

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte.

Parole chiave: operazioni grafiche elementari, divisione di segmenti, tavolette per dividere, trisezione approssimata di un angolo, medio proporzionale fra due segmenti, segmento quarto proporzionale, cerchio equivalente quadrato, conversione quadrato in rettangolo, angoli caratteristici poligoni, poligoni regolari fino a 19 lati, costruzione dell'ellisse, ingrandimenti e riduzione figure piane, misurazioni di lunghezze, angoli e superfici di figure piane, teorema delle corde, aree figure circolari, area e perimetro ellisse

Chi era Fortunato Lodi

Fortunato Lodi nacque a Bologna nel 1805 e vi morì nel 1882.

Fu un importante architetto che operò sia in Italia settentrionale che in Portogallo.

Insegnò a Bergamo presso l'Accademia Carrara e dal 1859 si trasferì a Bologna dove insegnò all'Accademia di Belle Arti e in seguito presso l'Università degli Studi.

Fra le sue pubblicazioni è il testo che è studiato in questo articolo: Fortunato Lodi, “*Manuale pratico di Geometria ad uso degl'Industriali e per facilitare ogni specie di disegno*”, citato in bibliografia.

Il testo è reperibile in formato .pdf sul sito www.archive.org (bub_gb_LhlOnPZ5TCsC.pdf).

Il trattato di Lodi è diviso in *cinque* parti.

La *prima* è riservata alle definizioni degli enti geometrici.

La *seconda* è dedicata alle “Operazioni” grafiche sulle figure piane e non si interessa alle loro dimensioni e alle aree, argomento che è affrontato nella *Parte* successiva.

La *terza* si occupa di *planimetria pratica* e cioè del calcolo delle aree delle figure piane.

La *quarta* è consacrata alla curvimetria pratica e cioè alla misura delle superfici di cilindri, coni, sfere e sferoidi.

Infine, la *quinta* è riservata alla stereometria pratica e cioè al calcolo del volume dei solidi geometrici.

In questo articolo sono prese in considerazione soltanto la *seconda* e la *terza* parte.

Sono descritte le costruzioni ritenute le più significative, anche allo scopo di delineare lo stato della *geometria pratica* nei primi decenni dell'Ottocento.

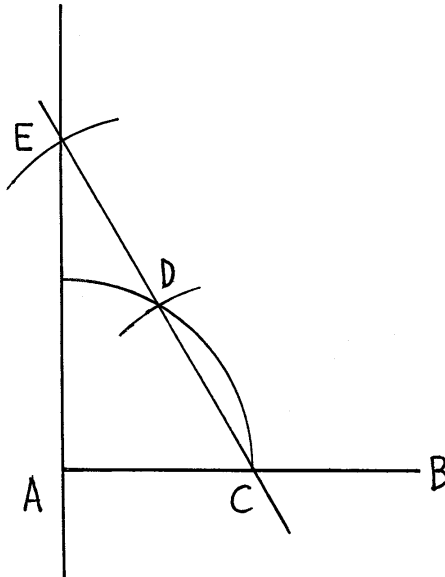
Per chiarire certi argomenti affrontati da Lodi sono inseriti appositi APPROFONDIMENTI, differenziati anche da un punto di vista grafico.

PARTE SECONDA

OPERAZIONI GRAFICHE PRELIMINARI

Perpendicolare all'estremo di un segmento

AB è un segmento e al suo estremo A deve essere tracciata una retta perpendicolare.



Con raggio a piacere – AC – fare centro in A e disegnare in senso antiorario un arco a partire dal punto C. Con la stessa apertura fare centro in C e tracciare un arco che taglia il primo in D. Sempre con apertura uguale a AC, fare centro in D e disegnare un terzo arco. Per i punti C e D condurre una retta che taglia in E il terzo arco. Per E e per A passa la retta perpendicolare a AB.

----- APPROFONDIMENTO -----

Verso il triangolo equilatero

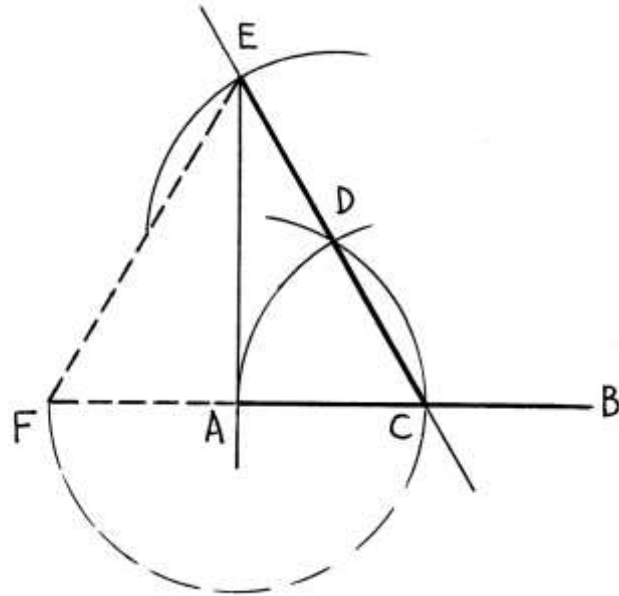
La precedente costruzione merita una maggiore attenzione.

Il segmento CE è lungo *due* volte AC.

Il triangolo AEC è rettangolo e l'ipotenusa EC è lunga il doppio del cateto minore AC: esso è metà di un triangolo equilatero che ha lati lunghi EC.

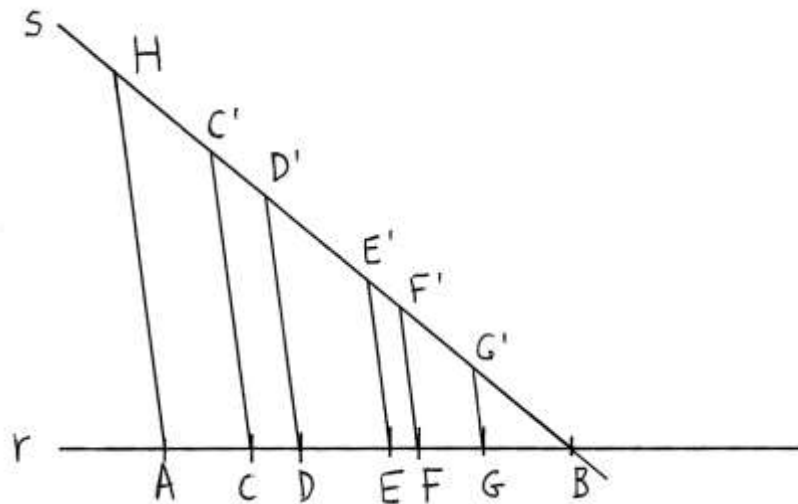
Facendo centro in A tracciare la semicirconferenza di raggio AC fino a stabilire il punto F posizionato sul prolungamento di AB.

FEC è un triangolo equilatero con lati lunghi EC. La perpendicolare EA è una sua altezza.



Trasporto delle divisioni di un segmento

AB è un segmento che giace sulla retta orizzontale r : esso è diviso in *sei* parti di differente lunghezza.



Le diverse divisioni devono essere trasportate sul segmento BH che giace sulla retta s , rispettando le proporzioni originarie.

Collegare i punti A e H e parallelamente a AH tracciare i segmenti uscenti da C, D, E, F, G fino a fissare sulla retta s i corrispondenti punti C', D', E', F' e G'.

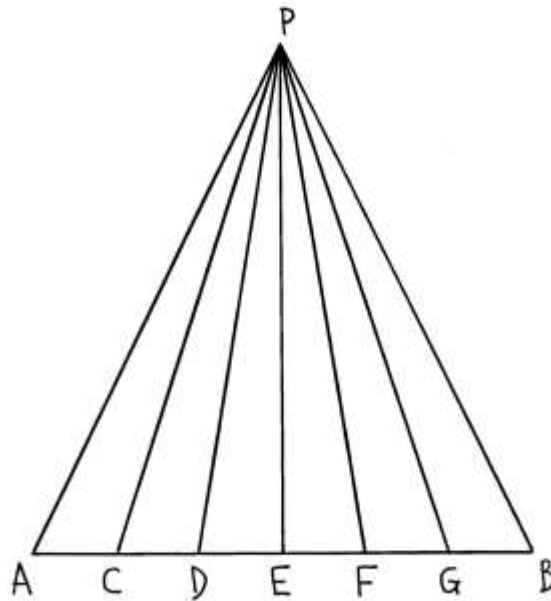
Il segmento HB è diviso in *sei* parti che hanno lunghezze proporzionali alle corrispondenti su AB:

$$AC : HC' = CD : C'D' = DE : D'E' = EF : E'F' = FG : F'G' = GB : G'B.$$

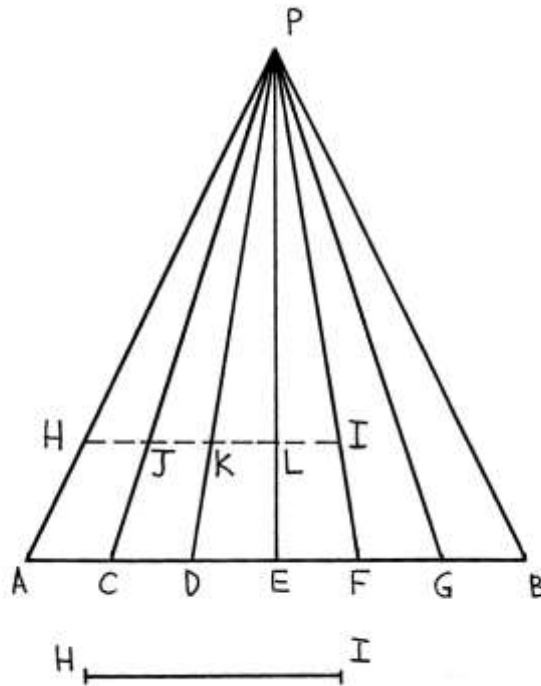
Il metodo è valido sia nel caso che HB sia più lungo oppure più corto o di lunghezza uguale a quella di AB.

Tavoletta triangolare per dividere segmenti

Una tavoletta triangolare ha la base divisa in parti uguali, *sei* nell'esempio:



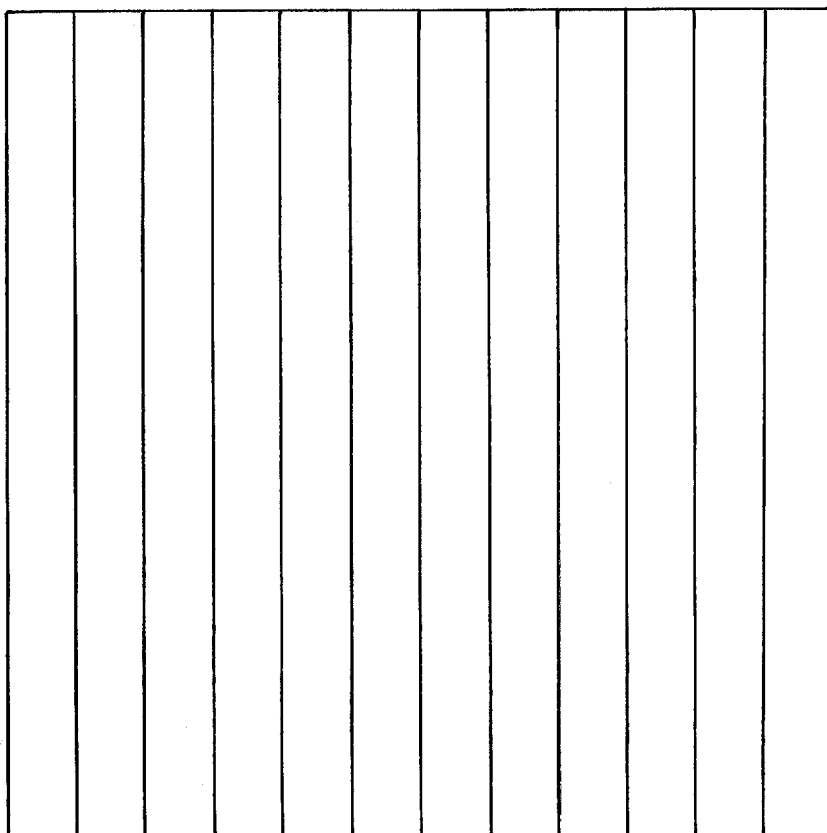
I sette vertici fissati sulla base sono collegati al punto comune P.
Un segmento HI deve essere diviso in *quattro* parti uguali:



Tracciare un segmento parallelo a AB e fissare il punto H sul lato AP e fare sì che il vertice I cada sul lato FP: HI è così diviso in quattro parti uguali.

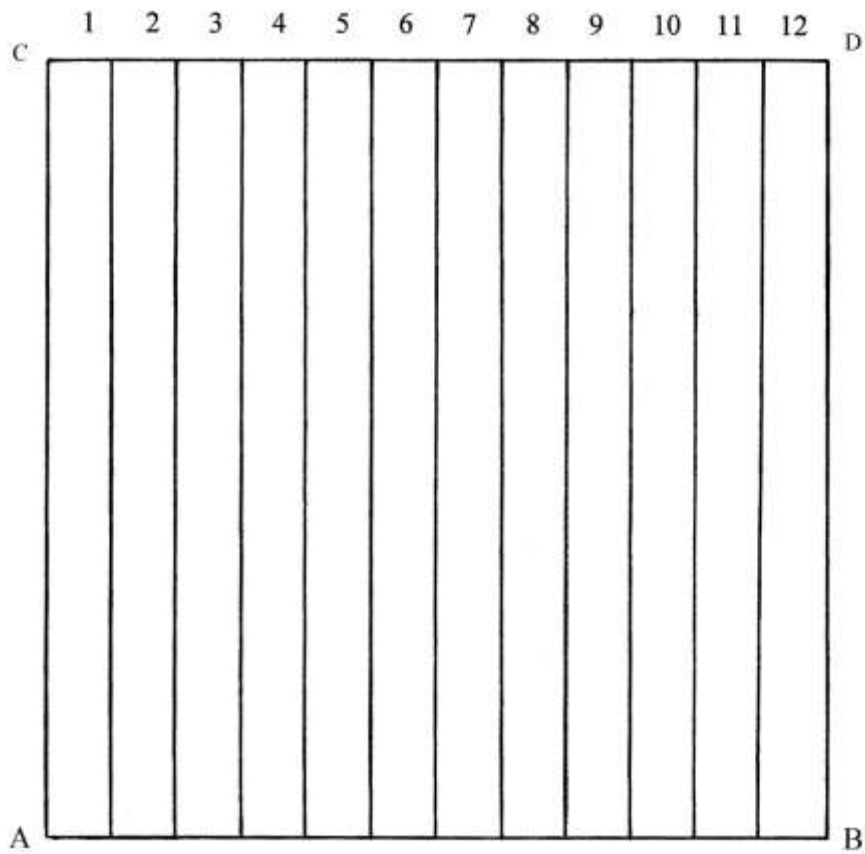
Uso della tavoletta quadrata

Un'estensione della tavoletta triangolare è presentata nella figura che segue:

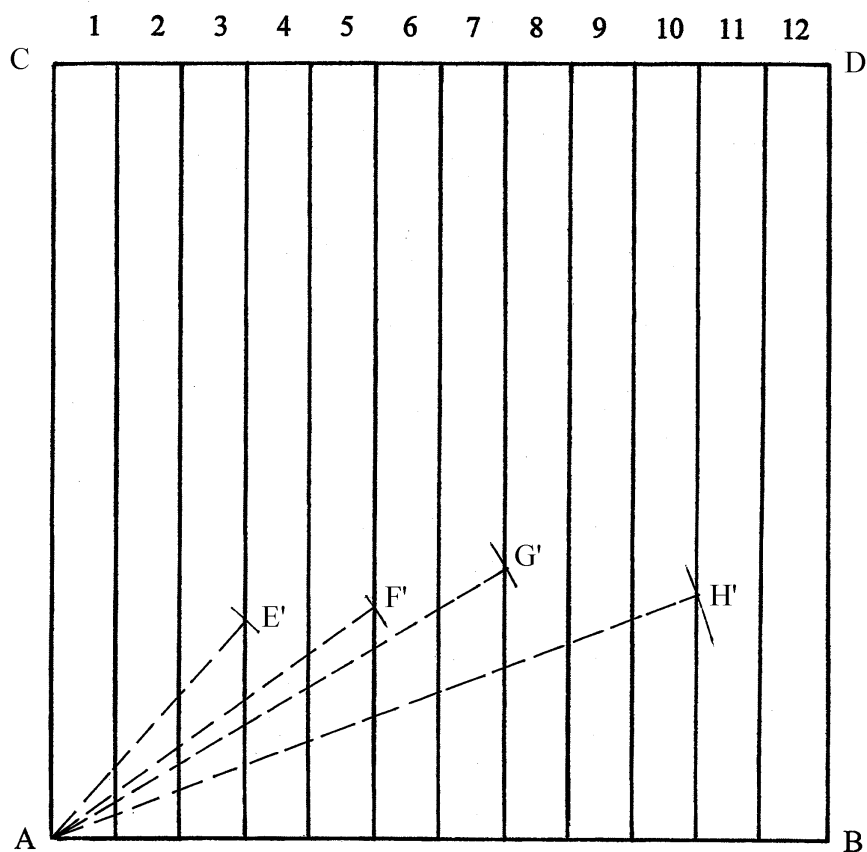


La nuova tavoletta ha la forma di un quadrato di lato AB: può avere anche la forma di un rettangolo.

I lati orizzontali AB e CD sono divisi in parti uguali, *dodici* nell'esempio: i segmenti verticali dividono il quadrato in dodici strisce verticali di uguali dimensioni e numerate da sinistra verso destra da 1 a 12:



Sono dati *quattro* segmenti AE, AF, AG e AH che devono essere divisi rispettivamente in 3, 5, 7 e 10 parti uguali:



A ————— | E 3 parti

A ————— | F 5 parti

A ————— | G 7 parti

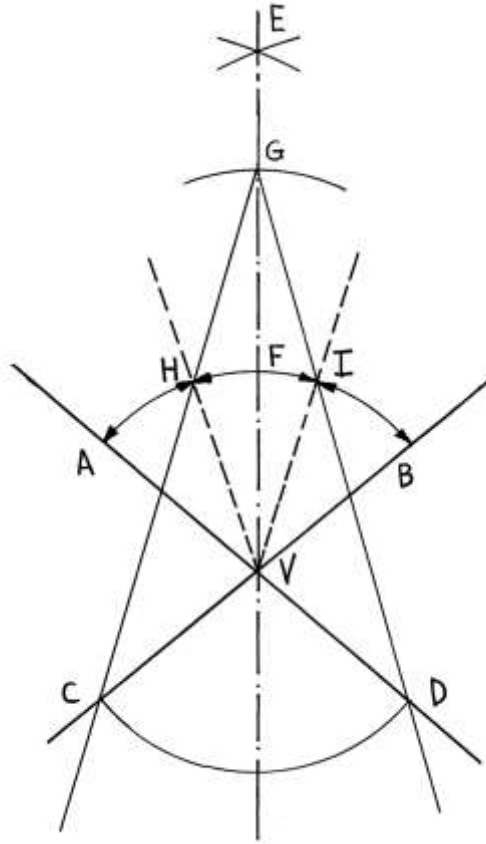
A ————— | H 10 parti

Con il compasso misurare le lunghezze dei quattro segmenti e riportarle sulla tavoletta a partire dal vertice A: sono così determinati i punti E', F', G' e H'.

La lunghezza massima del segmento divisibile con questo strumento è quella della diagonale AD: nel caso del quadrato, essa vale $AD = \sqrt{2} * AB$.

Trisezione approssimata di un angolo

AVB è un generico angolo che deve essere diviso, con accettabile approssimazione, in tre parti uguali.



Con raggio $VA = VB$ fare centro in V e disegnare i due archi AB e CD.

Con un raggio più grande di VA fare centro in A e in B e tracciare due archi che si intersecano in un punto, E.

Per E e per V passa la bisettrice dell'angolo AVB che incontra l'arco AB nel punto F.

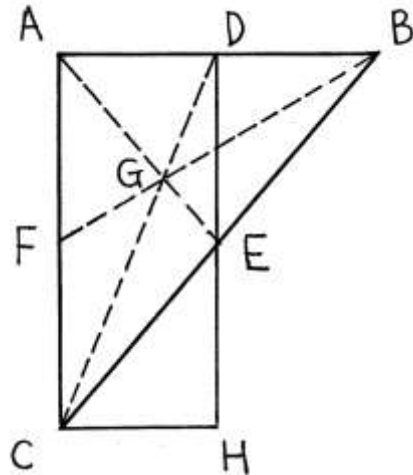
Con apertura VA fare centro in F e disegnare un arco che taglia la bisettrice in G.

Collegare G con C e con D: i due segmenti tagliano l'arco AFB in due punti: H e I.

Gli archi AH, HI e IB hanno lunghezze *quasi* uguali e lo stesso vale per i tre angoli – AVH, HVI e IVB – che essi sottendono.

Divisione dei lati di un triangolo in 2 parti uguali

ABC è un generico triangolo: in questo caso è rettangolo.



Fissare i punti medi dei tre lati: sono D, E e F.

Tracciare le tre *mediane*: AE, BF e DC. Esse si incontrano nel baricentro G.

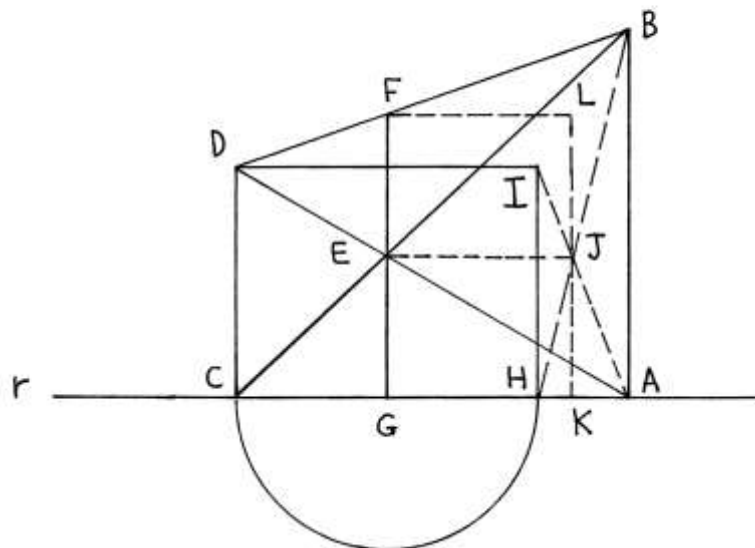
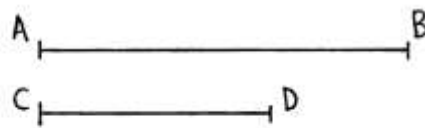
Dal punto C condurre una parallela a AB e dal punto D disegnare la parallela a AC che passa anche per E e incontra in H la parallela a AB.

Il rettangolo ADHC ha la stessa area del triangolo ABC.

I triangoli CEH e DBE hanno uguali dimensioni e la stessa area.

Medio proporzionale fra due segmenti dati

AB e CD sono due segmenti di differente lunghezza e deve essere determinata la media proporzionale i due.



Tracciare una retta orizzontale, r .

Sulla retta, fissare due punti, A e C, a distanza a piacere.

Dai punti A e C riportare perpendicolarmente alla r le lunghezze rispettivamente di AB e di CD.

Collegare i vertici D e B.

Tracciare le diagonali del quadrilatero ACDB: sono DA e CB e esse si incontrano nel punto E. Per questo ultimo condurre la perpendicolare alla retta r , parallela sia a AB sia a CD.

Sono stabiliti i punti F e G.

Fare centro in G e con raggio GC disegnare una semicirconfenza da c a H.

Dal punto D tracciare verso destra la parallela alla r e da H innalzare la perpendicolare ad essa: le due linee si incontrano nel punto I.

Collegare le coppie di punti A-I e B-H: AI e BH si intersecano in un punto, J. Per questo ultimo disegnare la parallela a AB fino a incontrare perpendicolarmente la retta r nel punto K.

Da F condurre la parallela a r : è determinato il punto L.

Disegnare EJ.

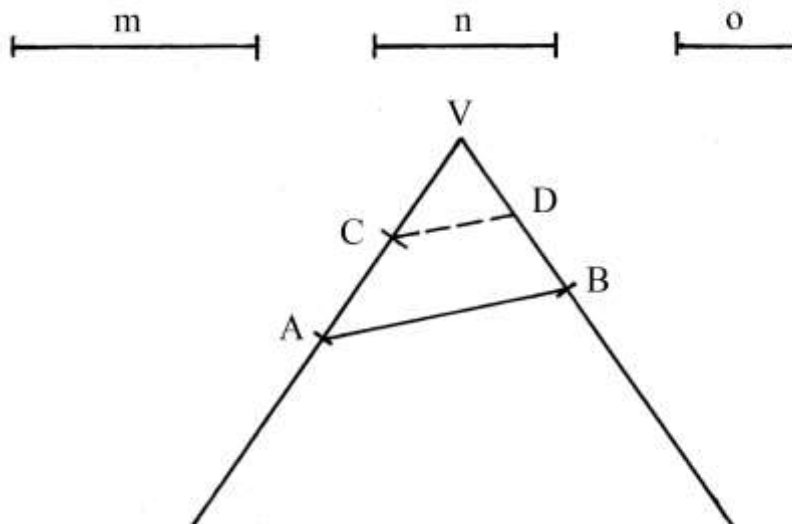
I segmenti FEG e LIK hanno la stessa lunghezza che è il medio proporzionale cercato:

$$AB : GF = GF : CD .$$

Segmento quarto proporzionale

Sono dati *tre* segmenti di lunghezze m , n e o . Deve essere determinata la lunghezza incognita del quarto componente, p , della progressione

$$m : n = o : p .$$



Disegnare un angolo acuto con ampiezza a piacere e vertice V.

Dal punto V riportare sul lato sinistro la lunghezza di m : $VA = m$.

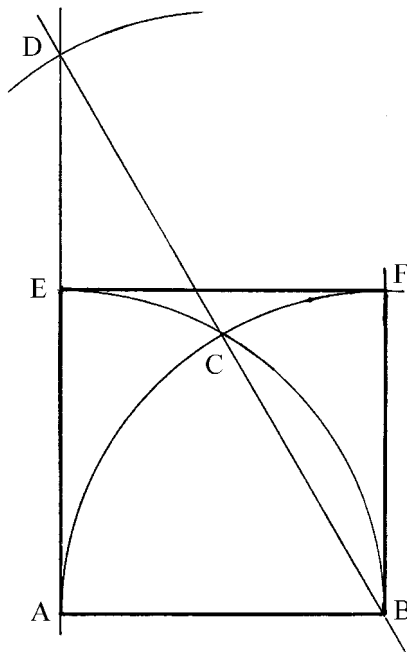
Sul lato destro fissare il punto B a distanza n : $VB = n$.

Infine, dal punto V fissare sul lato sinistro il punto C a distanza o : $VC = o$.

Tracciare il segmento AB e dal punto C condurre la parallela a AB fino a incontrare il lato destro dell'angolo nel punto D: VD è la lunghezza del quarto proporzionale, p .

Costruzione di un quadrato

Deve essere costruito un quadrato di lato AB: l'unica difficoltà che si incontra è la fissazione di esatti angoli retti.



Fare centro nei punti A e B con raggio AB e tracciare due archi che si incontrano nel punto C. Fare centro in C con la stessa apertura e disegnare un altro arco.

Disegnare una linea uscente da B e passante per C: essa incontra l'ultimo arco in un punto D.

Con tutta evidenza la costruzione ricalca quella della *Perpendicolare all'estremo di un segmento*.

Per D e per A passa la perpendicolare a AB che fissa il vertice E.

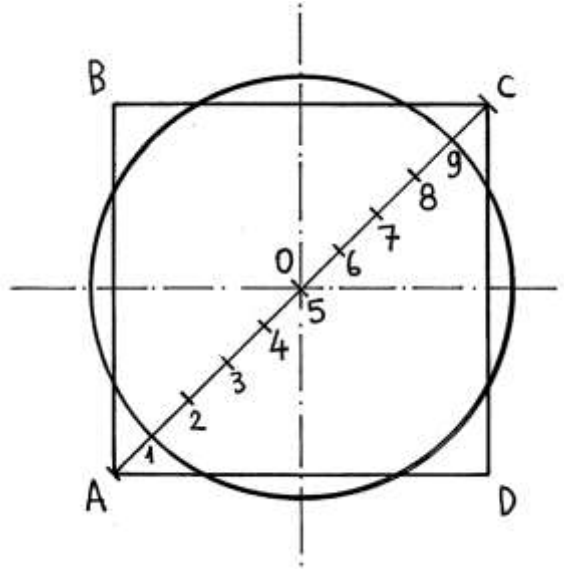
Fare centro in E con raggio AB e tracciare l'arco che stabilisce il punto F.

AEFB è il quadrato cercato.

ACB è un triangolo equilatero, peraltro non disegnato.

Cerchio equivalente a un quadrato

La costruzione è, *ovviamente*, approssimata.



ABCD è un quadrato e AC è una sua diagonale: questa ultima deve essere divisa in *dieci* parti uguali.

O è il centro del quadrato e del cerchio da determinare.

Fare centro in O e con raggio O-1 = O-9 disegnare una circonferenza.

La diagonale AC è lunga:

$$AC = \sqrt{2} * AB = \sqrt{2} * \text{lato}.$$

Il diametro 1-9 = d è lungo:

$$d = 1-9 = 8/10 * AC = 8/10 * \sqrt{2} * \text{lato}.$$

Vale anche il rapporto inverso:

$$AC = 10/8 * d.$$

L'area del cerchio è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * (d/2)^2 = \pi * (8/10 * \sqrt{2} * \text{lato})^2 \approx 4,0192 \text{ lato}^2.$$

L'area del quadrato è:

$$\text{Area}_{\text{ABCD}} = AD^2 = \text{lato}^2 \text{ e quindi l'area del cerchio è praticamente uguale a quella.}$$

Utilizzando per π il valore approssimato 22/7, il risultato cambia pochissimo: l'area del cerchio diviene $\approx 4,022857 \text{ lato}^2$.

Una costruzione simile a questa descritta da Lodi era stata impiegata da Francone da Liegi al quale è dedicato l'APPROFONDIMENTO che segue.

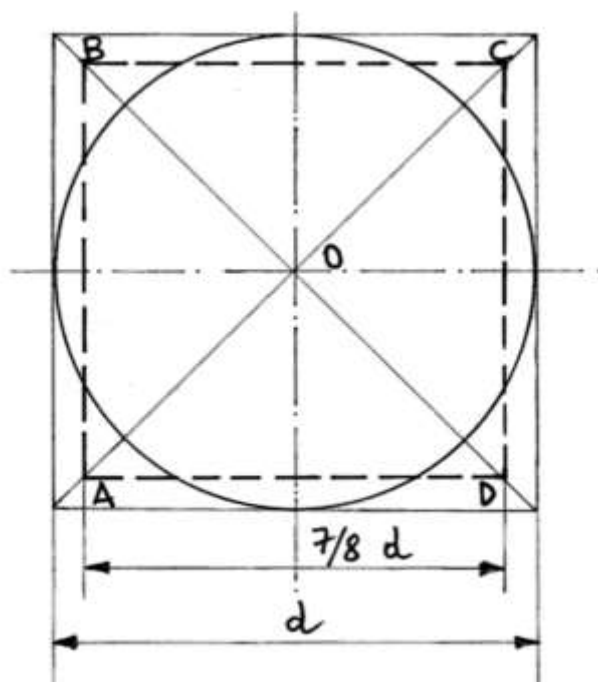
----- APPROFONDIMENTO -----

La quadratura del cerchio secondo Francone

Francone da Liegi (circa 1015 – 1083) era un ecclesiastico e un matematico. Ha lasciato un trattato in latino sulla *quadratura del cerchio*, scritto intorno al 1050.

