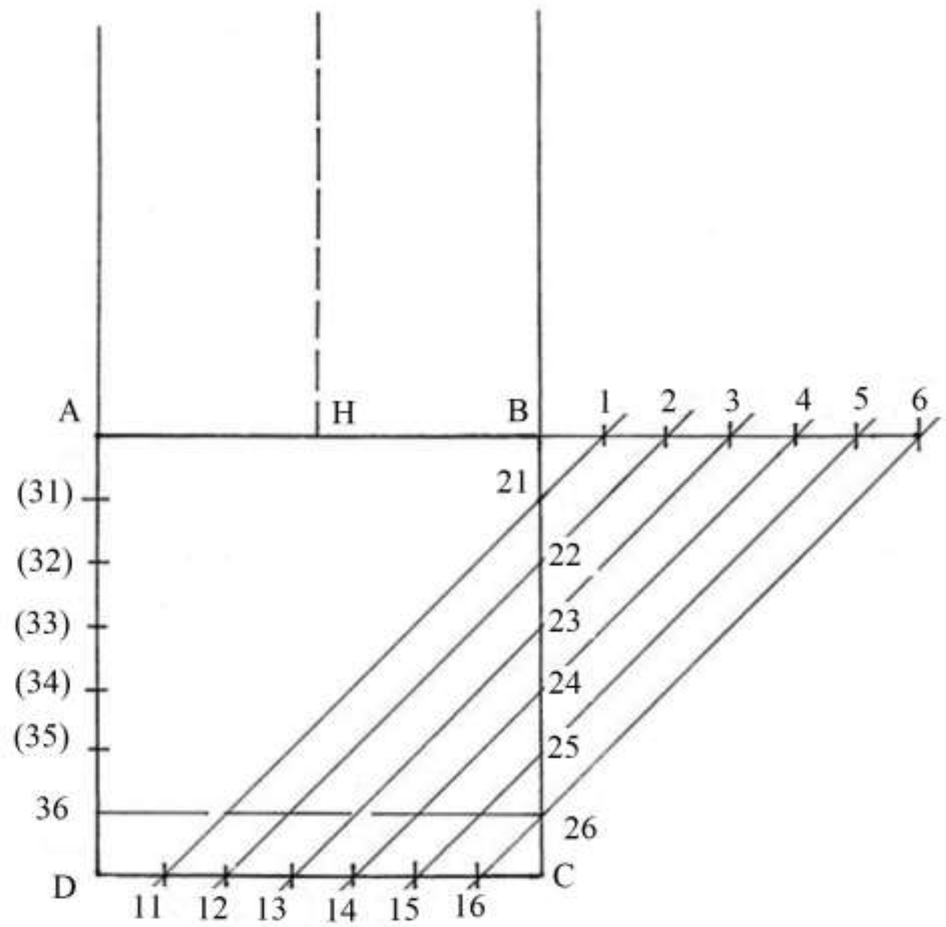
71/82 = 0,86585..., ma certamente i numeri in gioco, anche se interi, sono del tutto inadatti a calcoli pratici e mnemonici. Ma anche a prescindere da queste considerazioni è evidente che

Gerbert voleva fornire una regola basata su numeri di una sola cifra (*in minoribus numeris libet exemplificare*), e non v'è dubbio che con questa restrizione 6/7 è la migliore scelta, in quanto 7/8 = 0,875 è più distante dal valore esatto, seppure soltanto per una parte su diecimila.

L'aspetto della precisione di queste esemplificazioni getta una luce nuova anche sugli strumenti astronomici creati da Gerberto, dove la valenza didattica non può essere separata dalla precisione delle dimostrazioni e delle misure…”.

Il triangolo *quasi* equilatero con altezza uguale a 6/7 della lunghezza del lato di base può essere costruito con precisione con il metodo grafico descritto di seguito, metodo probabilmente ignoto a Gerberto, perché richiede diverse conoscenze geometriche e capacità operative piuttosto differenti.

AB è il lato orizzontale del triangolo da costruire e H è il suo punto medio. Sul lato AB disegnare il quadrato ABCD e prolungare verso destra AB e verso l’alto i lati AD e BC:



Dal punto B misurare *sei* segmenti di uguale lunghezza per fissare i punti 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Dal punto C riportare *sei* segmenti di lunghezza uguale a quella dei segmenti appena stabiliti su B-6 e stabilire i punti 16, 15, 14, 13, 12 e 11. La lunghezza del segmento D-11 non ha alcuna rilevanza sul prosieguo della costruzione.

Tracciare le linee che collegano le coppie di punti 1-11, 2-12, 3-13, 4-14, 5-15 e 6-16.

Il fascio di linee interseca il lato BC in *sei* punti (da 21 a 26) che lo dividono in *sette* parti uguali.

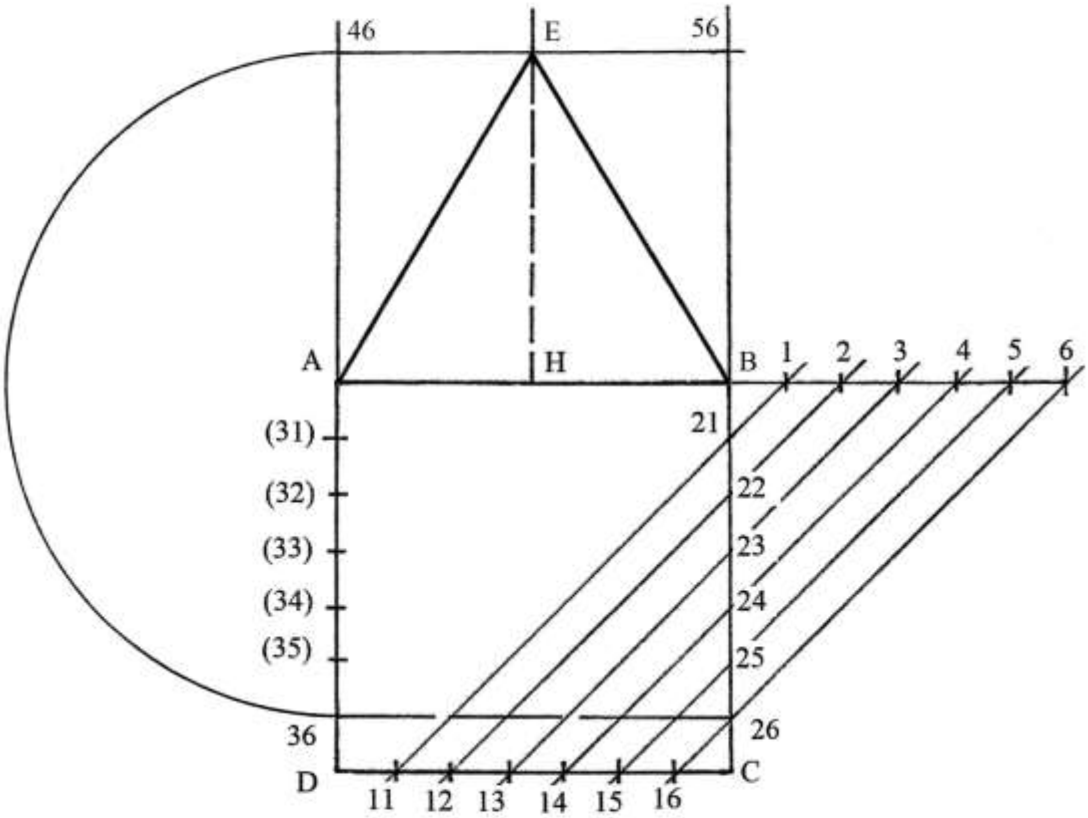
Dal punto 26 condurre la parallela al lato DC fino a determinare il punto 36.

I segmenti B-26 e A-36 hanno la stessa lunghezza pari a

B-26 = A-36 = 6/7 * BC = 6/7 * AB .

I due segmenti sono lunghi quanto l'altezza del triangolo *quasi* equilatero con lato di base lungo AB.

Fare centro nel punto A e, con raggio A-36, tracciare una semicirconferenza che stabilisce il punto 46. Con la stessa apertura fare centro nei punti 46 e B e disegnare due archi che si incrociano nel punto 56.



Collegare i punti 46 e 56 e tracciare un segmento parallelo a A-46 fino a determinare il punto E.

AEB è il triangolo *quasi* equilatero secondo la regola di Gerberto.

La formula dell'area del triangolo *quasi* equilatero usata da Gerberto è:

$\text{Area}_{\text{AEB}} = AB * \text{altezza}/2 = AB/2 * (\text{altezza}) = AB/2 * (6/7 * AB) = 3/7 * AB^2$.

<u>Quadratura del triangolo *quasi* equilatero</u>

Il quadrato che ha area uguale a quella di AEB ha lato l lungo

$\text{lato}_{\text{QUADRATO}} = \sqrt{(\text{Area}_{\text{AEB}})} = \sqrt{(3/7 * AB^2)} = AB * \sqrt{(3/7)}$

Occorre calcolare il valore dell'espressione √(3/7): la soluzione non può essere ottenuta per via aritmetica ma soltanto con una costruzione geometrica.

Sulla base AB costruire il quadrato ABCD.

Tracciare le diagonali A-56 e 46-B nel rettangolo A-46-56-B: esse si incontrano nel punto K che è il punto medio dell'altezza EH.

Dal punto K condurre una parallela al lato AB fino a fissare il punto L.

Fare centro nel punto B e, con raggio BL, tracciare un arco dal punto L fino a incrociare il prolungamento di AB in M.

Il segmento AM è lungo

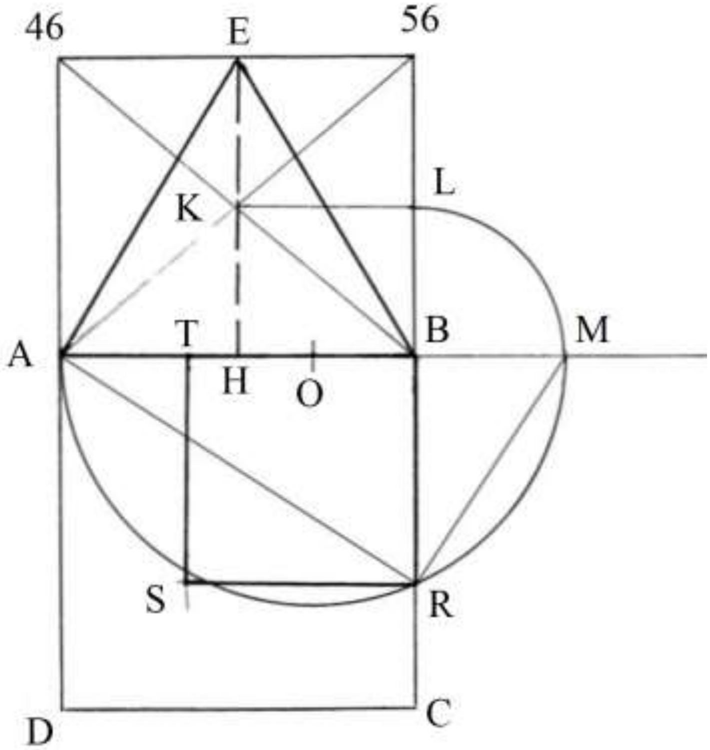
AM = AB + BM = AB + BL.

Ma BL è:

BL = EH/2 = (6/7 * AB) * ½ = 3/7 * AB .

Ne consegue:

AM = AB + 3/7 * AB = 10/7 * AB .



Occorre determinare la lunghezza del segmento medio proporzionale fra AB e BM.

Stabilire il punto medio di AM: è O. Fare centro in O e con raggio OA = OM disegnare una semicirconferenza che taglia il lato BC nel punto R.

ARM è un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio.

La lunghezza di BR è medio proporzionale fra le lunghezze di AB e BM.

Chiamando X la lunghezza di BR si ha:

AB : x = x : BM

AB : x = x : 3/7 * AB

x^2 = 3/7 * AB^2 .

La lunghezza di X è:

x = AB * (√3/7) = BR = lato del quadrato .

Valgono anche le seguenti relazioni:

$BR^2 = AB * BM = 3/7 * AB^2$ e $BR = AB * \sqrt{(3/7)}$

BRST è il quadrato che ha la stessa area del triangolo AEB.

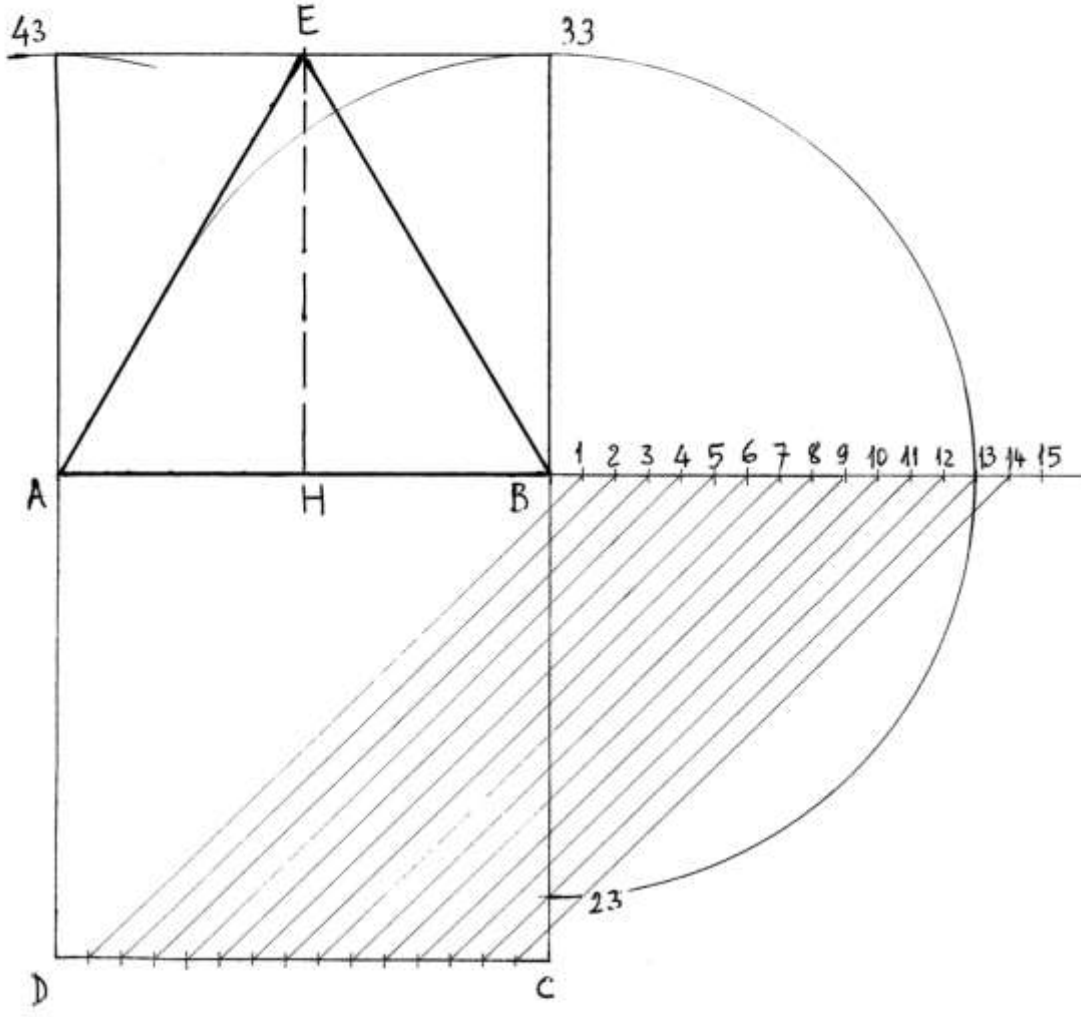
<u>Costruzione del triangolo *quasi* equilatero 26/30</u>

Il triangolo *quasi* equilatero con altezza lunga i 26/30 del lato orizzontale può essere costruito con precisione usando lo stesso metodo già visto per il triangolo 6/7.

In primo è opportuno ridurre ai minimi termini la frazione:

altezza = 26/30 * lato = 13/15 * lato .

La figura che segue descrive la costruzione:



AB è il lato orizzontale da tracciare. Su di esso è costruito il quadrato ABCD.

Fissare il punto medio di AB: è H.

Prolungare verso destra il lato AB e verso l'alto i lati AD e BC. Parallelamente a questi ultimi due prolungamenti, a partire dal punto H disegnare una linea verso l'alto.

Sul prolungamento di AB, stabilire quindici lunghezze uguali fino al punto 15.

Effettuare la stessa operazione sul lato CD, a partire da C.

Tracciare i fasci di linee parallele come visto nel caso del triangolo *quasi* equilatero 6/7 .

