© Sergio Calzolani, Firenze, 2017
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: formula degli agrimensori, Sumeri, origine formula, unità misura Sumeri, Babilonesi, catasti Lagash, unità misura Egizi, geometria papiro Rhind, Gromatici romani, geometria di Boezio, Alcuino da York, Jacopo da Firenze, Paolo Gherardi, Bertrando Boysset, Tommaso della Gazzaia, Orbetano da Montepulciano, geometria degli Aztechi, tabelle condominiali

LA FORMULA DEGLI AGRIMENSORI

La *formula degli agrimensori* ha una lunga storia, almeno dai Sumeri fino ai nostri giorni.

In questo articolo sono forniti alcuni esempi di impiego della formula e dei metodi ad essa assimilati.

L'origine della formula può essere stabilita come risposta a un problema di natura fiscale: come calcolare le imposte da versare al Fisco sulle proprietà agricole o sui terreni concessi dallo Stato a vario titolo.

Un ovvio principio di equità imponeva una qualche forma di proporzionalità fra l'imposta e la superficie del terreno o la sua produzione annuale.

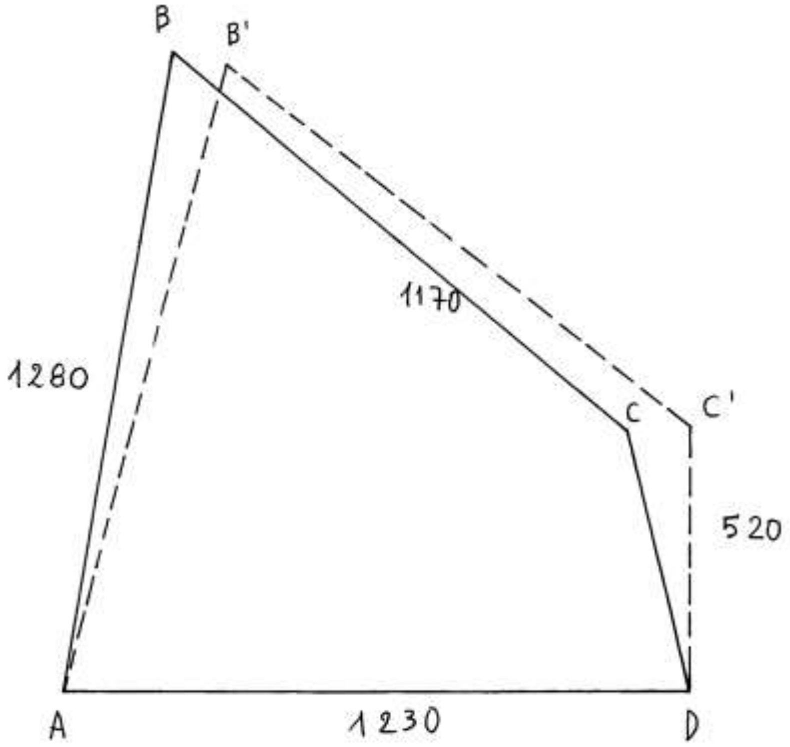
Questo articolo mostra una serie di esempi di impiego a partire dai Sumeri, fino ai nostri giorni.

I SUMERI

Una tavoletta risalente alla seconda metà del III millennio a.C. è attribuita al periodo di Uruk IV, nella Mesopotamia sumerica: essa contiene la prima applicazione della *formula degli agrimensori*.

Lo storico della matematica Peter Damerow si è basato sul suo contenuto per anticipare alla fine del IV millennio a.C. l'introduzione della formula.

La figura che segue descrive un terreno che ha la forma di un quadrilatero, ABCD, con le dimensioni scritte sui lati, in *nindan*:



Conoscendo soltanto le lunghezze dei lati e non quella di almeno una diagonale o l'ampiezza degli angoli interni, non è possibile definire con certezza il quadrilatero. Il quadrilatero A'B'C'D', tratteggiato nella figura, ha i lati lunghi quanto i corrispondenti di ABCD ma non ha la sua stessa superficie.

I quadrilateri possibili con le stesse dimensioni sono infiniti.

Il *nindan* valeva 12 *cubiti* e corrispondeva a 5,94 metri. La tabella che segue contiene le equivalenze in metri delle lunghezze dei lati del quadrilatero:

lato	lunghezze in nindan	lunghezze in metri
AB	1280	7603,2
BC	1170	6949,8
CD	520	3088,8
AD	1230	7306,2

I dati della tabella spiegano che il terreno in oggetto era una proprietà di notevole estensione o, forse, si trattava di un esercizio assegnato in una scuola frequentata dagli scribi agrimensori.