Francone propose *tre* diverse soluzioni del problema: le prime due erano errate e la terza approssimata ma incompleta (perché mancante di una sufficiente descrizione).

La prima soluzione assegnava al lato del quadrato equivalente la lunghezza di 7/8 di quella del diametro:



L'area del cerchio di diametro d è:

$$\text{Area CERCHIO} \cong 3,14 * d^2/4 \cong 0,785 * d^2 .$$

L'area del quadrato ABCD è:

$$\text{Area QUADRATO} = (7/8)^2 * d^2 = 49/64 * d^2 = 0,765625 * d^2 .$$

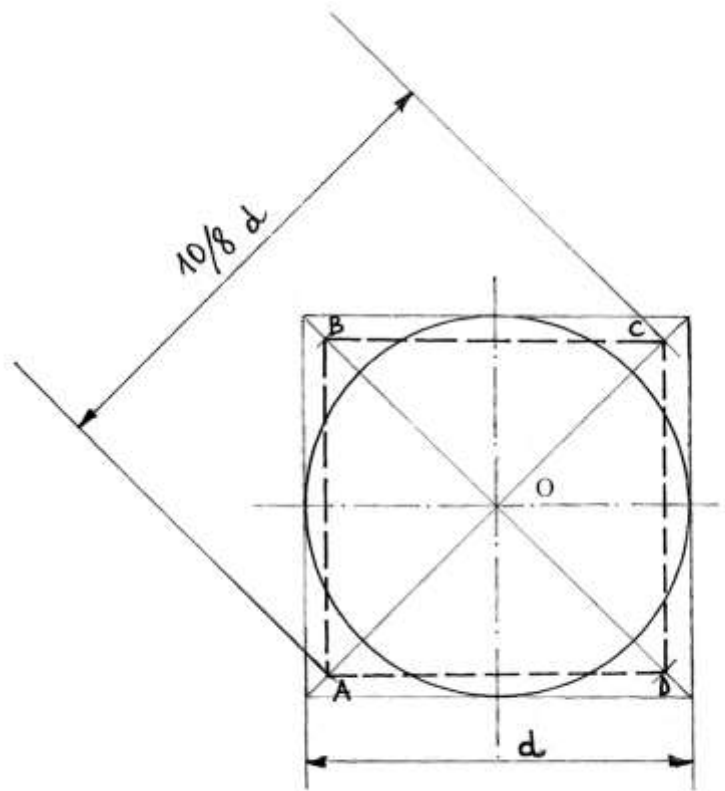
Con questa ultima formula, Francone fissò per π un valore approssimato per difetto:

$$\pi = 0,765625 * 4 = 3,0625 .$$

È indispensabile ricordare il valore corretto di π :

$$\pi \approx 3,14159265\dots$$

La seconda costruzione fissa la lunghezza della *diagonale* del quadrato uguale a $10/8$ di quella del diametro d :



La lunghezza della diagonale AC è: $AC = 10/8 * d$.

L'area del cerchio è uguale a quella della precedente soluzione:

$$\text{Area CERCHIO} \cong 0,785 * d^2 .$$

L'area del quadrato ABCD è data da:

$$\text{Area QUADRATO ABCD} = (10/8)^2 * d^2/2 = 100/128 * d^2 = 0,78125 * d^2 .$$

Il valore di π usato in questo caso da Francone è anch'esso approssimato per *difetto*:

$$\pi = 4 * 0,78125 = 3,125 = 3 + 1/8 .$$

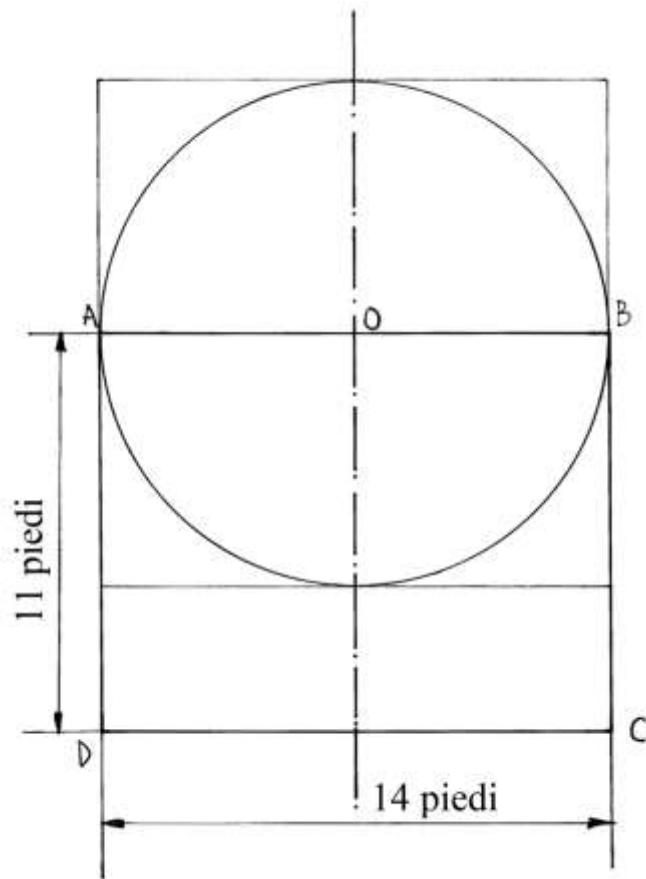
Nella terza soluzione, Francone utilizzò il valore approssimato di π determinato da Archimede e poi usato anche dai Grammatici romani:

$$\text{Area CERCHIO} = \pi * d^2/4 \cong 22/7 * d^2/4 \cong 11/4 * d^2 .$$

Il valore di π ricavato da questa ultima formula è approssimato per *eccesso*:

$$\pi \cong 11/4 * 4 \cong 3,142857... .$$

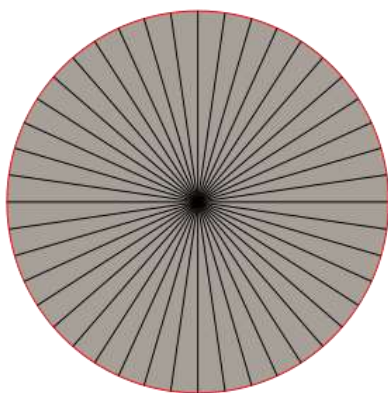
Francone misurava in *piedi*; la superficie di un cerchio di diametro $d = 14$ piedi era, a suo avviso, pressoché uguale a quella di un rettangolo di dimensioni $11 * 14$ piedi e cioè 154 piedi².



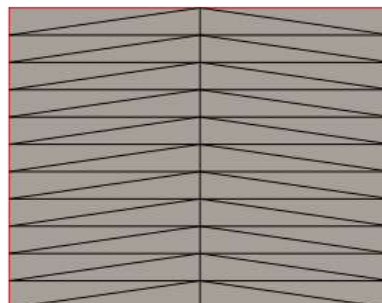
Nella figura qui sopra il cerchio di centro O e diametro $d = 14$ piedi avrebbe la stessa superficie del rettangolo ABCD di lati 11 e 14 piedi. In realtà l'impiego dell'ultima formula portò Francone a calcolare l'area del cerchio (154 piedi^2) in leggero *eccesso* rispetto alla misura effettiva:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4 \cong 3,14159265 * 14^2/4 \cong 153,938 \text{ piedi}^2.$$

Per ottenere questa soluzione, Francone adottò una procedura assai bizzarra: propose di dividere un cerchio disegnato su pergamena in 44 settori uguali che venivano poi incollati a formare una specie di rettangolo di dimensioni $11 * 14$ piedi, come spiega la figura che segue (800px-Quadratur_Franco_svg.png, reperito su Wikipedia):



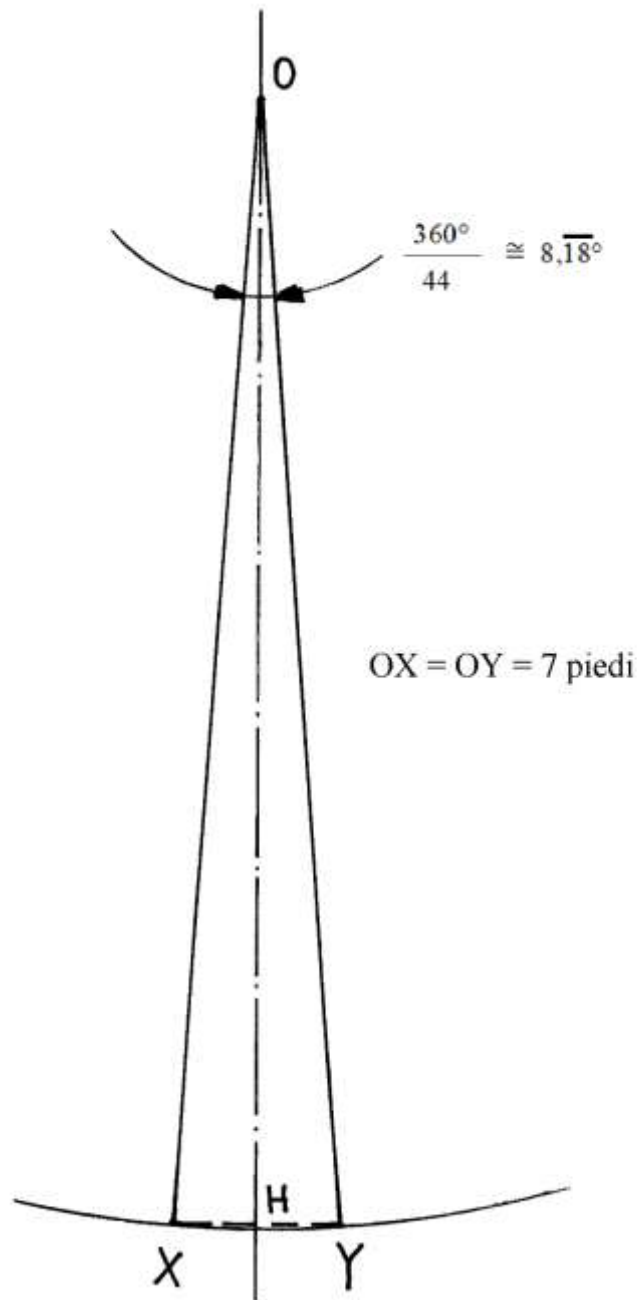
$d = 14$



$a = 14$

$b = 11$

Un singolo settore del cerchio ha le dimensioni *ingrandite* mostrate nella figura che segue:



Trasformazione di un quadrato in un rettangolo

Un quadrato, ABCD, deve essere trasformato in un rettangolo di uguale superficie: è nota la lunghezza di un lato di questo ultimo, RS.

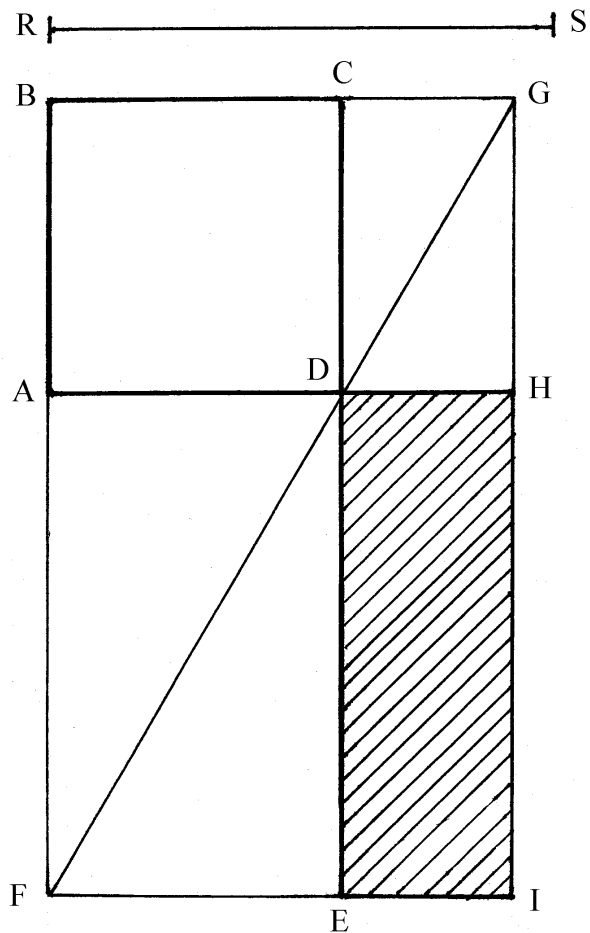
Prolungare i lati BC, BA e CD.

Da D riportare verso il basso la lunghezza di RS per fissare E:

$$RS = DE.$$

Dal punto E tracciare la parallela a AD: è stabilito il punto F.

Per i punti D e F disegnare una linea che taglia in G il prolungamento di BC.



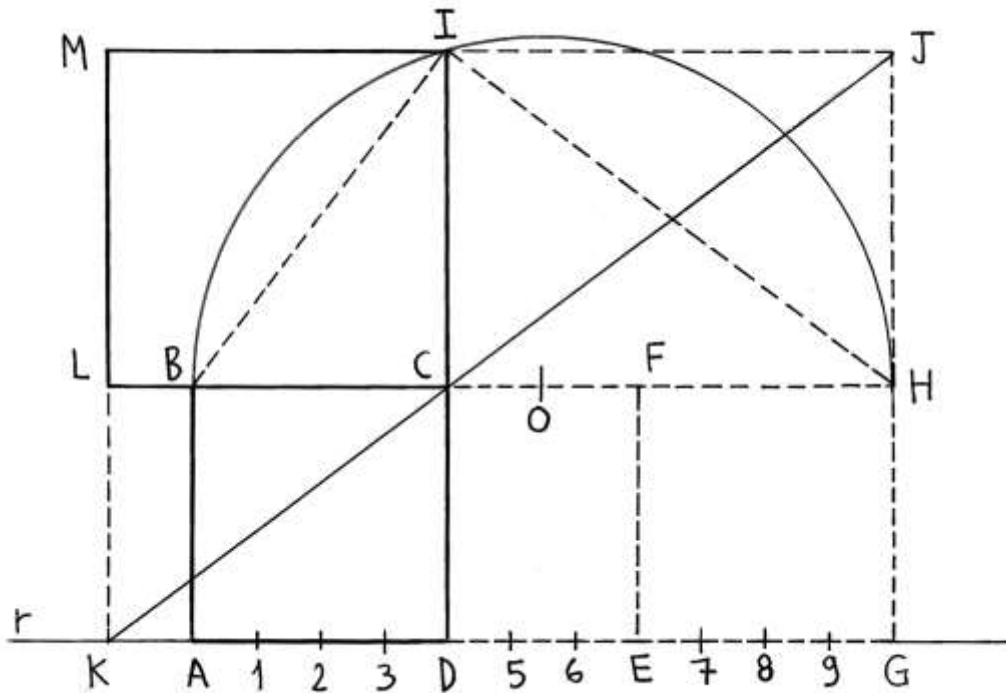
Da G condurre la parallela a BF e a CE: sono stabiliti i punti H e I.

Il rettangolo EDHI ha superficie uguale a quella del quadrato ABCD e le lunghezze dei loro lati sono legate dalla proporzione

$$DH : AD = AD : DE \quad \text{e} \quad AD^2 = DH * DE.$$

Accrescimento di un quadrato

È dato il quadrato ABCD e deve essere costruito un secondo quadrato con superficie maggiore di $\frac{3}{4}$.



Il lato AD giace sulla retta orizzontale r .

Dividere AD in *quattro* parti uguali e a partire da D riportare verso destra sulla retta r per *sette* volte la lunghezza di $\frac{1}{4}$ di AD. Sono così ottenuti i punti 5, 6, E, 7, 9, 9 e G.

Prolungare verso sinistra e verso destra il lato BC e verso l'alto DC.

Dai punti E e G elevare le perpendicolari alla retta r : sono fissati i punti F e H.

Determinare il punto medio di BH: è O. Fare centro in O e con raggio $OB = OH$ disegnare la semicirconferenza da B a H: essa taglia in I il prolungamento di DC.

BIH è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio di centro O.

BC ha lunghezza convenzionale 4 e CH è lungo:

$$CH = CF + FH = 3 + 4 = 7.$$

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli vale la proporzione

$$BC : CI = CI : CH \quad \text{da cui}$$

$$CI^2 = BC * CH = 4 * 7 = 28 \quad \text{e} \quad CI = \sqrt{(28)}.$$

CI è la lunghezza del lato del quadrato che ha area uguale a $(1 + \frac{3}{4}) = \frac{7}{4}$ di quella di ABCD.

Infatti, l'area convenzionale di ABCD è:

$$\text{Area}_{ABCD} = AD^2 = 4^2 = 16.$$

L'area del quadrato accresciuto deve essere

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \frac{7}{4} * \text{Area}_{ABCD} = \frac{7}{4} * 16 = 28.$$

Per il punto I tracciare la parallela alla r : essa fissa il punto J.

Collegare J e C e prolungare fino a intersecare la r nel punto K.

Da K innalzare la perpendicolare alla r fino a stabilire i punti L e M.

CLMI è il quadrato che ha area 28. Infatti:

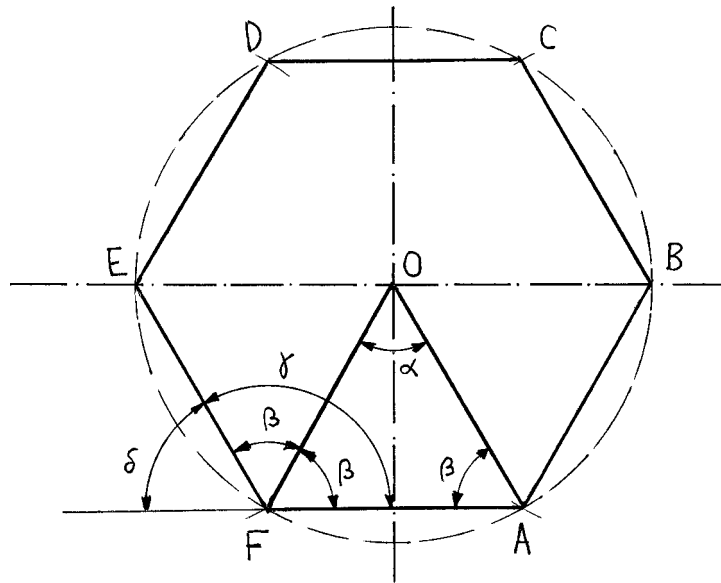
$$\text{Area}_{CLMI} = CI^2 = [\sqrt{(28)}]^2 = 28.$$

Da notare che in figura è presente il rettangolo DCHG: esso ha lati lunghi 7 e 4 unità e area uguale a $7 * 4 = 28$. DCHG è equivalente al quadrato CLMI.

----- APPROFONDIMENTO -----

Gli angoli dei poligoni

Un poligono regolare, quale è l'esagono della figura, è scomponibile in triangoli di uguali dimensioni, aventi un vertice comune nel centro O:



Nel caso dell'esagono i triangoli sono *equilateri*, mentre negli altri poligoni regolari (quadrato, pentagono, ettagono e via di seguito) i triangoli sono isosceli.

L'*angolo al vertice* di un triangolo, in O, è indicato con α .

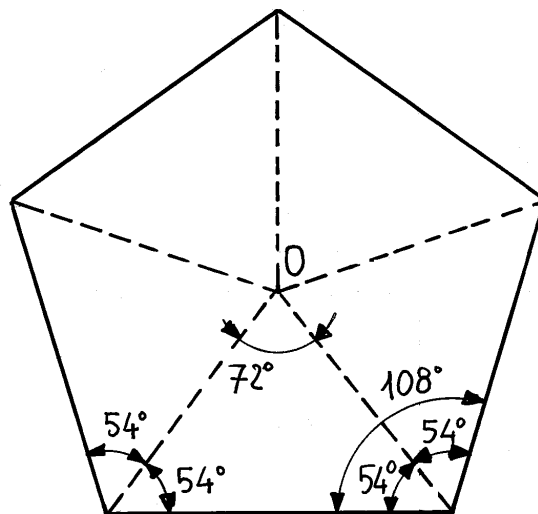
Gli *angoli alla base* dei triangoli sono di uguale ampiezza: sono quelli β .

L'*angolo interno*, tipico di ciascuna specie di poligoni, è delimitato da due lati adiacenti, quali sono EF e FA ed è chiamato γ .

Infine, δ è l'*angolo esterno* supplementare rispetto a γ , definito dal lato EF e dal prolungamento verso sinistra di FA.

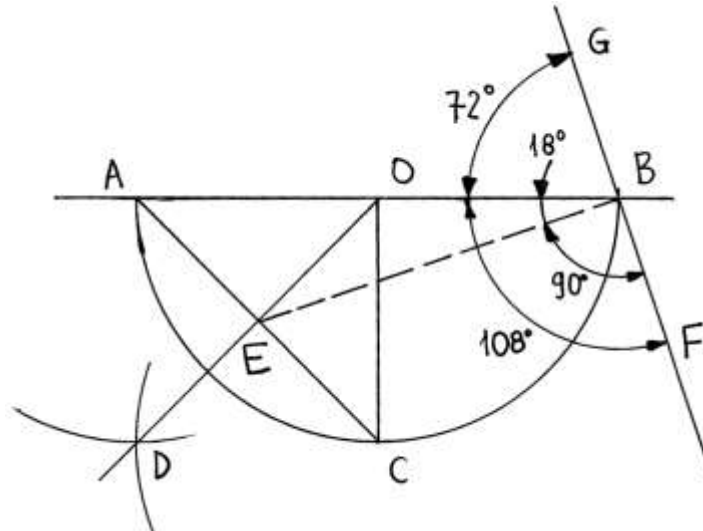
Angoli caratteristici del pentagono

Gli angoli interni del pentagono regolare sono mostrati nel grafico che segue:



Il pentagono è scomposto in *cinque* triangoli isosceli di uguali dimensioni: gli angoli al vertice nel punto O hanno ampiezza di 72° . Quelli alla base dei triangoli sono di 54° . Gli angoli interni del pentagono formati da due lati *consecutivi* hanno ampiezza uguale a $54 * 2 = 108^\circ$.

Lodi propone una semplice costruzione per ricavare l'angolo di 108° :

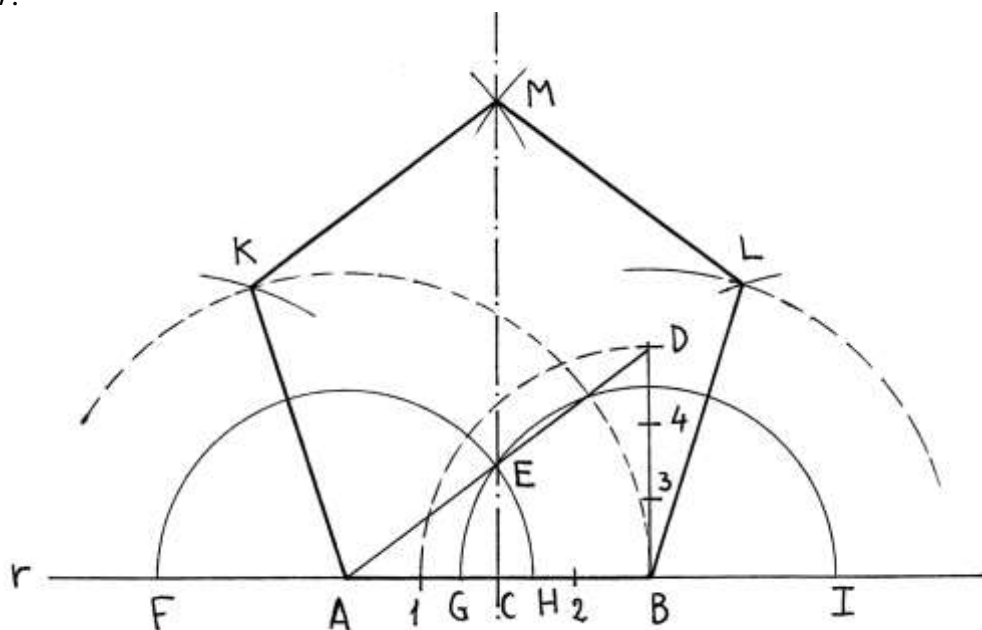


AB è il diametro orizzontale di una semicirconferenza di centro O. Tracciare il raggio verticale OC e la corda AC.

Dal centro O costruire la bisettrice dell'angolo AOC: essa interseca in E la corda AC.

Collegare E con B. Dal punto B condurre la perpendicolare a BE: l'angolo OBE è ampio 18° ed esso contribuisce alla formazione dell'angolo OBF ampio 108° . L'angolo GBO è ampio 72° .

Lodi presenta poi una costruzione del pentagono a partire dal suo lato AB che giace sulla retta orizzontale *r*:



Dividere AB in quattro parti uguali.

Dai punti C e B elevare le perpendicolari alla retta *r*.

Dal punto B riportare per volte la lunghezza di A-1; fare centro in B e con raggio B-1 tracciare un arco da 1 fino a determinare il punto D.

Disegnare l'ipotenusa AD: essa incontra l'asse innalzato da C nel punto E.

Fare centro in A e poi in B con raggio AE: sulla retta *r* sono fissati i punti F, G, H e I.

Con apertura AB fare centro nei punti F, A, B e I e disegnare quattro archi che si intersecano nei punti K e L.

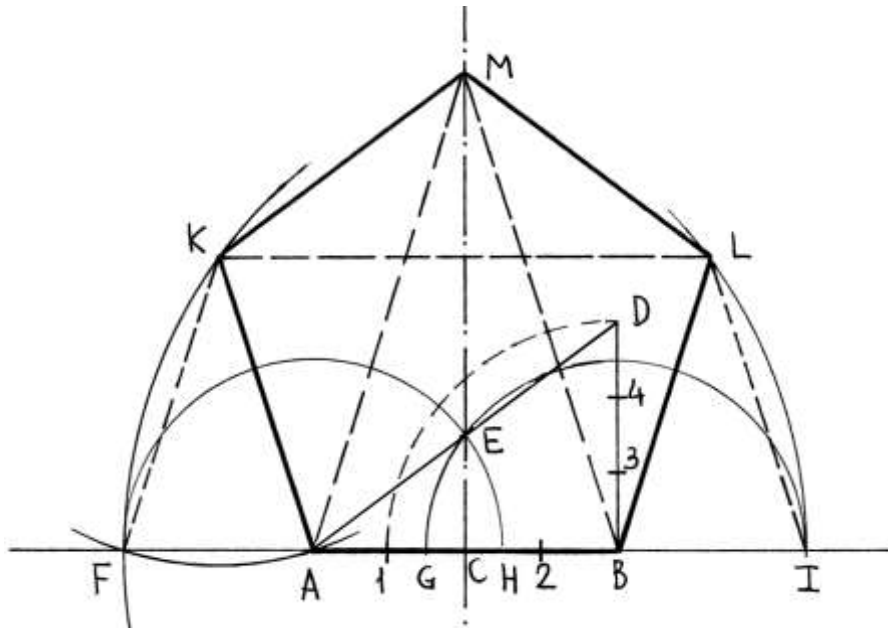
Infine, fare centro in K e in L e tracciare due archi che si tagliano nel punto M che giace sull'asse passante per C e per E.

AKMLB è il pentagono richiesto.

%%%%%%%%%

Riteniamo che questa costruzione meriti ulteriori considerazioni.

Riprodurre la precedente figura e tracciare le diagonali AM, BM e KL.



Con raggio AM fare centro nei punti A e B e disegnare gli archi LI e KF: ciò prova che AI e BF sono lunghi quanto le diagonali del pentagono già tracciate.

Consideriamo il triangolo rettangolo ADB: il cateto AB è lungo convenzionalmente 4 e quello BD 3. L'ipotenusa AD vale:

$AD = \sqrt{(AB^2 + BD^2)} = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = \sqrt{25} = 5$ unità. Il triangolo ADB rappresenta la più semplice terna pitagorica, quella 3-4-5.

Il punto E divide a metà AD e pertanto vale

$$AE = ED = 5/2 = 2,5.$$

Il segmento FA è lungo quanto AE e quindi FB è:

$$FB = FA + AB = 2,5 + 4 = 6,5.$$

Il rapporto fra le lunghezze di una diagonale, d , di un pentagono e quella di un suo lato, ℓ , è la *sezione aurea*:

$$d/\ell = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618033989 = \Phi .$$

Moltiplicando Φ per la lunghezza convenzionale dei lati del pentagono, 4 unità, si ha:

$\Phi * 4 \approx 6,472135955$ che approssimato per eccesso a 6,5 dà il valore sopra calcolato della lunghezza di una diagonale d del pentagono.

La costruzione di Lodi è sostanzialmente esatta.

Per completare la costruzione, fare centro nei punti K e L con raggio AB: gli archi passano per le coppie di punti F-A e B-I.

I triangoli FKA e BLI sono entrambi isosceli e hanno i lati obliqui lunghi quanto i lati del pentagono regolare.

----- APPROFONDIMENTO -----

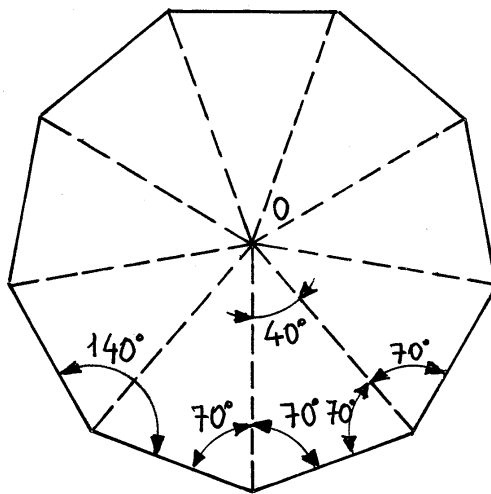
I metodi pratici

Lodi ha fornito alcune costruzioni grafiche approssimate per ricavare i poligoni regolari, senza proporre i più elaborati metodi grafici che fornivano risultati corretti, come è il caso del pentagono.

Forse, una spiegazione c'è: nell'Ottocento i *pratici* avevano bisogno di metodi abbastanza precisi ma più semplici di quelli classici. I metodi pratici erano in grado di soddisfare il livello di precisione richiesto all'epoca.

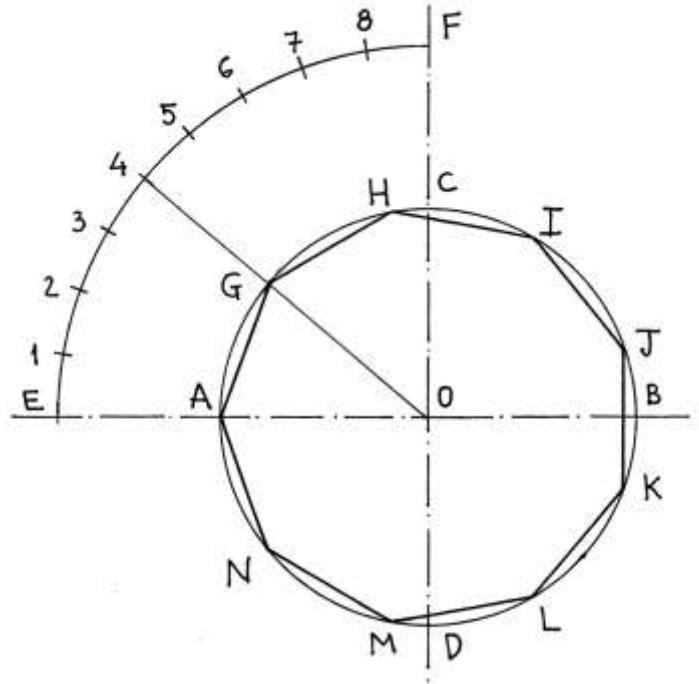
Ennagono inscritto

Un ennagono regolare è scomponibile in *nove* triangoli isosceli: ciascun angolo al centro O è ampio $360/9 = 40^\circ$.