Il lato BC è diviso in 15 parti uguali. Fare centro nel punto B e, con raggio B-23, disegnare una semicirconferenza che fissa il punto 33. Con la stessa apertura fare centro nel punto A e determinare il punto 43.

Collegare i punti 43 e 33: la linea interseca la perpendicolare uscente da H in un punto, E.

AEB è il triangolo *quasi* equilatero che ha altezza HE lunga

$$HE = 13/15 * AB = 26/30 * AB.$$

Una costruzione che usasse il fascio di rette parallele per dividere un segmento era conosciuta da Gerberto? All'epoca in cui visse, il principale materiale scrittorio era la pergamena: i suoi fogli venivano preparati per la scrittura con la *rigatura* che consisteva nel tracciare righe orizzontali equidistanti all'interno del rettangolo di scrittura (lo *specchio*). La carta fu portata in Europa dagli Arabi e fu usata a partire da un'epoca successiva a quella nella quale visse Gerberto.

L'operazione è simile a quella che attualmente compiono le cartiere per produrre i *fogli a righe*:

La probabile origine dei rapporti 26/30 e 6/7

L'altezza del triangolo equilatero è uguale a $(\sqrt{3})/2 \approx 0,866$ volte la lunghezza del lato del triangolo stesso.

La presenza dell'operazione aritmetica di radice $(\sqrt{3})$ nella precedente formula creava grandi problemi nel Medioevo. Era necessario aggirare l'ostacolo usando formule pratiche approssimate quali erano 6/7 e 26/30.

L'origine della seconda formula può essere spiegata con una semplice proporzione:

$$\sqrt{3} : 2 = x : 30 .$$

Per eliminare la presenza della radice quadrata era opportuno moltiplicare il denominatore di $(\sqrt{3})/2$ (2) per un numero intero (15) per ottenere il nuovo denominatore, 30:

$$x = (\sqrt{3} * 30)/2 \approx 25,98 \rightarrow 26.$$

Il numeratore della seconda frazione è, arrotondando *per eccesso* all'intero più vicino, 26.

L'origine del rapporto, meno preciso, 6/7 può essere spiegata in modo simile:

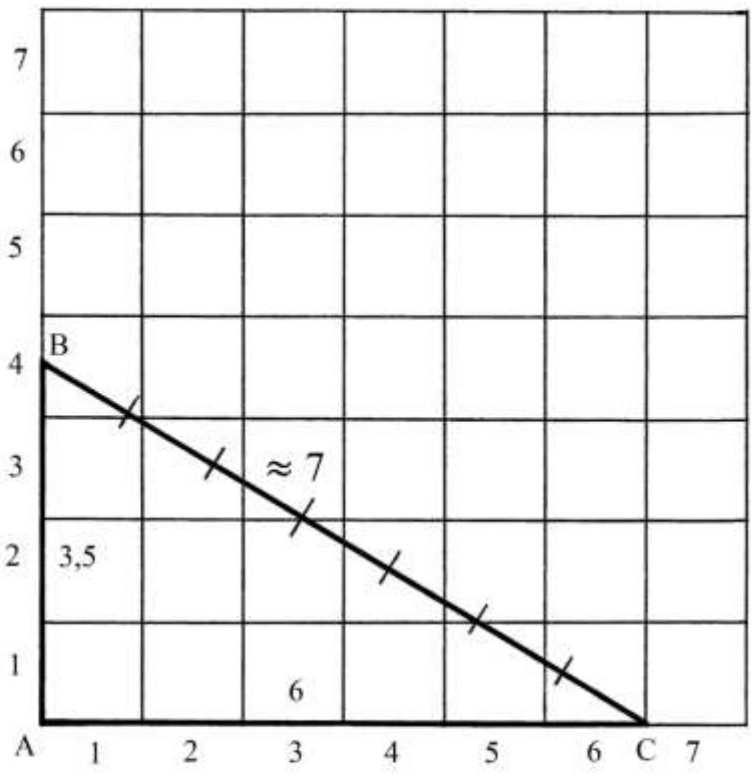
$\sqrt{3} : 2 = y : 7$ da cui

$y = (\sqrt{3} * 7)/2 \approx 6,06 \rightarrow 6$.

Il risultato è arrotondato *per difetto* all'intero più vicino, 6.

La squadra di Gerberto

Nella sua molto documentata tesi di dottorato discussa nel luglio 2002 [voce 9 della bibliografia], il ricercatore catalano Josep Lluis i Ginovart ha avanzato l'ipotesi che Gerberto abbia utilizzato una squadra, a forma di triangolo rettangolo, ricavata dal triangolo da lui impiegato per calcolare l'area approssimata del triangolo equilatero:

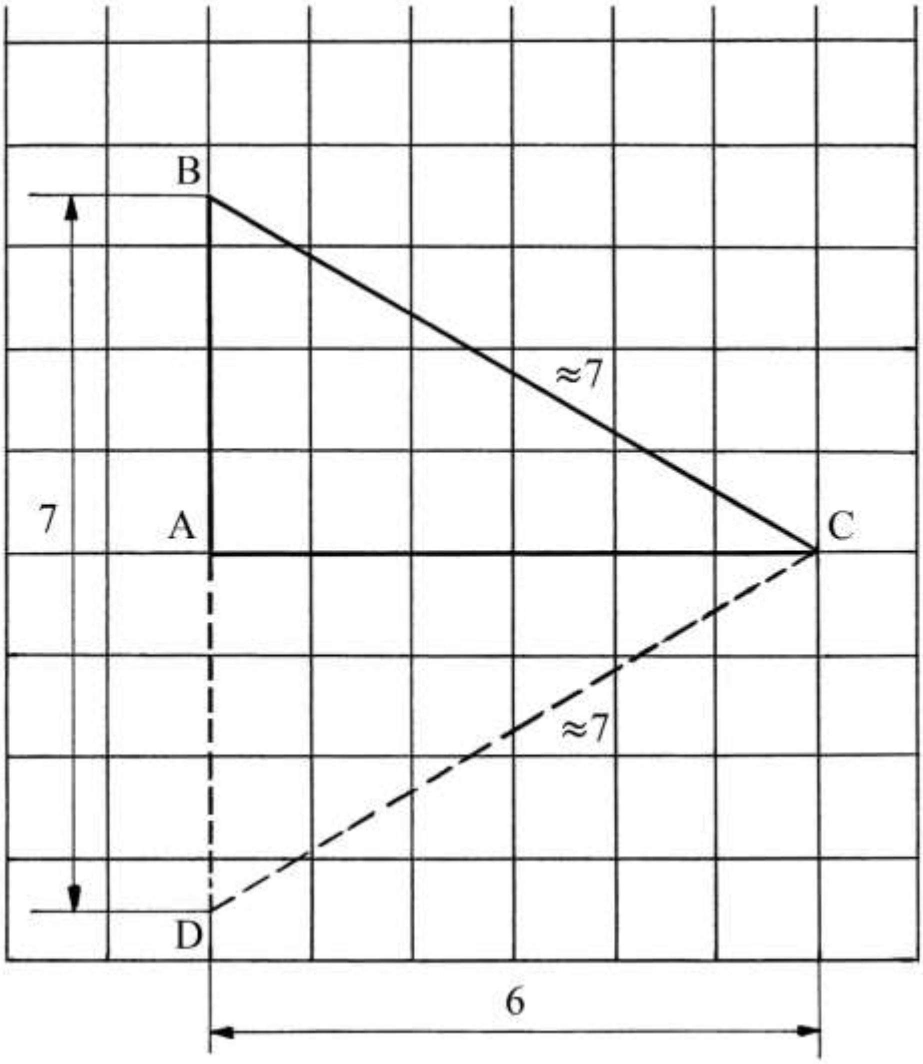


I due cateti AB e AC sono lunghi rispettivamente 3,5 e 6. L'ipotenusa BC è *approssimativamente* lunga 7; in realtà essa è:

$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \sqrt{(3,5^2 + 6^2)} = \sqrt{(12,25 + 36)} = \sqrt{48,25} \approx 6,946$ e cioè *quasi* 7.

È dubbio ipotizzare che la ipotetica squadra di Gerberto possedesse l'ipotenusa: la sua presenza era praticamente sconosciuta durante il Medioevo.

La squadra potrebbe derivare dal triangolo equilatero approssimato studiato da Gerberto:

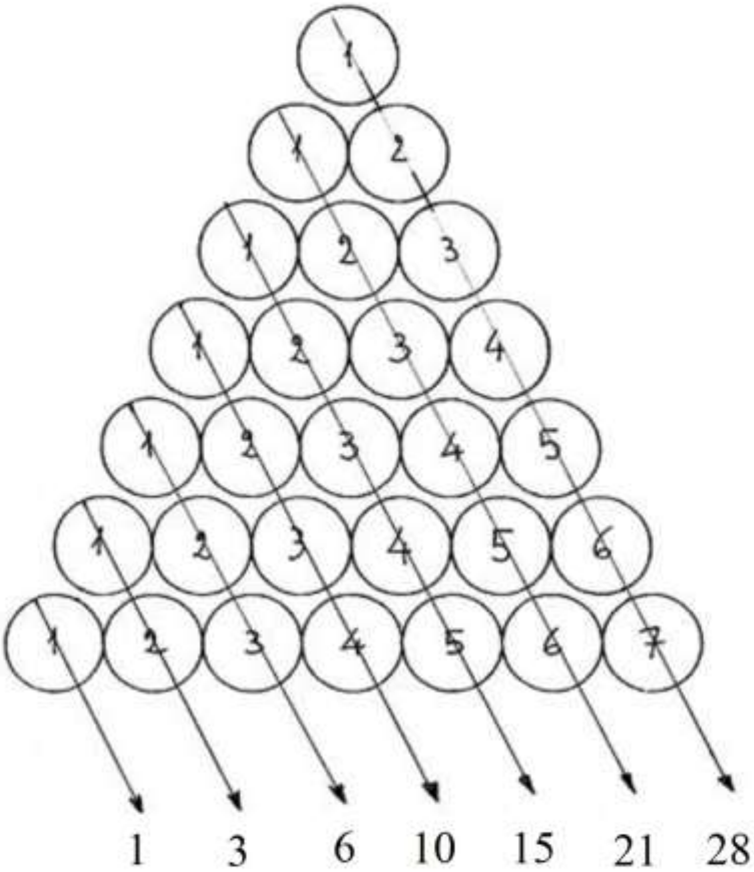


Il triangolo sarebbe diviso lungo l’altezza AC e sarebbe stata asportata la superficie corrispondente al triangolo rettangolo ACD.

- APPROFONDIMENTO -

I numeri triangolari

In Matematica sono chiamati *numeri triangolari* dei numeri interi rappresentati in forma di triangolo. Il diagramma che segue presenta i primi *sette* numeri triangolari:



I numeri sono sommati lungo le diagonali. Ecco i *sette* numeri triangolari:
1 = 1
3 = 1 + 2
6 = 1 + 2 + 3
10 = 1 + 2 + 3 + 4
15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5
21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7

Lo schema usato da Boezio utilizza dei cerchietti organizzati in righe orizzontali sovrapposte a formare il numero triangolare 28.

Gerberto usò lo stesso schema sostituendo le circonferenze con dei piccoli quadrati impacchettati.

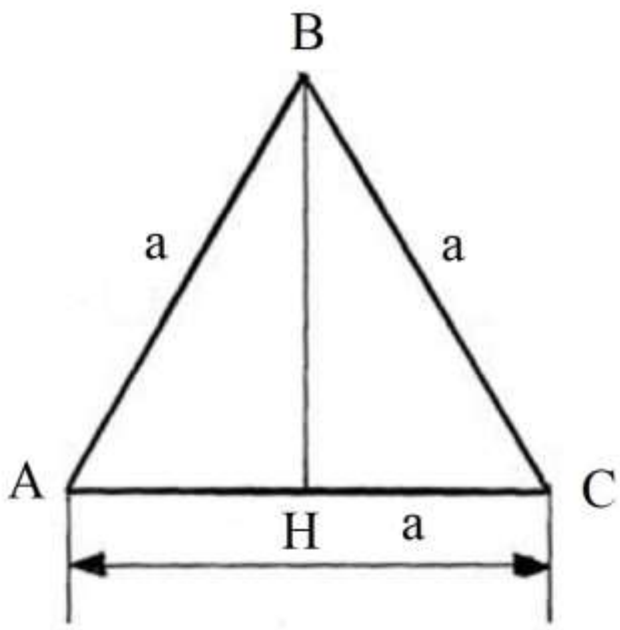
La somma dei numeri che formano il numero triangolare 28 è data da:

$$(7 * (7 + 1)/2 = 7 * 8/2 = 56/2 = 28 .$$

Chiamando a il numero dei cerchietti o dei quadratini (o dei semplici punti) posti alla base della struttura triangolare, il numero triangolare è dato da:

$$N_T = a * (a + 1)/2 .$$

Gli Agrimensori Romani calcolavano l'area S di un triangolo equilatero con lato lungo a, con la stessa formula:



$S_{\text{AGRIMENSORI}} = a * (a + 1)/2$.

La formula corretta è:

$S = a^2 * (\sqrt{3})/4$.

Facciamo un esempio, con lato a lungo 10. Con la formula corretta l'area è:

$S = 10^2 * (\sqrt{3})/4 \approx 43{,}30$.

Con la formula degli Agrimensori, il risultato è *errato* per eccesso:

$S_{\text{AGRIMENSORI}} = 10 * (10 + 1)/2 = 55$.

Boezio usò questa ultima formula errata che Gerberto criticò.
La formula errata era chiamata *regola aritmetica*.

La tabella che segue confronta i risultati e quelli errati prodotti dalla formula degli agrimensori per alcuni valori della lunghezza del lato del triangolo equilatero:

Lunghezza lato triangolo equilatero	Area secondo formula corretta	Area secondo formula agrimensori
4	6,928	10
5	10,825	15
6	15,588	21
7	21,217	28
8	27,712	36
9	35,074	45

- -

I numeri figurati

Per capire meglio il senso delle critiche di Gerberto al metodo proposto da Boezio è necessario approfondire l'argomento.

I *numeri figurati* sono numeri interi rappresentati con delle entità geometriche (punti, cerchietti o quadratini) disposte a formare degli schemi geometrici regolari nel piano oppure nello spazio. Trattandosi delle aree dei poligoni che sono figure piane, saranno tralasciati i numeri figurati nello spazio.

I primi matematici che si occuparono dell'argomento furono gli appartenenti alla Scuola pitagorica.

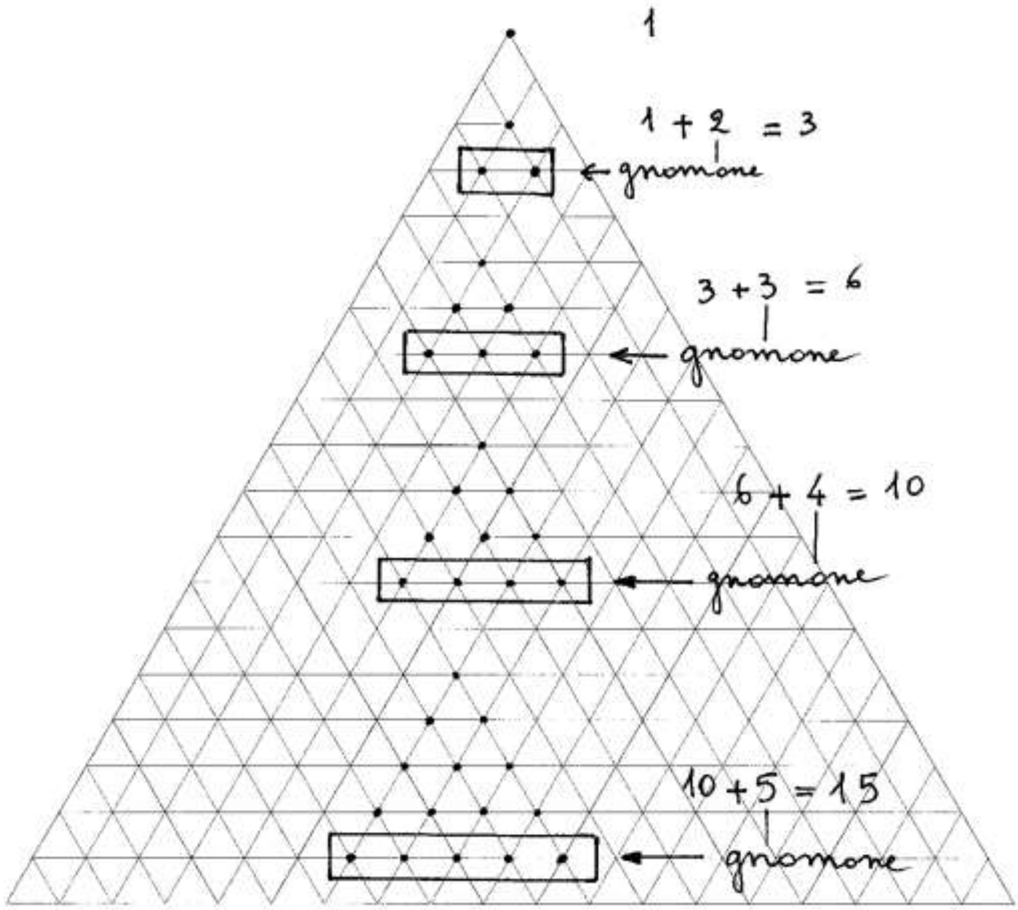
I *numeri poligonali* sono una categoria dei numeri figurati: la loro denominazione è dovuta alla disposizione di una serie ordinata di punti che formano i vertici di poligoni regolari.