\- APPROFONDIMENTO -

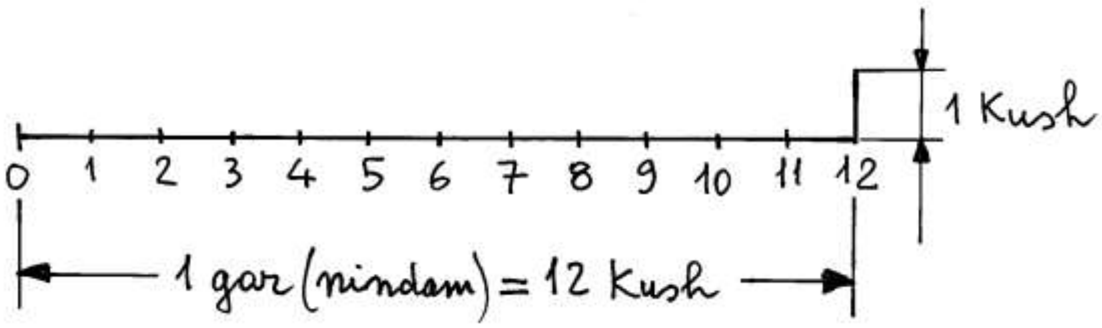
Le unità di misura di lunghezza usate dai Sumeri

Prima i Sumeri poi i Babilonesi hanno usato in Mesopotamia unità di misura di lunghezza lineare basate su una unità base, il *cubito* o *braccio* (kush).

La tabella che segue descrive i rapporti fra le unità lineari:

nome	rapporto con il cubito	lunghezza
dito	1/30 cubito = 1/10 piede	1,65 cm
piede	1/3 cubito	16,5 cm
spanna	½ cubito	24,75 cm
cubito (kush)		49,5 cm
nindan (o ninda o gar)	12 cubiti	5,94 m

Le due più importanti unità usate sul terreno e in edilizia erano il cubito e il suo multiplo gar o nindan:

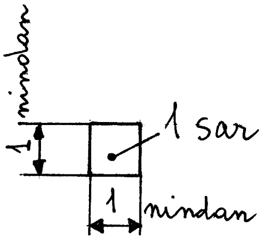


Le unità di misura della superficie usate dai Sumeri

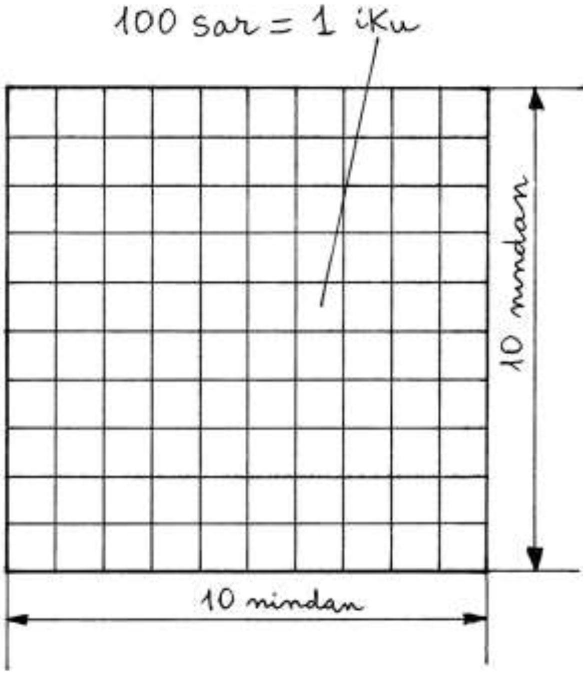
La tabella che segue contiene le principali unità di misura della superficie e i valori approssimati in m^2:

unità di misura	equivalenti a m^2	arrotondamento per eccesso, in m^2
1 sar (= 1 nindam^2)	35,2836	36
1 iku = 100 sar	3 528,36	3 600
1 eše = 6 iku	21 170,16	21 600
1 bûr = 3 eše	63 510,48	64 800
1 bur’u = 10 bûr	635 104,8	648 000
1 šar = 6 bur’u	3 810 628,8	3 888 000

Il *sar* era l'unità di misura di superficie che corrispondeva all'area di un quadrato con lato lungo 1 *nindan*:

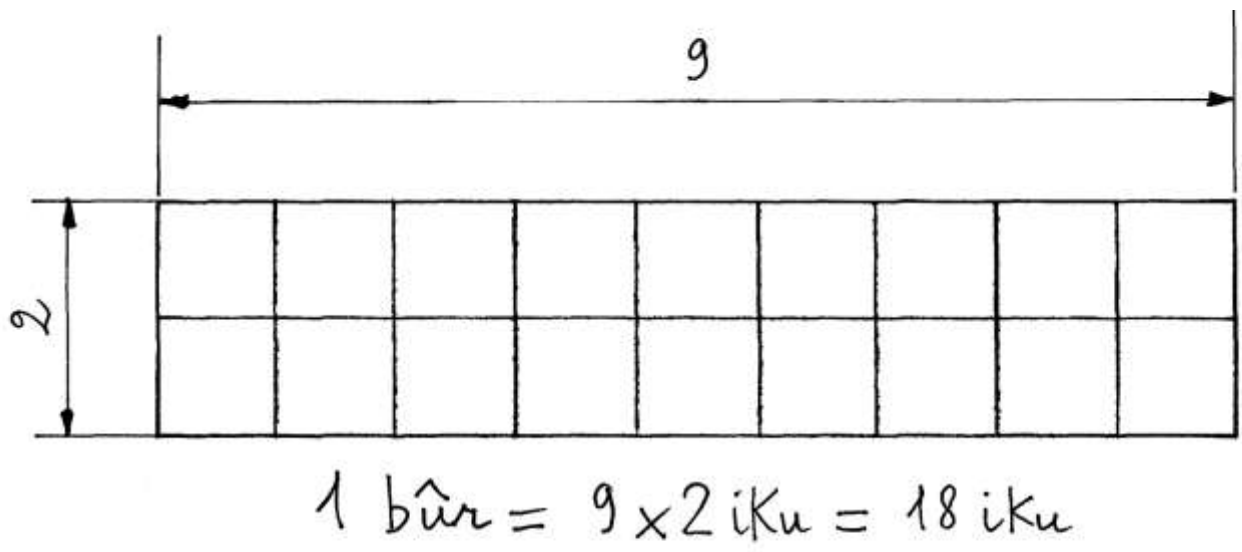


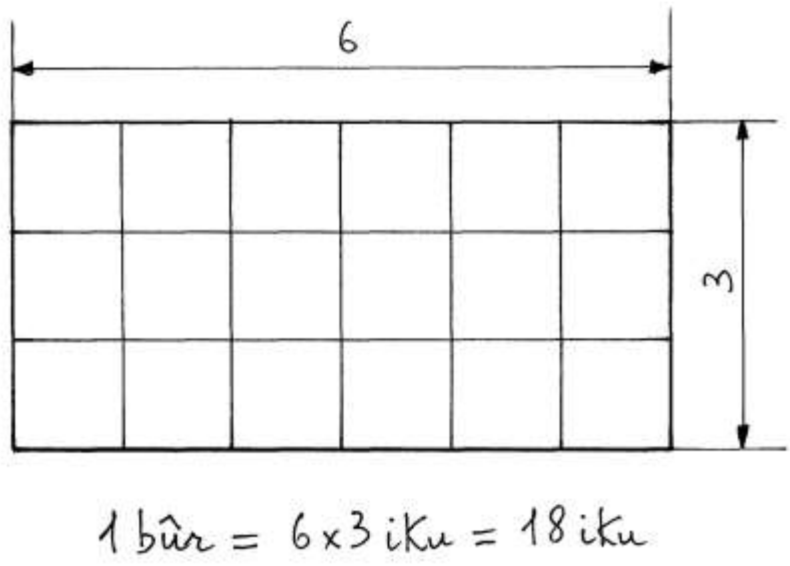
Un multiplo del *sar* era l'*iku* che corrispondeva all'area occupata da 100 *sar* e quindi equivaleva alla superficie di un quadrato di lato 10 *nindan*:



Un multiplo dell'*iku* era il *bûr* :