Gli angoli alla base di ciascun triangolo hanno ampiezza uguale a 70° e i nove angoli interni dell'ennagono sono ampi 140° .

L'ennagono deve essere inscritto in un cerchio di centro O e raggio AB:



Tracciare il diametro verticale CD.

Fare centro in O e con raggio più grande di quello OA disegnare un quarto di circonferenza da E a F. Con l'aiuto di un goniometro dividere in *nove* parti uguali l'arco EF e fissare i punti da 1 a 8. Ciascuno dei nove piccoli archi (E-1 e gli altri fino a 8-F) sottende un angolo ampio $90/9 = 10^\circ$, la cui ampiezza è facilmente stabilita con il goniometro.

Collegare i punti 4 e O: il raggio interseca la circonferenza interna in un punto, G.

L'angolo 4-O-E è ampio:

$$4-O-E = 4/9 * FOE = 4/9 * 90^\circ = 40^\circ.$$

L'angolo sotteso dall'arco E-4 è quello dell'angolo al centro O dei nove triangoli isosceli.

AG è il primo lato dell'ennagono la cui lunghezza va riportata sulla circonferenza.

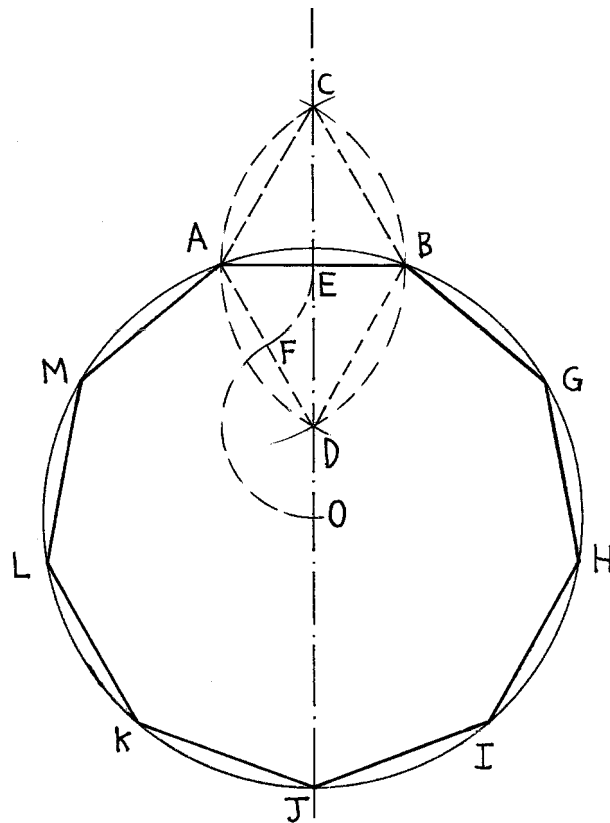
AGHIJLLMN è il poligono cercato.

Benché sia approssimata, la costruzione è abbastanza precisa.

Ennagono dato il lato

AB è il primo lato dell'ennagono da costruire.

Fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare due archi di circonferenza che si incontrano nei punti C e D: per questi ultimi condurre l'asse verticale che taglia AB nel suo punto medio E.



Disegnare i triangoli equilateri ACB e ABD.

Fare centro in A e con raggio AE tracciare un arco da E fino a incontrare AD nel suo punto medio F. Con la stessa apertura fare centro in D e disegnare un arco da F fino a tagliare in O l'asse verticale.

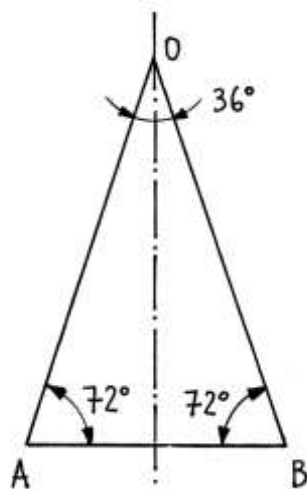
Con centro in O e raggio $OA = OB$, tracciare una circonferenza e a partire da A e da B riportarvi la lunghezza di AB.

ABGHIJKLM è l'ennagono regolare approssimato.

Il metodo fornisce un risultato abbastanza preciso.

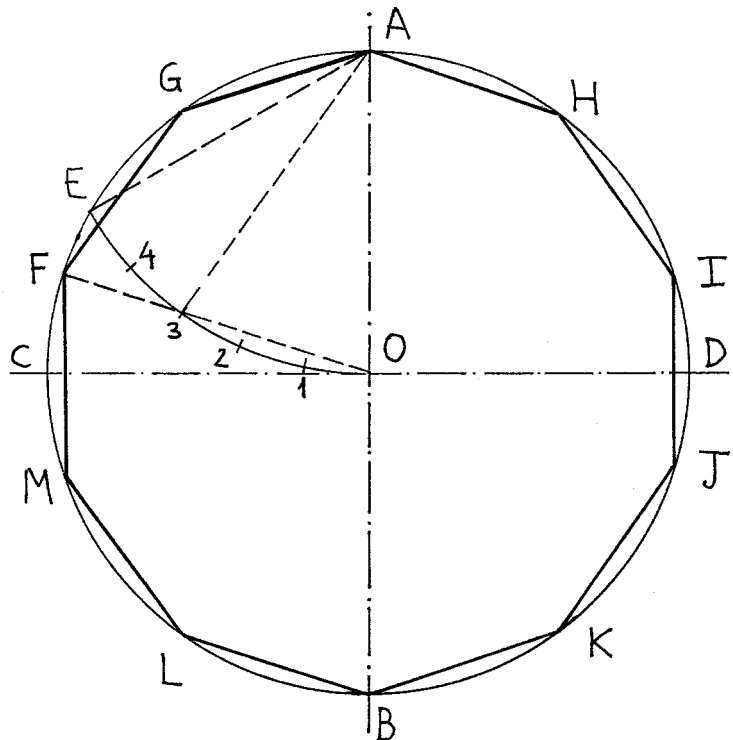
Decagono inscritto

Un decagono regolare è formato da *dieci* triangoli isosceli uguali a quello mostrato in figura:



L'angolo nel vertice O è ampio 36° e gli angoli alla base, in A e in B, sono ampi 72° .

Il decagono regolare inscritto può essere ricavato da un pentagono regolare inscritto dividendo per due gli angoli e gli archi sottesi da ciascuno dei cinque lati. Lodi propone un metodo che è qui di seguito riprodotto:



AB e CD sono i due diametri fra loro perpendicolari di un cerchio di centro O.

Con raggio OA fare centro in A e tracciare un arco da O fino a tagliare la circonferenza in E e la corda EA.

L'angolo EAO è ampio 60° : la corda AE è un lato dell'esagono regolare inscritto che non occorre completare.

Con l'ausilio di un goniometro dividere in *cinque* parti uguali l'angolo EAO: sull'arco OE sono fissati i punti 1, 2, 3 e 4.

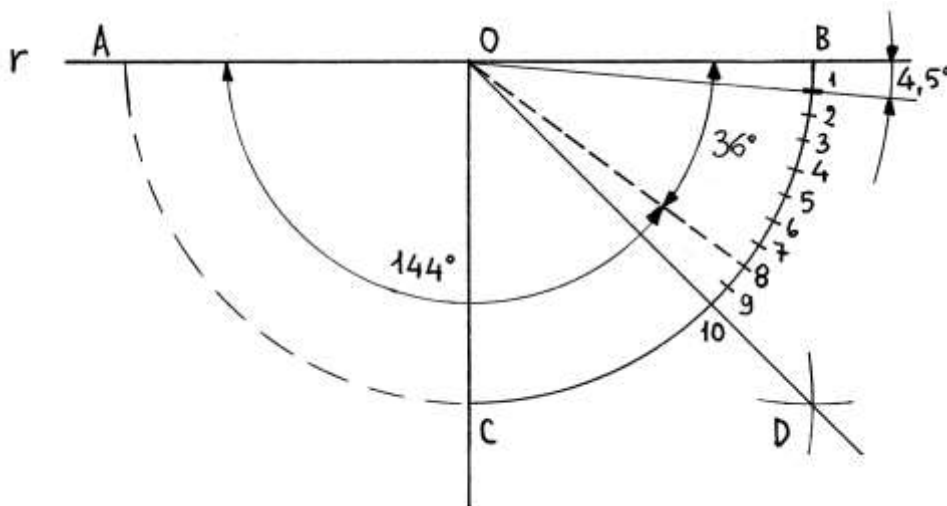
Disegnare il raggio passante per il punto 3: è OF.

F è un vertice del decagono e O-3 è la lunghezza del lato del decagono che va riportata sulla circonferenza a partire dai vertici F, A e B.

AHIJKBLMFG è il decagono inscritto.

Costruzione dell'angolo interno di un decagono

Abbiamo già visto che gli angoli interni di un decagono regolare hanno ampiezza di 144° . Lodi presenta una costruzione per ricavare questo angolo.



Tracciare una retta orizzontale, r , e fissarvi un punto, O . Fare centro in O e con raggio scelto a piacere disegnare una semicirconferenza, da A a B .

Dal punto O abbassare la perpendicolare alla retta r : è OC .

Fare centro in B e in C e costruire la bisettrice dell'angolo COB che passa per D .

Con l'aiuto di un grande e preciso goniometro, dividere in *dieci* parti uguali l' $B-10$: ciascuno di questi archi sottende un angolo ampio $45/10 = 4,5^\circ$.

Tracciare il raggio $O-8$: esso seziona l'angolo piatto AOB in due angoli:

* $BO-8$: $4,5 \cdot 8 = 36^\circ$.

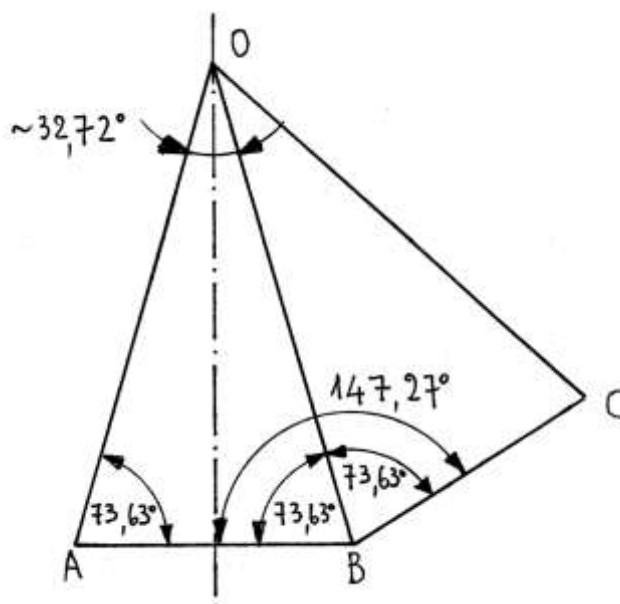
* $AO-8$: 144° .

L'angolo $AO-8$ è ampio quanto i dieci angoli interni di un decagono regolare.

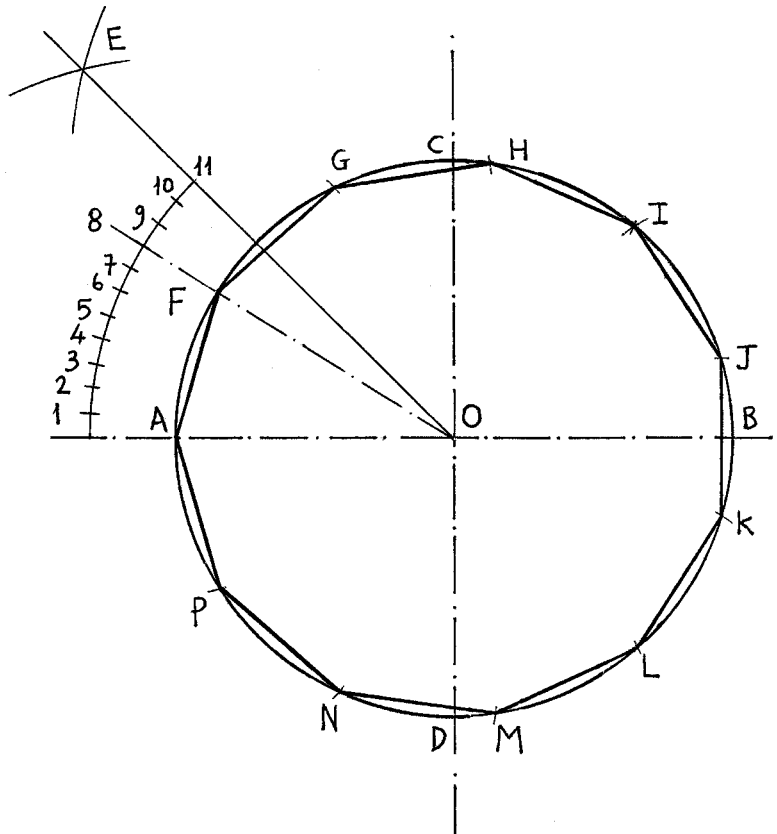
Endecagono regolare

L'*endecagono* regolare non è costruibile con riga e compasso, ma è possibile ricorrere a un metodo approssimato.

L'*endecagono* è scomponibile in *undici* triangoli isosceli che hanno gli angoli interni presentati nella figura:



Il metodo proposto da Lodi per disegnare l'*endecagono* regolare approssimato è presentato nella figura:



È dato il raggio del cerchio in cui il poligono va inscritto. Tracciare i due diametri fra loro perpendicolari AB e CD che si incontrano nel centro O.

Costruire la bisettrice OE dell'angolo retto AOC.

Dividere in *undici* parti uguali l'angolo AOE: la divisione è abbastanza facile:

$$45^\circ/11 \approx 4,09^\circ.$$

Disegnare il raggio passante per il punto O: è O-8. Esso taglia la circonferenza nel punto F e AF è il primo lato dell'endecagono inscritto.

L'angolo AOF è ampio:

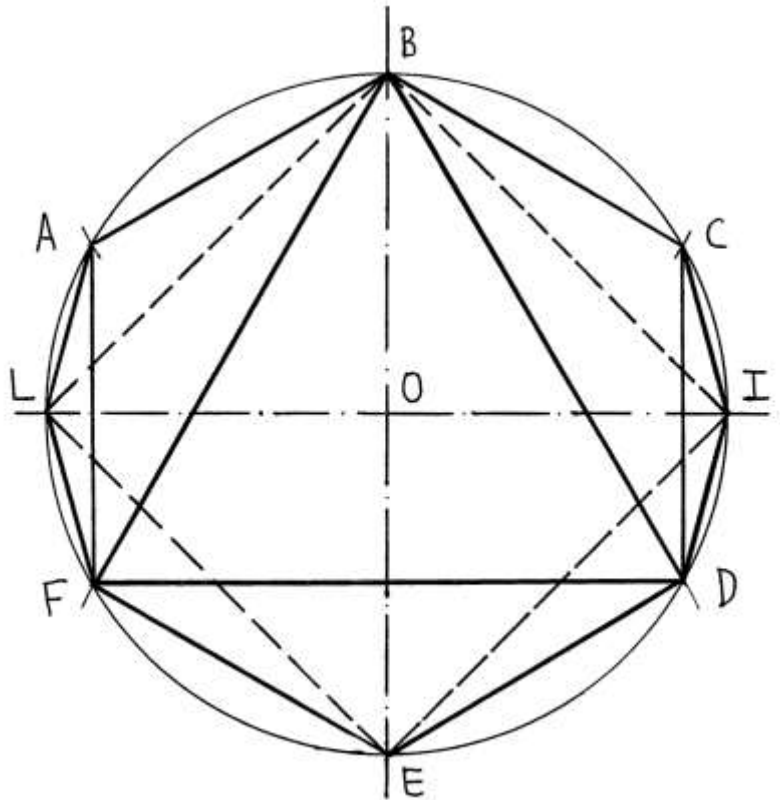
$AOF = 8/11 * 45^\circ \approx 37,72^\circ$ che è l'angolo nel vertice O di tutti gli undici triangoli isosceli che formano questo poligono.

A partire da A e da F riportare lungo la circonferenza la lunghezza di AF.

AFGHIJKLMNP è l'endecagono approssimato inscritto.

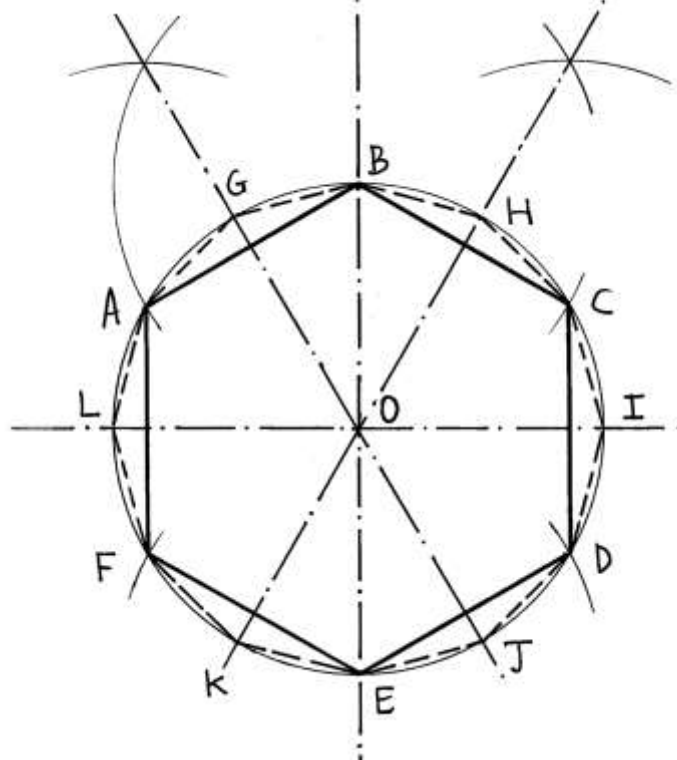
Dodecagono regolare

Il dodecagono regolare inscritto è facilmente costruibile con l'aiuto dell'esagono, del triangolo equilatero e del quadrato inscritti nello stesso cerchio:



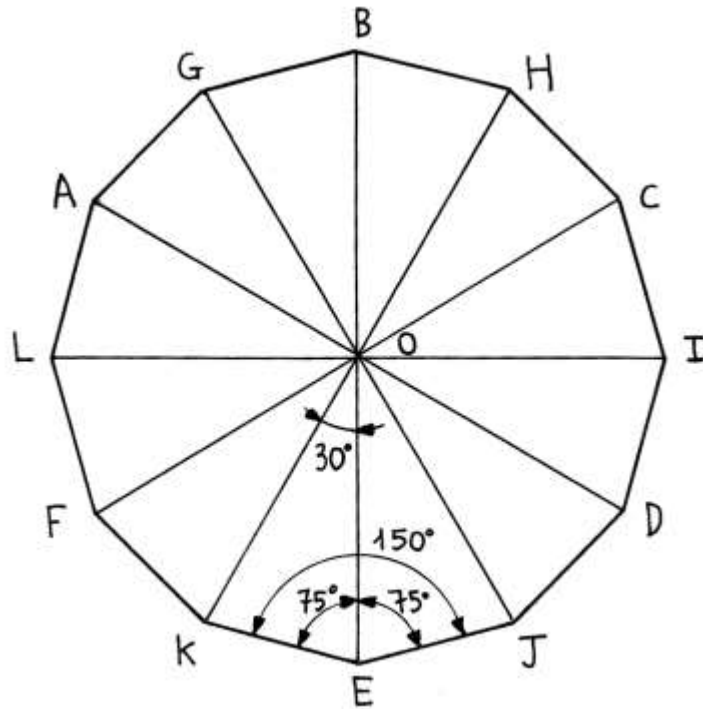
ABCDEF è l'esagono, FBD il triangolo equilatero e BIEL il quadrato inscritto. Disegnare le corde LA, LF, IC e ID: esse sono quattro dei dodici lati del dodecagono regolare.

Un altro metodo basato sull'esagono inscritto è mostrato nella figura:



ABCDEF è l'esagono inscritto nel cerchio di centro O. Costruire le bisettrici degli angoli AOB e BOC: esse tagliano la circonferenza in punti che sono vertici del dodecagono AGBHCIDJEKFL.

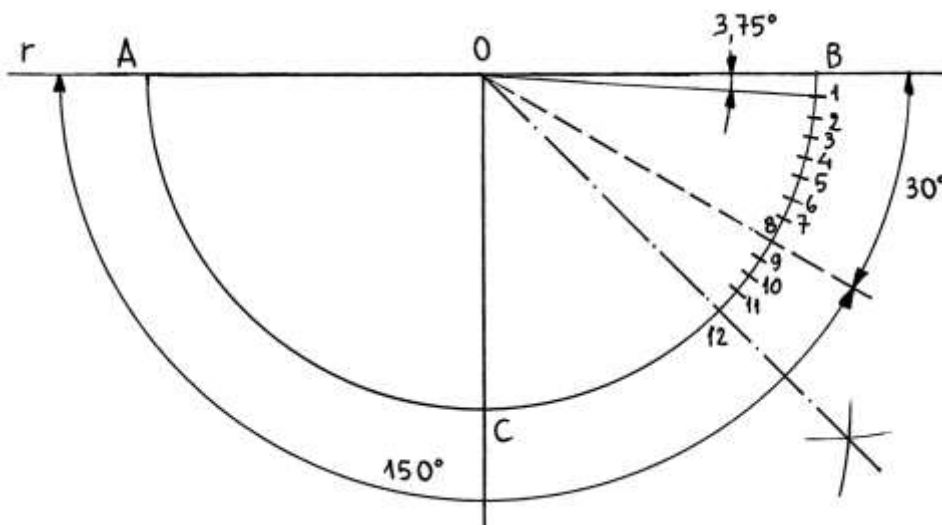
Il poligono è scomponibile in dodici triangoli isosceli che possiedono gli angoli contenuti nella figura:



Una costruzione geometrica è più facilmente ottenibile con l'uso di un preciso compasso che con l'impiego di squadre e righe: a maggior ragione questa semplice considerazione poteva valere nell'Ottocento, epoca nella quale le righe e le squadre erano prodotte in legno ed erano meno precise e meno rigide di quella che usiamo oggi.

Lodi ha presentato diverse costruzioni geometriche di angoli caratteristici dei poligoni regolari implicanti l'uso del compasso senza quasi mai impiegare le squadre con gli angoli tipici di 30° , 45° e 60° .

L'Autore descrive una costruzione in grado di ricavare l'angolo ottuso interno al dodecagono regolare che è ampio 150° :



Su di una retta orizzontale, r , fissare un punto, O, e da questo abbassare la perpendicolare. Fare centro in O e tracciare una semicirconferenza che stabilisce i punti A, B e C.

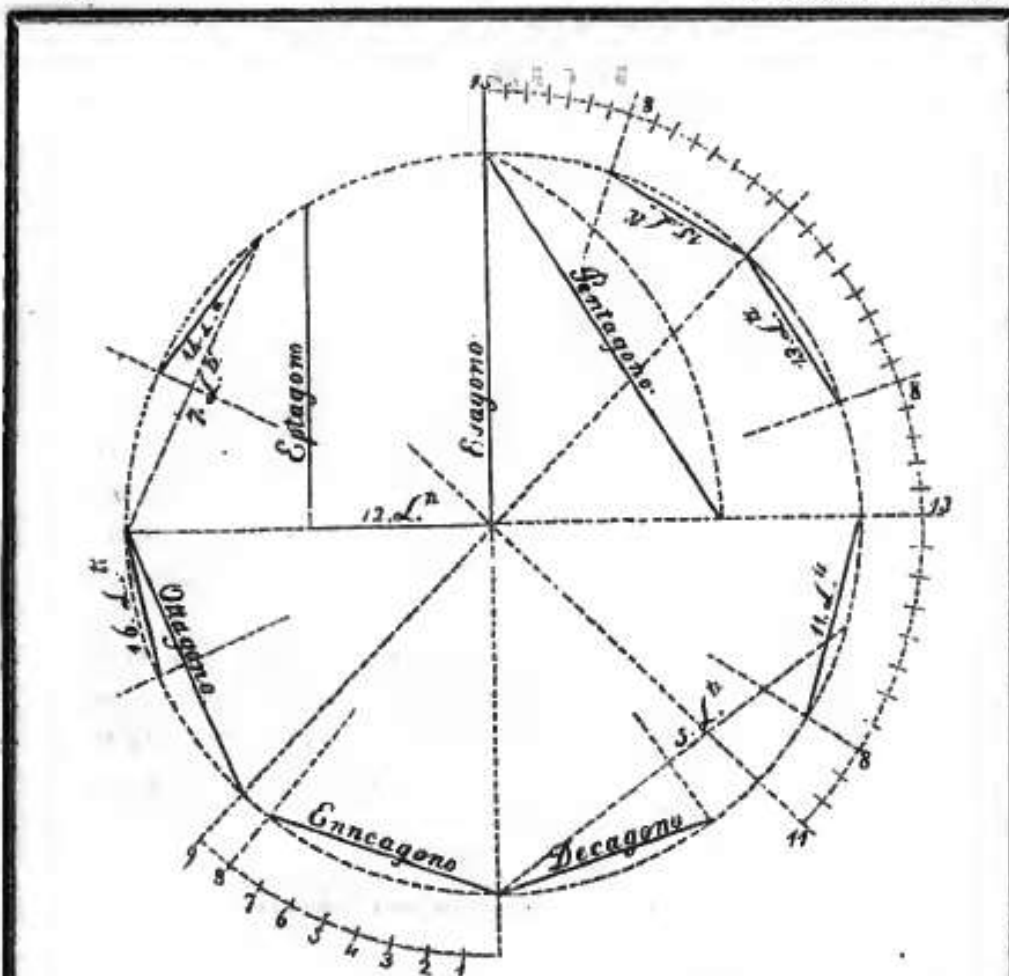
Costruire la bisettrice dell'angolo BOC: ne risulta un angolo di 45° che deve essere diviso in *dodici* parti uguali di ampiezza $3,75^\circ$.

Disegnare il raggio passante per il punto 8: l'angolo BO-8 è ampio

$BO-8 = 8 * 3,75^\circ = 30^\circ$ e l'angolo supplementare AO-8 è ampio 150° .

Regola generale per determinare l'angolo di un poligono regolare inscritto

Lodi riassume le regole che ha spiegato per determinare l'*angolo al centro* sotteso dalla corda che costituisce *un* lato del poligono regolare inscritto.



Dopo i precedenti studj, questa figura servirà per avere sempre sott'occhio in una sol tavola il modo di disegnare buon numero di poligoni regolari inscritti nel circolo.

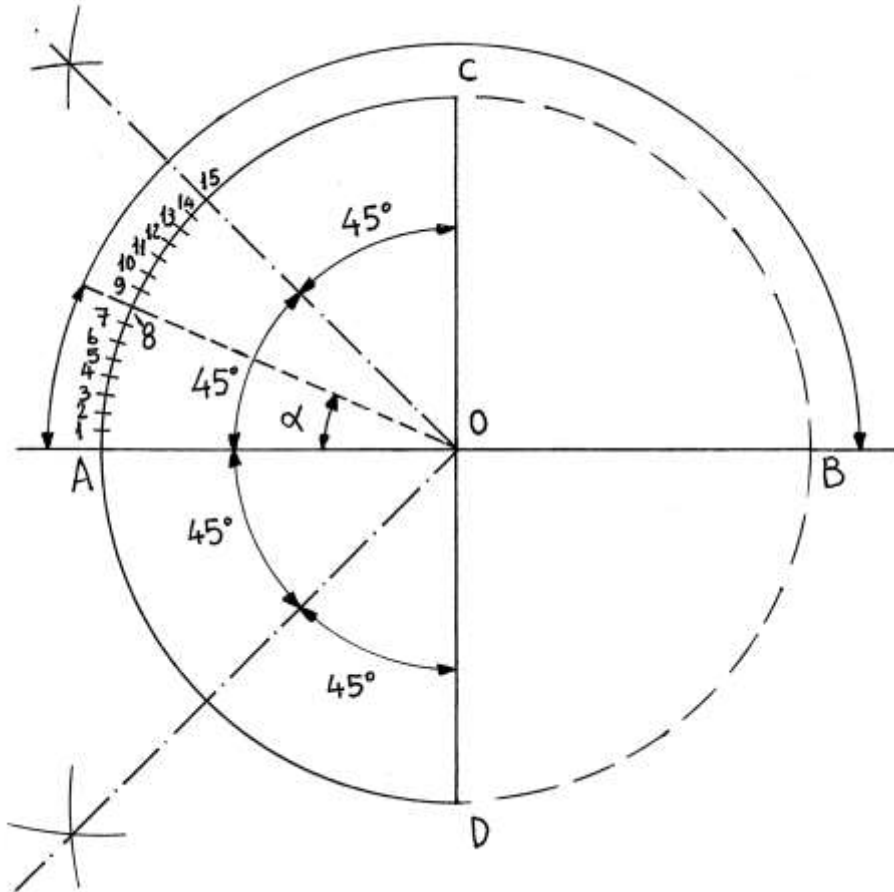
N. del lati	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
centro	72°	60°	51° 26	45°	40°	36°	32° 44	30°	27° 43	25° 42	24°	22° 30	21° 11	20°
circonf.	108°	120°	128° 34	133°	140°	144°	16	150°	152° 18	154° 17	156°	157° 30	150° 49	160°
	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°

VALORE DEGLI ANGOLI al centro e alla circonferenza di buon numero di POLIGONI REGOLARI.

Nella tabella gli angoli sono misurati in base sessagesimale: *gradi* e *minuti*.

Essa contiene un'omissione: l'*angolo interno* (chiamato [angolo alla] *circonf.*[erenza]) dell'endecagono riporta soltanto i *minuti*: 16' e non fornisce la misura in gradi (147): la misura esatta è: 147° 16'.

Il metodo generale è descritto nello schema che segue:



Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA uguale a quello del cerchio in cui il generico poligono deve essere inscritto. AB e CD sono due diametri perpendicolari.

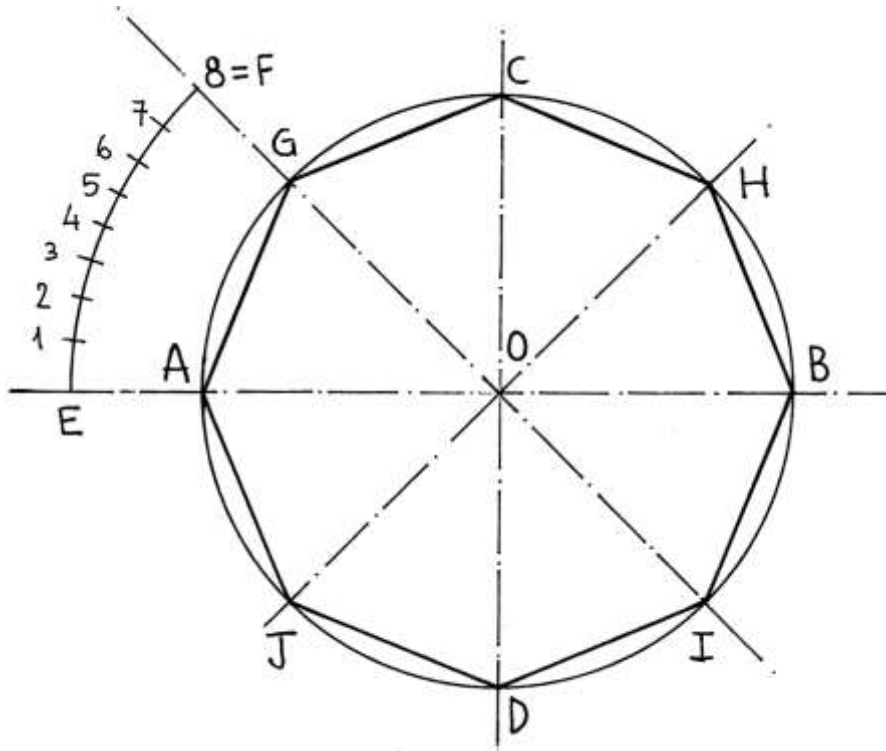
Dividere gli angoli AOC e AOD in parti uguali.