Un numero poligonale forma un *poligono regolare* costituito da un certo numero *intero* di entità geometriche.

Le formule usate dai Pitagorici per calcolare il numero degli oggetti formanti i numeri poligonali furono successivamente applicate, in maniera *erronea*, dai Gromatici romani, da Boezio e da tanti geometrici e pratici dell'Alto medioevo al calcolo dell'area dei corrispondenti poligoni regolari: è ciò che, come abbiamo già visto, Gerberto rimproverava per il caso dell'area del triangolo equilatero.

Nel precedente paragrafo abbiamo incontrato i più semplici numeri poligonali: i *numeri triangolari*. Approfondiamo la conoscenza di questi più semplici numeri.

Il numero triangolare 3 è formato dal numero 1 e da uno *gnomone* uguale a 2, come spiega lo schema che segue; il numero triangolare successivo, 6, è formato dal precedente numero, 3, al quale è aggiunto uno *gnomone* uguale a 3.

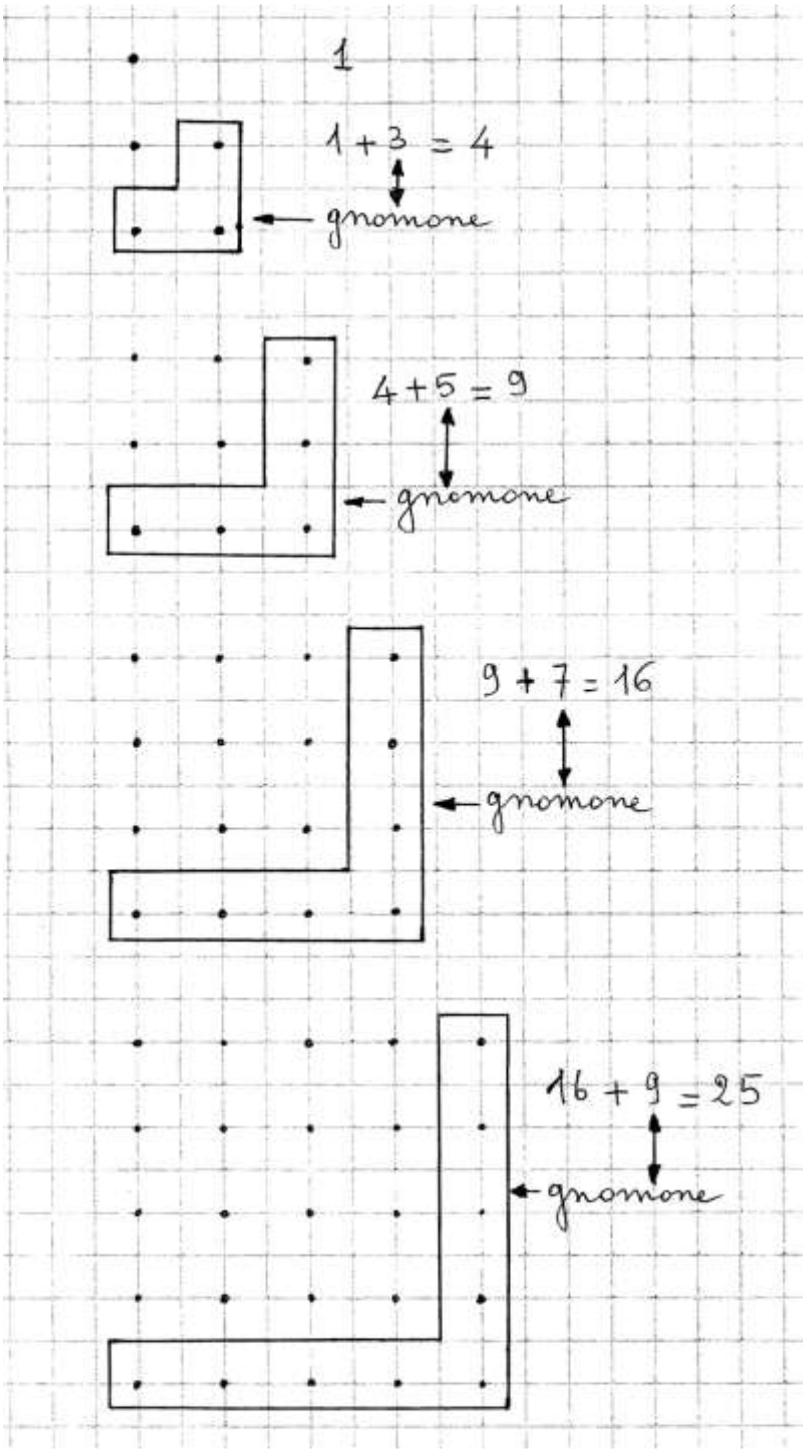


La tabella che segue riassume la successione dei primi sei numeri triangolari:

Numeri triangolari	Gnomone aggiuntivo	Numeri triangolari successivi
0	1	1
1	2	3
3	3	6
6	4	10
10	5	15
15	6	21

La successione degli *gnomoni* aggiuntiva è una *progressione aritmetica* di *ragione 1*.

Nel caso dei *numeri quadrati* lo gnomone ha la forma di una squadra ad angolo retto con braccia di uguale lunghezza, come mostra lo schema che segue:



Gli gnomoni aggiuntivi formano una progressione aritmetica formata da *numeri dispari* con ragione uguale a 2.

I numeri quadrati sono dati dalla successione dei quadrati dei *numeri naturali*, come riassume la tabella che segue:

Numeri quadrati	Gnomone aggiuntivo	Numeri quadrati successivi
0	1	$1 = 1^2$
1	3	$4 = 2^2$
4	5	$9 = 3^2$
9	7	$16 = 4^2$
16	9	$25 = 5^2$
25	11	$36 = 6^2$

La differenza fra un numero quadrato e il precedente (o il successivo) è sempre un *numero dispari*.

La tabella che segue riassume le proprietà dei primi sei *numeri pentagonali*:

Numeri pentagonali	Gnomone aggiuntivo	Numeri pentagonali successivi
0	1	1
1	4	5
5	7	12
12	10	22
22	13	35
35	16	51

Gli gnomoni aggiuntivi formano una *progressione aritmetica* di *ragione 3*.

Infine, la tabella che segue contiene le proprietà dei primi sei numeri esagonali:

Numeri esagonali	Gnomone aggiuntivo	Numeri esagonali successivi
6	0	6
6	9	15
15	13	28
28	17	45
45	21	66
66	25	91

Gli gnomoni aggiuntivi formano una *progressione aritmetica* di ragione 4.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Crescendo il numero degli oggetti aumentano le dimensioni e la complessità dei poligoni. Gli schemi geometrici che possono assumere i numeri poligonali sono infiniti.

La figura che segue mostra gli schemi dei primi tre *numeri quadrati*:

1

totale 1

1	2
1	2

totale 4

1	2	3
1	2	3
1	2	3

totale 9

Le figure che seguono descrivono i tre successivi numeri quadrati:

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

totale 16

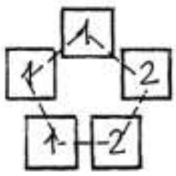
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

totale 25

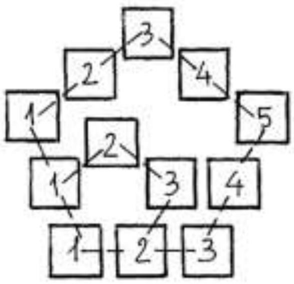
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

totale 36

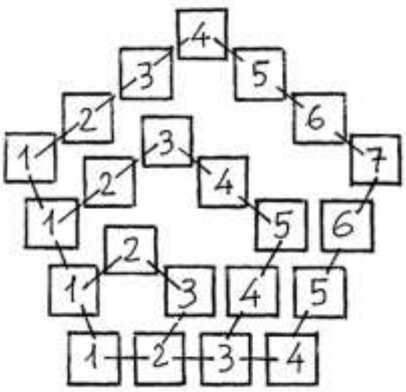
Le figure che seguono presentano gli schemi dei *numeri pentagonali*:



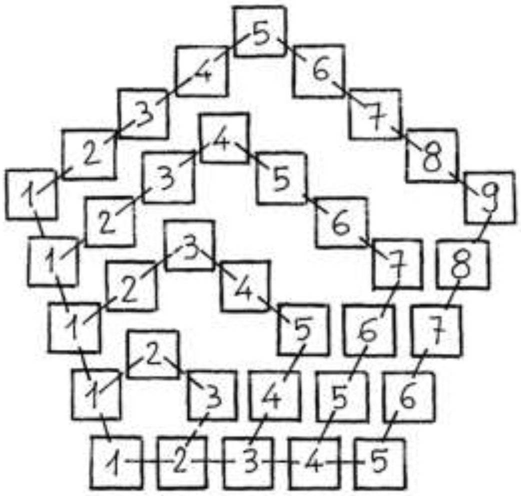
totale 5



totale 12

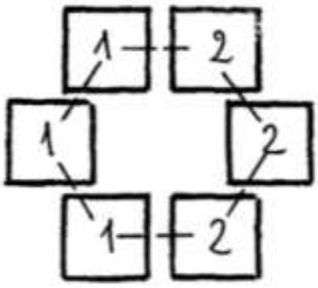


totale 22

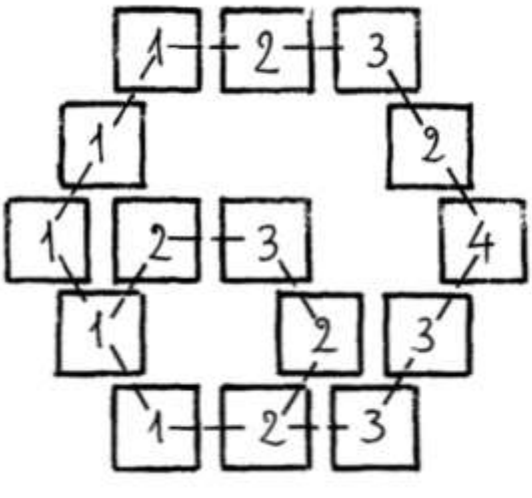


totale 35

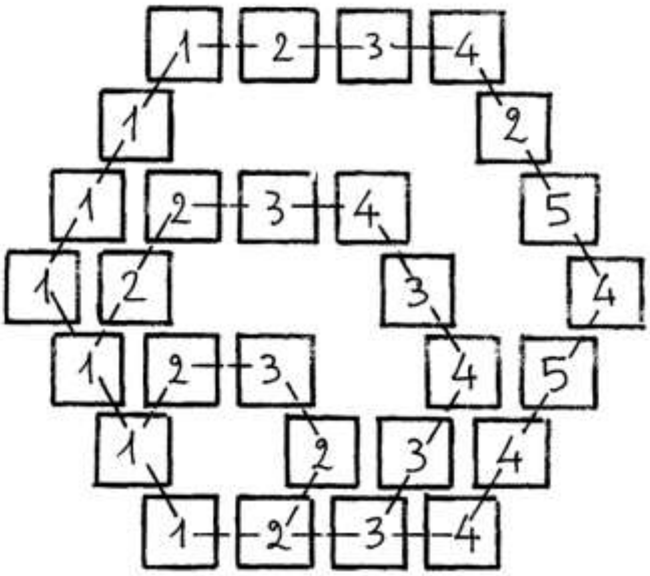
Infine, le figure che seguono descrivono gli schemi dei primi *numeri esagonali*:



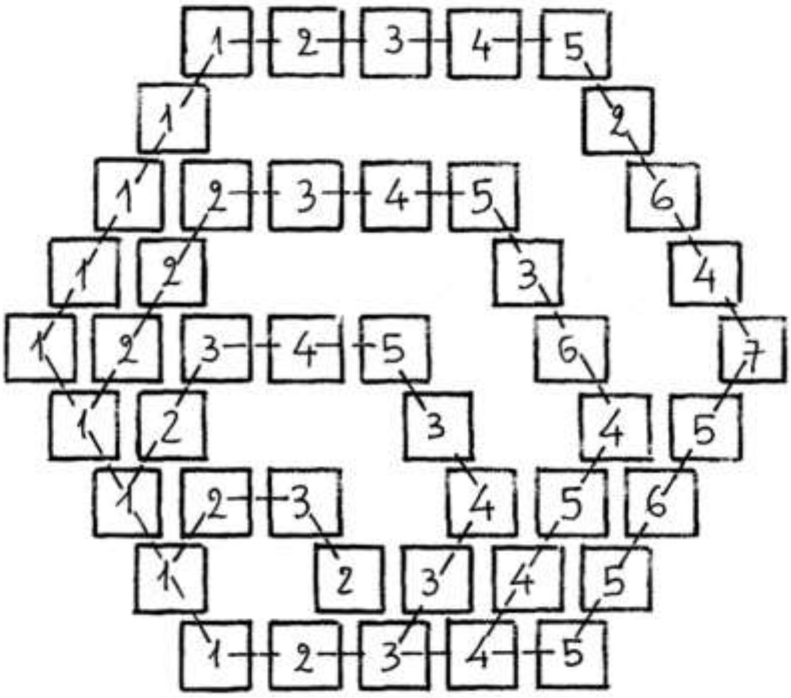
totale 6



totale15



totale 28



totale 45

- APPROFONDIMENTO -

Le formule relative ai numeri poligonali

La tabella che segue contiene i numeri poligonali con valori compresi fra 1 e 12 per gli schemi poligonali dal triangolo equilatero al dodecagono regolare e le relative formule:

numeri poligonali	formule	numero elementi degli schemi (N)									
triangolari	$\frac{N^2+N}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadrati	N^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
pentagonali	$\frac{3N^2-N}{2}$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
esagonali	$2N^2-N$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
ettagonali	$\frac{5N^2-3N}{2}$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
ottagonali	$3N^2-2N$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
ennagonali	$\frac{7N^2-5N}{2}$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
decagonali	$4N^2-3N$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370
endecagonali	$\frac{9N^2-7N}{2}$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415
dodecagonali	$5N^2-4N$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460
ragioni delle progressioni aritmetiche		0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Le singole formule derivano da una formula generale che deriva da quelle relative alle *progressioni aritmetiche*.

- -

APPENDICE

LE FIGURE DELLA GEOMETRIA DI GERBERTO

La *Geometria Gerberti* è suddivisa in *sette* parti:

I) Introduzione: definizione della geometria.
II) Il punto, la linea, la superficie, il volume.
III) Le unità di misura.
IV) Le figure e gli angoli.
V) Il triangolo.
VI) Il triangolo rettangolo pitagorico.
VII) Gli altri triangoli rettangoli.

La Geometria Gerberti fa parte degli scritti *sub-Euclidei* della fine del X secolo: questa espressione definisce la *geometria pratica* degli autori dell'alto Medioevo latino che non hanno avuto accesso diretto agli Elementi di Euclide.

Sia Damien Roessler [15] che Marta Materni [12] ritengono che il testo geometrico di Gerberto ci sia giunto incompleto perché si interrompe con l'esame del triangolo equilatero (figure 99 e 100 della *quinta tavola* di Olleris) perché non contiene alcuna trattazione dei triangoli ottusangoli e acutangoli e dei triangoli rettangoli non pitagorici. Forse l'opera doveva essere completata con la geometria dello spazio. Le parti mancanti sono andate perdute oppure, a causa dei suoi crescenti impegni, Gerberto – Silvestro II non ha potuto completare il suo lavoro?

Nel trattato dell'Olleris è fra l'altro riprodotto il trattato geometrico in latino e sono pure contenute *cinque* tavole con disegni numerati da 1 a 100.