1 *bûr = 18 iku = 1800 sar*





- -

<u>L’origine della formula degli agrimensori</u>

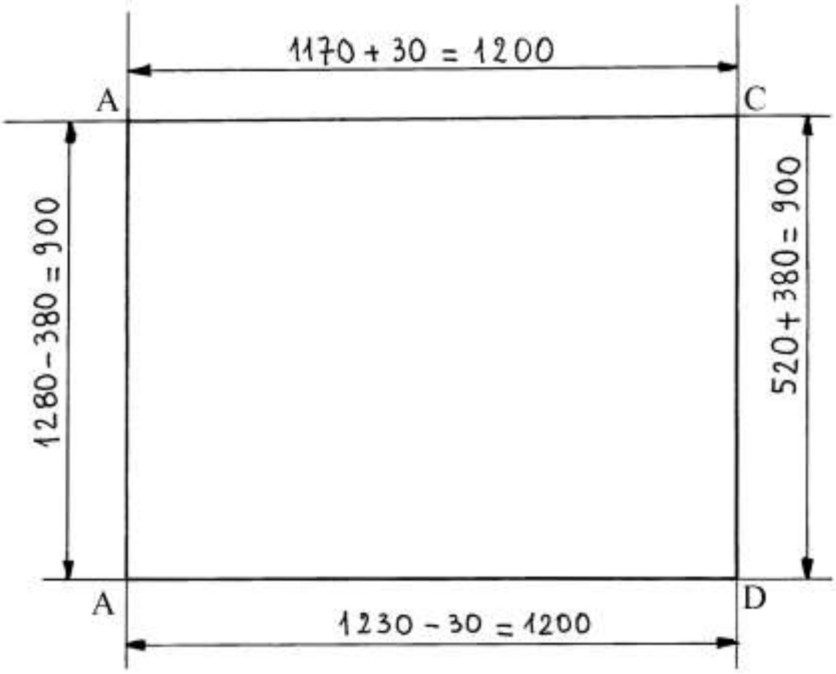
Damerow offre una spiegazione sull’origine della formula degli agrimensori applicata al calcolo dell’area del quadrilatero ABCD:

Area ABCD = (AB + CD)/2 * (BC + AD)/2 = (1280 + 520)/2 * (1170 + 1230)/2 =
= 1800/2 * 2400/2 = 900 * 1200 = 1 080 000 nindan^2 = 1 080 000 sar .

Stando all’ipotesi di Damerow, gli agrimensori Sumerici avrebbero effettuate alcune operazioni:

* calcolare la differenza fra le lunghezze delle coppie di lati opposti AB e CD:
  AB – CD = 1280 – 520 = 760 nindan = 2*D ;
* dividere per 2: 2*D /2 = 760 : 2 = 380 nindan ;
* sottrarre D dalla lunghezza del lato maggiore (AB): 1280 – 380 = 900 nindan ;
* sommare D alla lunghezza del lato opposto (CD): 520 + 380 = 900 nindan ;
* calcolare la differenza fra le lunghezze dell’altra coppia di lati opposti:
  AD – BC = 1230 – 1170 = 60 nindan = 2*d :
* dividere 2*d per 2: 2*d/2 = 60 : 2 = 30 nindan ;
* sottrarre d dalla lunghezza di AD: 1230 – 30 = 1200 nindan ;
* sommare d alla lunghezza di BC: 1170 + 30 = 1200 nindan .

A questo punto gli agrimensori avevano a disposizione il quadrilatero convenzionale ABCD della figura che segue, da loro ritenuto equivalente al precedente:



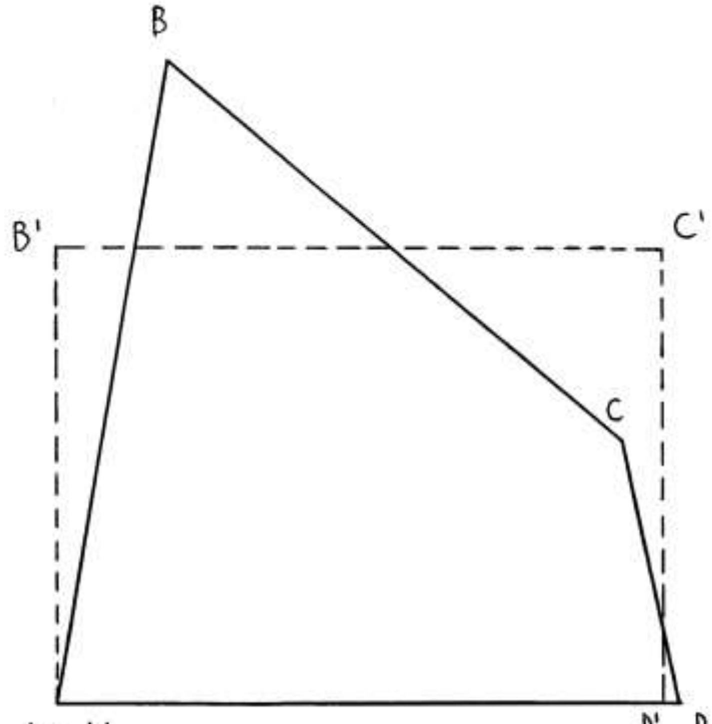
Con questa procedura gli agrimensori Sumerici convertivano il quadrilatero nel *rettangolo* ABCD e l'area veniva calcolata con la formula che segue:

Area ABCD = [(AB – D) + (CD + D)]/2 * [(AD – d) + (BC + d)]/2 =

= [(1280 – 380) + (520 + 380)]/2 * [(1230 – 30) + (1170 + 30)]/2 =

= (900 + 900)/2 * (1200 + 1200)/2 = 900 * 1200 = 1 080 000 nindan^2.