Nell'esempio deve essere costruito il poligono regolare con 15 lati (*pentadecagono*) di cui il primo vertice è il punto A: l'arco sotteso dall'angolo di 45° a partire da A, misurato in senso antiorario, va diviso in n parti uguali con l'aiuto di un buon goniometro: n è il numero dei lati del poligono. Il punto finale sulla circonferenza è indicato con 15. Il punto 8 è il secondo vertice del poligono: disegnare il raggio O-8 che delimita l'*angolo al centro* α che è sotteso dalla corda A-8, primo lato del poligono.

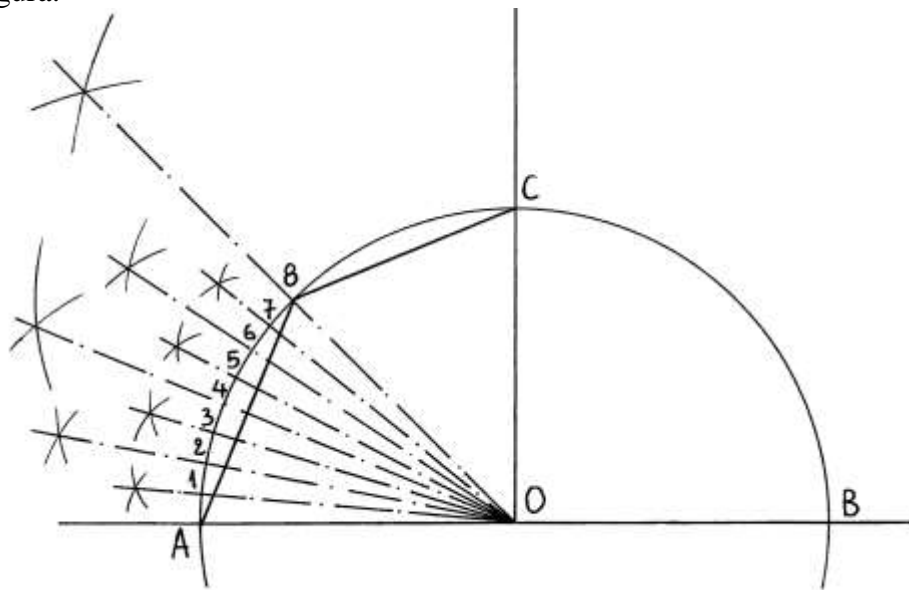
Questo metodo grafico approssimato è chiaramente applicabile a tutti i poligoni con numero di lati uguale o maggiore di 9. Nel caso dell'ottagono gli $8/8$ dell'angolo di 45° valgono

$$8/8 * 45^\circ = 45^\circ \text{ e, quindi, la costruzione di Lodi è superflua per questo poligono ed è}$$

anche meno precisa della costruzione realizzata con compasso e riga con la tracciatura delle bisettrici dei quattro angoli retti, metodo che garantisce l'esattezza che non può essere ottenuta con il goniometro:



Volendo comunque dividere in *otto* parti uguali l'angolo di 45° si può ottenere un risultato esatto con una costruzione che implica una successione di bisettrici degli angoli via via dimezzati, come mostra la figura:

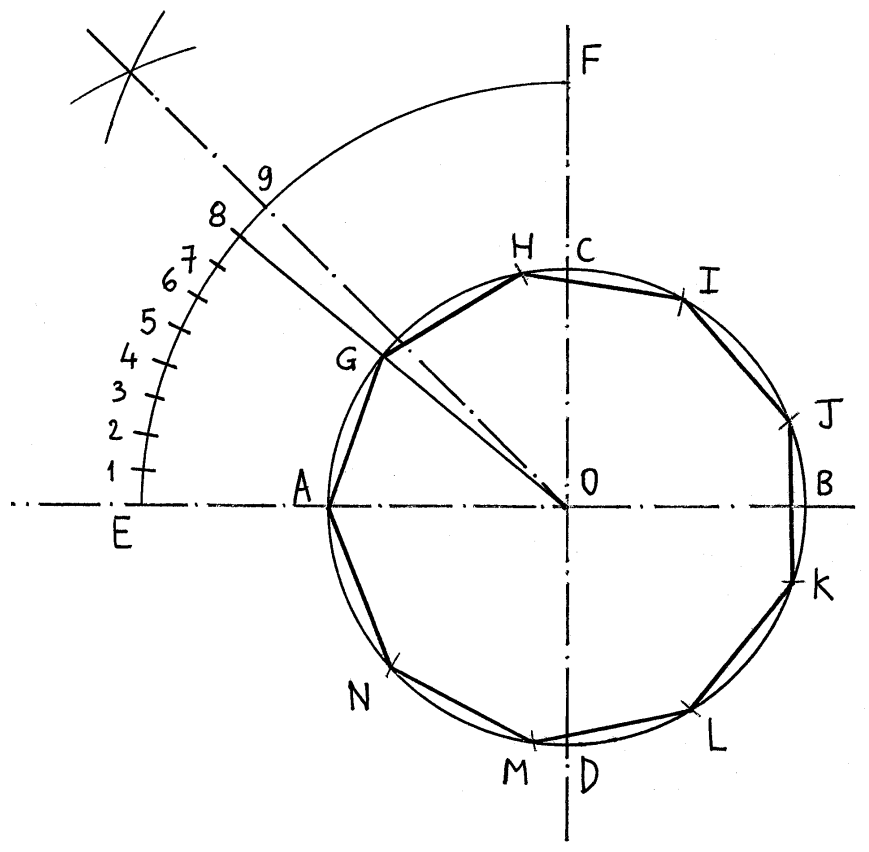


La tabella che segue fornisce i dati relativi ai poligoni regolari con numero n di lati da 9 a 20: l'ampiezza degli angoli è espressa in gradi e centesimi e non in gradi e minuti:

Numero lati (n)	$\frac{45}{n}$ (gradi)	$8 * \frac{45}{n}$ (gradi)	Angolo interno (gradi)	Angolo al centro (gradi)	Costruzione con riga e compasso
9	5	40	140	40	approssimata
10	4,5	36	144	36	esatta
11	4,09	32,72	147,27	32,72	approssimata
12	3,75	30	150	30	esatta
13	3,46	27,69	152,31	27,69	approssimata
14	3,21	25,71	154,29	25,71	approssimata
15	3	24	156	24	esatta
16	2,8125	22,5	147,5	22,5	esatta
17	2,647	21,176	~158,82	21,176	esatta
18	2,5	20	160	20	approssimata
19	2,368	18,947	~161,05	18,947	approssimata
20	2,25	18	162	18	esatta

Per chiarire ulteriormente il metodo applichiamo al caso dell'ennagono inscritto: in precedenza è stato costruito l'ennagono approssimato a partire da un suo lato.

Tracciare i due diametri fra loro perpendicolari AB e CD e la circonferenza di centro O e raggio OA. Prolungare i diametri come in figura:



Costruire la bisettrice dell'angolo retto AOC.

Fare centro in O e con raggio OE più grande di quello OA tracciare l'arco EF.

Con il supporto di un preciso goniometro, dividere in *nove* parti uguali l'arco EF; collegare 8 con O: il segmento taglia la circonferenza in G, che è il secondo vertice dell'ennagono.

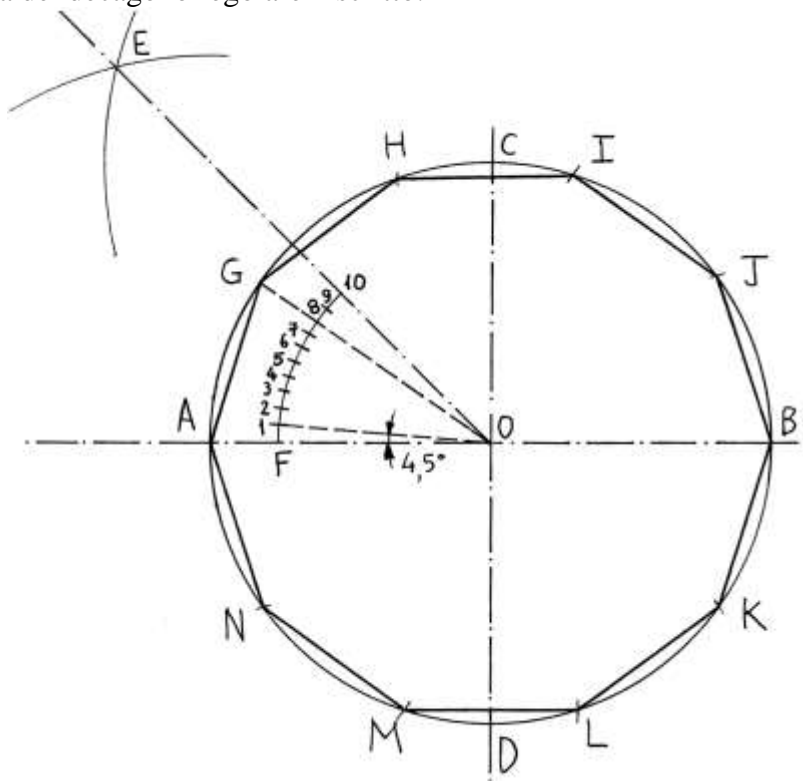
Riportare con il compasso la lunghezza della corda AG sulla circonferenza.

AGHIJKLMN è l'ennagono regolare approssimato inscritto nel cerchio di centro O.

Decagono inscritto

L'ultimo esempio che presentiamo non è contenuto nel testo di Lodi, ma è basato sulla sua regola generale.

Si tratta del decagono regolare inscritto:



Tracciare due diametri fra loro perpendicolari: sono AB e CD. Essi si intersecano nel punto O, centro del cerchio da disegnare con raggio OA.

Costruire la bisettrice dell'angolo AOC: è OE.

All'interno del cerchio tracciare un arco di centro O e lungo un ottavo di circonferenza (e cioè che sottende un angolo di 45°): i suoi estremi sono i punti F e 10.

Dividere l'arco F-10 in *dieci* parti uguali: l'angolo 1-OF è ampio $45/10 = 4,5^\circ$.

Disegnare il raggio passante per il punto per il punto 8 fino a incontrare la circonferenza in G: la corda AG è un lato del decagono inscritto.

L'angolo 8-FO è ampio:

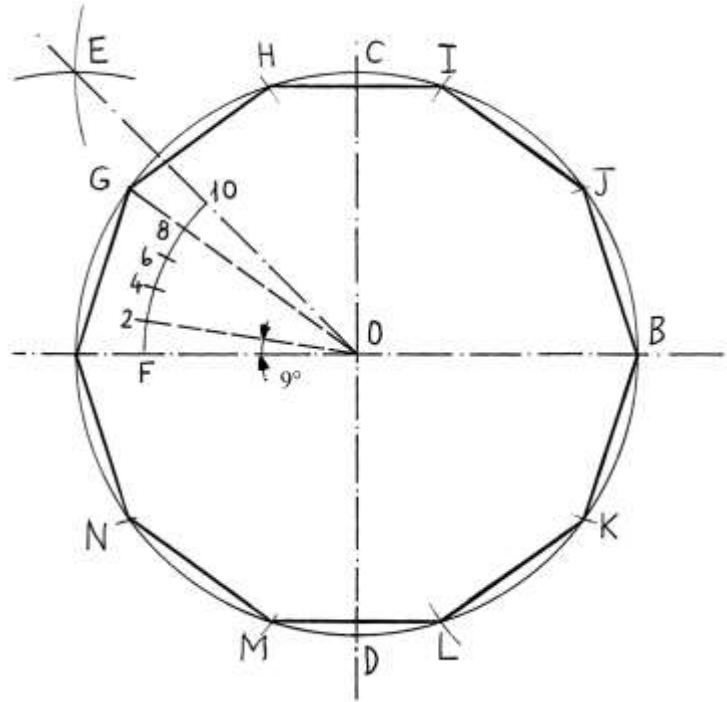
$$8-FO = 8 * 4,5^\circ = 36^\circ.$$

Gli angoli al vertice O dei dieci triangoli isosceli che scompongono il decagono hanno ampiezza uguale a: $360^\circ/10 = 36^\circ$, che è quella dell'angolo 8-FO.

A partire da A e da G riportare lungo la circonferenza AG.

AGHIJBKLMN è il decagono regolare inscritto.

Se il goniometro a disposizione non permette di dividere con precisione l'arco F-10 in dieci parti uguali, è disponibile una seconda soluzione:



La parte iniziale della costruzione è identica alla precedente.

Dividere l'arco F-10 in *cinque* parti uguali: i simboli archi, come quello 2-OF, sottendono un angolo di 9° .

L'angolo FO-10 vale $9 * 4 = 36^\circ$ che, di nuovo, è l'angolo nel vertice O dei dieci triangoli isosceli.

La costruzione dell'angolo di 9° con un qualsiasi goniometro è facilitata rispetto a quella dell'angolo di $4,5^\circ$.

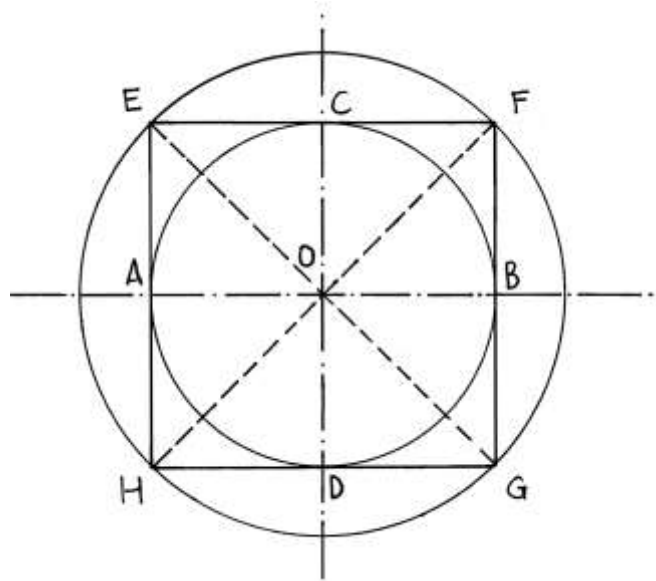
I nomi dei poligoni regolari

La tabella che segue contiene i nomi dei poligoni regolari con numero di lati compreso fra 3 e 20.

Numero lati	Nome del poligono regolare
3	Triangolo equilatero
4	Quadrato
5	Pentagono
6	Esagono
7	Ettagono
8	Ottagono
9	Ennagono
10	Decagono
11	Endecagono
12	Dodecagono
13	Tridecagono
14	Tetradecagono
15	Pentadecagono
16	Esadecagono
17	Eptadecagono
18	Ottadecagono
19	Ennadecagono
20	Icosagono

Cerchio di superficie doppia

È dato un cerchio di raggio OA: AB e CD sono due diametri perpendicolari che sono prolungati come in figura:



Inscrivere il cerchio in un quadrato: è EFGH.

Tracciare le diagonali EG e FH. Fare centro in O e con raggio OE disegnare una seconda circonferenza passante anche per i vertici F, G e H.

Il cerchio interno ha area:

$$\text{Area}_{\text{INTERNO}} = \pi * r^2 = \pi * OA^2.$$

Il raggio OE è la diagonale del quadrato AECO che ha lati lunghi OA e quindi OE è:

$$OE = \sqrt{2} * OA.$$

L'area del cerchio esterno è:

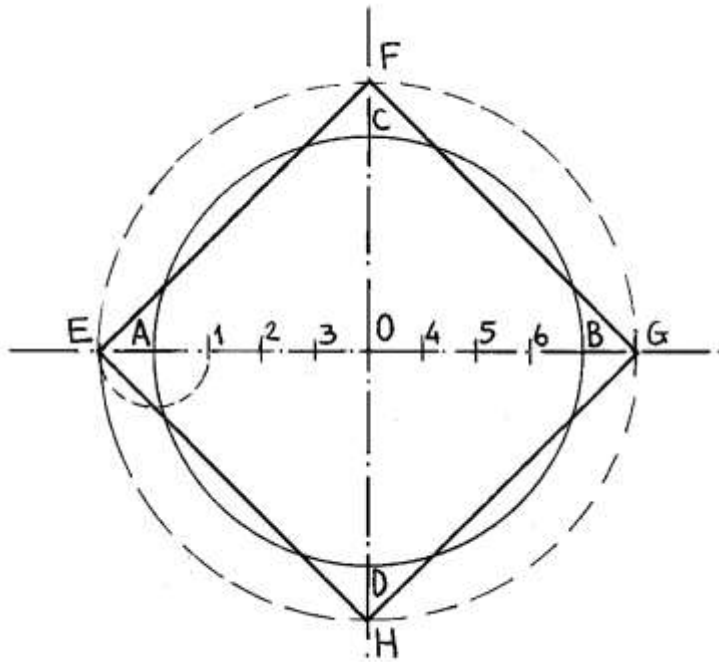
$\text{Area}_{\text{ESTERNO}} = \pi * OE^2 = \pi * (\sqrt{2} * OA)^2 = 2 * \pi * OA^2$ e pertanto ha superficie *doppia* di quella del cerchio interno.

Trasformazione di un cerchio in un quadrato

La costruzione di Lodi è, ovviamente, *approssimata*.

Un cerchio ha centro in O e diametri perpendicolari AB e CD prolungati come in figura:

Dividere AB in *otto* parti uguali.



Fare centro in A e con raggio A-1 tracciare una semicirconfenza da 1 fino a stabilire il punto E.

Con raggio OE fare centro in O e disegnare una circonferenza che incontra i diametri nei punti F, G e H.

EFGH è un quadrato.

Il cerchio ha area:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * \text{OA}^2.$$

L'area del quadrato EFGH è:

$$\text{Area}_{\text{EFGH}} = (\text{EG} * \text{FH})/2 = \text{EG}^2/2 .$$

Possiamo esprimere EG in funzione del raggio OA:

$$\text{EG} = \text{EA} + \text{AO} + \text{OB} + \text{BG} = \frac{1}{4} * \text{OA} + \text{OA} + \text{OA} + \frac{1}{4} * \text{OA} = \frac{5}{2} * \text{OA}.$$

L'area di EFGH è:

$$\text{Area}_{\text{EFGH}} = (\frac{5}{2} * \text{OA})^2/2 = \frac{25}{8} * \text{OA}^2.$$

Lodi valuta equivalenti le aree del cerchio e del quadrato. Ne consegue che:

$\pi * \text{OA}^2 = \frac{25}{8} * \text{OA}^2$. Da questa equivalenza ricaviamo il valore convenzionale attribuito da Lodi alla costante π :

$$\pi = \frac{25}{8} = 3,125 \text{ invece del pi\u00f9 corretto } 3.1416.$$

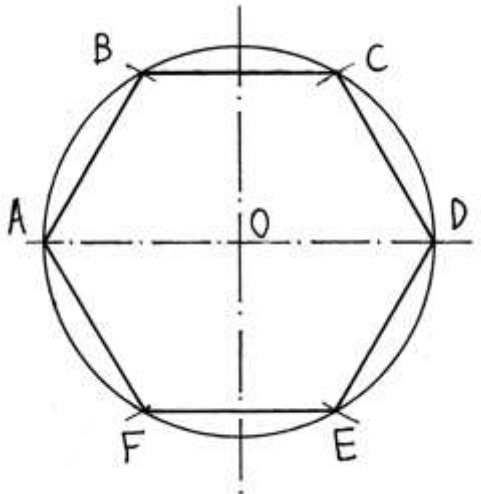
----- APPROFONDIMENTO -----

Il valore approssimato $\pi = 3,125$

Fortunato Lodi non \u00e9 stato il primo autore a impiegare per π il valore approssimato di 3,125.

L'invenzione della ruota ad opera dei Sumeri prima del 3000 a.C. pu\u00f2 avere spinto i loro scribi a cercare di calcolare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio.

In una tavoletta babilonese risalente a circa il 2000 a.C. \u00e9 calcolato il rapporto fra il perimetro di un esagono inscritto e la circonferenza circoscritta: dai dati viene dedotto il valore $\pi = 3,125$ o $25/8$.



Il raggio della circonferenza, OA, è r e i lati dell'esagono sono lunghi r . Il perimetro p dell'esagono è:

$$p = 6 * r.$$

La circonferenza c è:

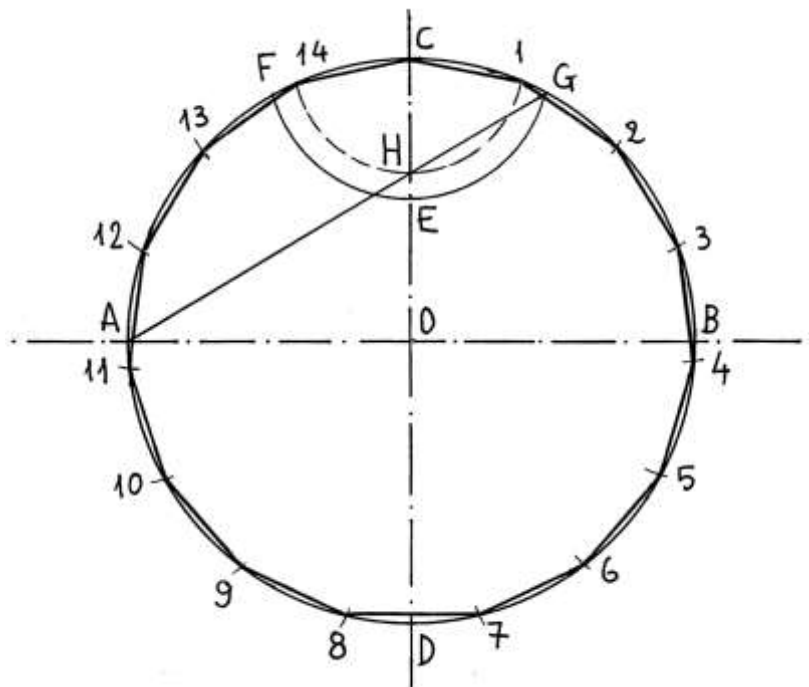
$$c = 2 * \pi * r \approx 2 * 3,125 * r.$$

Lo scriba ha confrontato le lunghezze del perimetro dell'esagono e della circonferenza e ha fissato il valore $\pi = 3,125$.

Un altro più recente autore ha impiegato lo stesso valore approssimato: si tratta del già citato Francone da Liegi (circa 1015-1083).

Pentadecagono inscritto

È data la lunghezza del raggio OA del cerchio in cui deve essere inscritto il poligono.



Tracciare i due diametri perpendicolari AB e CD.

Dividere in *due* parti uguali il raggio OC: è stabilito il punto E.

Fare centro in C e con raggio CE disegnare un arco che taglia la circonferenza nei punti F e G; tracciare la corda AG: essa incontra OC in un punto, H.

CH è la lunghezza del lato del pentadecagono inscritto, che è leggermente approssimato. Il poligono è C-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14.

Come è noto, il pentadecagono è costruibile esattamente con riga e compasso inscrivendo nello stesso cerchio un triangolo equilatero e un pentagono, come spiegato nell'APPROFONDIMENTO che segue.

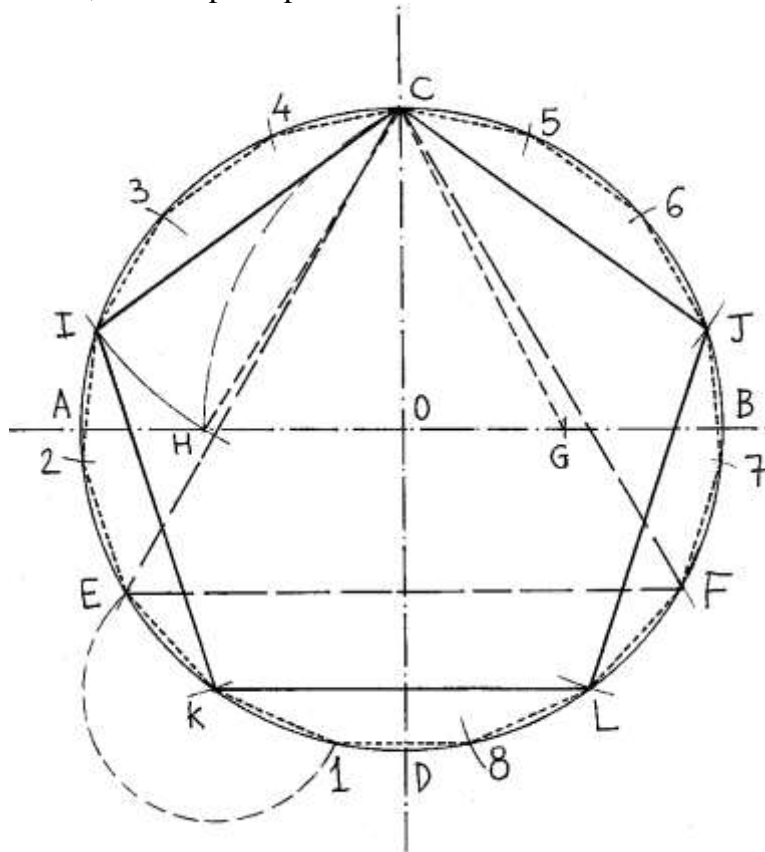
----- APPROFONDIMENTO -----

Il pentadecagono regolare inscritto

La sua costruzione è descritta con l'aiuto della figura. AB e CD sono due diametri perpendicolari che si incontrano nel centro O.

Disegnare la circonferenza.

Il metodo richiede la tracciatura di un triangolo equilatero e di un pentagono regolare, con un vertice in comune, ad esempio il punto C.



Con apertura uguale a OA, fare centro in D e fissare sulla circonferenza i punti E e F: ECF è il triangolo equilatero inscritto.

Determinare il punto medio di OB: è G. Collegare G con C.

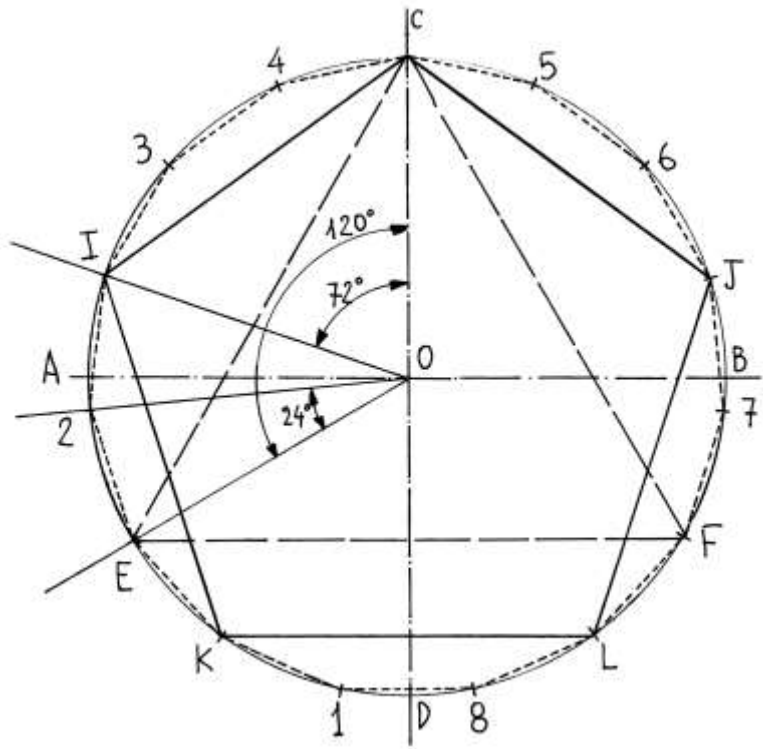
Fare centro in G e con raggio GC tracciare un arco da C fino incontrare OA in H.

Il segmento CH è la lunghezza del lato del pentagono regolare inscritto, da riportare lungo la circonferenza a partire da C: CJLKI è questo poligono.

Le corde EK e LF sono due lati del pentadecagono. Riportare la loro lunghezza a partire K: sono ottenuti i punti occorrenti.

Il poligono 1-K-2-I-3-4-C-5-6-J-7-FL-8 è il pentadecagono inscritto.

Un lato del triangolo equilatero sottende un angolo interno di 120° , un lato del pentagono un angolo di 72° e un angolo del pentadecagono 24° :



24 è un sottomultiplo sia di 120 sia di 72:

$$120 = 5 * 24$$

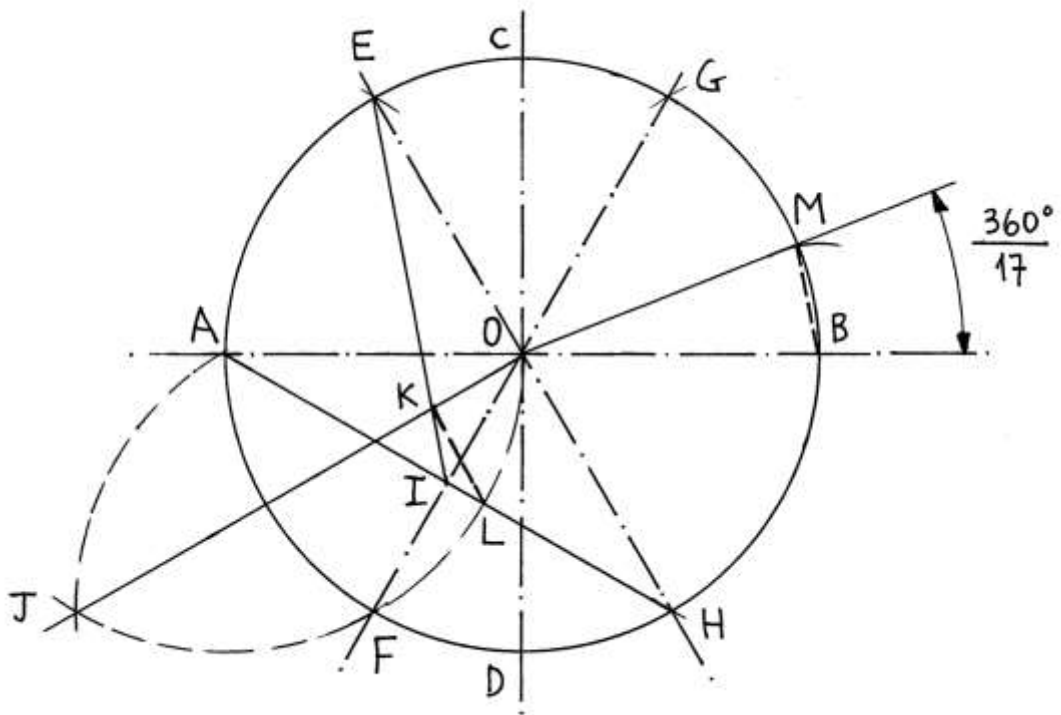
$$72 = 3 * 24.$$

I vertici del pentadecagono sono 15: 3 sono in comune con quelli del triangolo equilatero, 5 sono in comune con quelli del pentagono (uno dei quali, quello in C, è utilizzato anche dal triangolo equilatero) e 8 sono esclusivi del poligono con il maggior numero di lati (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

Divisione della circonferenza in 17 parti uguali

Lodi propone la divisione approssimata di una circonferenza in 17 parti uguali: esiste peraltro una complessa costruzione con riga e compasso dell'*eptadecagono* inscritto che fornisce un risultato esatto.