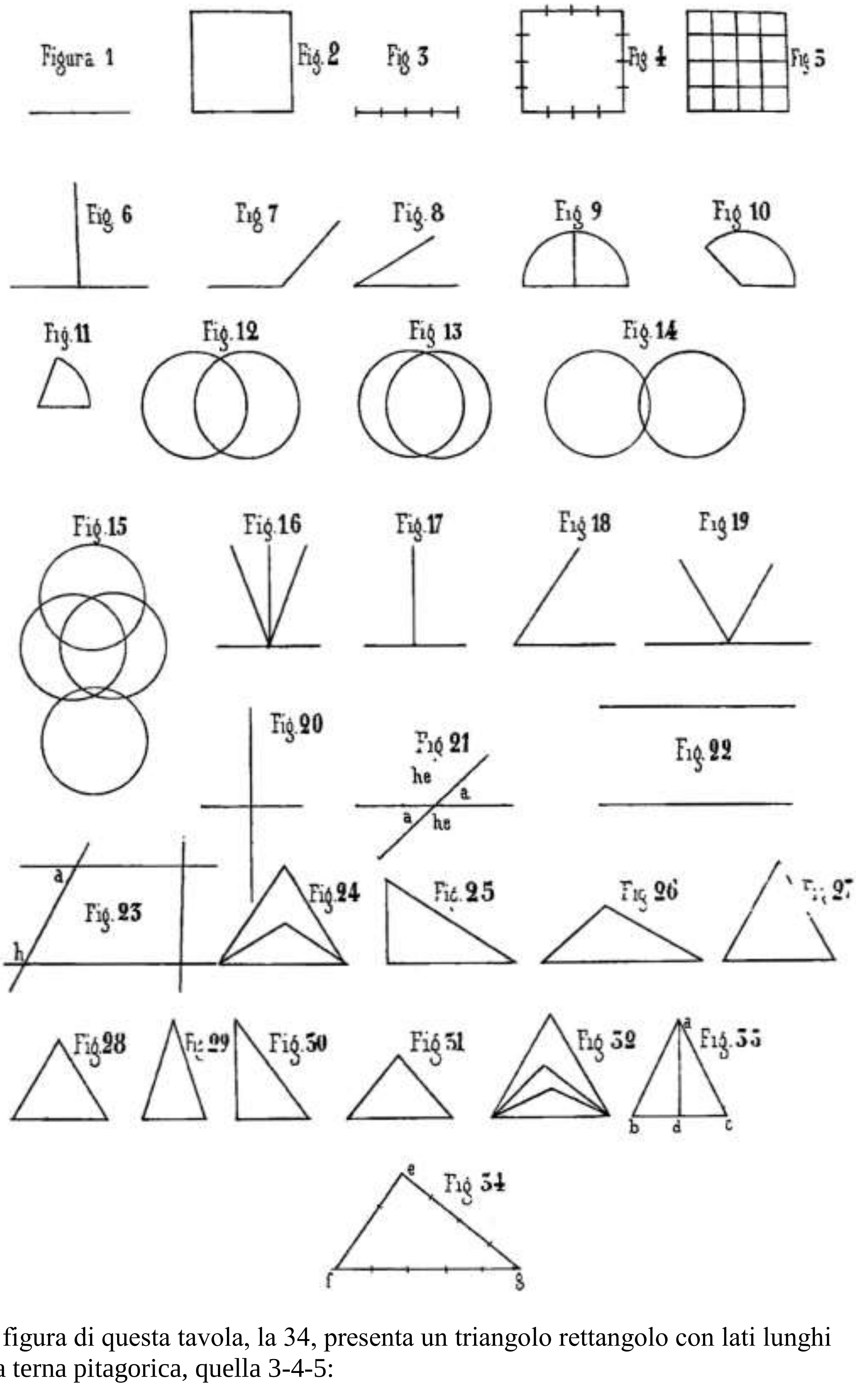
Le stesse tavole sono state poi inserite nello studio della Sarrade che ne ha approfondito il contenuto e il significato.

Il *terzo capitolo* è dedicato alla descrizione delle unità di misura lineari e di superficie, tutte ricalcate su quelle in uso nell'antica Roma: nella biblioteca dell'Abbazia di Bobbio Gerberto ebbe sicuramente a disposizione i manoscritti dei Gromatici romani dai quali trasse molti contenuti e, fra gli altri, le unità di misura romane, oltre a concetti geometrici.

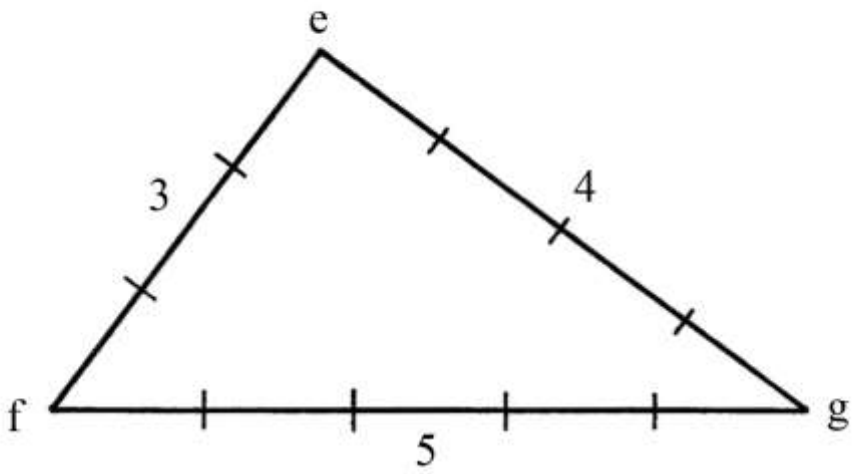
Nota: in questo articolo sono descritti e approfonditi alcuni dei problemi illustrati da Gerberto, e riprodotti dalle cinque tavole dell'Olleris, perché, a giudizio di chi scrive, ritenuti significativi.

La prima tavola

Nella *prima tavola* sono presentate alcune figure geometriche piane:



L'ultima figura di questa tavola, la 34, presenta un triangolo rettangolo con lati lunghi secondo la prima terna pitagorica, quella 3-4-5:



Le lettere apposte ai vertici sono sempre *minuscole*.

La seconda tavola

La *seconda tavola* contiene tre figure: la 35, la 36 e la 37.

Fig. 35

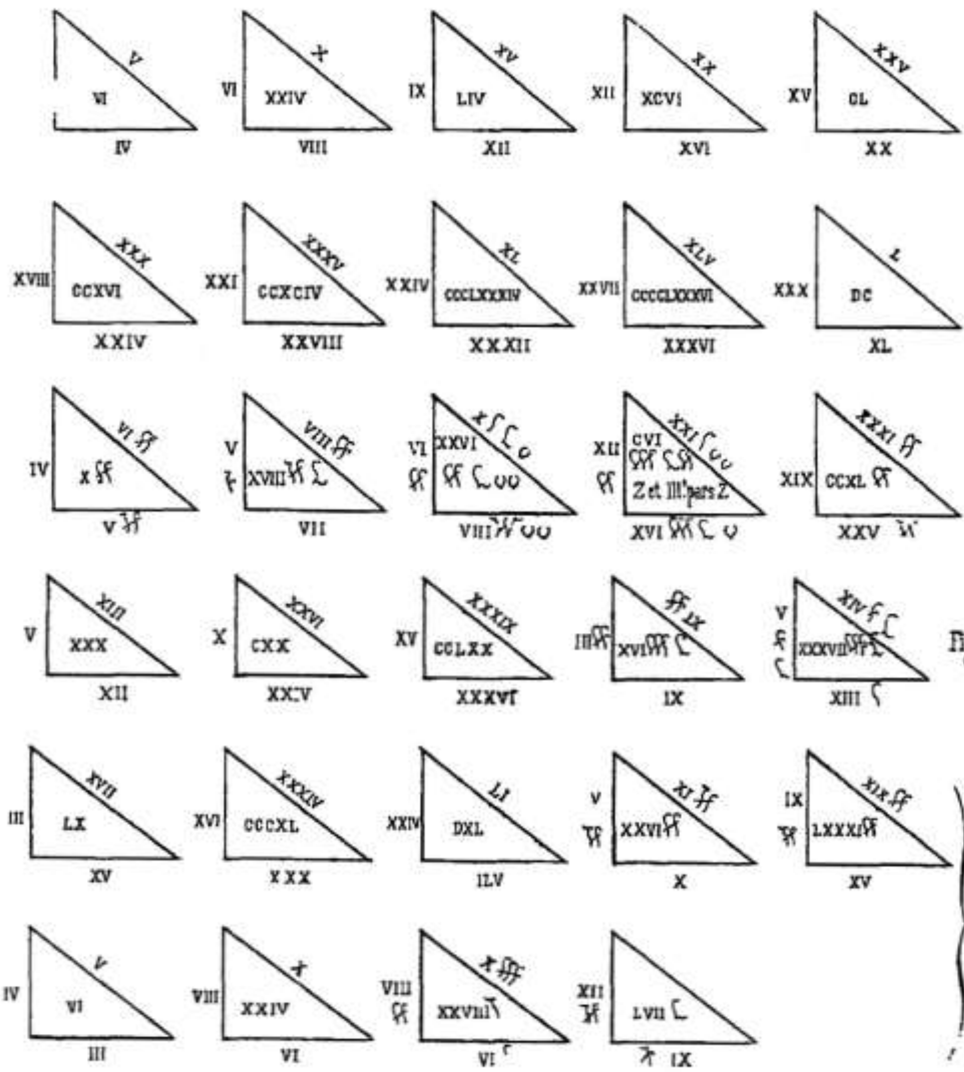


Fig. 36

Fig. 37

Sono presentati 29 *triangoli rettangoli* ai quali è applicato il cosiddetto teorema di Pitagora: per ciascuno di essi è correttamente calcolata l’area, scritta all’interno dei singoli poligoni.

Nella figura 35 sono riprodotti 15 esempi di triangoli rettangoli allineati su tre righe di cinque poligoni.

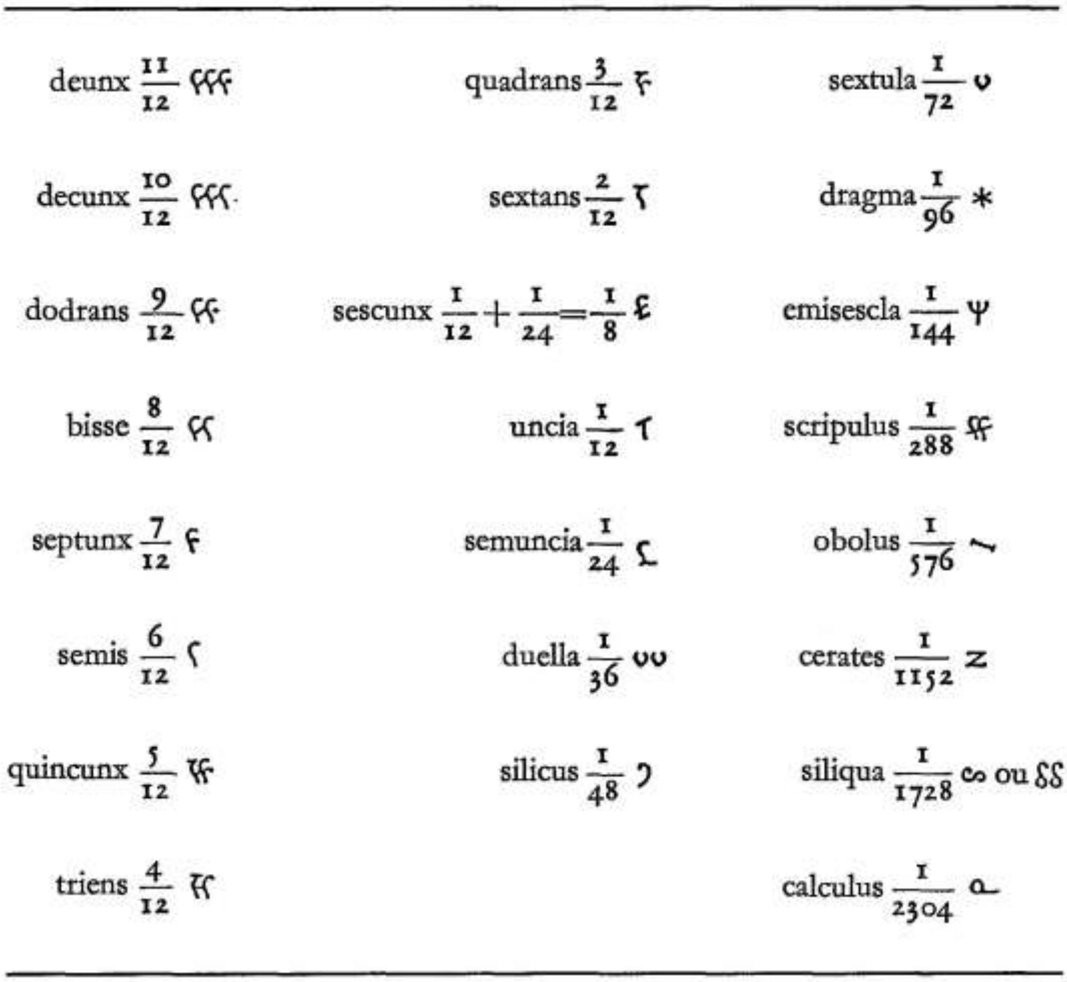
Tutti i triangoli recano scritte le lunghezze dei tre lati e al loro interno le aree: tutte le cifre sono espresse in *numeri romani*, benché Gerberto conoscesse i numeri indo-arabici.

La prima riga della figura 35 presenta esempi di triangoli con lati lunghi in proporzione alla terna 3-4-5, da sinistra verso destra:

* terna primitiva 3-4-5;
* terna derivata 6-8-10;
* terna derivata 9-12-15;
* terna derivata 12-16-20;
* terna derivata 15-20-25.

La seconda riga prosegue con cinque terne derivate dalla 3-4-5:
* terna derivata 18-24-30;
* terna derivata 21-28-35:
* terna derivata 24-32-40;
* terna derivata 27-36-45;
* terna derivata 30-40-50.

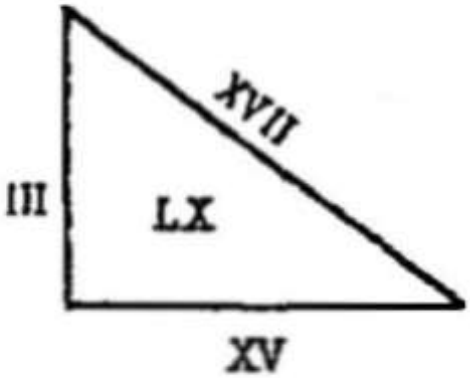
La terza riga della figura 35 contiene cinque triangoli rettangoli con lati e aree espressi con numeri con parti frazionarie, queste ultime rappresentate con simboli dei quali la Sarrade ha fornito, a p. 21, del suo studio l'interpretazione che è riprodotta nella figura che segue (con i relativi nomi latini):

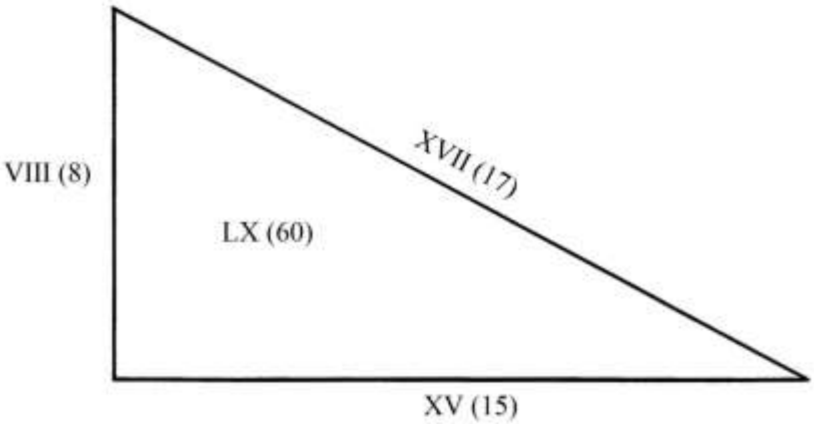


La figura 36 contiene una sola riga. I primi tre triangoli sono basati sulla terna pitagorica 5-12-13, nell'ordine da sinistra verso destra:
* terna primitiva 5-12-13;
* terna derivata 10-24-26;
* terna derivata 15-36-39.

I primi tre triangoli della prima riga della figura 37 sono derivati dalla terna 8-15-17:
* terna primitiva 8-15-17;
* terna derivata 16-30-34;
* terna derivata 24-45-51.