Disegnare la circonferenza di centro O e raggio OA e i due diametri perpendicolari AB e CD:



Con la stessa apertura OA fare centro in A e in B per dividere la circonferenza in *sei* parti uguali: sono fissati i punti E, F, G e H.

Tracciare i diametri EH e FG e la corda AH che interseca FG nel punto I.

Sempre con la stessa apertura fare centro inn F e disegnare l'arco da A fino a stabilire il punto J, che va collegato con O.

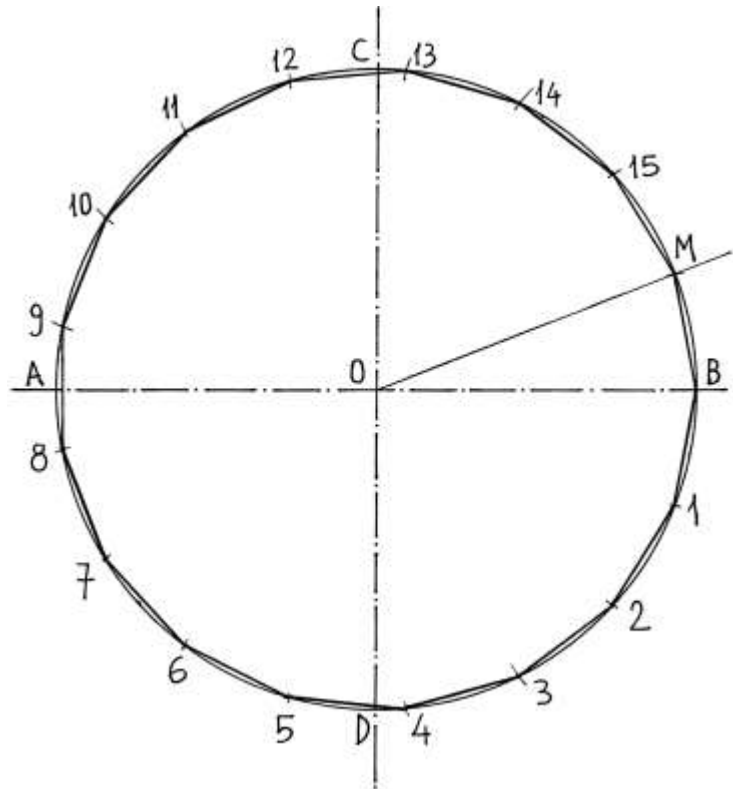
Tracciare il segmento EI: esso incontra OJ nel punto K.

Infine, disegnare il segmento KL: questo ultimo è determinato dall'intersezione fra AH e l'arco OFJ.

KL è la lunghezza del lato dell'eptadecagono inscritto. Riportare questa lunghezza da B in M e disegnare il raggio passante per M.

L'angolo MOB è ampio $360/17 \approx 21,176^\circ$.

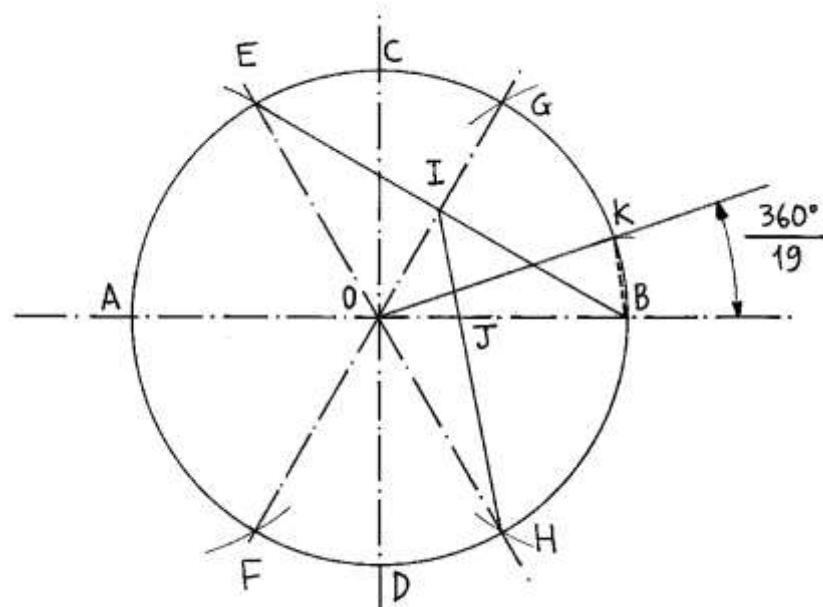
La figura che segue presenta l'eptadecagono inscritto, che non è stato realizzato da Lodi che si è limitato alla precedente costruzione:



Divisione della circonferenza in 19 parti uguali

La costruzione è *approssimata*.

È nota la lunghezza del raggio OA della circonferenza:



Tracciare i diametri perpendicolari AB e CD.

Fare centro in A e in B con raggio OA e dividere la circonferenza in *sei* parti uguali fissando i punti E, F, G e H. Disegnare i diametri FG e EH e la corda EB che incrocia FG nel punto I.

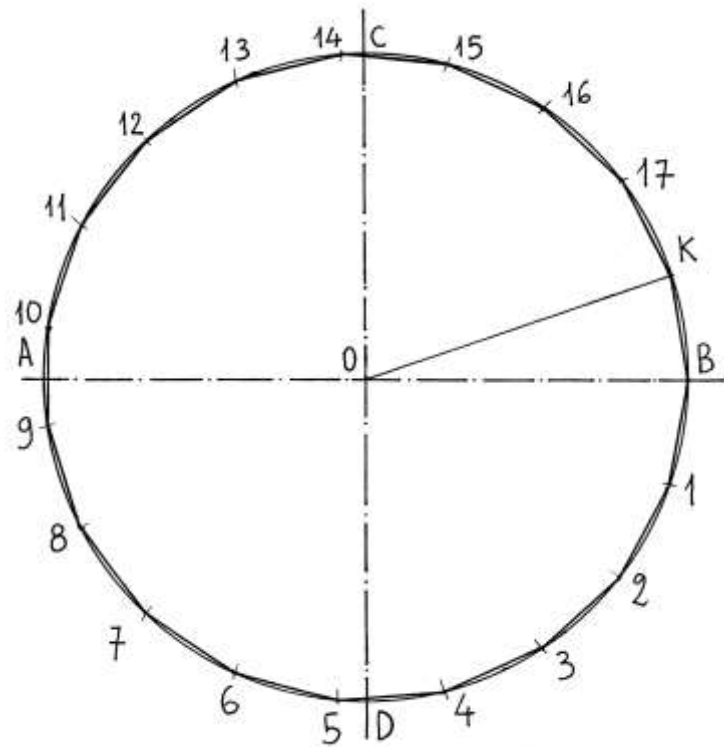
Collegare H con I: il segmento taglia il diametro AB in J.

OJ è la lunghezza del lato dell'ennagono che è riportata da B in BK, primo lato del poligono.

Tracciare il raggio passante per K. L'angolo KOB è ampio

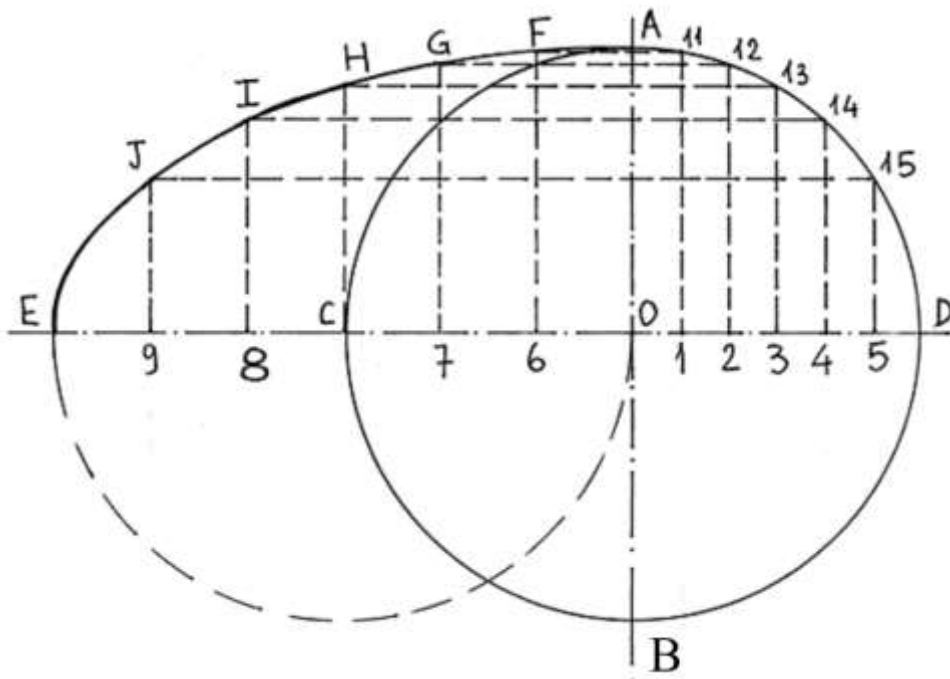
$$KOB = (360/19)^\circ \approx 18,947^\circ.$$

Il grafico che segue contiene l'ennadecagono approssimato realizzato a partire dalla precedente costruzione di Lodi:



Costruzione di un'ellisse

La lunghezza dell'asse minore AB dell'ellisse da costruire è nota: la costruzione produce un'ellisse con *rapporto d'aspetto* RA uguale a 2. Questo numero rappresenta il rapporto fra la lunghezza dell'asse maggiore e quella dell'asse minore.



Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA e la retta orizzontale passante per O e perpendicolare a AO: essa stabilisce i punti C e D.

Dividere OD in *sei* parti uguali e OC in *tre* parti uguali: sono fissati i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Dal punto C riportare sulla retta orizzontale, verso sinistra e per tre volte, la lunghezza di 7-C: sono ottenuti i punti 8, 9 e E. Per verifica, questo ultimo punto è ricavato anche facendo centro in C con raggio CO.

Dai punti 1, 2, 3, 4 e 5 elevare le perpendicolari a CD fino a intersecare la circonferenza nei punti 11, 12, 13, 14 e 15.

Anche dai punti 6, 7, C, 8 e 9 condurre le perpendicolari a ED.

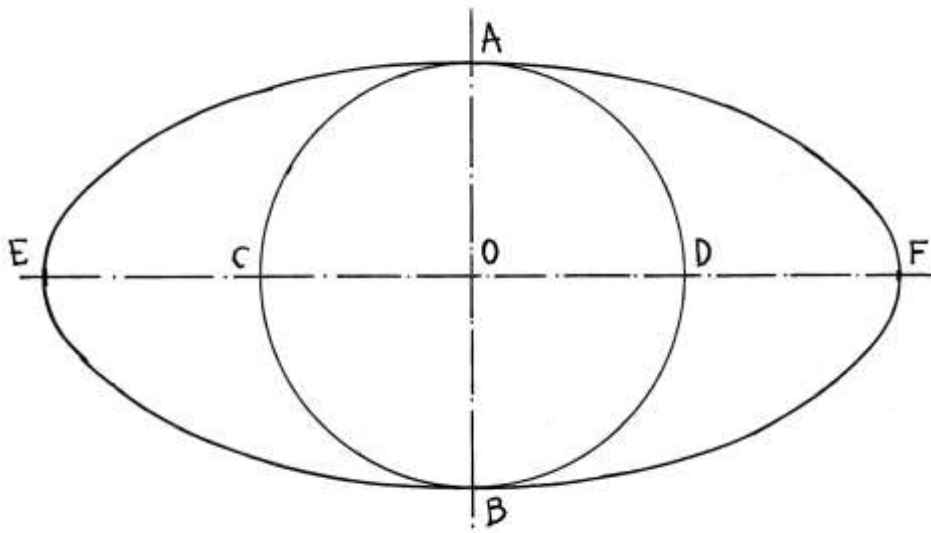
Dai punti 11, 12, 13, 14 e 15 tracciare verso sinistra le parallele a ED fino a incontrare le perpendicolari innalzate da 6, 7, C, 8 e 9: nell'ordine sono ottenuti i punti F, G, H, I e J.

EJIHGFA è una curva che è lunga *un quarto* dell'ellisse che ha semiassi lunghi OA e OE: il rapporto fra le loro lunghezze è:

$$OA : OE = 1 : 2 .$$

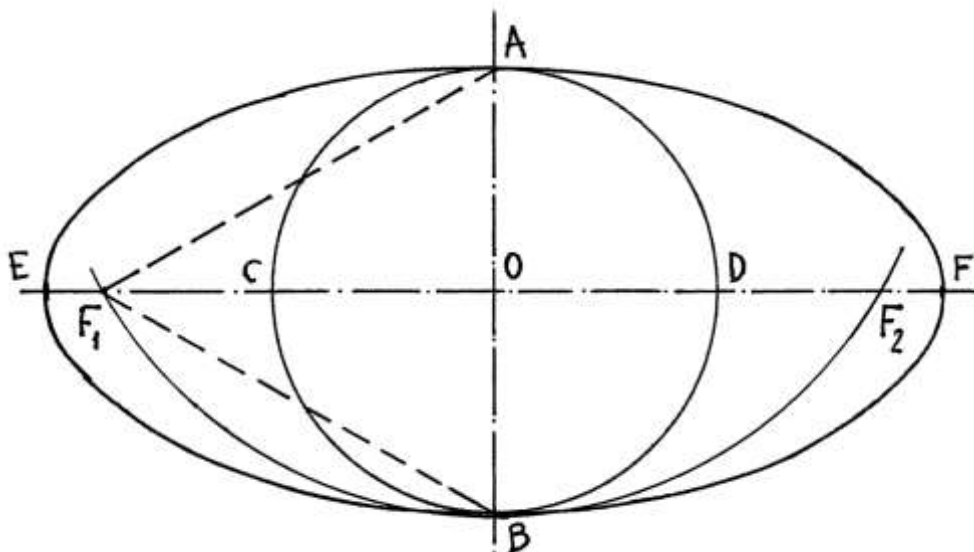
La curva può essere disegnata soltanto con un curvilinee.

Il grafico che segue presenta l'intera ellisse:



L'asse maggiore EF è lungo il doppio di quello minore AB.

Posizioniamo i due fuochi: con raggio OE fare centro in A e tracciare un arco che taglia EF in due punti, F_1 e F_2 :



AF_1O è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze del cateto OA e dell'ipotenusa F_1A , che è lunga il doppio di OA .

Fissando in 1 la lunghezza convenzionale di OA , quella di F_1A vale 2.

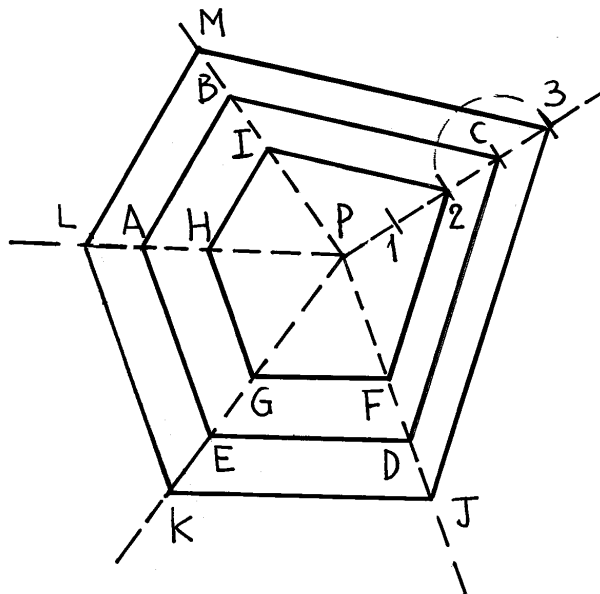
Il cateto F_1O è lungo:

$$F_1O = \sqrt{(F_1A)^2 - OA^2} = \sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}.$$

F_1O è un'altezza del triangolo equilatero F_1AB che ha lati lunghi 2.

Ingrandimento e riduzione di una figura irregolare

$ABCDE$ è un pentagono non regolare che deve essere ingrandito di $1/3$ e poi ridotto di $1/3$:



Scegliere un punto interno alla figura: è P . Da questo punto tracciare cinque semirette passanti per i vertici A, B, C, D e E .

Dividere PC in *tre* parti uguali: sono fissati i punti 1 e 2.

Fare centro in C e con raggio $C-2$ disegnare un arco da C fino a fissare il punto 3 sulla semiretta passante per C .

Dal punto 2 tracciare la parallela a CD fino a stabilire il punto F : da questo ultimo condurre la parallela a DE e così in successione fino a ricavare il pentagono non regolare 2-FGHI: i suoi lati sono lunghi $2/3$ dei corrispondenti lati di $ABCDE$.

I due pentagoni sono *simili*.

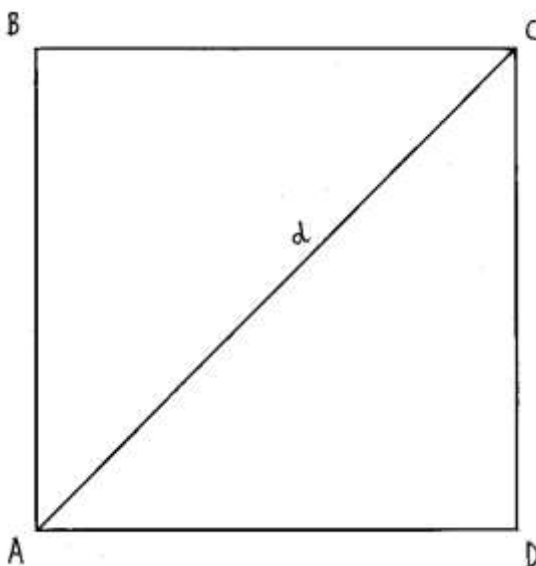
Seguendo la precedente successione, a partire dal punto 3 disegnare le parallele ai lati di $ABCDE$: è ricavato il pentagono non regolare 3-JKLM che ha lati lunghi $4/3$ dei corrispondenti di $ABCDE$.

Anche questo pentagono più grande è *simile* a quello $ABCDE$.

PARTE TERZA

Diagonale di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 12 m:



La lunghezza della diagonale AC è:

$$AC = d = \sqrt{2} * AD .$$

Lodi approssima $\sqrt{2}$ a $41/29$:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421 \quad \text{e} \quad 41/29 \approx 1,41379.$$

L'approssimazione è accettabile per gli usi pratici.

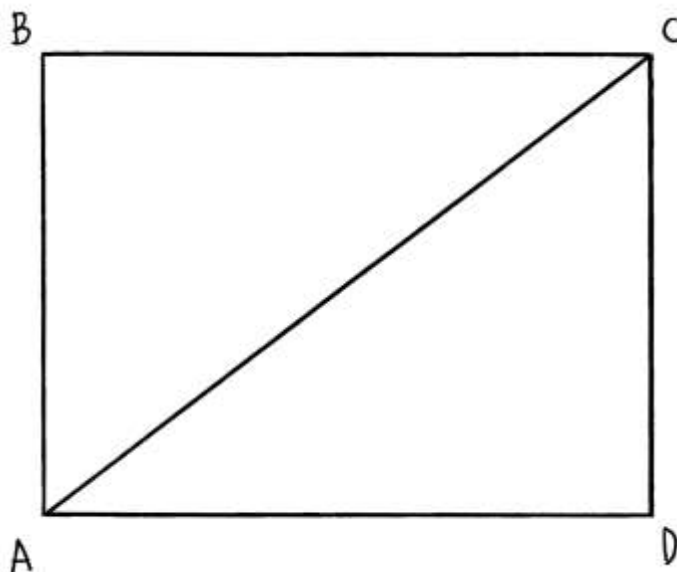
Lodi calcola la lunghezza della diagonale con la seguente procedura:

- * Moltiplicare la lunghezza del lato per 41: $12 * 41 = 492.$
- * Dividere il prodotto per 29: $492/29 = 16 + 28/29 \text{ m}.$

Diagonale di un rettangolo

I lati di un rettangolo sono lunghi:

- * $AB = CD = 12 \text{ m}.$
- * $AD = BC = 16 \text{ m}.$



La lunghezza della diagonale AC è data da:

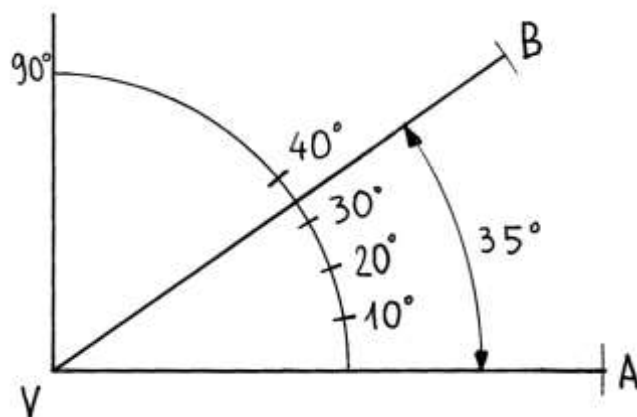
$$AC^2 = CD^2 + AD^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400.$$

Ne consegue:

$$AC = \sqrt{400} = 20 \text{ m.}$$

Misura di un angolo

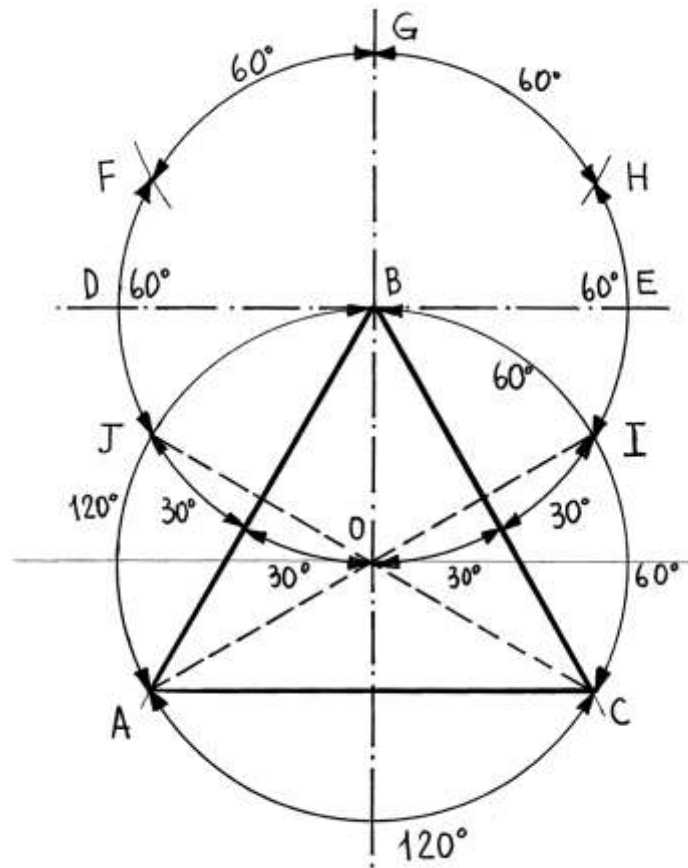
È richiesta la misura dell'ampiezza dell'angolo BVA, più piccolo di un angolo retto:



Con un goniometro fissare le posizioni corrispondenti agli angoli ampi 10, 20, 30 e 40°:
l'angolo BVA è ampio 35°.

Valore degli angoli

ABC è un triangolo equilatero inscritto in un cerchio di centro O:



Per i punti O e B tracciare l'asse di simmetria verticale e per il punto B un asse orizzontale perpendicolare al primo.

Fare centro in B e con la stessa apertura OA disegnare la circonferenza che fissa i punti D, E, F, G, H, I e J.

Questa seconda circonferenza è ora divisa in sei parti uguali: gli archi sottendono angoli di 60°.

I lati BA e BC dividono in due parti uguali gli angoli JBO e IBO.

I tre angoli al centro del triangolo, in O, sono di uguale ampiezza: 120°.

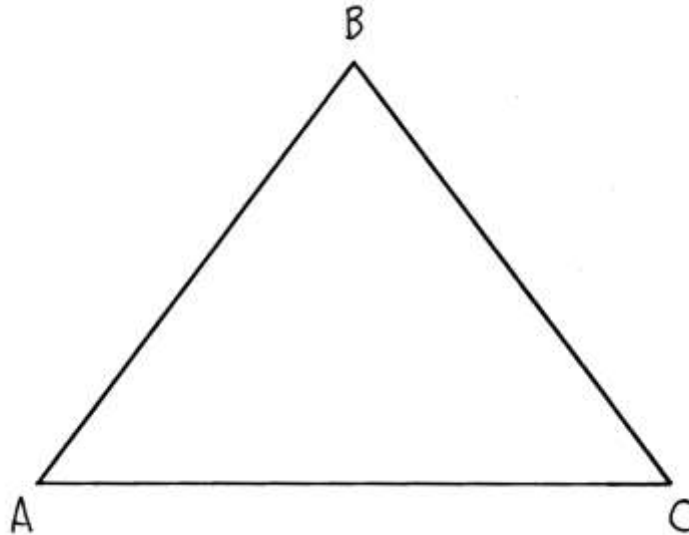
Infine, gli angoli interni del triangolo equilatero in A, B e C hanno uguale ampiezza: 60°.

Area di un triangolo

Il triangolo ABC è isoscele e ha lati lunghi:

* $AB = BC = 25 \text{ m.}$

* $AC = 30 \text{ m.}$



Per calcolare la sua area, Lodi impiega la seguente procedura:

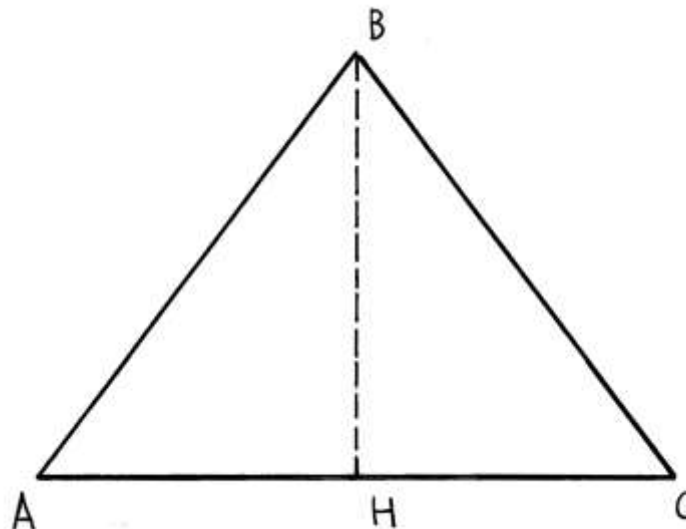
- * Sommare le lunghezze dei tre lati: $\text{perimetro} = 2 \cdot p = 25 + 25 + 30 = 80 \text{ m.}$
- * Dividere per 2: $2 \cdot p / 2 = p = 80 / 2 = 40.$
- * Sottrarre da p la lunghezza di AB: $p - AB = 40 - 25 = 15.$
- * Sottrarre da p la lunghezza di BC: $p - BC = 40 - 25 = 15.$
- * Sottrarre da p la lunghezza di AC: $p - 30 = 10$ [Lodi chiama i tre ultimi risultati *eccessi*].
- * Moltiplicare p per il primo *eccesso*: $p \cdot 15 = 40 \cdot 15 = 600;$
- * Moltiplicare per il secondo *eccesso*: $600 \cdot 15 = 9000.$
- * Moltiplicare per il terzo *eccesso*: $9000 \cdot 10 = 90\,000.$
- * Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{90\,000} = 300 \text{ m}^2$, area del triangolo ABC.

Senza citarla, Lodi applica la nota formula di Erone:

$$\text{Area}_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)} .$$

Altezza di un triangolo

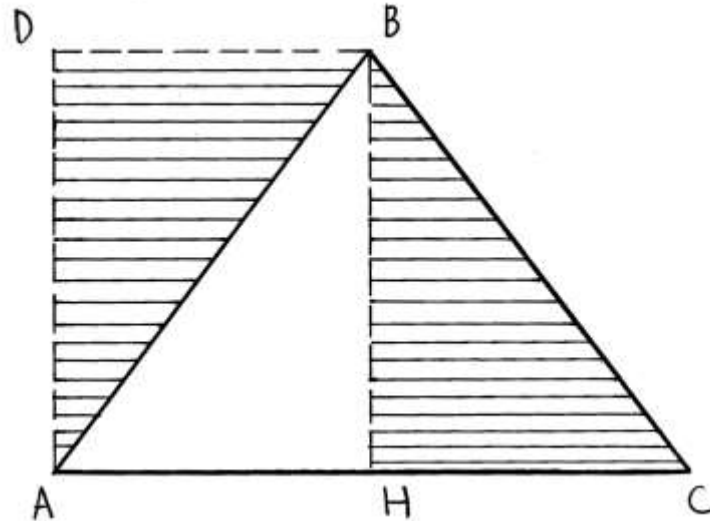
Sono note l'area e la lunghezza del lato di base di un triangolo: il problema domanda l'altezza relativa alla base.



Il triangolo ABC ha area di 300 m^2 e il suo lato di base AC è lungo 30 m. Il triangolo è lo stesso del precedente problema; deve essere calcolata l'altezza BH che è data da:

$$BH = 2 * \text{Area}/AC = 2 * 300/30 = 20 \text{ m.}$$

Lodi suggerisce una verifica grafica dell'esattezza della soluzione. Costruisce il rettangolo ADBH che ha area uguale a quella di ABC:



I triangoli ADB e BHC hanno dimensioni e aree uguali. Dato che l'area di ADBH è 300 m^2 , l'altezza BH è:

$$BH = \text{Area}_{ADBH}/(AC/2) = 300/(30/2) = 300/15 = 20 \text{ m.}$$

Altro metodo per ricavare l'altezza

Il precedente triangolo ABC fornisce lo spunto per l'applicazione del c.d. teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH.

L'ipotenusa AB è lunga 25 m e il cateto minore AH è:

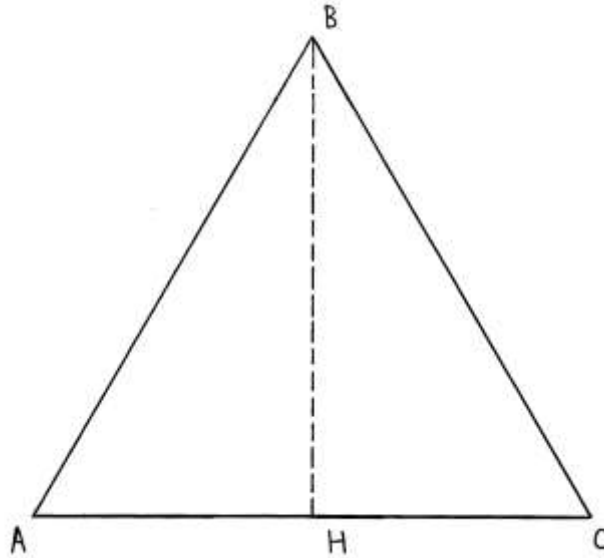
$$AH = AC/2 = 30/2 = 15 \text{ m.}$$

BH è dato da:

$$BH = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = \sqrt{(25^2 - 15^2)} = \sqrt{(625 - 225)} = \sqrt{400} = 20 \text{ m.}$$

Altezza di un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero che ha lati lunghi 150 m.



L'altezza BH è:

$$BH = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = \sqrt{(150^2 - 75^2)} = \sqrt{(22500 - 5625)} = \sqrt{16875} \approx 129,90 \text{ m, che}$$

Lodi arrotonda a $(129 + 45/50)$ m.

L'area del triangolo è:

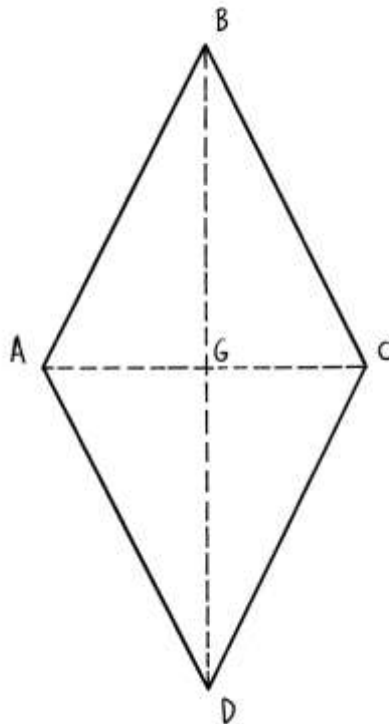
$$\text{Area}_{ABC} = AH * BH \approx (150/2) * (129 + 45/50) \approx 75 * (129 + 45/50) \approx 9742,5 \text{ m}^2, \text{ che}$$

Lodi scrive nella forma $(9742 \frac{1}{2})$, senza il simbolo infisso “+” fra la parte intera e quella frazionaria.

Area di un rombo

Il rombo ABCD ha le diagonali lunghe:

- * AC = 16 m.
- * BD = 32 m.



Esse si intersecano nel centro G.

La diagonale AC divide il poligono in due triangoli isosceli, ABC e ACD, che hanno uguali dimensioni: essi godono di un'interessante proprietà: la base AC è lunga quanto le due altezze BG e GD.

L'area del rombo è data dal semiprodotto delle lunghezze delle due diagonali:

$$\text{Area}_{ABCD} = (AC * BD)/2 = (16*32)/2 = 512/2 = 256 \text{ m}^2.$$

Lodi, erroneamente, omette di effettuare la divisione per 2 e dà un risultato doppio del reale: 512 m².

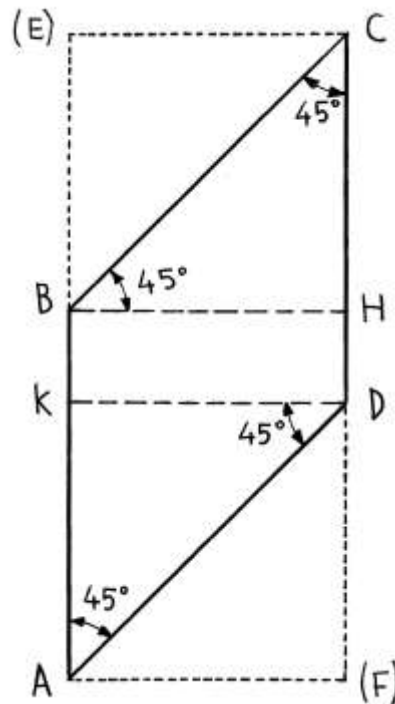
Area di un parallelogramma

Lodi chiama questo parallelogramma *romboide*.

Il parallelogramma ABCD ha i lati AB e CD lunghi 16 m.

Le altezze BH e KD sono lunghe 12 m.

Lodi non lo scrive, ma i triangoli rettangoli AKD e BHC sono isosceli e quindi sono la metà di quadrati di lato BH, sezionati lungo una diagonale:



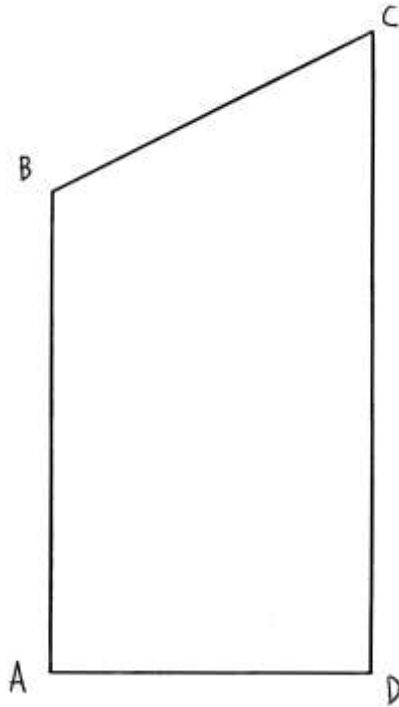
L'area è calcolata da Lodi in due modi differenti che sono riassunti dalle due formule che seguono:

* $\text{Area}_{ABCD} = AB * KD = 16 * 12 = 192 \text{ m}^2.$

* $\text{Area}_{ABCD} = (AB + CD) * KD/2 = (16 + 16) * 12/2 = 32*6 = 192 \text{ m}^2.$

Area di un trapezio rettangolo

Un trapezio ha le seguenti dimensioni: le basi AB e CD sono lunghe rispettivamente 24 e 32 m e l'altezza AD è 16 m.



L'area è calcolata moltiplicando la semisomma delle basi per l'altezza:

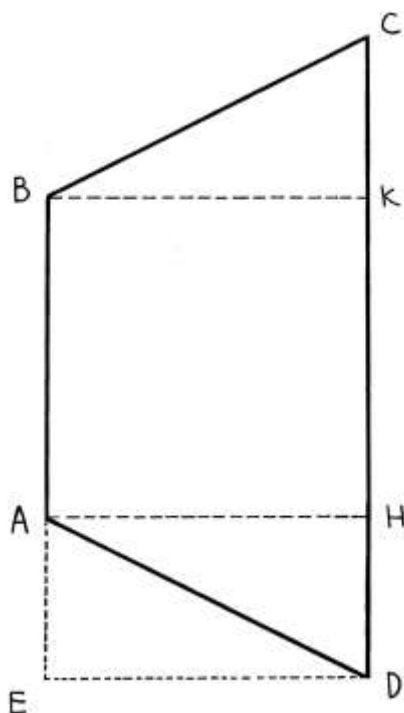
$$\text{Area}_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * AD = (24 + 32)/2 * 16 = 28 * 16 = 448 \text{ m}^2.$$

Nota: le dimensioni dei poligoni considerati da Lodi sono notevoli: è ragionevole pensare che si trattasse di porzioni di terreni agricoli o edificabili?

Area di un trapezio isoscele

Lodi ha disegnato questo quadrilatero e i tre precedenti disposti con la dimensione maggiore verticale e ciò all'opposto di quale è l'uso dei tempi nostri.

ABCD è un trapezio isoscele e AH e BK sono due altezze:



Le dimensioni sono le seguenti:

- * $AB = 16 \text{ m.}$
- * $CD = 32 \text{ m.}$
- * $AH = BK = 16 \text{ m.}$

$ABKH$ è un quadrato con lati lunghi 16 m.

Per calcolare l'area l'Autore suggerisce questa formula:

$$\text{Area}_{ABCD} = (AB + CD) * AH/2 = (16 + 32) * 16/2 = 48 * 8 = 384 \text{ m}^2.$$

L'area del trapezio può essere calcolata in altro modo: AED è un triangolo rettangolo che ha la stessa area di quello BCK .

Il segmento BE è lungo:

$$BE = BA + AE. \text{ Ma } AE \text{ è dato da: } AE = CK = (CD - AB)/2 = (32 - 16)/2 = 8.$$

Quindi BE misura: $BE = 16 + 8 = 24 \text{ m.}$

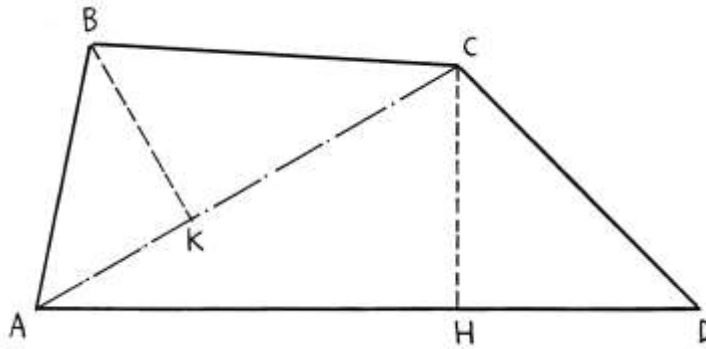
L'area del rettangolo $BKDE$ è uguale a quella del trapezio $ABCD$:

$$\text{Area}_{BKDE} = \text{Area}_{ABCD} = BE * AH = 24 * 16 = 384 \text{ m}^2.$$

Area di un quadrilatero

$ABCD$ è un generico quadrilatero che Lodi chiama *trapezoide*.

La figura è qui ruotata di 90° in senso orario rispetto all'originale:



Lodi traccia la diagonale minore AC e verso di essa abbassa l'altezza BK.

CH è un'altezza del quadrilatero e del triangolo ACD.

L'Autore fornisce le seguenti dimensioni:

- * AC = 24 m.
- * BK = 10 m.
- * CH = 12 m.

Lodi calcola l'area del quadrilatero con una procedura che è riassunta con questa formula:

$$\text{Area}_{ABCD} = (BK + CH) * AC/2 = (10 + 12) * 24/2 = 22 * 12 = 264 \text{ m}^2.$$

La diagonale AC divide il quadrilatero in due triangoli: ABC e ACD. L'area di ABCD è uguale alla somma delle superfici dei due triangoli:

$$\text{Area}_{ABCD} = \text{Area}_{ABC} + \text{Area}_{ACD}.$$

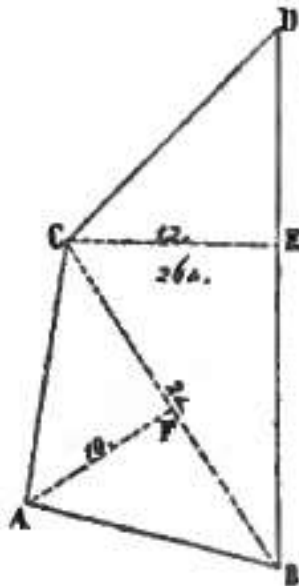
L'area di ABC è:

$$\text{Area}_{ABC} = AC * BK/2 = 24 * 10/2 = 120 \text{ m}^2.$$

L'area di ACD è:

$$\text{Area}_{ACD} = AD * CH/2.$$

Lodi non fornisce la lunghezza di AD. Dal grafico originale



sembra potersi ipotizzare che ED sia lungo quanto CE (rispettivamente HD e CH).

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACH è facile ricavare la lunghezza del cateto AH:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 24^2 - 12^2 = 576 - 144 = 432, \text{ da cui } AH = \sqrt{432} \approx 20,784 \text{ m}.$$

Il lato AD è :

$$AD = AH + HD = AH + CH \approx 21,817 + 10 \approx 31,817 \text{ m.}$$

L'area di ACD è:

$$\text{Area}_{ACD} = AD * CH/2 \approx 31,817 * 10/2 \approx 159,08 \text{ m}^2.$$

L'area totale di ABCD è:

$$\text{Area}_{ABCD} = \text{Area}_{ABC} + \text{Area}_{ACD} \approx 120 + 150,08 \approx 279,08 \text{ m}^2.$$

Il risultato è leggermente superiore a quello calcolato da Lodi in 264 m^2 .

APPROFONDIMENTO

Se il calcolo di Lodi è esatto, l'area di ACD è calcolabile per differenza:

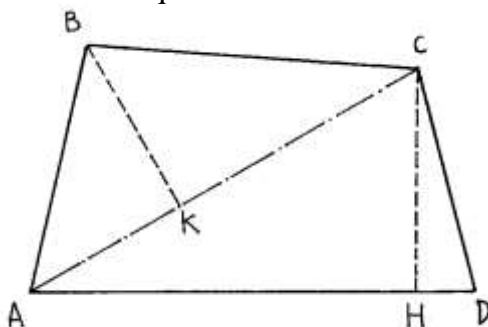
$$\text{Area}_{ACD} = \text{Area}_{ABCD} - \text{Area}_{ABC} = 264 - 120 = 144 \text{ m}^2.$$

La lunghezza di AD è data da:

$$AD = 2 * \text{Area}_{ACD}/CH = 2 * 144/12 = 24 \text{ m.}$$

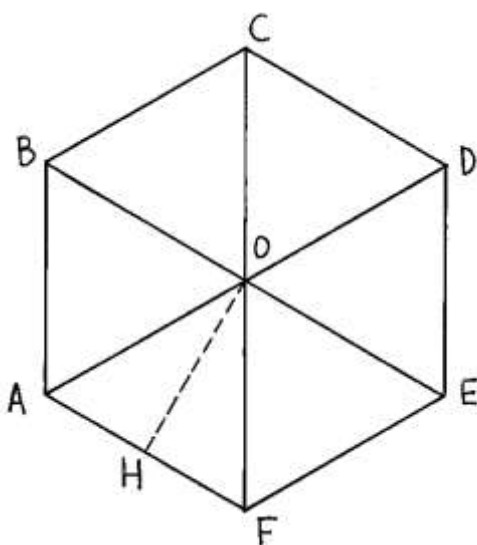
Il dato non è stato fornito da Lodi.

Il grafico che segue è tracciato con queste dimensioni.



Esagono regolare

ABCDEF è un esagono regolare che è formato da sei triangoli equilateri aventi un vertice comune in O:



I lati sono lunghi 150 m, come nel caso del problema del triangolo equilatero, già incontrato: in quel caso l'altezza è stata calcolata in $(129 + 45/50) \text{ m}$ e l'area in $9742,5 \text{ m}^2$.

OH è l'altezza del triangolo equilatero AOF.

L'area dell'esagono è calcolata da Lodi moltiplicando per *sei* quella di un triangolo equilatero:

$$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 6 * \text{Area}_{\text{AOF}} = 6 * 9742,5 = 58455 \text{ m}^2.$$

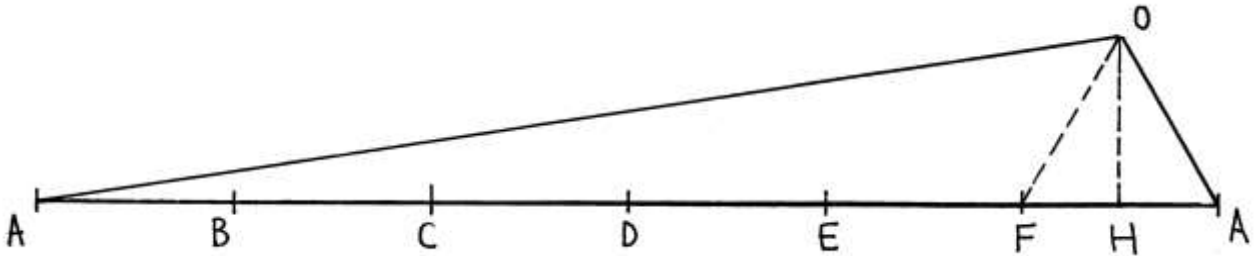
Un secondo metodo proposto da Lodi è riassunto nella formula che segue:

$$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = \text{perimetro}_{\text{ESAGONO}} * \text{altezza}/2.$$

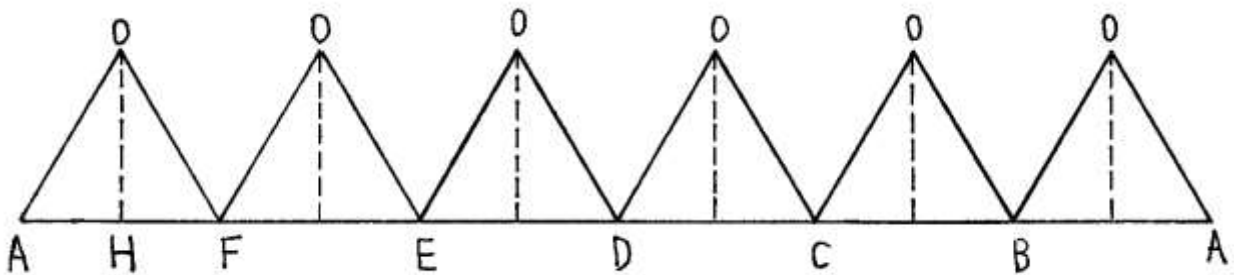
Il perimetro dell'esagono vale: $\text{perimetro} = 6 * 150 = 900 \text{ m}$ per cui l'area è

$$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 900 * (129 + 45/50)/2 = 58455 \text{ m}^2.$$

L'esagono è equivalente al triangolo che il lato di base lungo quanto il perimetro e altezza OH:



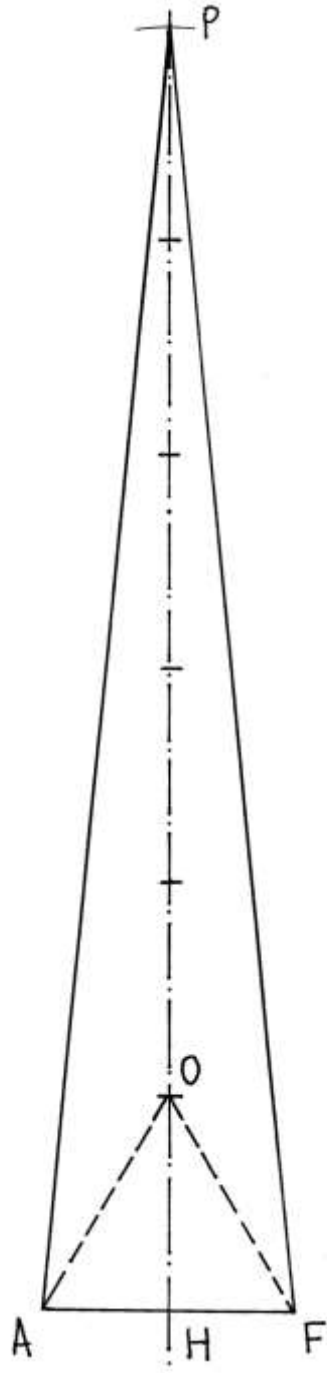
Esso è pure equivalente alla somma delle aree dei sei triangoli equilateri aventi i lati formanti il perimetro dell'esagono allineati lungo la stessa retta orizzontale:



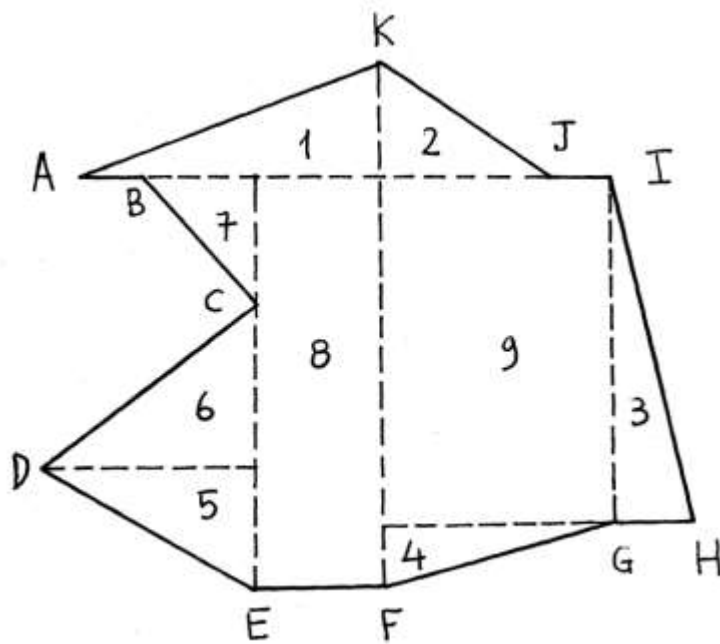
Un ulteriore metodo è un po' più curioso:

$$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 6 * (\text{altezza triangolo equilatero}) * \text{lato}/2.$$

Impiegando questa formula, l'esagono è equiparato a un triangolo isoscele, APF, che ha base AF e altezza PH lunga *sei* volte l'angolo di un singolo triangolo equilatero, quale è ad esempio OH:



Area di una figura irregolare
ABCDEFGHIJK è una figura piana irregolare della quale deve esserte calcolata l'area.



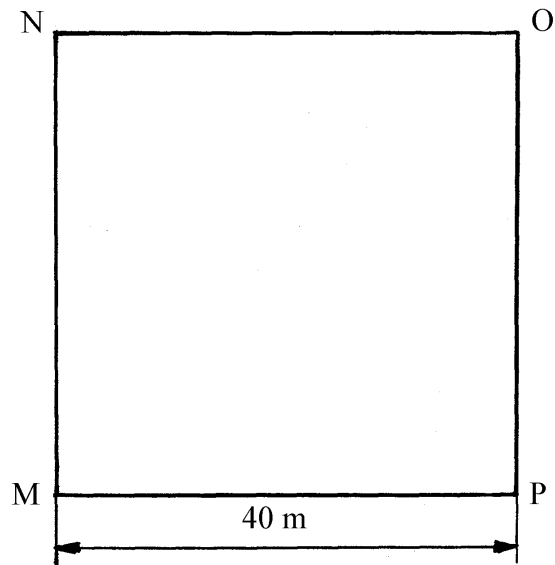
Lodi la divide in *nove* figure più semplici: sette triangoli rettangoli e due rettangoli. Le nove figure sono numerate da 1 a 9. Esse hanno le seguenti aree:

- * Triangolo 1: 120 m².
- * Triangolo 2: 75 m².
- * Triangolo 3: 105 m².
- * Triangolo 4: 50 m².
- * Triangolo 5: 100 m².
- * Triangolo 6: 150 m².
- * Triangolo 7: 50 m².
- * Rettangolo 8: 350 m².
- * Rettangolo 9: 600 m².

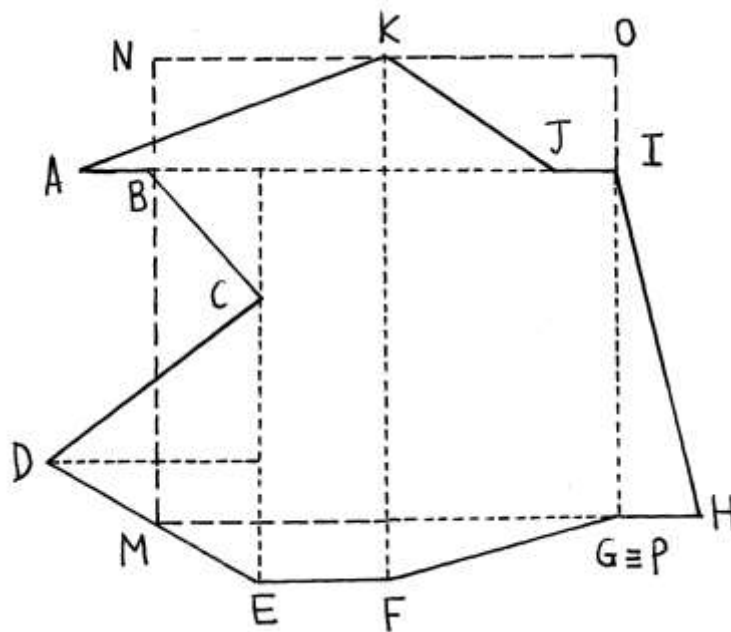
L'area totale è 1600 m². Un quadrato di area equivalente ha lati lunghi:

$$\text{lato} = \sqrt{1600} = 40 \text{ m.}$$

Il quadrato MNOP ha lati lunghi 40 m e area uguale a 1600 m²:



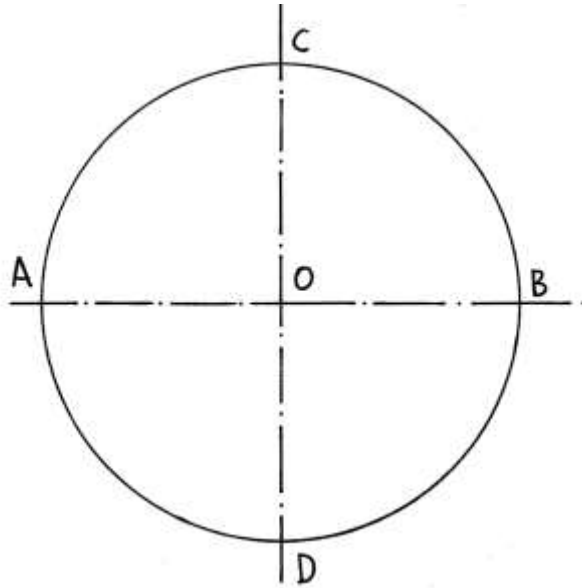
Il grafico che segue sovrappone la figura irregolare e il quadrato MNOP, disegnato a tratti lunghi:



I vertici G e P coincidono. Il lato NO passa per K e il punto M è collocato su DE. Il vertice I giace sul lato OP.

Misura della circonferenza

A, B, C e D sono gli estremi di due diametri perpendicolari della circonferenza di centro O:



Per π , Lodi suggerisce due valori:

- * L'approssimazione $22/7 \approx 3,142857\dots$ dovuta a Archimede.
- * Il valore 3,14159, approssimazione più vicina al reale valore e già conosciuta nel corso dell'Ottocento.

Lodi fornisce la lunghezza del diametro: $AB = 80$ m.

Egli ricava la lunghezza della circonferenza con una proporzione basata sul rapporto $22/7$:

$7 : 22 = AB : \text{circonferenza}$, da cui
 $\text{circonferenza} = 22 * 80 / 7 = 1760 / 7 = 251 + 3/7$ (Lodi fornisce un risultato errato, $551 + 3/7$, per un evidente errore di stampa).

Area di un cerchio

La superficie di un cerchio inscritto in un quadrato che ha lati lunghi quanto il diametro d è calcolata, con accettabile approssimazione come soluzione della proporzione

$\text{Area CERCHIO} : \text{Area QUADRATO} = 11 : 14$. Ne consegue:

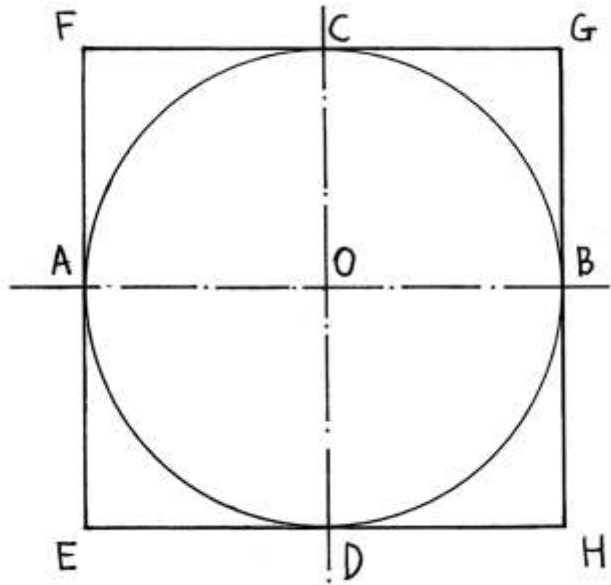
$\text{Area CERCHIO} = \text{Area QUADRATO} * 11/14$.

Vediamone l'origine. L'area di un cerchio è:

$\text{Area CERCHIO} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2$, con r raggio e d diametro.

Se a π è attribuito il valore approssimato $22/7$, l'ultima espressione diviene

$\text{Area CERCHIO} = 22/7 * (d/2)^2 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2$. Ecco spiegata l'origine del coefficiente approssimato $11/14$ (e del suo reciproco $14/11$).



Come nel caso del precedente paragrafo, il diametro AB è lungo 80 m.

L'area del quadrato EFGH è:

$$\text{Area}_{\text{EFGH}} = EH^2 = AD^2 = d^2 = 80^2 = 6400 \text{ m}^2.$$

L'area del cerchio è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = 6400 * 11/14 = 70400/14 = 5028 + 4/7 \text{ m}^2.$$

Diametro di un cerchio di cui è nota l'area

Un cerchio ha area uguale a $(5028 + 4/7) \text{ m}^2$: il problema è basato sul cerchio del caso precedente.

Deve essere ricavata la lunghezza del diametro.

Lodi propone di moltiplicare l'area del cerchio per $14/11$ ed estrarre la radice quadrata del risultato:

$$d^2 = \text{Area}_{\text{CERCHIO}} * 14/11 = (5028 + 4/7) * 14/11 = 6400 \text{ m}^2.$$

Da questo dato si ricava il diametro d :

$$d = \sqrt{(6400)} = 80 \text{ m}.$$

Circonferenza di un cerchio di area nota

Deve essere ricavata la lunghezza della circonferenza del solito cerchio di cui è nota l'area uguale a $(5028 + 4/7) \text{ m}^2$.

Occorre calcolare i $14/11$ dell'area, come già fatto nel caso precedente:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} * 14/11 = (5028 + 4/7) * 14/11 = 6400 \text{ m}^2$. Estrarre di nuovo la radice quadrata per ottenere il diametro:

$$\sqrt{(6400)} = 80 \text{ m}, \text{ che è anche la lunghezza del lato del quadrato, EFGH, circoscritto}$$

al cerchio.

Dato che per π Lodi impiega l'approssimazione $22/7$, con la seguente proporzione ricava la lunghezza della circonferenza:

$$\text{circonferenza} : 22 = d : 7 \quad \text{da cui}$$

$$\text{circonferenza} = 22 * d/7 \approx 22 + 80/7 \approx 251 + 3/7 \text{ m}.$$

È utile far notare che Lodi usa la notazione "251 3/7", scritta senza il *segno infisso* "+" fra la parte intera (251) e quella frazionaria (3/7).

Diametro e superficie di un cerchio

Questo problema è l'ultimo basato sul cerchio dei precedenti esempi.

È nota la lunghezza della circonferenza: $251 + \frac{3}{7}$ m.

Applicando la formula inversa già incontrata si ricava la lunghezza del diametro d :

$$\text{circonferenza} : 22 = d : 7 \quad \text{da cui}$$

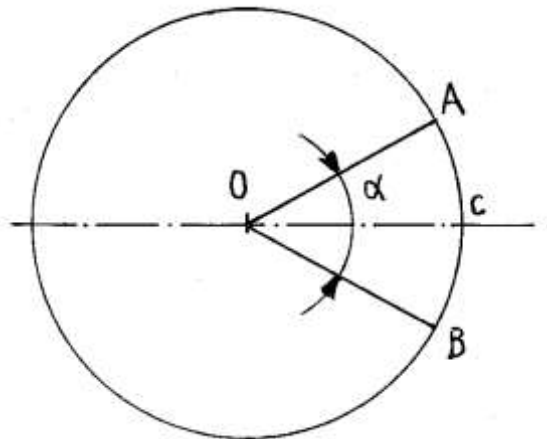
$$d = \text{circonferenza} * \frac{7}{22} = (251 + \frac{3}{7}) * \frac{7}{22} = 80 \text{ m.}$$

Lodi calcola poi la superficie del cerchio con la formula che segue:

$$\text{Area CERCHIO} = \text{circonferenza} * \text{diametro}/4 = (251 + \frac{3}{7}) * 80/4 = 5028 + \frac{4}{7} \text{ m}^2.$$

Area di un settore circolare

Un settore circolare fa parte di un cerchio di centro O e raggio OA che è lungo 20 m:



L'arco AB è anch'esso lungo 20 m.

C è il punto medio dell'arco AB.

Benché Lodi non vi accenni, è utile notare che l'arco AB è lungo quanto il raggio OA:

l'angolo α è ampio:

$$\alpha = 360^\circ / (2 * \pi) \approx 57,32^\circ.$$

Questo angolo è ampio un *radiante*: un angolo giro equivale a $2 * \pi$ radianti.