Il primo triangolo della prima riga della figura 37 contiene un errore presente sia in Olleris che in Sarrade: è stato omesso il simbolo 'V' che sta per '5' lungo il cateto verticale:

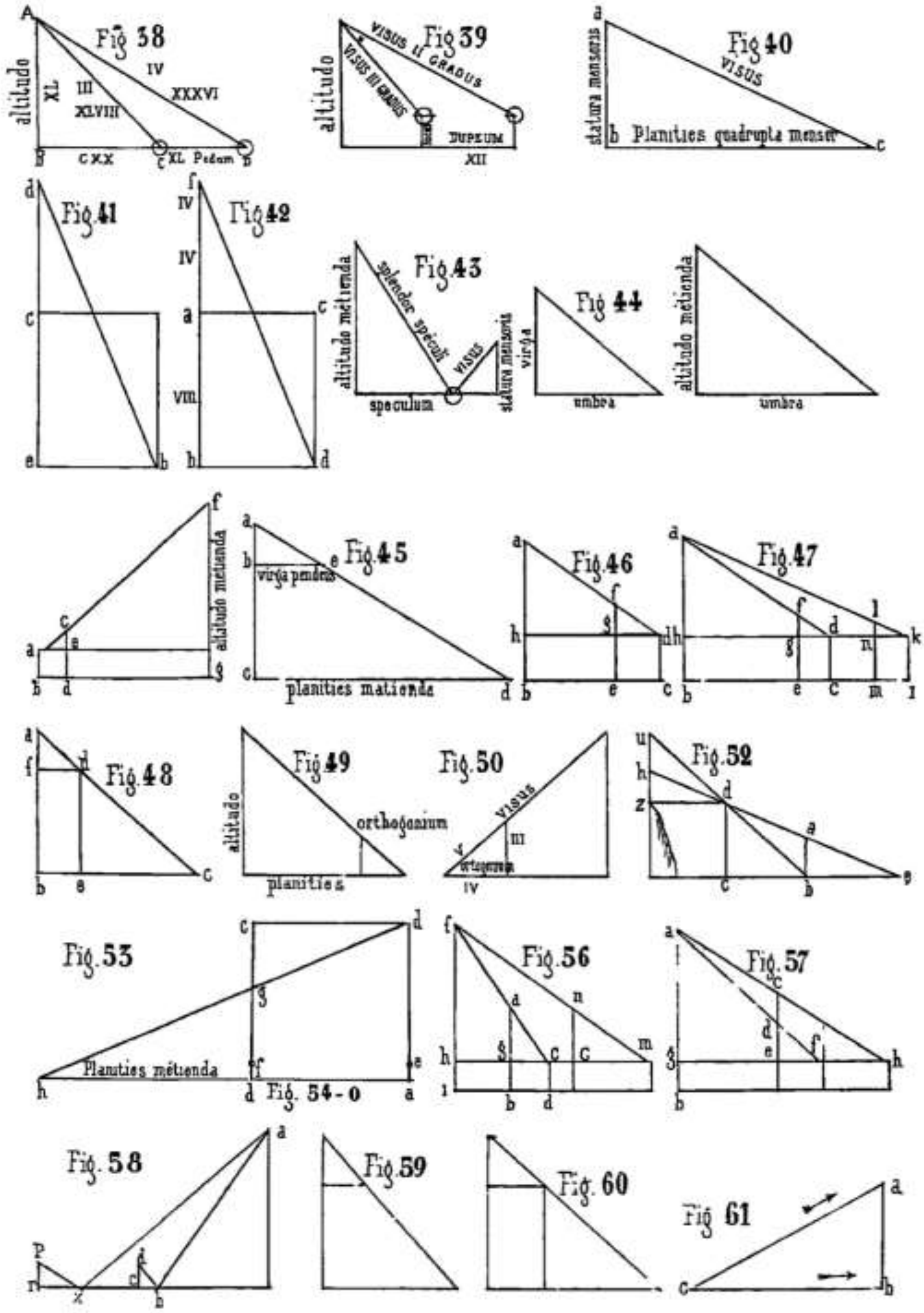




È da notare la notevole imprecisione della figura originale: il cateto orizzontale è disegnato poco più lungo di quello verticale.

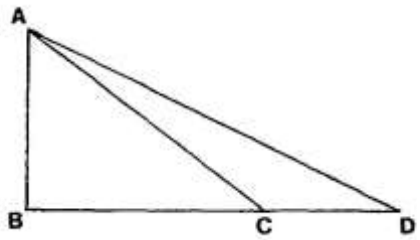
La terza tavola

La *terza tavola* contiene le figure numerate da 38 a 61:



Esse mostrano esempi di misurazioni di altezze, di profondità e di distanze con l'aiuto delle *ombre* e l'impiego dell'*oroscopo* o *astrolabio* e degli *specchi*.

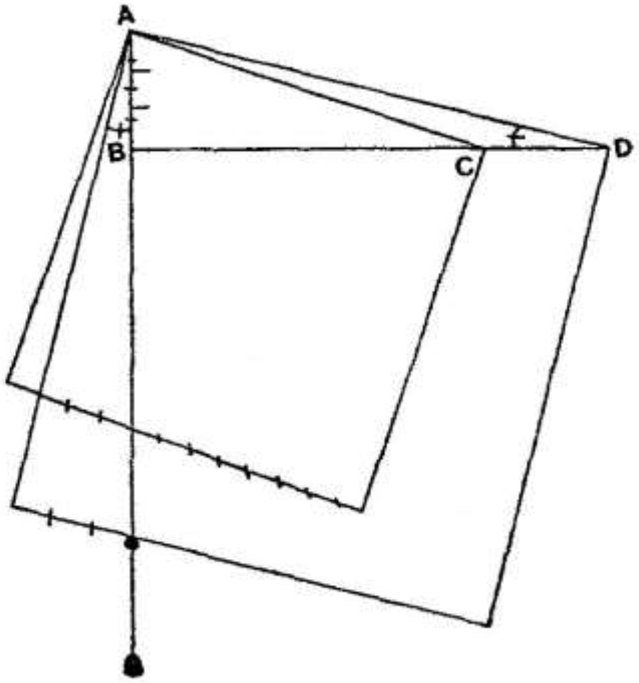
La figura 38 descrive il metodo per misurare un'altezza, AB, inaccessibile: a pagina 13 del suo studio, Marie-Thérèse Sarrade ricostruisce il metodo proposto da Gerberto con queste considerazioni [traduzione mia, n.d.A.]:



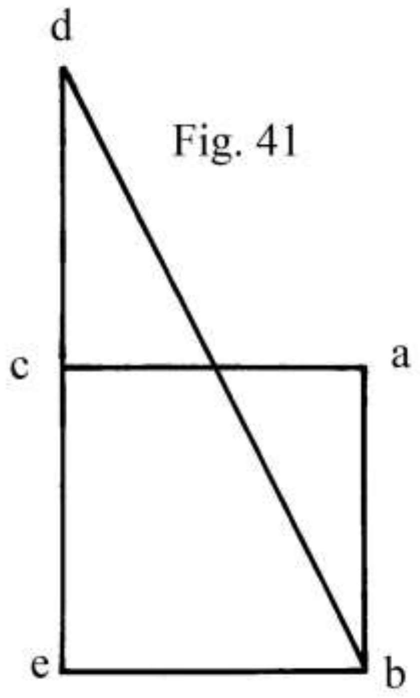
"…La figura 38 si propone di determinare la misura di un'altezza inaccessibile: questa altezza è AB. La vista fatta dal punto C indica la quarta divisione. Dato che il quadrante è suddiviso in 144 parti, ciò corrisponde a 36. Spostandoci da C in D, per 40 piedi, la vista indica la terza divisione che corrisponde a 48. La differenza 48 – 36 = 12 corrisponde ai 40 piedi. Dunque, BC è 40 * 36/12 = 120 piedi et BD è 120 + 40 = 160 piedi. Per triangolazione si ha:

AB : BD = 1 : 4 e quindi AB = 40 piedi…".

Ecco la costruzione della Sarrade:

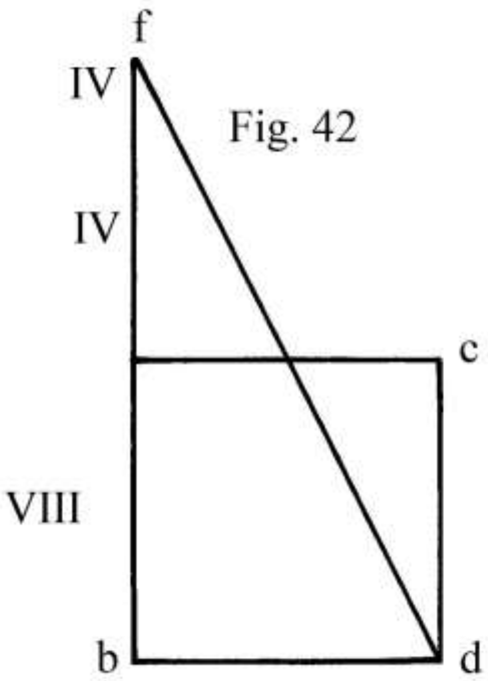


La successiva figura 41 si riferisce alla profondità di un pozzo [circolare] che ha diametro 4 piedi:



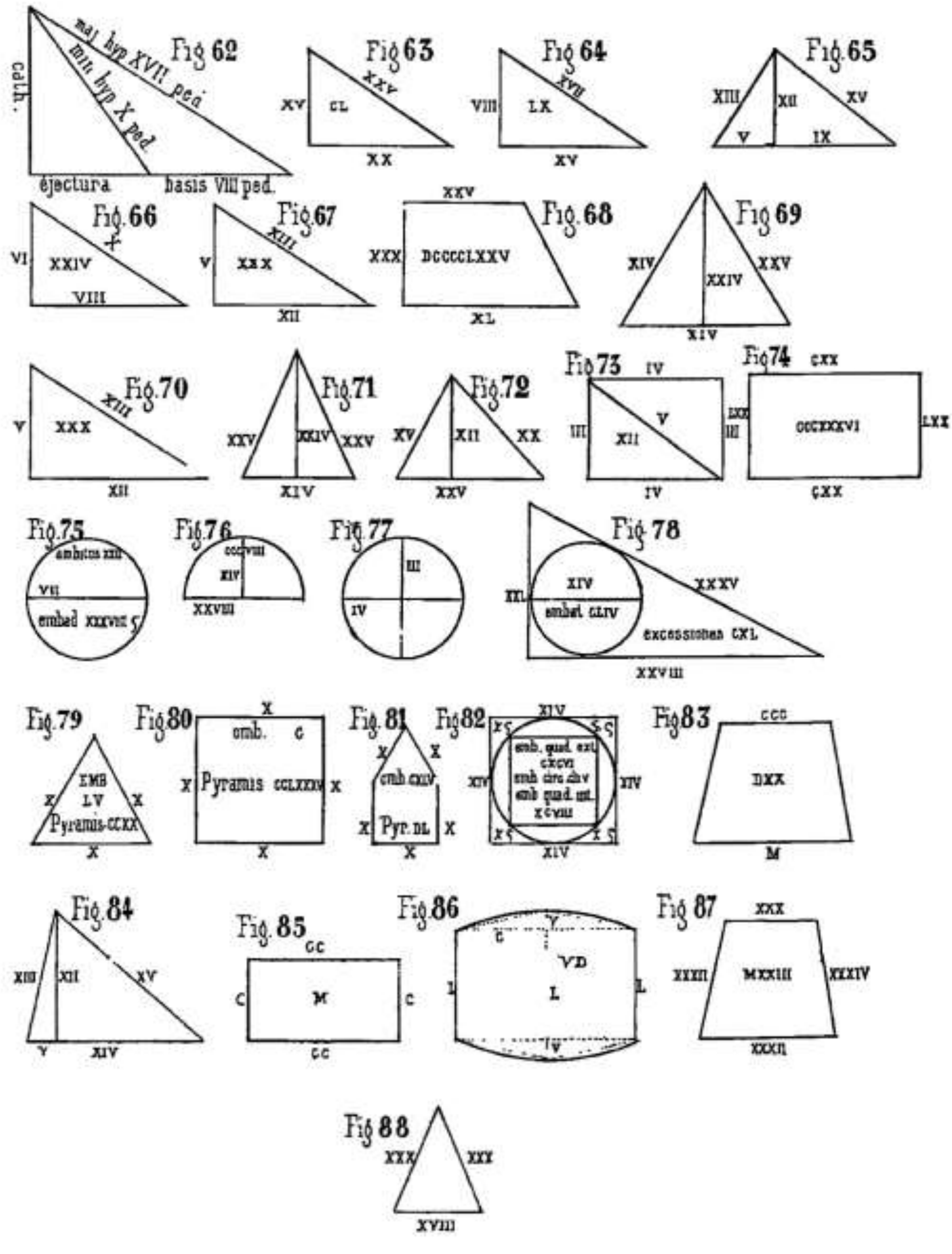
Sempre secondo la Sarrade (stessa pagina 13), l'astrolabio indicherebbe la terza divisione (rivedere il caso della figura 38) quanto viene posizionato sul punto "d": il rapporto è 12/4 * ED = 12 piedi e la profondità "ce" è 8 piedi: "ce" = 12 – "de" = 12 – 4 = 8 piedi.

La successiva figura 42 sembra chiarire la situazione, anche se le lettere *minuscole* apposte ai vertici delle due figure non sono del tutto coincidenti:



La quarta tavola

Questa tavola contiene interessanti esempi.



La figura 63 di questa tavola affronta un problema *inverso*, che caratterizzerà molti esempi contenuti nei successivi trattati degli Abacisti toscani del Medioevo.

È dato un triangolo rettangolo la cui area è 150 e la cui ipotenusa è lunga 25. Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei due cateti. La soluzione proposta da Gerberto è basata sulla proposizione IV del secondo libro degli Elementi di Euclide.

Indicando con *a* e *b* i cateti (minore e maggiore) e con *c* l'ipotenusa, ecco i passi della sua procedura:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza dell'ipotenusa: $c^2 = 25*25 = 625$;
* moltiplicare per 4 l'area: $4*150 = 600$;
* sommare i due prodotti: $625 + 600 = 1225$;

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1225} = 35$, somma delle lunghezze dei due cateti;
* calcolare la differenza fra il quadrato dell'ipotenusa e 4 volte la superficie: $625 – 600 = 25$;
* estrarre la radice quadrata di 25: $\sqrt{25} = 5$, differenza fra le lunghezze dei due cateti ($b – a = 5$);
* sommare 35 e 5: $35 + 5 = 40$, che è il doppio della lunghezza della base (*b*), la quale è lunga 5 unità più del cateto più corto (*a*).

Quindi: $a = b – 5 = (40/2) – 5 = 15$.

La procedura di Gerberto può essere sintetizzata con le seguenti formule:

$\sqrt{(c^2+ 4*Area)} = a + b = 35$

$\sqrt{(c^2 – 4*Area)} = b – a = 5$

$(a + b) + (a – b) = 2*a = (35 + 5) = 40$

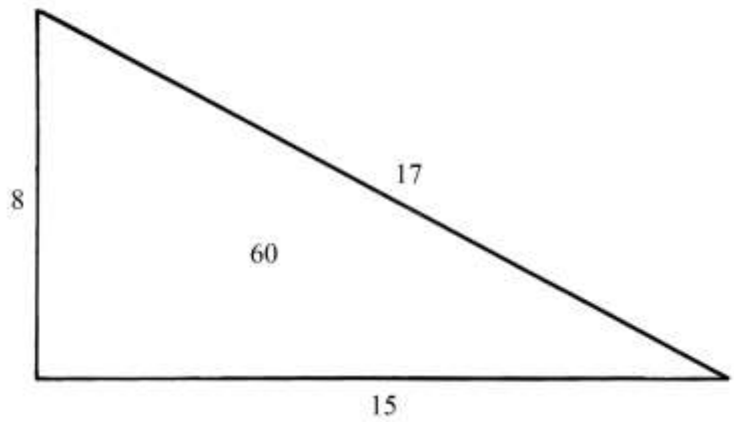
$a = 40/2 = 20$

$b = a – 5 = 20 – 5 = 15.$

La procedura impiegata da Gerberto è corretta.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura 64 presenta un triangolo rettangolo con lati formanti la terna pitagorica 8-15-17:



L'area è correttamente calcolata in 60 piedi^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Particolarmente interessante è il triangolo scaleno riprodotto nella figura 65: si tratta del noto triangolo "13-14-15" le cui proprietà hanno attirato l'attenzione di numerosi geometri.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo 13-14-15

Fra i primi a studiare il triangolo fu matematico e ingegnere egizio Erone di Alessandria (I secolo d.C.). Questo particolare triangolo è stato studiato anche da:

- Varrone.
- I Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo).
- Boezio.
- Il matematico persiano al-Khwarizmi (circa 780-850).
- Gerberto d'Aurillac (Papa Silvestro II).

- Leonardo Fibonacci (*Practica Geometrie)*.
- Piero della Francesca, nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto*, 80 *verso*, 81 *recto*-a, 81 *verso*, 82 *recto*).
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501.
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557).
- Cosimo Bartoli (Firenze 1503-1572).

Questo triangolo è detto *eroniano* (da Erone) perché ha lati, area e almeno un'altezza rappresentati da numeri interi o razionali.

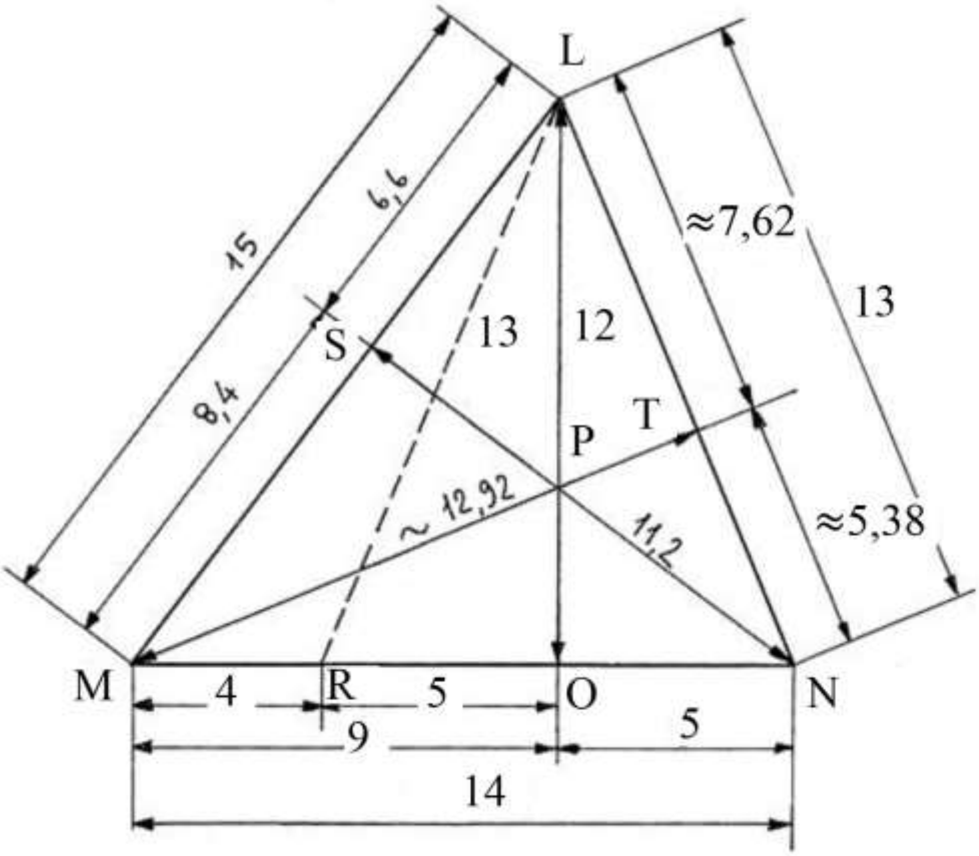
Un *numero razionale* è ottenuto dal rapporto fra due numeri interi primi fra loro; esempi di numeri razionali sono: ½ , 1, -2 e ¾.

La tabella che segue descrive i primi triangoli di Erone con il lato più corto lungo fino a 17. I triangoli sono indicati per lunghezza crescente del lato più corto:

lunghezze dei lati	area del triangolo	tipo di triangolo
3 – 4 – 5	6	triangolo rettangolo (terna pitagorica)
3 – 25 – 26	36	scaleno
4 – 13 – 15	24	scaleno
4 – 51 – 53	90	scaleno
5 – 5 – 6	12	isoscele
5 – 5 – 8	12	isoscele
5 – 12 – 13	30	rettangolo (terna pitagorica)
5 – 29 – 30	72	scaleno
6 – 25 – 29	60	scaleno
7 – 15 – 20	42	scaleno
7 – 24 – 25	84	rettangolo (terna pitagorica)
8 – 15 – 17	60	rettangolo (terna pitagorica)
8 – 29 – 35	84	scaleno
9 – 10 – 17	36	scaleno
10 – 13 – 13	60	isoscele
10 – 17 – 21	84	scaleno
11 – 13 – 20	66	scaleno
12 – 17 – 25	90	scaleno
13 – 13 – 24	60	isoscele
13 – 14 – 15	84	scaleno
13 – 15 – 4	24	scaleno
13 – 20 – 21	126	scaleno
13 – 37 – 30	180	scaleno
13 – 37 – 40	240	scaleno
13 – 40 – 45	252	scaleno
13 – 68 – 75	390	scaleno
15 – 28 – 41	126	scaleno
15 – 34 – 35	252	scaleno
15 – 37 – 44	264	scaleno
15 – 41 – 52	234	scaleno
17 – 10 – 21	84	scaleno
17 – 25 – 26	204	scaleno
17 – 25 – 28	210	scaleno
17 – 28 – 39	210	scaleno
17 – 39 – 44	330	scaleno
17 – 55 – 60	462	scaleno

La costanza nel tempo e presso numerosi e importanti geometri dell’uso di questo triangolo può essere spiegata con le sue interessanti proprietà (lunghezze e aree rappresentate da numeri interi) che evitavano il ricorso a complesse operazioni quali l’estrazione di radici quadrate, semplificando misurazioni e calcoli.

La figura che segue contiene il triangolo 14-15-13 già visto e con tutte tracciate le tre altezze che si intersecano nell’*ortocentro* P:



Le tre altezze sono lunghe:

* LO = 12.
* NS = 11,2.
* MT ≈ 12,92.

La terza altezza non è un numero intero né un numero razionale perché le lunghezze dei segmenti LT e TN non sono numeri razionali. Infatti, applicando le formule di Erone per calcolare la lunghezza della proiezione di un lato sulla base MN si ha:

LT = $(ML^2 + LN^2 - MN^2)/(2 * LN) = (15^2 + 13^2 - 14^2)/(2*13) = 198/26 \approx 7{,}615$, arrotondato a 7,62.

TN = $(MN^2 + LN^2 - ML^2)/(2 * LN) = (14^2 + 13^2 - 15^2)/(2*13) = 140/26 \approx 5{,}384$, arrotondato a 5,38.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo MLT o al triangolo MNT per ricavare la lunghezza di MT si ottiene il numero non razionale 12,92.

La disposizione di questo triangolo con la base orizzontale MN lunga 14 unità è quella più comune, tanto che il triangolo potrebbe essere definito con l'espressione (12)-13-14-15, con il primo numero, 12, scritto fra parentesi tonde, che misura l'altezza rispetto alla base MN. Questa quaterna contiene quattro numeri interi che formano una perfetta progressione aritmetica di ragione *uno*.

L'altezza LO scompone LMN in due triangoli rettangoli:

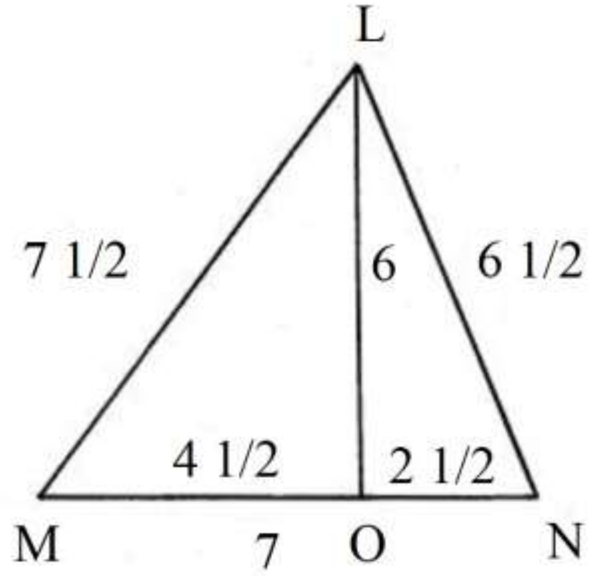
* LMO che ha lati lunghi 9, 12 e 15 unità, numeri che formano una terna derivata dalla terna primitiva 3-4-5 moltiplicata per *tre*.
* LNO che ha lati lunghi 5, 12 e 13 unità, numeri che formano una terna primitiva.

Infine, nel grafico è fissato un punto, R, a distanza 5 unità da O: tracciando il segmento LR (che è lungo 13 unità), all'interno di LMN viene creato il triangolo isoscele LRN.

<u>Il triangolo 14-15-13 di Cosimo Bartoli</u>

Anche Cosimo Bartoli studia una variante di questo triangolo. Bartoli (Firenze 1503-1572) è stato uno scrittore, un traduttore dal latino e l'ambasciatore di Cosimo I de' Medici presso la Repubblica di Venezia.

Nel suo trattato geometrico citato in bibliografia studia un particolare triangolo scaleno:



Per ricavare l'altezza LO Bartoli usa una procedura che, pur senza citarlo, applica la formula di Erone per calcolare le lunghezze delle proiezioni dei lati LM e LN sulla base MN, che sono rispettivamente i segmenti MO e NO. Ecco i suoi passi:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza di LN: (6 + ½)*(6 + ½) = 42,25 (Bartoli arrotonda a 42).
* Moltiplicare per se stessa la lunghezza di LM: (7 + ½)*(7 + ½) = 56,25 (Bartoli approssima a 56).
* Moltiplicare per se stessa la lunghezza della base MN: 7 * 7 = 49.
* Sommare gli ultimi due quadrati: 56,25 + 49 = 105,25 (per Bartoli 105).
* Sottrarre il quadrato di LN: 105,25 – 42,25 = 63 (63 anche per Bartoli).
* Dividere per 2: 63 : 2 = 31,5.
* Dividere per la lunghezza della base MN: 31,5 : 7 = 4,5 braccia (per Bartoli è 4 ½ braccia), lunghezza della proiezione MO.

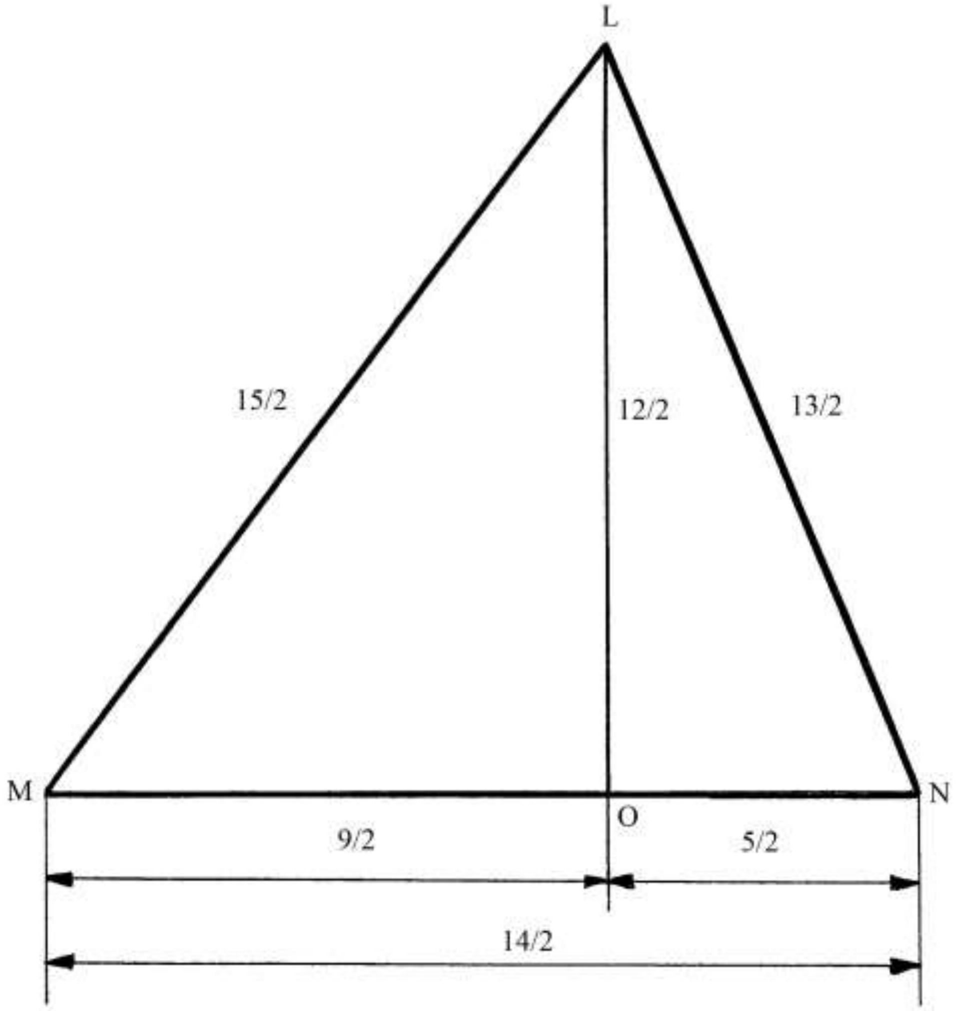
La procedura è sintetizzabile nella formula che segue:

$MO = (LM^2 + MN^2 – LN^2)/(2 * MN)$, che è la formula di Erone.

Rispetto ai triangoli 13-14-15 considerati dagli altri geometri, questo di Cosimo Bartoli presenta due caratteristiche che lo differenziano:

* le dimensioni sono la metà;
* il triangolo è ruotato simmetricamente rispetto all'altezza LO.

Lo schema che segue mostra l'origine del triangolo di Bartoli:



I due ultimi triangoli sono *simili*.

L'altezza LO del triangolo di Bartoli è calcolata applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo MLO:

$LO = \sqrt{(LM^2 - MO^2)} = \sqrt{(7{,}5^2 - 4{,}5^2)} = 6$ braccia.

Invece di ricavare la lunghezza della proiezione NO per semplice sottrazione

$NO = MN - MO = 7 - 4{,}5 = 2{,}5$ braccia   Bartoli propone una seconda procedura per calcolare NO che è riassunta nella formula che segue:

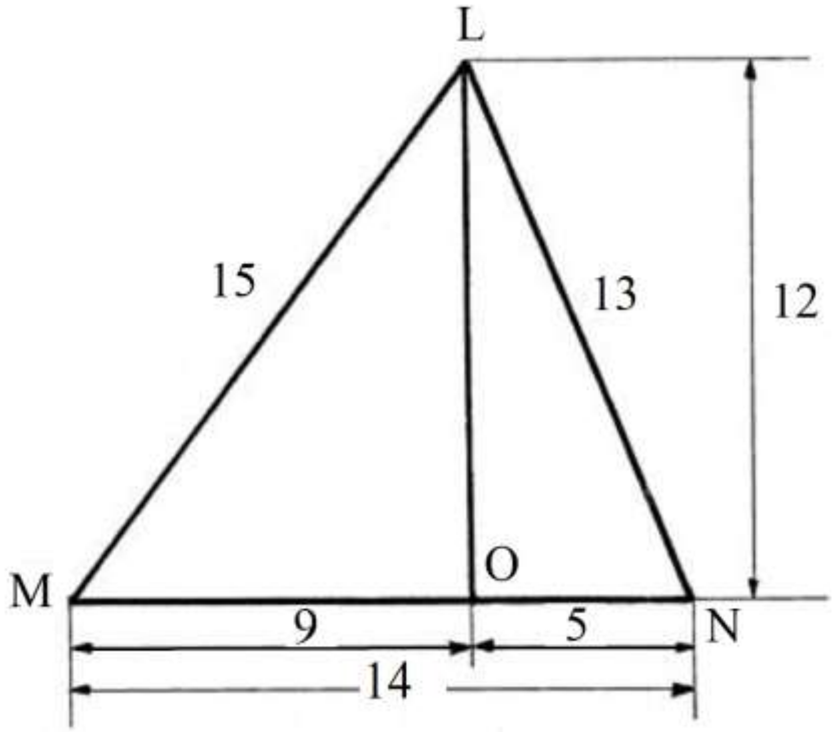
$NO = (LN^2 + MN^2 - LM^2)/(2 * MN) = (6{,}5^2 + 7^2 - 7{,}5^2)/(2 * 7) = 2{,}5$ braccia.

Con questo nuovo dato, Bartoli calcola di nuovo l'altezza LO applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo LON.

Infine, calcola l'area dell'intero LMN e dei due triangoli rettangoli MLO e LON.

%%%%%%%%%%%%%%%

Il triangolo considerato da Bartoli deriva dal classico triangolo 13-14-15 studiato da Erone e, dopo di lui, da molti altri geometri.

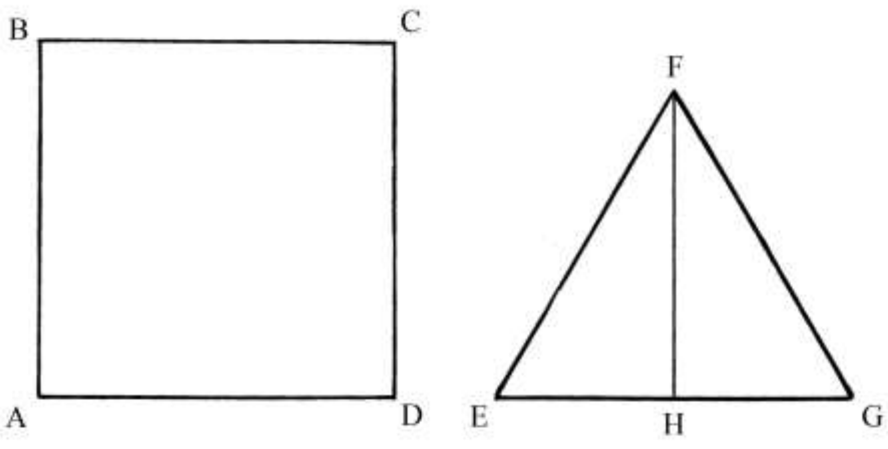


Il triangolo di Bartoli ha le lunghezze dei lati che sono la *metà* di quelle dei corrispondenti lati del triangolo 13-14-15.