L'area del settore circolare è calcolata da Lodi implicitamente assimilando la figura a un triangolo che ha base lunga quanto l'arco AB e altezza uguale al raggio OA:

$$\text{Area}_{AOB} = \text{OA} * \text{AC} = \text{OA} * \text{AB}/2 = 20 * 20/2 = 200 \text{ m}^2.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Le unità di misura degli angoli

L'ampiezza di un angolo è misurabile con unità che fanno parte di diversi sistemi.

* *Sistema matematico*, usato nel calcolo trigonometrico: l'unità di misura è il *radiante* che è definito come l'angolo che sottende un arco di circonferenza lungo quanto il raggio. Come già visto sopra, un angolo giro è ampio $2 * \pi$ radianti.

* *Sistema centesimale*: l'unità di misura è il *grado centesimale* abbreviato in *gon*: l'angolo giro è ampio 400 gon. Il sistema è usato negli strumenti topografici.

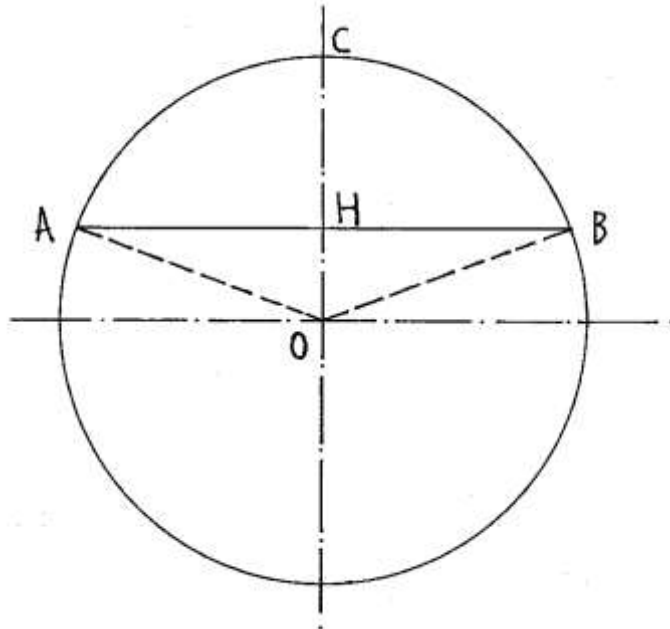
* *Sistema sessagesimale*: l'unità di misura è il *grado sessagesimale*, abbreviato con il simbolo '°'. L'angolo giro è ampio 360° . È il sistema più comunemente usato e il più antico perché risale alla civiltà Sumerico-Babilonese. Questo grado possiede due sottomultipli:

- Il primo: $1' = 1^\circ/60$.
- Il secondo: $1'' = 1'/60 = 1^\circ/3600$.

* *Sistema sessadecimale*: l'unità di misura è la stessa del sistema sessagesimale, ma i sottomultipli sono espressi in *forma decimale*. La parte frazionaria dell'angolo è espressa in forma decimale, per cui l'angolo di $35^{\circ} 24'$ viene scritto nella forma $35,40^{\circ}$.

Area di un segmento circolare

ACBH è un segmento circolare:



Sono date le lunghezze della *corda* AHB che è 16 m e della *freccia* CH che è $(5 + 1/3)$ m: Lodi chiama *saetta* la freccia.

Il problema chiede di calcolare l'area del segmento circolare.

Lodi impiega una procedura che contiene i seguenti passi:

- * Dividere per 2 la lunghezza della corda: $AB : 2 = 16 : 2 = 8.$
- * Moltiplicare per se stesso: $8 * 8 = 64.$
- * Moltiplicare per stessa la lunghezza della freccia: $(5 + 1/3)^2 = 28 + 4/9.$
- * Sottrarre il secondo quadrato dal primo: $64 - (28 + 4/9) = 35 + 5/9.$
- * Dividere per il *doppio* della lunghezza della freccia:
 $(35 + 5/9) / [2 * (5 + 1/3)] = (35 + 5/9) / (10 + 2/3) = 3 + 1/3.$
- * Sommare alla lunghezza della freccia: $(3 + 1/3) + (5 + 1/3) = 8 + 2/3$ m,
 lunghezza del raggio $r = OC$ del cerchio.

La procedura è sintetizzata con la formula che segue:

$$r = \left\{ \left[\frac{(c/2)^2 - f^2}{2 * f} \right] + f \right\}$$
 : r è il raggio del cerchio, c è la lunghezza della corda AB e f è quella della freccia CH.

Lodi calcola l'area del settore circolare ACBO e da essa sottrae quella del triangolo isoscele ABO: il risultato è l'area del segmento circolare ACBH.

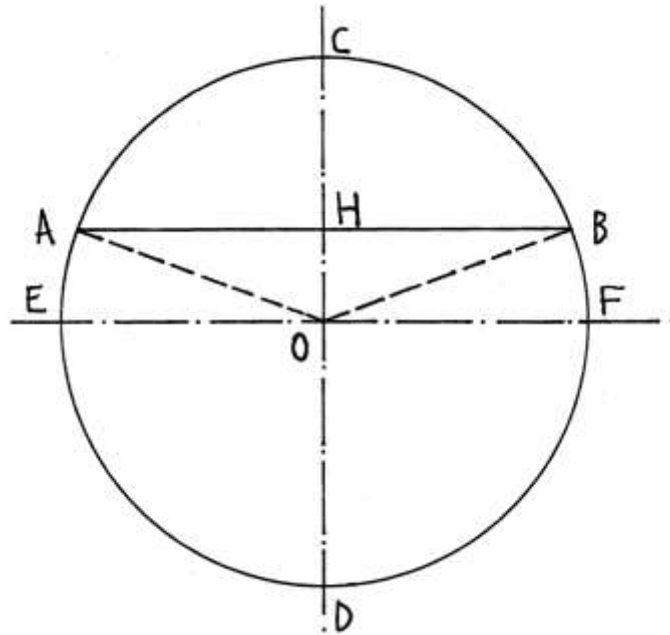
L'unica informazione che fornisce al riguardo è quella di calcolare l'area del settore circolare ACBO nel modo mostrato nel caso precedente.

La procedura riassunta dalla formula precedente era già stata impiegata da Paolo dell'Abaco nel XIV secolo alla soluzione del problema del calcolo dell'area di un segmento circolare a una sola base: l'abacista fiorentino applicò il *teorema delle corde* per il quale si rimanda al successivo APPROFONDIMENTO.

----- APPROFONDIMENTO -----

Il teorema delle corde

La corda AB e la freccia CH sono perpendicolari e questa ultima ha un vertice (H) nel punto medio di AB:



Inoltre, CH è parte di un diametro, CD.

Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nello stesso cerchio e i loro vertici giacciono sulla circonferenza: esse si intersecano ad angolo retto in H tagliando in due parti uguali la corda AB. CD è l'asse del segmento AB.

I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) sono i *medi* e i due segmenti dell'altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:

$$\begin{array}{c} \text{medi} \\ \longleftrightarrow \\ \text{CH} : \text{AH} = \text{HB} : \text{HD} \\ \longleftarrow \qquad \longrightarrow \\ \text{estremi} \end{array}$$

Ne consegue:

$$\text{HD} = (\text{AH} * \text{HB}) / \text{CH} .$$

Applicando la formula al caso di Lodi si ha:

$$\text{HD} = (8 * 8) / (5 + 1/3) = 64 / (16/3) = 12 \text{ m} .$$

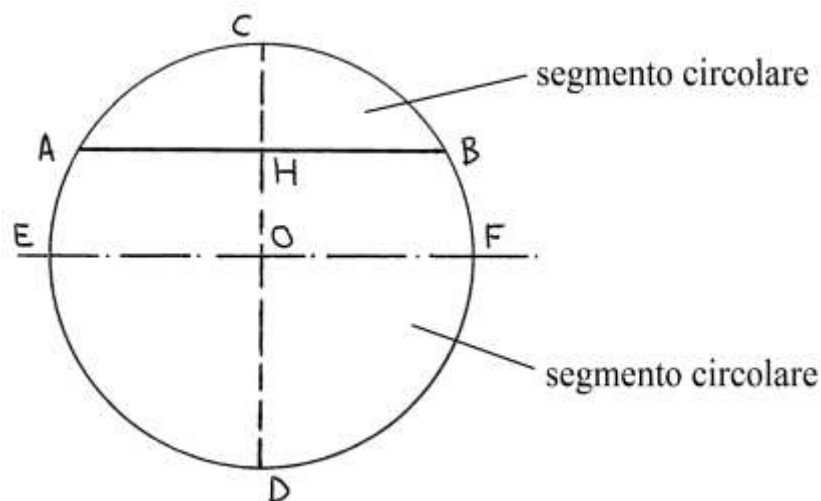
Sommando la lunghezza della freccia CH a quella del segmento HD si ottiene la lunghezza del diametro CD:

$$\text{CD} = \text{CH} + \text{HD} = (5 + 1/3) + 12 = 17 + 1/3 \text{ m} .$$

Dividendo per *due* la lunghezza del diametro CD si ricava quella del raggio OC:

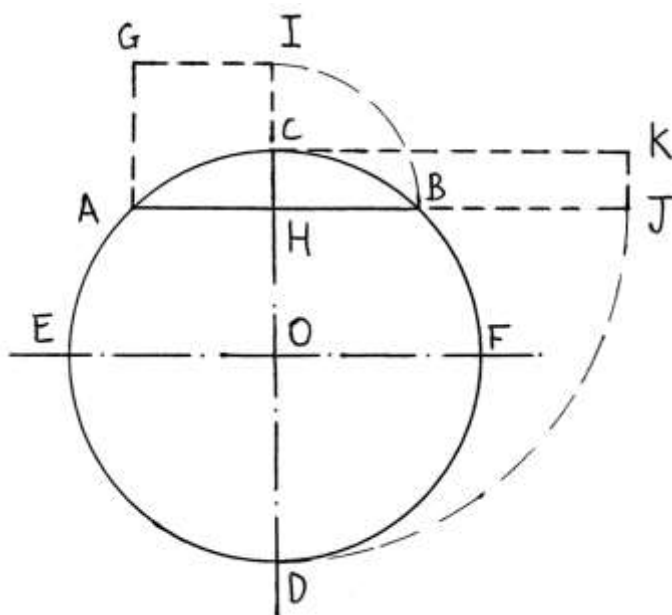
$$\text{OC} = \text{CD} / 2 = (17 + 1/3) / 2 = 8 + 2/3 \text{ m} , \text{ che è lo stesso valore calcolato da Lodi} .$$

Una corda divide un cerchio in *due* segmenti circolari a una base:



Torniamo alla proporzione $CH : AH = HB : HD$. Da essa consegue
 $CH * HD = AH * HB$

Costruire i due rettangoli basati sulle lunghezze dei quattro segmenti che formano le due corde:



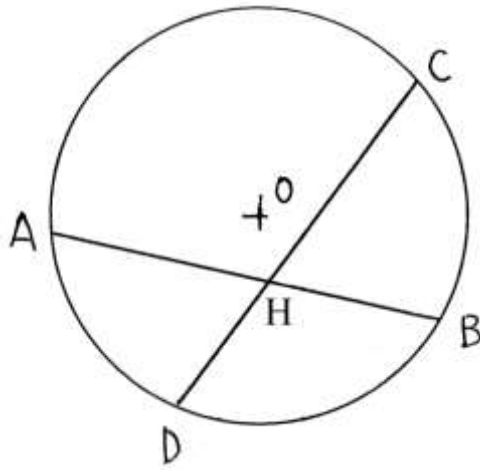
* il rettangolo [ma in questo caso è un quadrato perché $AH = HB$] AGIH ha dimensioni $AH * HB$;

* il rettangolo HCKJ che ha dimensioni $CH * HD$.

I due poligoni hanno *uguale superficie*.

La figura è un caso particolare di applicazione del *teorema delle corde*.

In generale, il teorema vale per qualunque coppia di corde che si incrociano all'interno di un cerchio, senza formare angoli particolari e senza che almeno una delle due sia un diametro, come è il caso della figura che segue:

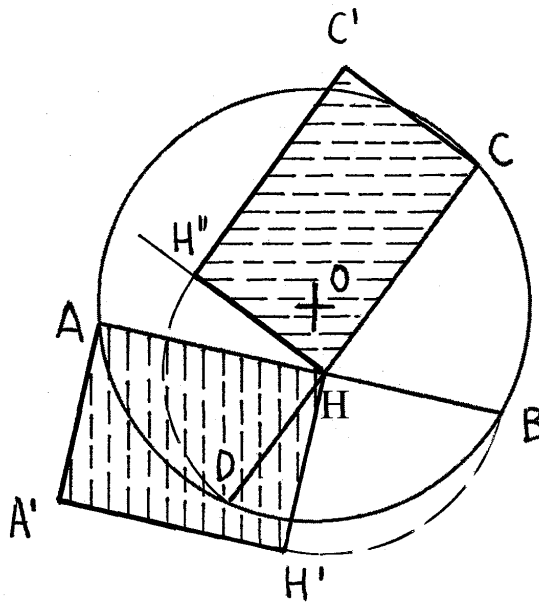


Anche in questo caso vale la relazione

$$AH : DH = HC : HB \text{ da cui}$$

$$AH * HB = DH * HC .$$

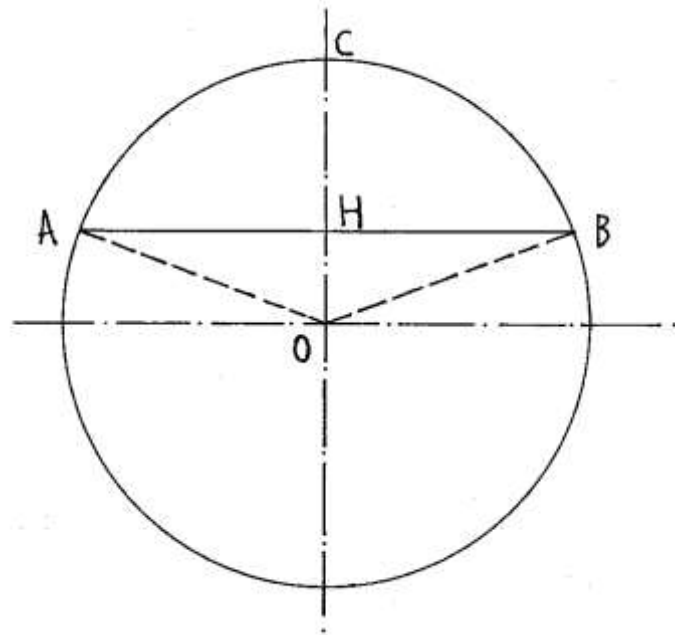
Lo schema che segue mostra i due rettangoli di area uguale con lati lunghi quanto i segmenti generati sulle corde dalla loro intersezione:



I rettangoli AHH'A' e HH''C'C hanno uguale superficie.

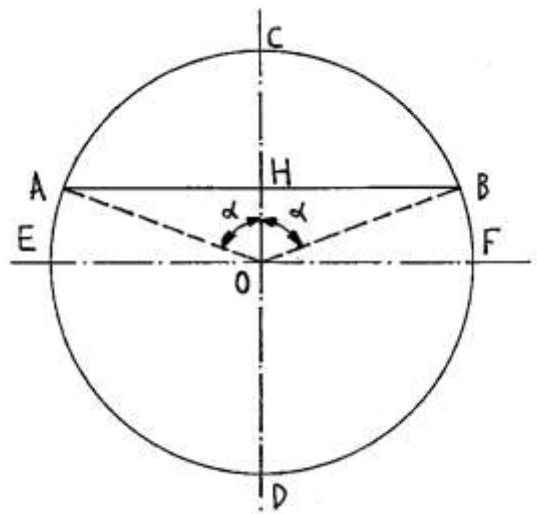
Il teorema delle corde afferma: *nel caso di due corde generiche interne a un cerchio e intersecantesi, il rettangolo costruito sui due segmenti di una corda ha la stessa superficie del rettangolo costruito sui segmenti dell'altra corda.*

La soluzione offerta da Lodi riguardo a questo problema è incompleta perché non ha fornite la lunghezza dell'arco ACB e neppure l'ampiezza dell'angolo AOB: la figura che segue riproduce quella già mostrata in precedenza.



L'Autore avrebbe potuto misurare l'arco ACB con una *corda* o con la *catena agrimensoria*, strumenti che gli erano certamente noti.

I due dati mancanti sono ricavabili con l'aiuto della trigonometria (che Lodi doveva pure conoscere).



Gli angoli AOH e HOB hanno uguale ampiezza, indicata con α .

La tangente tg dell'angolo α è data da:

$$tg \alpha = AH/OH = 8/(5 + 1/3) = 1,5.$$

Ad essa corrisponde $\alpha \approx 56,31^\circ$.

L'angolo AOB è ampio il doppio di α e cioè $\approx 112,62^\circ$.

L'arco ACB ha lunghezza proporzionale all'ampiezza dell'angolo $2*\alpha$:

$$ACB : circonferenza = 2*\alpha : 360^\circ.$$

La circonferenza, c , è lunga:

$$c = 2*\pi*r \approx 2 * 22/7 * (8 + 2/3) \approx 54,48 \text{ m.}$$

Ne consegue:

$$ACB = c * 2*\alpha/360 \approx 54,48 * 112,62/360 \approx 17,04 \text{ m.}$$

Con il metodo impiegato da Lodi calcoliamo l'area del settore circolare ACBO:

$$\text{Area}_{ACBO} = \text{arco}_{ACB} * \text{raggio}/2 \approx 17,04 * (8 + 2/3)/2 \approx 73,84 \text{ m}^2.$$

L'area del triangolo isoscele ABO è:

$$\text{Area}_{ABO} = AB * HO/2 .$$

HO è lungo:

$$HO = CO - CH = (8 + 2/3) - (5 + 1/3) = 3 + 1/3 \text{ m.}$$

L'area è:

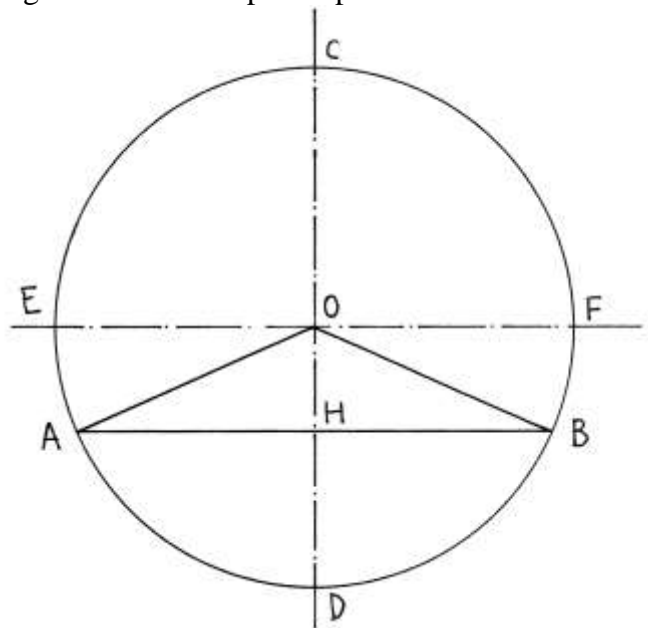
$$\text{Area}_{ABO} = 16 * (3 + 1/3)/2 = (26 + 2/3) \text{ m}^2 \approx 26,66 \text{ m}^2.$$

L'area del segmento circolare ACBH è data da:

$$\text{Area}_{ACBH} = \text{Area}_{ACBO} - \text{Area}_{ABO} \approx 73,84 - 26,66 \approx 47,18 \text{ m}^2.$$

Area di un segmento circolare maggiore di un semicerchio

AECFBH è un segmento circolare più ampio di un semicerchio.



Sono date le seguenti lunghezze:

* $AB = 16 \text{ m.}$

* $CH = 12 \text{ m.}$

Per ricavare la lunghezza di HD, Lodi impiega la procedura che segue:

* Dividere per 2 la lunghezza della corda AB: $16 : 2 = 8.$

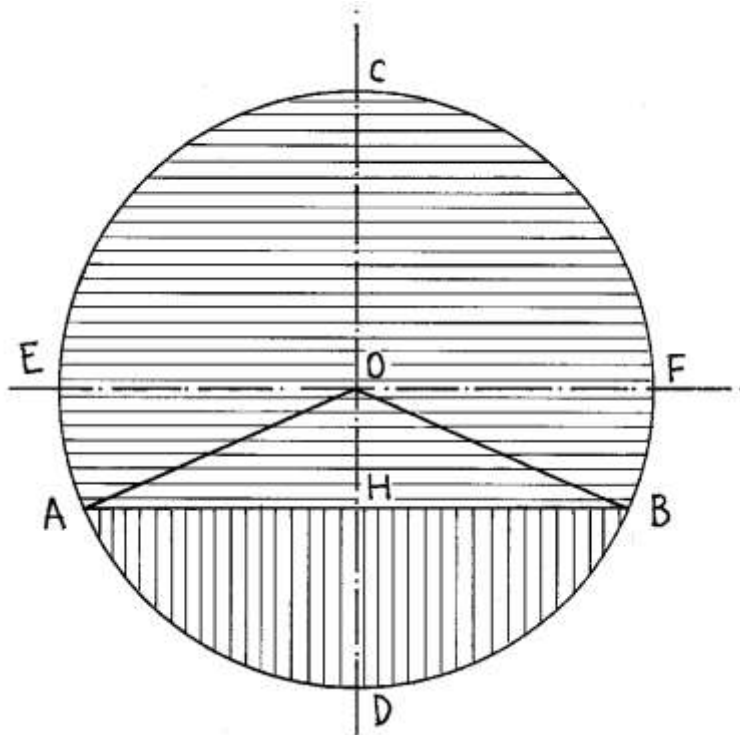
* Moltiplicare per se stesso: $8 * 8 = 64.$

* Dividere per la lunghezza della freccia: $64 : 12 = 5 + 1/3 \text{ m, lunghezza di HD.}$

Il diametro CD è lungo:

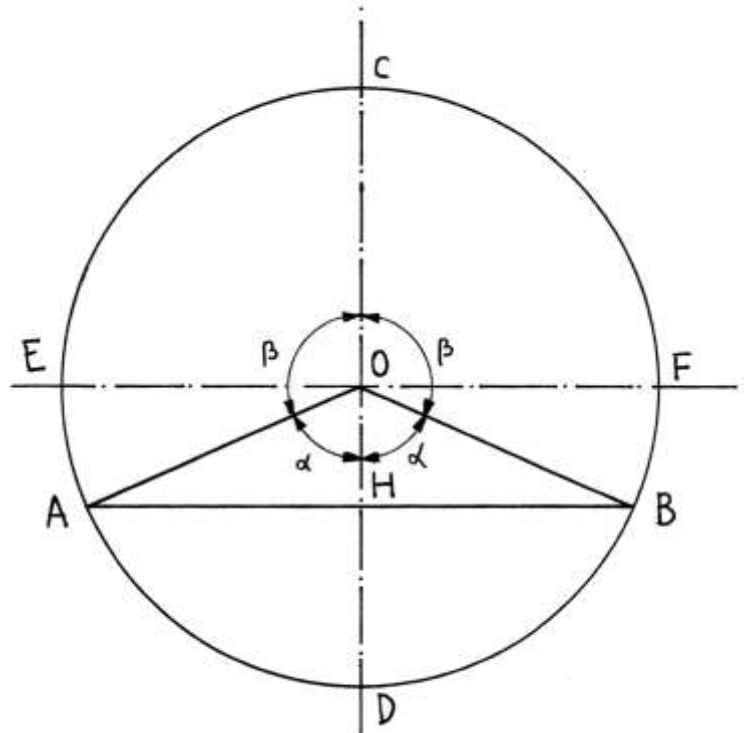
$$CD = CH + HD = 12 + (5 + 1/3) = (17 + 1/3) \text{ m.}$$

Nota. Questi dati mettono in evidenza un aspetto: i segmenti circolari di questo problema e del precedente sono complementari perché la somma delle loro aree riporta a quella del cerchio. In entrambi i casi il cerchio ha diametro $(17 + 1/3) \text{ m}$ e la corda è lunga 16 m :



Lodi propone di calcolare l'area del settore circolare AECFBO e del triangolo isoscele AOB che sommate danno la superficie del segmento circolare AECFBH: l'Autore fa riferimento al metodo già impiegato, ma servirebbe conoscere la lunghezza dell'arco di circonferenza che lo delimita.

Possiamo impiegare una soluzione alternativa che utilizza il grafico della figura:



Gli angoli indicati con α hanno la stessa ampiezza degli angoli α calcolati nel corso della soluzione del precedente problema relativo al calcolo dell'area di un segmento circolare. Quindi un angolo α è ampio $56,31^\circ$.

Ciascun angolo β è *supplementare* rispetto a α e la sua ampiezza è:

$$\beta = 180^\circ - \alpha \approx 180^\circ - 56,31^\circ \approx 123,69^\circ.$$

L'angolo ACF è ampio:

$$ACF = 2 * \beta = 2 * 123,69 \approx 247,38^\circ.$$

La circonferenza c è lunga:

$$c = \pi * d \approx 22/7 * (17 + 1/3) \approx 54,476 \text{ m (} d \text{ è il diametro).}$$

La lunghezza dell'arco ACB è ricavabile dalla proporzione

$$ACB : c = 2 * \beta : 360 \text{ da cui}$$

$$ACB = c * (2 * \beta) / 360 \approx 37,434 \text{ m.}$$

L'area del settore circolare ACBO è:

$$\text{Area}_{ACBO} = \text{Arco}_{ACB} * \text{raggio} / 2 = \text{Arco}_{ACB} * d / 4 \approx$$

$$\approx 37,434 * (17 + 1/3) / 4 \approx 162,214 \text{ m}^2.$$

%%%%%%%%%

Una soluzione ancora più semplice è riassunta nella formula

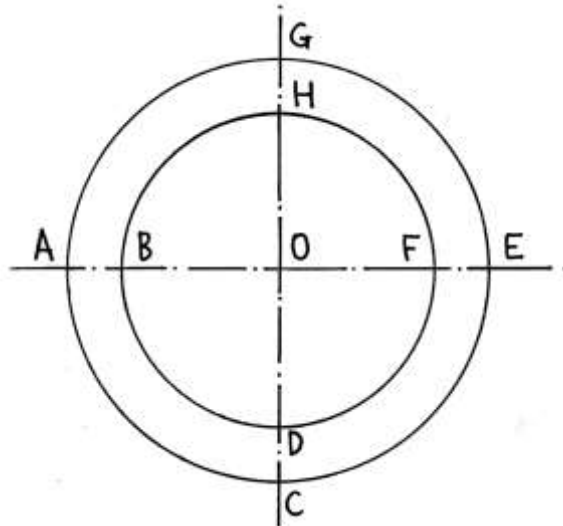
$$\text{Area}_{ACBO} = \text{Area}_{\text{CERCHIO}} - \text{Area}_{\text{SETTORE}_{ACBH}} = \pi * d^2 / 4 - \text{Area}_{\text{SETTORE}_{ACBH}}.$$

Il settore circolare ACBH ha le stesse dimensioni del settore circolare ACBO del precedente problema e cioè $73,84 \text{ m}^2$ per cui si ha:

$$\text{Area}_{ACBO} = \pi * d^2 / 4 - 73,84 \approx 22/7 * (17 + 1/3)^2 / 4 - 73,84 \approx 162,22 \text{ m}^2.$$

Area di una corona circolare

Una corona circolare è la superficie che è delimitata da due cerchi che possono essere concentrici o non. In questo secondo caso, i due cerchi non hanno lo stesso centro e il più piccolo è comunque contenuto all'interno del più grande.



Il diametro del cerchio esterno, $d_1 = AE$, è lungo 80 m e quello del cerchio interno, $d_2 = BF$, è 60 m.

L'area della corona circolare è uguale alla differenza fra le aree dei due cerchi.

L'area del cerchio esterno è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO ESTERNO}} = \pi * (d_1)^2 / 4 \approx 22/7 * (80/2)^2 \approx 5028 + 4/7 \text{ m}^2.$$

L'area del cerchio interno è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO INTERNO}} = \pi * (d_2)^2 / 4 \approx 22/7 * (60/2)^2 \approx 2828 + 4/7 \text{ m}^2.$$

L'area della corona circolare è così calcolata da Lodi:

$$\text{Area CORONA CIRCOLARE} \approx (5028 + 4/7) - (2828 + 4/7) \approx 2200 \text{ m}^2.$$

Oggi l'area di una corona circolare è calcolata in modo più semplice conoscendo le lunghezze dei due raggi:

* $r_{\text{ESTERNO}} = d_1/2 = 80/2 = 40 \text{ m}.$

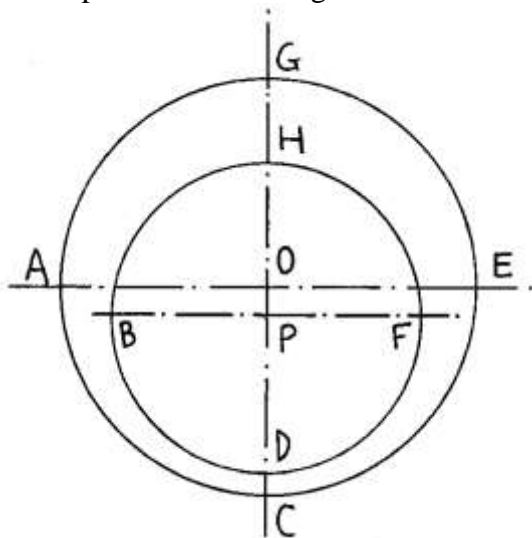
* $r_{\text{INTERNO}} = d_2/2 = 60/2 = 30 \text{ m}.$

L'area è data da:

$$\begin{aligned} \text{Area CORONA CIRCOLARE} &= \pi * [(r_{\text{ESTERNO}})^2 - (r_{\text{INTERNO}})^2] \approx 22/7 * (40^2 - 30^2) \approx \\ &\approx 22/7 * (1600 - 900) \approx 2200 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

%%%%%%%%%

Il secondo problema è presentato nella figura:



Le dimensioni e le aree dei due cerchi sono quelle del problema precedente.

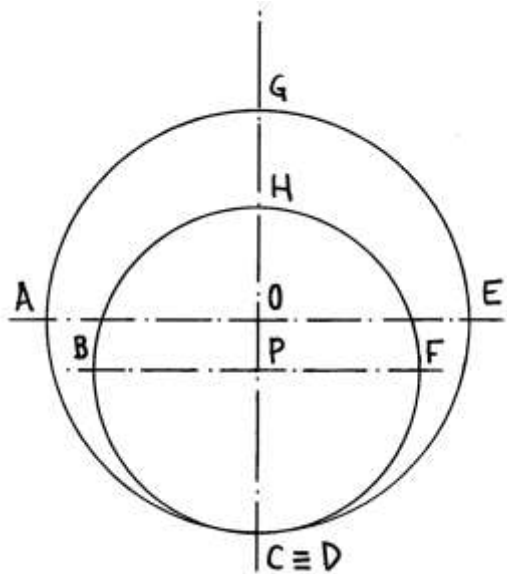
La superficie delimitata dalle due circonferenze, esterna e interna, non è propriamente una corona circolare perché i due cerchi non sono concentrici.

L'area della figura è uguale a quella della corona circolare del caso precedente e cioè 2200 m².

----- APPROFONDIMENTO -----

Un terzo esempio di quasi corona circolare

Lodi non ha considerato il caso mostrato in figura:



Le circonferenze dei due cerchi sono tangenti internamente nel punto C che corrisponde al D del cerchio interno.

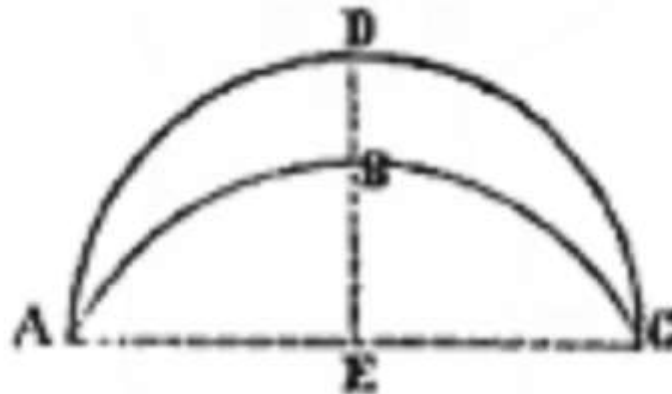
L'area della superficie compresa fra le due circonferenze

$$\begin{aligned} \text{Area CORONA CIRCOLARE} &= \text{Area CERCHIO ESTERNO} - \text{Area CERCHIO INTERNO} \approx \\ &\approx (5028 + 4/7) - (2828 + 4/7) \approx 2200 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Il risultato è identico a quelli dei due casi precedenti.

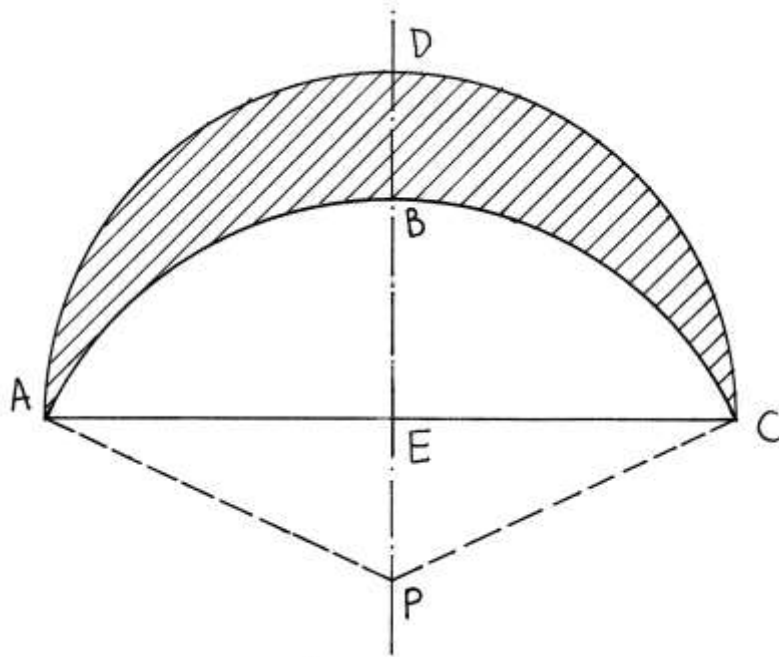
Area di una superficie racchiusa fra archi di circonferenza

La superficie piana delimitata dai due archi di circonferenza è una *lunula*:



ADC è una semicirconferenza di centro E e raggio EA.

A sua volta, ABC è un arco di circonferenza (di cui Lodi non fornisce né il raggio né il centro che è P):



Ricostruendo la situazione si ha che l'angolo APC è ampio 130° e il raggio dell'arco ABC è lungo $PA = PB = PC$.

Lodi risolve in maniera sbrigativa il problema del calcolo dell'area della lunula (tratteggiata nella figura qui sopra) affermando che l'area va calcolata sottraendo dall'area del segmento circolare (ma è un semicerchio) ADCE quella del segmento circolare ABCE.

L'Autore non fornisce alcuna dimensione e, argomento più importante, non chiama espressamente *lunula* la figura.

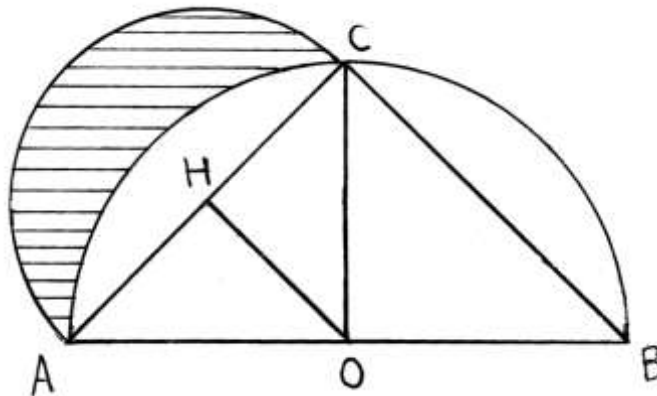
----- APPROFONDIMENTO -----

Le lunule

Il matematico greco Ippocrate di Chio (vissuto nel V secolo a.C.) studiò la geometria del cerchio. Scrisse un trattato di geometria – *Elementi* – che è andato perduto. Fu un precursore di Euclide.

Le ricerche di Ippocrate di Chio sulla (im)possibile quadratura del cerchio lo portarono allo studio di un gruppo particolare di figure piane, le *lunule*, così chiamate perché la loro forma si avvicina a quella delle fasi lunari.

Il triangolo ACB nella figura che segue è rettangolo e isoscele:

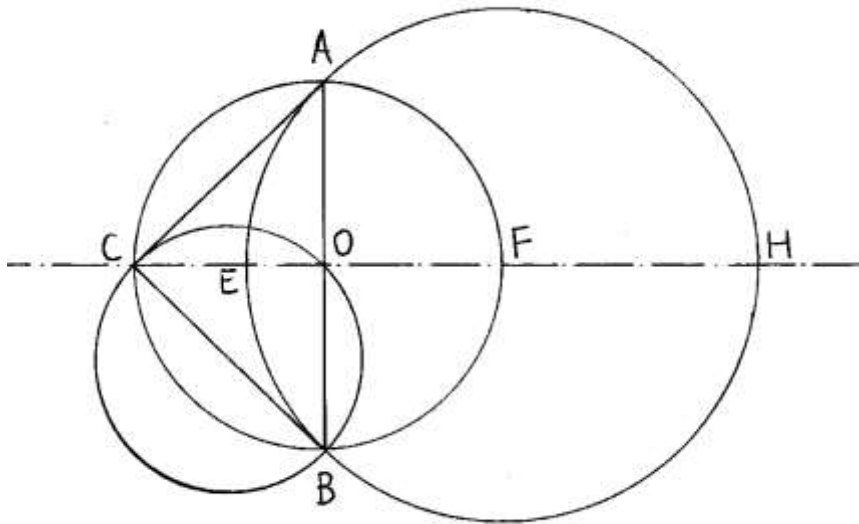


Esso è inscritto nella semicirconferenza ACB.

Il punto medio del cateto AC è il punto H. Con centro in H e raggio AH è tracciata una semicirconferenza che per estremi i punti A e C. La superficie *tratteggiata* è una *lunula*, una figura piana racchiusa fra due archi di circonferenza di raggi differenti. Il raggio AH vale $(\sqrt{2})/2$ volte il raggio AO.

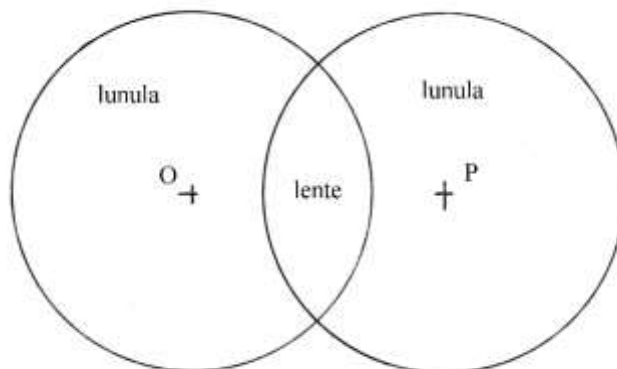
Ippocrate di Chio dimostrò che la superficie della lunula è uguale a quella del triangolo rettangolo ACO.

Leon Battista Alberti scrisse un breve saggio – *De lunularum quadratura* – in cui studiò la figura e ne spiegò la costruzione con la costruzione che segue:



Lunule e lente

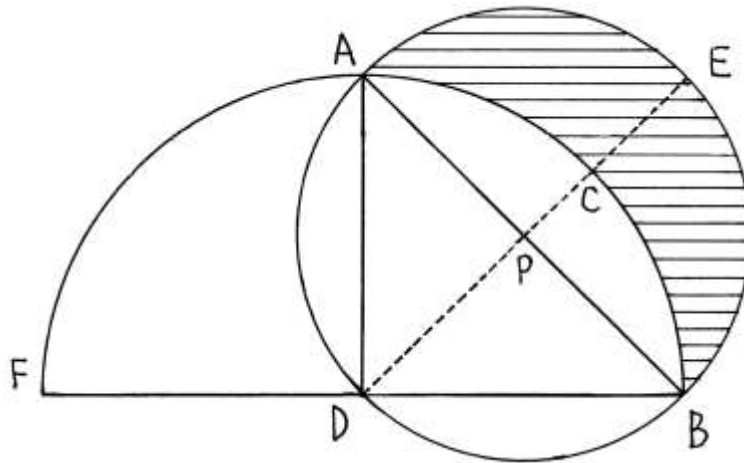
Due cerchi con centri nei punti O e P si intersecano e creano due *lunule*:



La regione comune ai due cerchi ha una forma che giustifica il nome che le è stato attribuito: è una *lente*.

Invece le due lunule appartengono ciascuna ad un unico cerchio.

Lodi introduce poi la figura che segue da lui correttamente chiamata *Lunula*. Essa è la superficie ABEC.



L'area è delimitata dalla semicirconferenza FAB e dalla circonferenza di centro P e raggio PD.

Ad è un raggio perpendicolare al diametro FB.

AB è una corda contenuta nel semicerchio ed è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ADB.

Fissare il punto medio di AB: è P. Fare centro in P e con raggio PA tracciare una circonferenza che passa anche per i punti B e D. Disegnare il diametro DPCE.

L'area della lunula ABEC è uguale a quella del triangolo rettangolo ADB: vediamo il perché.

Il cateto DB è lungo a e l'ipotenusa AB è:

$$AB = DB * \sqrt{2} = a * \sqrt{2} .$$

I segmenti AP e PB sono lunghi

$$AP = PB = AB/2 = (a * \sqrt{2})/2 = a * (\sqrt{2})/2 .$$

L'area del triangolo ADB è:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO ADB}} = (AD * DB)/2 = (a * a)/2 = a^2/2 .$$

L'area del semicerchio AEBP è data da:

$$\text{Area}_{\text{AEBP}} = (\pi * PB^2)/2 = \pi * [(\sqrt{2})/2]^2/2 = \pi * a^2/4 .$$

L'area del segmento circolare ACBP è data dalla differenza fra quella del quarto di cerchio DAB e quella del triangolo ADB che ha area data da:

$$\text{Area}_{\text{ADB}} = 1/4 * \pi * DB^2 = 1/4 * \pi * a^2 .$$

Quindi:

$$\text{Area}_{\text{ACBP}} = \text{Area}_{\text{ADB}} - \text{Area}_{\text{TRIANGOLO ADB}} = (1/4 * \pi * a^2) - (a^2/2) .$$

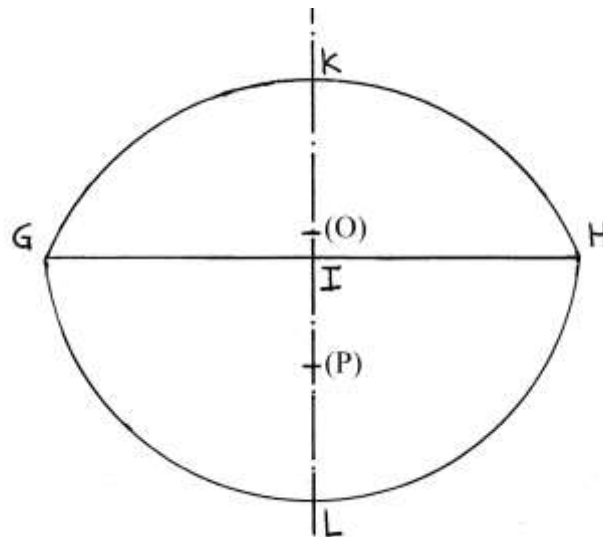
L'area della lunula AEBC è ricavata dalla differenza fra quella del semicerchio AEBP e quella del segmento circolare ACBP:

$$\text{Area}_{\text{AEBC}} = \text{Area}_{\text{AEBP}} - \text{Area}_{\text{ACBP}} = (\pi * a^2/4) - [(1/4 * \pi * a^2) - (a^2/2)] = a^2/2 .$$

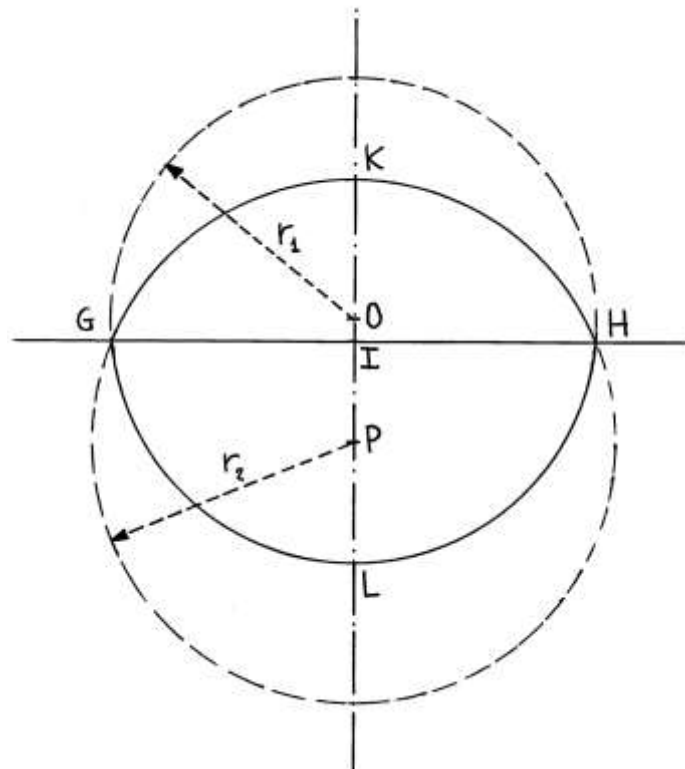
L'area della lunula AEBC è uguale a quella del triangolo rettangolo isoscele ADB: $a^2/2$.

Area di un doppio segmento circolare

La figura piana GKHL è formata da due segmenti circolari che hanno in comune la corda GH:



Essa è generata dall'intersezione di due cerchi di centri O e P e raggi $r_1 = OG$ e $r_2 = PG$.
 I due segmenti circolari hanno frecce IK e IL che formano due segmenti *adiacenti*. I centri dei due cerchi giacciono sulle frecce.

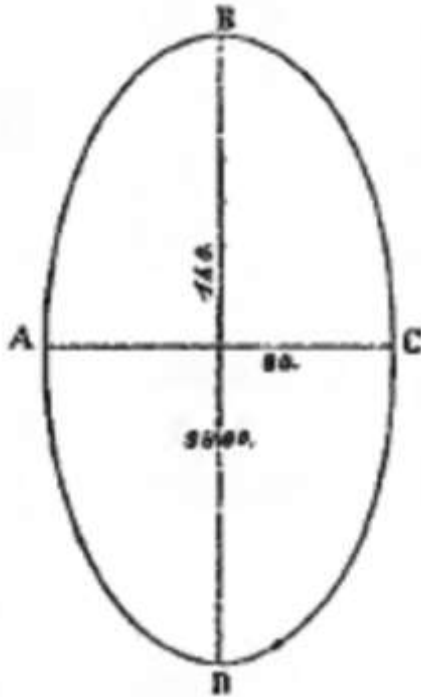


Conoscendo le lunghezze della corda e delle due frecce è possibile calcolare le aree dei due segmenti con il metodo già utilizzato in precedenza.

Area di un'ellisse

Gli assi di un'ellisse sono lunghi:

- * AB = 140 m.
- * CD = 80 m.



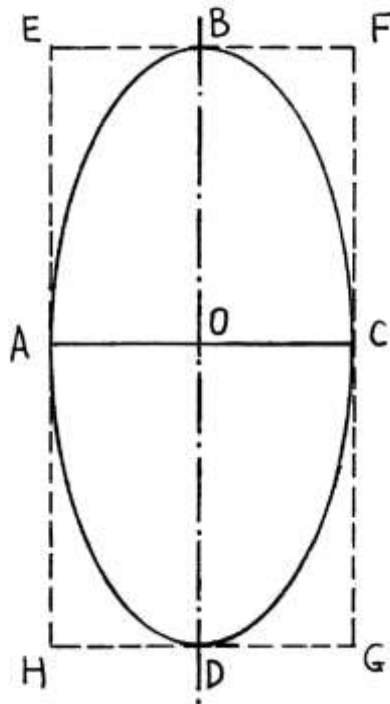
Lodi riporta una regola pratica secondo la quale l'area del rettangolo circoscritto all'ellisse sta all'area di questa ultima come 14 a 11. Chiaramente, essa deriva dall'identica regola pratica che determina la proporzione approssimata di 14 a 11 fra l'area di un quadrato e quella di un cerchio in esso inscritto, regola che abbiamo già incontrato.

L'analogia fra i due casi (ellisse e cerchio) è senz'altro accettabile.

L'ellisse è quindi inscritta nel rettangolo EFGH che ha lati lunghi quanto gli assi dell'ellisse ABCD:

* HE = 140 m.

* HG = 80 m.



L'area del rettangolo EFGH è:

$$\text{Area}_{EFGH} = HE * HG = 140 * 80 = 11200 \text{ m}^2.$$

L'area dell'ellisse ABCD è:

$$\text{Area}_{\text{ELLISSE ABCD}} = 11/14 * \text{Area}_{\text{EFGH}} = 11/14 * 11200 = 8800 \text{ m}^2.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Area di un'ellisse

Per calcolare con precisione l'area di un'ellisse è usata la formula

$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \pi * d_1 * d_2$: d_1 e d_2 sono le lunghezze dei due semiassi, maggiore e minore.

La formula è ricalcata su quella dell'area del cerchio:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r * r = \pi * r^2.$$

Infatti, nel caso $d_1 = d_2$ l'ellisse diviene un cerchio.

L'area dell'ellisse di Lodi è:

$\text{Area}_{\text{ELLISSE ABCD}} \approx 3,14 * 70 * 40 \approx 8792 \text{ m}^2$, valore che mostra che il risultato di Lodi – 8800 m^2 – è approssimato *per eccesso*.

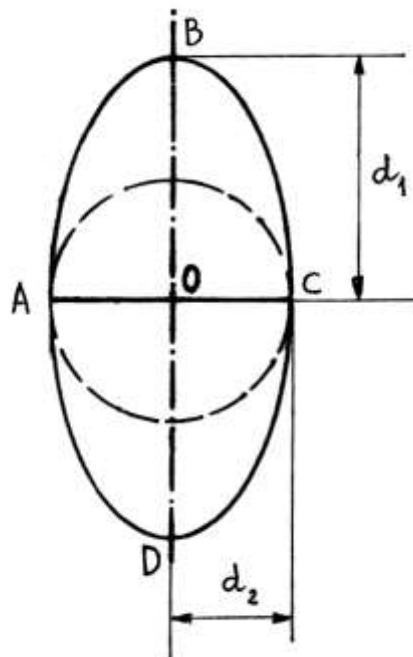
Impiegando per π l'approssimazione 22/7 il risultato è:

$$\text{Area}_{\text{ELLISSE ABCD}} \approx 22/7 * 70 * 40 \approx 8800 \text{ m}^2.$$

Ciò dimostra che per π lodi ha usato il valore 22/7.

Lodi suggerisce un secondo metodo con il quale calcolare l'area, sintetizzato nella formula

$$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \pi * (d_2)^2 * d_1/d_2$$



La formula è semplificabile come segue:

$$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \pi * d_2 * d_1 .$$

Un terzo metodo è il seguente: moltiplicare le lunghezze dei due semiassi ed estrarre la radice quadrata il cui risultato è il *raggio* del cerchio di area equivalente:

$$\sqrt{(d_1 * d_2)} = r \text{ e quindi}$$

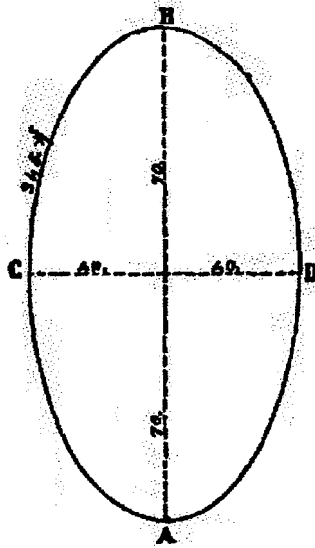
$$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \pi * r^2.$$

Applicando questa ultima formula al caso concreto si ha:

$$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = 22/7 * [\sqrt{(140/2) * (80/2)}]^2 \approx 22/7 * 70 * 40 \approx 8800 \text{ m}^2.$$

Lunghezza dell'ellisse

Un'ellisse ha gli assi lunghi 140 e 80 m: le dimensioni sono le stesse dell'ellisse del precedente problema.



Lodi utilizza la seguente regola pratica:

“La periferia dell'ellisse sta alla metà della somma dei suoi assi, come 22 sta a 7, ed è questo il prossimo rapporto che si usa in pratica...”.

Per *periferia* egli intende la *lunghezza* della curva, similmente alla circonferenza di un cerchio.

La regola della proporzione 22 : 7 richiama il valore approssimato di $\pi = 22/7$ che è impiegato nei calcoli relativi al cerchio e alla circonferenza.

Per Lodi, la lunghezza è data da:

$$\text{semisomma assi} = (\text{asse maggiore} + \text{asse minore})/2 = (140 + 80)/2 = 110.$$

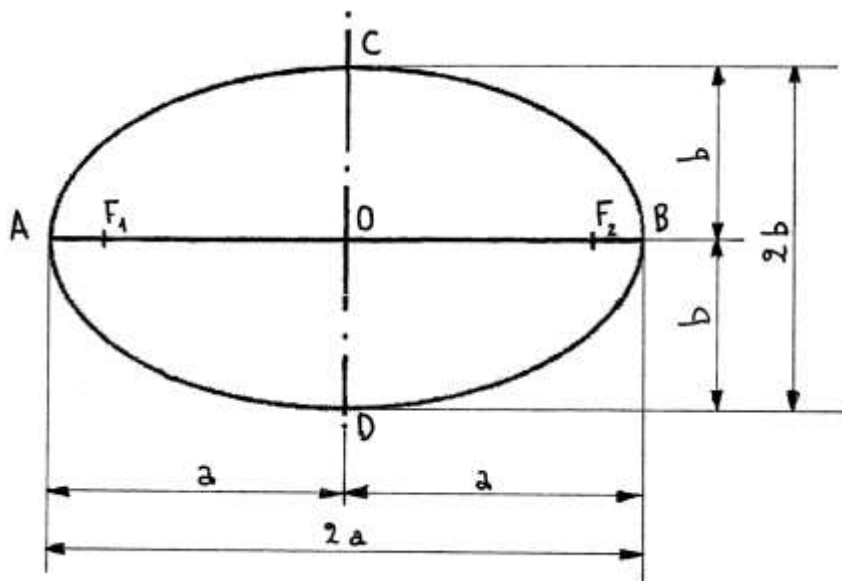
Quindi instaura la proporzione

$7 : 22 = \text{semisomma assi} : X$ dove X è la lunghezza dell'ellisse. Ne consegue:

$$X = (22 * 110)/7 \approx 345 + 5/7 \text{ m.}$$

Perimetro di un'ellisse

La figura che segue mostra l'ellisse ACBD:



L'asse maggiore AOB è lungo $2 \cdot a$ e quello minore è $2 \cdot b$. Nei precedenti paragrafi il semiasse maggiore è stato indicato con d_1 (qui è a) e il semiasse minore con d_2 (qui è b).

Il perimetro p dell'ellisse è calcolato con la formula *approssimata*

$$[I] \quad p \approx 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \approx \pi \cdot \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2)} .$$

Questa formula fornisce un risultato approssimato *per eccesso*.

Altre formule *approssimate* per il calcolo del perimetro p dell'ellisse sono fornite dal Bartsch a p. 268 del suo manuale:

$$[II] \quad p \approx \pi \cdot [3/2 \cdot (a + b) - \sqrt{a \cdot b}]$$

$$[III] \quad p \approx \pi/2 \cdot [a + b + \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2)}]$$

Le tre formule forniscono risultati abbastanza vicini.

Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920) propose le due seguenti formule approssimate:

$$[IV] \quad p \approx \pi \left(3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right)$$

$$[V] \quad p \approx \pi(a + b) \left(1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4 - 3h}} \right).$$

Nelle due formule compare la costante h che è data da

$$h = \frac{a - b}{a + b}$$

Applichiamo le cinque formule

Calcoliamo la lunghezza dell'ellisse contenuta nella precedente figura applicando le *cinque* formule. Per π utilizziamo, come ha fatto Lodi, il valore approssimato $22/7$.

Fissiamo alcuni dati:

- * $a = 70$.
- * $b = 40$
- * $(a + b) = 110$.
- * $(a - b) = 30$.
- * $h = 17/61 \approx 0,279$ (che è un numero periodico con periodo 27).

La tabella che segue riassume i valori approssimati ottenuti:

formula	lunghezza dell'ellisse
I	358,34
II	352,267
III	352,028
IV	352,190
V	371,654

I risultati offerti dalla II, dalla III e dalla IV formula sono pressoché coincidenti: la I e ancora più la V se ne discostano.

Più l'ellisse si avvicina a una circonferenza più esatto è il risultato offerto dalle cinque formule.

%%%%%%%%%

Il matematico italiano Leonardo Colzani (Università degli Studi di Milano Bicocca) propone la formula seguente per il calcolo del perimetro dell'ellisse, che egli attribuisce a Ramanujan (1914):

$$[VI] \quad \pi(a + b) \left(3 - \sqrt{4 - \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2}} \right).$$

Lo stesso Colzani presenta un'altra formula approssimata che offre il vantaggio di eliminare le radici quadrate:

$$[VII] \quad \pi(a + b) \frac{16(a + b)^2 + 3(a - b)^2}{16(a + b)^2 - (a - b)^2}.$$

Applicando queste due formule, la VI e la VII, si ottengono i risultati mostrati nella tabella che segue:

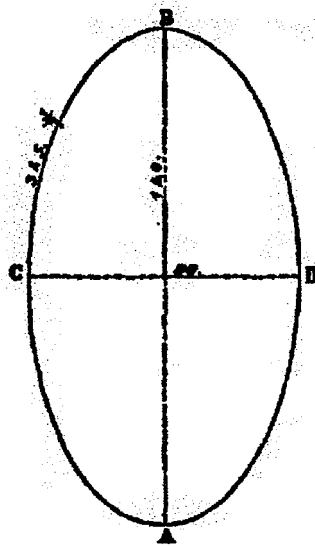
formula	lunghezza dell'ellisse
VI	352,173
VII	352,173

I risultati offerti dall'applicazione delle *sette* formule sono tutti maggiori del dato calcolato da Lodi: $345 + 5/7$ m.

Calcolare la lunghezza dell'asse maggiore di un'ellisse

Sono note la lunghezza dell'asse minore – 80 m – e quella del perimetro dell'ellisse: $345 + 5/7$ m.

È domandata la lunghezza dell'asse maggiore.



Da questi primi dati risulta che l'ellisse ha le stesse dimensioni di quelle dei casi precedenti.

Lodi impiega una procedura che ha i seguenti passi:

- * Moltiplicare il perimetro per 7: $(345 + 5/7) * 7 = 2420.$
- * Dividere per 22: $2420 : 22 = 110.$
- * Moltiplicare per 2: $110 * 2 = 220.$
- * Sottrarre la lunghezza dell'asse minore: $220 - 80 = 140$ m, lunghezza dell'asse maggiore.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$$AB = (\text{perimetro} * 7/22) * 2 - CD.$$

La formula deriva da quella, incontrata in precedenza, per il calcolo della lunghezza del perimetro dell'ellisse.

Calcolare la lunghezza dell'asse maggiore di un'ellisse

Un'ellisse ha area di 8800 m^2 ed è nota anche la lunghezza dell'asse minore, uguale a 80 m.

Deve essere calcolata la lunghezza dell'asse maggiore, AB nella figura del precedente problema.

La procedura impiegata da Lodi è la seguente:

- * Moltiplicare l'area per 14: $8800 * 14 = 123200.$
- * Dividere per 11: $123200 : 11 = 11200.$

* Dividere per 80:
dell'asse maggiore.

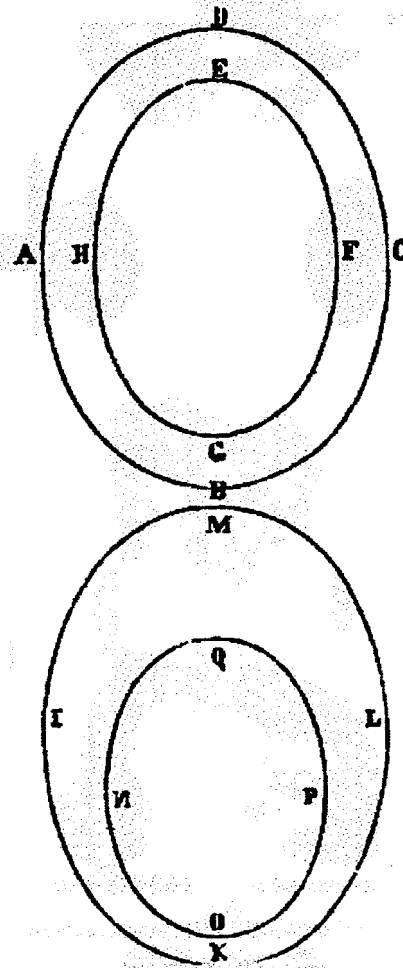
$$11200 : 80 = 140 \text{ m, lunghezza}$$

La formula riassuntiva è:

$$\begin{aligned} AB &= (\text{Area ELLISSE} * 14/11) / \text{lunghezza ASSE MINORE} = \\ &= (\text{Area RETTANGOLO CIRCOSCRITTO}) / \text{lunghezza ASSE MINORE} . \end{aligned}$$

Area di una corona ellittica

L'area di una corona ellittica è calcolata in maniera facile: in entrambi i casi mostrati in figura (ellissi concentriche e non concentriche) essa è uguale alla differenza fra l'area dell'ellisse esterna e quella dell'ellisse interna.



Bibliografia

1. Bartsch Hans-Jochen, “Manuale delle formule matematiche”, trad. it., Milano, Hoepli, 2002, pp. 702.
2. Colzani Leonardo, “La quadratura del cerchio e dell’iperbole”, 2012, pp. 267, reperito all’indirizzo Internet www.matapp.unimib.it/~leonardo/314/314.pdf.
3. Lodi_Fortunato, “*Manuale pratico di Geometria ad uso degl’Industriali e per facilitare ogni specie di disegno*”, Milano, 1854, Carlo Brigola, pp. 116.
4. Trevisan Camillo, “Sullo schema geometrico costruttivo degli anfiteatri romani: gli esempi del Colosseo e dell’Arena di Verona”, in “Il Colosseo. Studi e Ricerche”, “Disegnare idee immagini”, Roma, Gangemi, anno X, n. 18-19, giugno-dicembre 1999, pp. 117-132.