- -

<u>La figura 69</u>

La figura 69 è errata. Nel testo, Gerberto pone a confronto le aree di un quadrato e di un triangolo equilatero entrambi con lati lunghi 30.



La figura qui sopra confronta i due poligoni nella stessa scala e reca le lettere a tutti i vertici.

Per calcolare l'area del triangolo equilatero Gerberto utilizza una procedura che muove dall'area del quadrato. Eccone i passi:

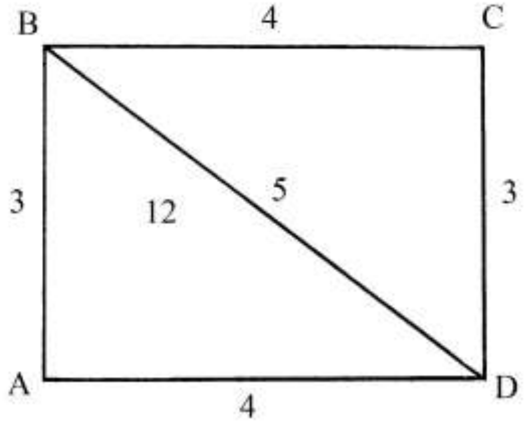
* calcolare l'area del quadrato: $30^2 = 900$;
* moltiplicare per ¾: 900 * ¾ = 675 ;
* addizionare 1: 675 + 1 = 676
[l'operazione ha lo scopo di rendere il numero un *quadrato perfetto*];

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{676} = 26$, lunghezza dell’altezza FH ;
* dividere per 2: 26 : 2 = 13 ;
* moltiplicare per la lunghezza di EG: 13 * 30 = 390, area del triangolo equilatero.

Anche in questo caso, Gerberto ha approssimato il rapporto fra l’altezza e il lato di un triangolo equilatero a 26/30 = 13/15 .

La figura 73

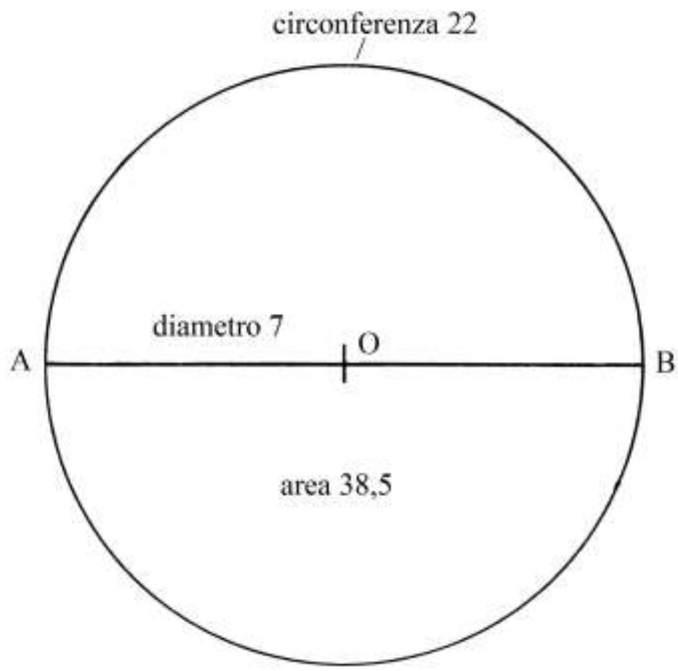
La figura 73 presenta un rettangolo che ha lati lunghi 3 e 4:



Gerberto calcola correttamente la lunghezza della diagonale BD (5) e dell’area (12).
La diagonale scompone il rettangolo in due triangoli rettangoli che formano terne 3-4-5.

La figura 75

La figura 75 mostra un cerchio di diametro $d = 7$:



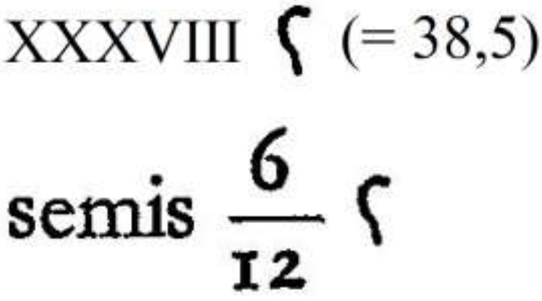
La circonferenza è indicata in 22; Gerberto ha quindi usato per π il valore approssimato 22/7:

$$\text{circonferenza} = \pi * d \approx (22/7) * 7 \approx 22.$$

L'area è calcolata in 38,5:

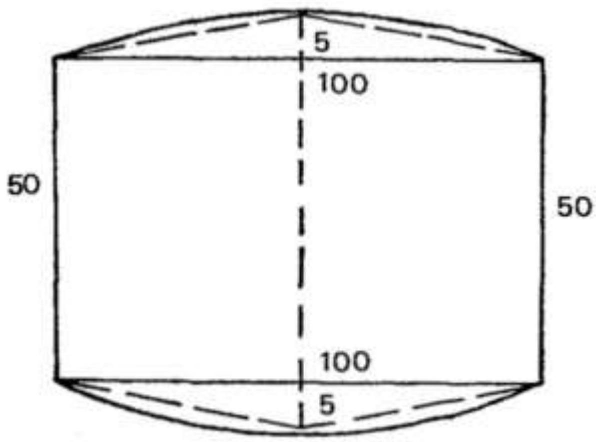
$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * (d/2)^2 \approx (22/7) * (7^2)/4 \approx 38,5.$$

Sul grafico Gerberto ha scritto in numeri romani 38 più il simbolo "semis" che vale ½ o 6/12:



La figura 86

La figura presenta un campo che ha forma quasi rettangolare con i due lati maggiori formati da archi di circonferenza:

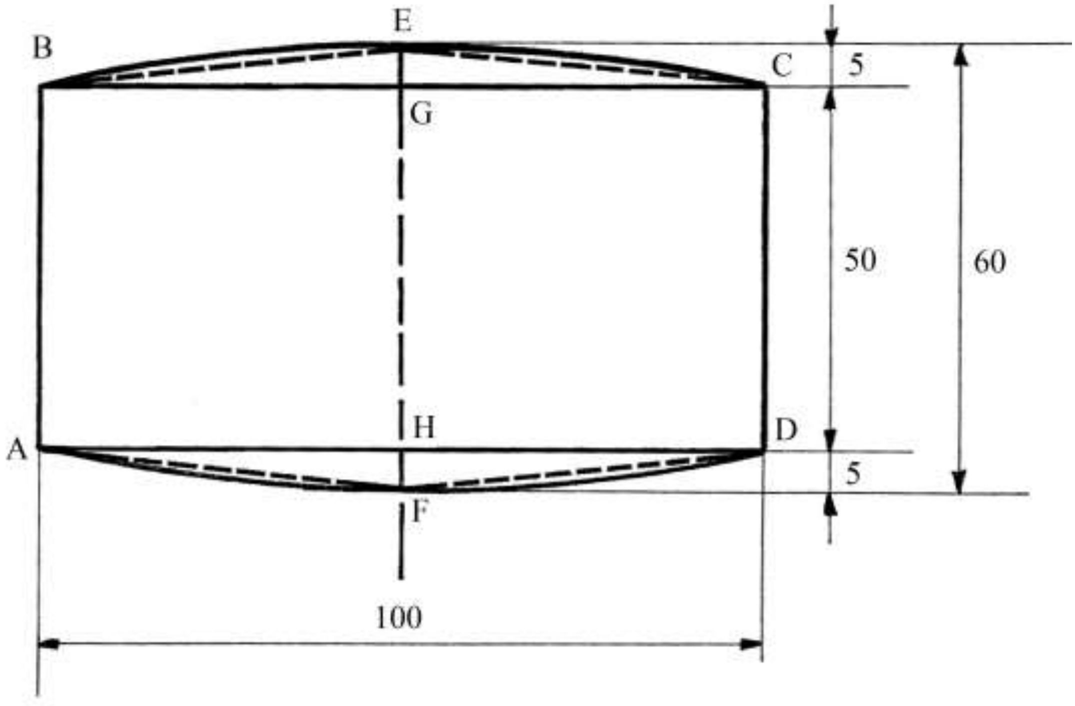


(fonte: Sarrade, citata).

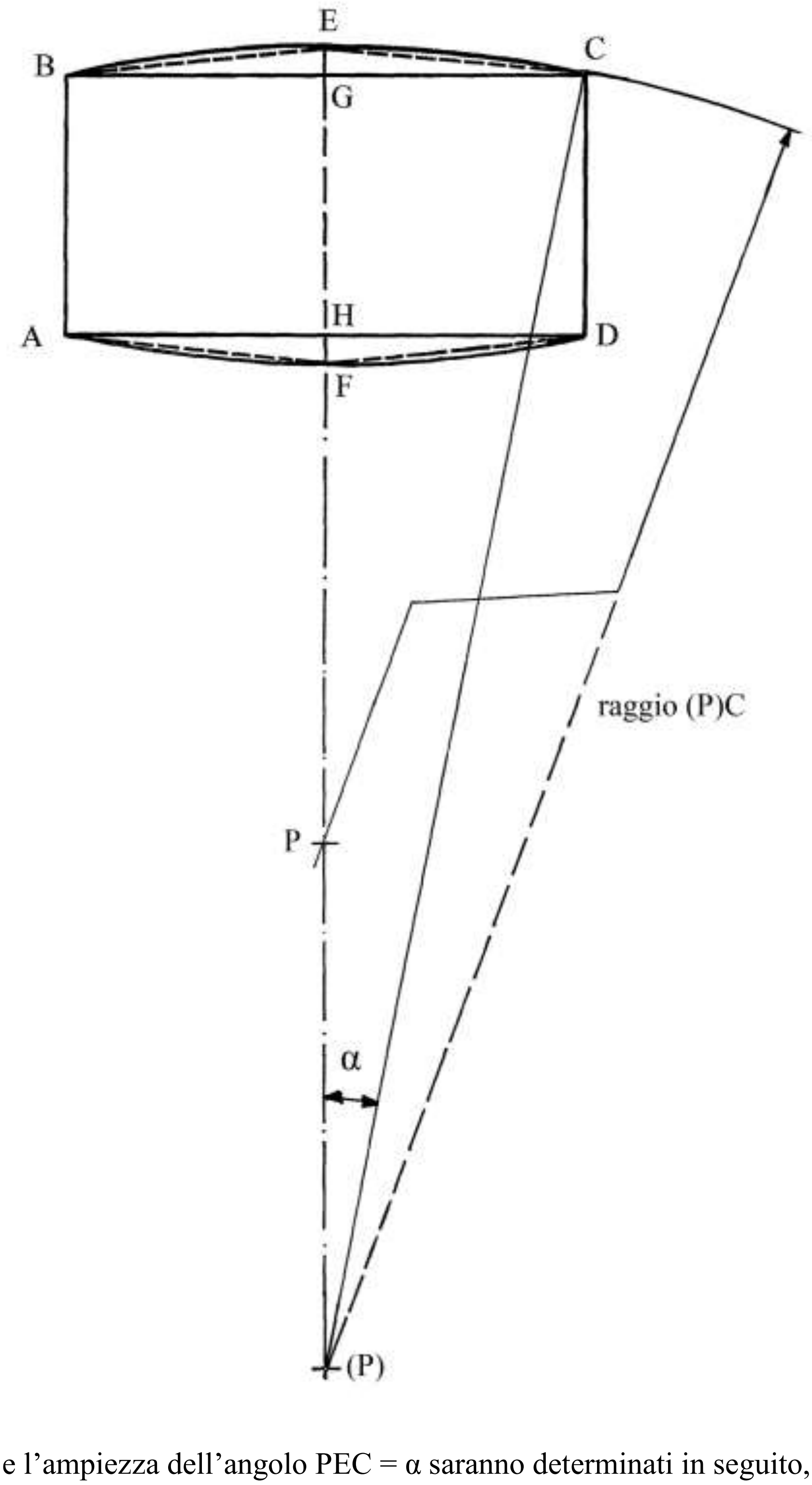
Il campo è lungo 100 *pertiche* e la larghezza alle estremità è 50 pertiche mentre nella mezzeria è 60 pertiche.

Nel sistema metrologico romano, una *pertica decempeda* era lunga 10 piedi ed equivaleva a 2,957 m: era usata nelle situazioni dei terreni agricoli.

La figura è scomponibile in un rettangolo ABCD e in due *segmenti circolari* di uguali dimensioni, con *corde* BC e AD e *frecce*, rispettivamente, EG e HF:



I due archi di circonferenza BEC e AFD sono tracciati con centri come quello (P) (e quello ad esso simmetrico, non mostrato in figura):



Il raggio (P)C e l’ampiezza dell’angolo PEC = α saranno determinati in seguito, con l’applicazione del *teorema delle corde*.

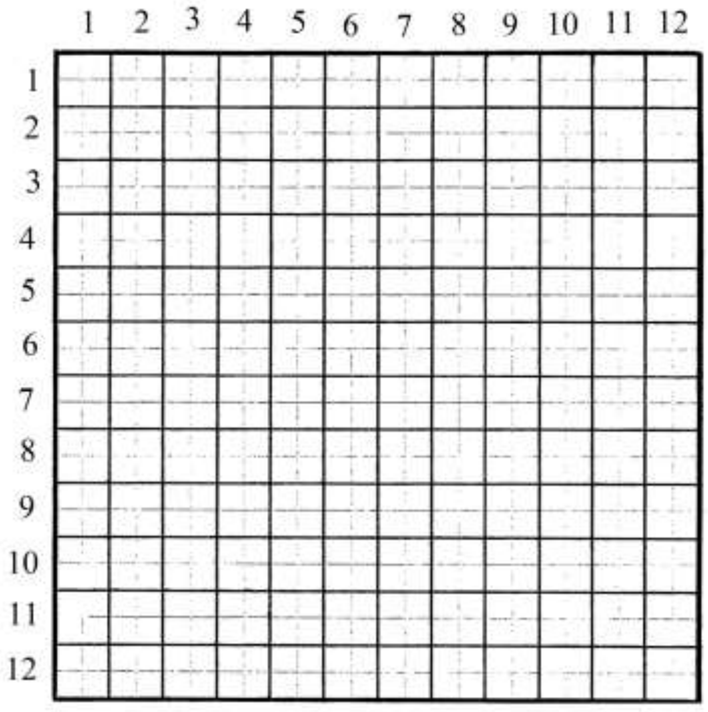
Il punto (P) è l’esatto centro dell’arco di circonferenza BEC, mentre il punto P è in una posizione avvicinata secondo le norme UNI.

Il rettangolo ABCD è formato da due quadrati, ABGH e GCDH, uniti lungo il lato GH e di uguali dimensioni: ABCD è un *bislungo*.

Il problema chiede di calcolare la superficie in *agripennus*. Un *agripennis* era un’unità di superficie uguale a quella di un *actus quadrato* e cioè metà di uno *iugero*: un atto quadrato misurava 120*120 piedi^2 e quindi 14400 piedi^2. Oppure esso valeva

(120/10) * (120/10) = 12*12 = 144 pertiche^2.

Il grafico che segue presenta la struttura di un agripennis quadrato con lati lunghi 12 pertiche decempeda:



La procedura impiegata da Gerberto richiede in primo luogo l’approssimazione dei due segmenti circolari ai triangoli isosceli BEC e AFD, che nelle precedenti figure hanno i lati obliqui *tratteggiati*. Ecco i passi:

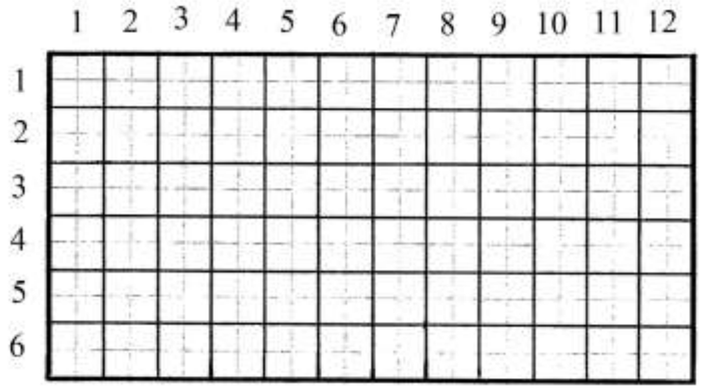
*	sommare le lunghezze di EF e CD:	60 + 50 = 110 pertiche ;
*	dividere per 2:	110:2 = 55 pertiche ;
*	moltiplicare per la lunghezza di AD:	55*100 = 5500 pertiche^2 ;
*	dividere per 144:	5500:144 = 38 agripennus + 28 pertiche^2 .

Gerberto calcola l’area del campo con un altro metodo:

*	calcolare l’area del rettangolo ABCD:	AB+AD = 50*100 = 5500 pertiche^2 ;
*	calcolare l’area del triangolo BEC:	BC*EG/2 = 100*5/2 = 250 pertiche^2 ;
*	sommare le aree di ABCD e quelle dei triangoli BEC e ADF:	
		5000 + 250 + 250 = 5500 pertiche^2 .

La definizione dell’agripennis non era chiara all’epoca di Gerberto per cui egli suggerisce un’alternativa:

1 agripennis = 6*12 pertiche decempeda = 72 pertiche^2 .



- APPROFONDIMENTO -

<u>L'area di un segmento circolare</u>

Proviamo a calcolare l'area del segmento circolare BECG. Esso possiede due segmenti:

* la *corda* BC che è lunga: BC = c = 100 pertiche;
* la *freccia* EG che è lunga: EF = f = 5 pertiche.

L'area può essere calcolata con una formula approssimata dovuta all'agronomo latino Lucio Giunio Columella (4 – 70): egli è stato uno scrittore che ha lasciato un importante trattato di agricoltura, il *De re rustica* ("L'arte dell'agricoltura). Nel V libro della sua opera Columella ha fornito una serie di regole geometriche empiriche per calcolare l'area di campi di varie forme.

La sua formula approssimata per l'area di un segmento circolare è la seguente:

$$\text{Area} = 4*[(c + f)/2] + (1/14)*(c/2)^2 .$$

Applichiamola al caso del segmento circolare BECG:

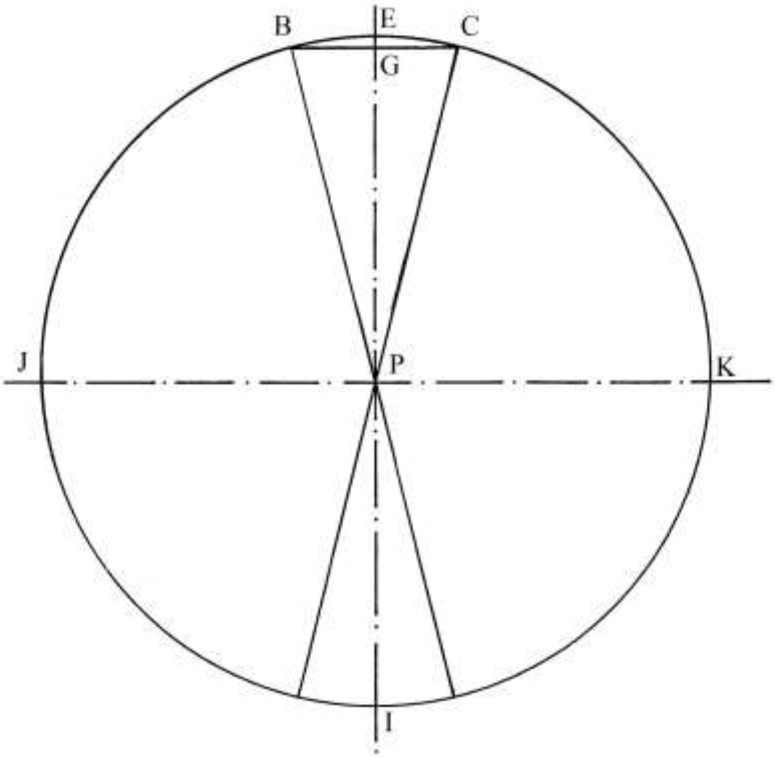
$$\text{Area}_{BECG} = 4*[100 + 5)/2] + (1/14)*(100/2)^2 = 2*105 + 2500/14 \approx$$
$$\approx 210 + 178{,}57 \approx 388{,}57 \text{ pertiche}^2 .$$

Gerberto conosceva la formula approssimata di Columella?

<u>Il teorema delle corde</u>

Un metodo corretto per calcolare l'area di un segmento circolare è dato dall'applicazione del *teorema delle corde*.

Le corde BC e EI sono inscritte nello stesso cerchio e si intersecano a angolo retto nel punto G, tagliando in due parti uguali BC:



I due *segmenti adiacenti* che formano una corda (ad esempio BG e GC) sono i *medi* e i due *segmenti adiacenti* dell'altra corda (EG e GI) sono gli *estremi* di una proporzione:

EG : BG = GC : GI.

Ma BG = GC per cui la proporzione diviene la seguente:

EG : BG = BG : GI.

GI è l'incognita ed è data da:

$GI = BG^2/EG = 50^2/5 = 500$ pertiche.

Il diametro EI è lungo:

EI = EG + GI = 5 + 500 = 505 pertiche.

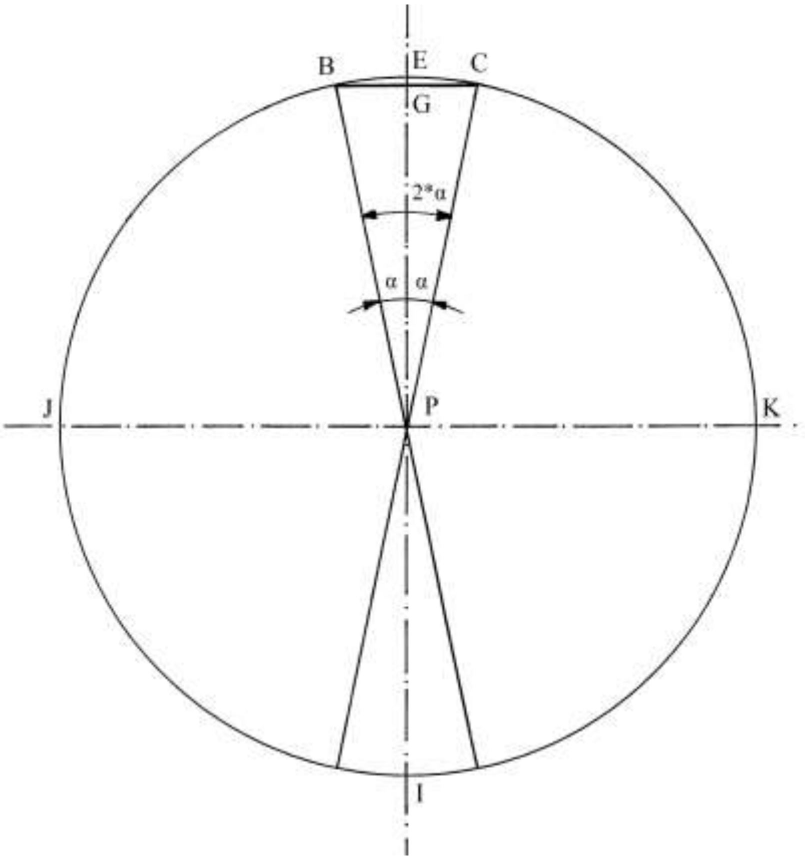
Il raggio PE = PC = PB è lungo:

PE = EI/2 = 505/2 = 252,5 pertiche.

Il segmento GP è lungo:

GP = PE – EG = 252,5 – 5 = 247,5 pertiche.

Consideriamo il triangolo rettangolo GPC:



La tangente dell'angolo α è data da:

tg α = GC/GP = 50/247,5 = 0,(20) [è un numero *periodico*].

L'angolo α è ampio: $\alpha \approx 11° \, 25' \approx 11,42°$.

Per poter impiegare la formula che, a breve, sarà impiegata occorre conoscere un altro dato: la lunghezza dell'arco BEC che si può ricavare con una semplice proporzione:

BEC : circonferenza = 2*α : 360 .

La circonferenza è lunga:

circonferenza = 2*π*PB ≈ 2*3,14*252,5 ≈ 1585,7 pertiche [Gerberto avrebbe impiegato per π il valore approssimato 22/7].

Possiamo ora calcolare la lunghezza dell'*arco* BEC:

BEC = circonferenza * (2*α)/360 = (1585,7 * 2*11,42)/2 = 100,60 pertiche .

L'area del segmento circolare BECG è calcolabile con la formula che segue:

$Area_{BECG}$ = [raggio * (arco – corda) + corda*freccia]/2 =
= [252,5 * (100,60 – 100) + 100*5]/2 = 325,75 $pertiche^2$.

Gerberto aveva approssimato l'area dei due segmenti circolari BECG e AFDH a quelle dei triangoli isosceli BEC e AFD pari a 250 $pertiche^2$ ciascuno.

L'area effettiva dell'intero campo è:

$Area_{ABECDF} = Area_{ABCD} + Area_{BECG} + Area_{AFDH}$ = 5000 + 325,75 + 325,75 =
= 5651,5 $pertiche^2$, a fronte del valore di 5500 $pertiche^2$ calcolato da Gerberto.

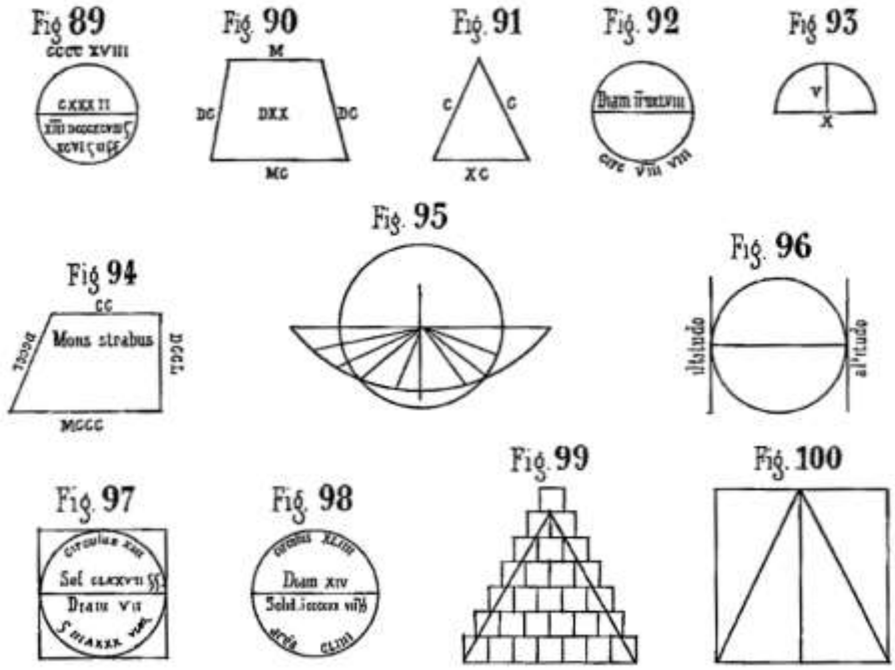
Il valore calcolato da Columella per l'area del segmento circolare BECG, 388,57 $pertiche^2$, è errato per eccesso.

Di nuovo, Gerberto conosceva il *teorema delle corde*? In caso affermativo può averlo accantonato per semplificare i calcoli?

- -

La quinta tavola

Contiene soltanto dodici figure, numerate dalla 89 alla 100.



Particolarmente interessante è il problema n. 89. Un campo di forma circolare ha circonferenza, *c*, lunga 418 pertiche: viene domandata la sua area. La procedura impiegata da Gerberto contiene i seguenti passi:

1. Dividere la lunghezza della circonferenza per 22: 418 : 22 = 19 .
2. Sottrarre dalla lunghezza della circonferenza: 418 – 19 = 399 .
3. Dividere per 3: 399 : 3 = 133
   pertiche, lunghezza del diametro.
4. Dividere per 2: 133 : 2 = 66,5
   pertiche, lunghezza del raggio.
5. Dividere per 2 la lunghezza della circonferenza: 418 : 2 = 209.
6. Moltiplicare per la metà del diametro: 209 * 66,5 = 13898,5
   pertiche^2, area del campo circolare.

I primi tre passi della procedura sono riassunti nella formula che che segue, nella quale *c* è la lunghezza della circonferenza e *d* quella del diametro:

$$(c – c/22)/3 = d \quad \rightarrow \quad [(22 – 1)/22]/3 = [21/(22 * 3)] * c = 7/22 * c = d .$$

In altri termini si ha:

$$c = 22/7 * d .$$

Ma 22/7 è l'approssimazione per π usata a fini pratici almeno dall'epoca di Archimede.

Il quarto e il quinto passo della procedura sono riassunti nella formula:

Area $_{\text{CERCHIO}} = c/2 * d/2 = (2*\pi*r)*(2*r)/2 = \pi*r*r = \pi*r^2 \approx 22/7 * r^2$, dove *r* è il raggio del cerchio.

Bibliografia

1. Bartoli Cosimo, “Del Modo di Misurare le Distantie, le Superficie, i Corpi, le Piante, le Provincie, le Prospettive, e Tutte le Altre Cose Terrene, Che Possono Occorrere a Gli Huomini, Secondo le Vere Regole d’Euclide, e De Gli Altri Più Lodati Scrittori”, Venezia, Francesco Franceschi, 1564, pp. 301.
2. Bubnov Nicolaus, “Gerberti Opera Mathematica (972-1003)”, Berlino, R. Friedländer & Sohn, 1899, pp. 765.
3. Calzolani Sergio, “Le terne pitagoriche”, 2018, pp. 41, http://www.geometriapratica.it/allegatipdf/terne_pitagoriche.pdf
4. Conway John H. – Guy Richard K., “Il libro dei Numeri”, trad. it., Milano, Hoepli, 1999, pp. IX-277.
5. Gerberto d’Aurillac (Papa Silvestro II), “Opera Mathematica”, a cura di Nicolaus Bubnov, Berlino, R. Friedlander & Sohn, 1899, pp. CXIX + 620 + IV tavv. f.t.
6. Gerbertus_1_2010.pdf Roma, pp. 297 http://www.icra.it/gerbertus
7. Ghersi Italo, “Matematica dilettevole e curiosa”, Milano, Hoepli, quinta ediz., 1988 (ristampa 2004), pp. VIII-777.
8. Hock (von) Karl Ferdinand Freiherr, “ Gerberto o sia Silvestro II Papa ed il suo secolo”, trad. it., Milano, Giovanni Resnati Librajo, 1846, pp. C-283.
9. Lluis i Ginovart Josep, “Tesis Doctoral. Geometría y diseño medieval en la Catedral de Tortosa. La Catedral no construida”, Barcellona, 2006, pp. 598, https://patriarq.files.wordpress.com/2015/10/geometrc3ada-y-disec3b1o-medieval-en-la-catedral-de-tortosa-la-catedral-no-construida.pdf
10. Materni Marta, “Attività scientifiche di Gerberto d’Aurillac”, “*Archivum Bobiense*”, XXIX (2007), pp. 225-317.
11. Materni Marta, “Gerberto d’Aurillac: un maestro delle *artes reales*”, Fregene (Roma), Edizioni Spolia, 2007, cd-rom.
12. Materni Marta, “La *Geometria Gerberti*: un manuale scolastico del X secolo”, La_Geometria_Gerberti_un_manuale_scolas.doc, www.academia.edu .
13. Olléris Alexandre, “Œuvres de Gerbert”, Clermont-Ferrand, Thibaud, 1867, pp. CCV+607.
14. Picutti Ettore, “Sul numero e la sua storia”, Milano, Feltrinelli, 1977, pp. 230.
15. Roessler Damien, “Geometria Gerberti. Opuscule de Géométrie Incomplet de Gerbert D’Aurillac”, Introductio, Traduction, Notes, Institut des Hautes Ètudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, septembre 1999, http://people.maths.ox.ac.uk/rossler/mypage/pdf-files/gg.pdf .
16. Rossi Paolo (Introduzione, traduzione e note a cura di), “Gerbert D’Aurillac (Silvestro II) – Lettere (983-997)”, Pisa, Edizioni Plus, 2009, pp. 230.
17. Rossi Paolo, “Algoritmi matematici nelle lettere di Gerbert”, in *Gerbertus*, 2010 (citato al n. 6), pp. 16-23.
18. Sarrade Marie-Thérèse, “Sur les connaissances mathématiques des bâtisserus de cathedrals”, Parigi, Librairie du Compagnonnage, 1986, pp. 62.
19. Sigismondi Costantino (a cura di), “Doctissima Virgo. La Sapienza di Gerberto, scienziato e Papa”, Roma, Ateneo Pontificio Regina Apostolorum, 2009, pp. 132.