La figura che segue mette a confronto il quadrilatero reale ABCD e la sua rettificazione nel rettangolo A'B'C'D':

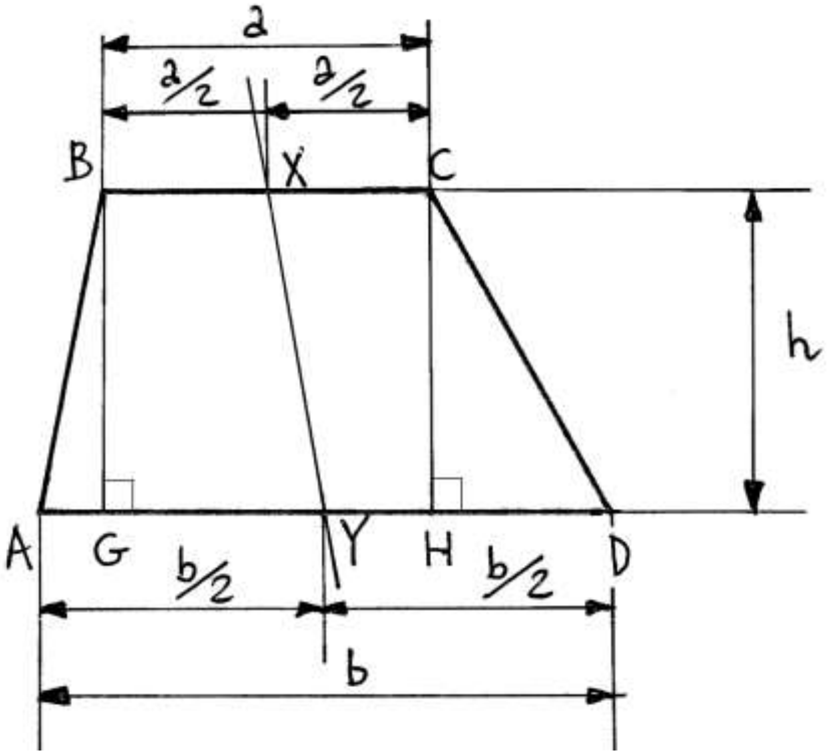


A un sommario controllo visivo non può sfuggire un evidente dato di fatto: l'area di A'B'C'D' è maggiore di quella di ABCD.

<u>Divisione di un terreno a forma di trapezio</u>

ABCD è un trapezio *scaleno* con due lati paralleli: AD e BC.

I segmenti BG e CH sono due altezze del trapezio, di lunghezza h:



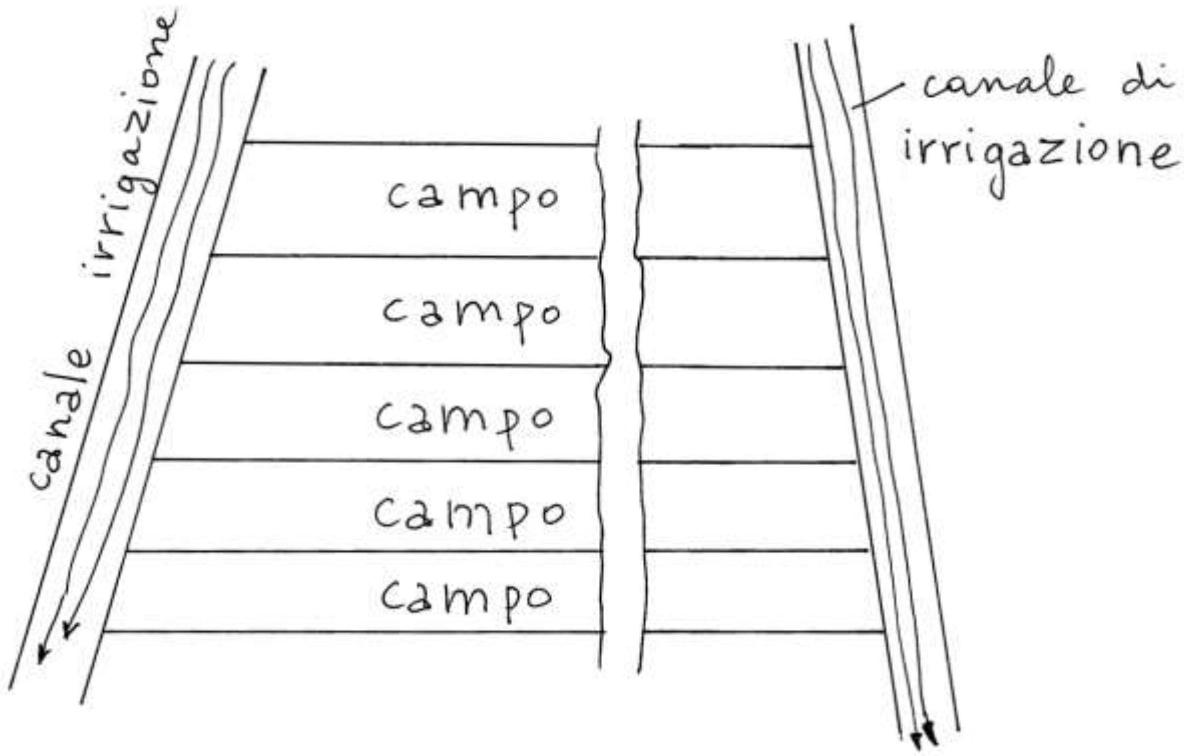
I punti X e Y dividono le due basi in parti uguali. Il segmento XY divide il trapezio ABCD in due trapezi, ABXY e XCDY, di uguale superficie.

Gli agrimensori Sumerici erano in grado di dividere con questo metodo, in due parti uguali, un campo con la forma di ABCD, con un taglio effettuato lungo XY.

Nella Mesopotamia meridionale (la regione occupata inizialmente dai Sumeri) questo metodo non poteva essere sempre usato perché c'era un problema: buona parte dei campi avevano una forma molto allungata per poter attingere acqua dai canali di irrigazione. I terreni agricoli avevano forma di un *campo lungo* perché erano il frutto di una colonizzazione pianificata.

Il lato corto confinava con un canale; l'altro lato corto poteva confinare con un altro canale o con un territorio non coltivato (come un bacino, una palude, una zona semi arida).

La scelta di questa particolare disposizione dei campi era imposta dalla necessità di irrigarne la maggiore quantità possibile:



I due canali potevano essere costruiti a livelli leggermente differenti: ad esempio, quello di sinistra poteva essere leggermente più elevato di quello di destra e l'acqua scorreva nei campi da sinistra verso destra, per fluire nel canale a destra.

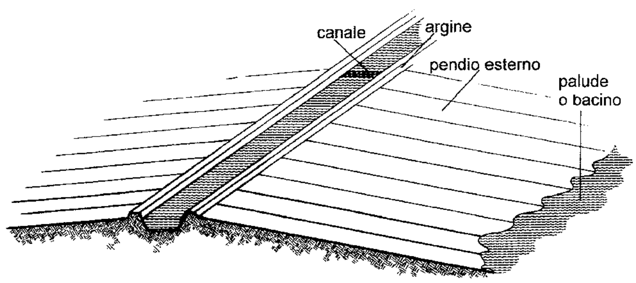
- APPROFONDIMENTO -

<u>L'irrigazione nella bassa Mesopotamia</u>

Mario Liverani ha così descritto i metodi di irrigazione impiegati nella bassa Mesopotamia ai tempi dei Sumeri (da "Uruk la prima città", pp. 20-21):

" ... del resto la coincidenza delle zone di alluvio irriguo con le sedi delle più antiche civiltà era un fatto già avvertito dagli studiosi del secolo scorso

Ma solo di recente si è messo in evidenza come il momento essenziale in tale processo sia stata la messa a punto del sistema dei campi lunghi, con irrigazione a solco (figura):



Nell'alluvio basso-mesopotamico sono storicamente attestati due sistemi di irrigazione, ben diversi tra loro: l'irrigazione a bacino e l'irrigazione a solco, rispettivamente adattabili al meglio alle due sotto-zone idrologiche e geo-morfologiche della «valle» e del «delta».

L'irrigazione a bacino, che comporta la completa sommersione del campo sotto un sottile strato d'acqua (poi rapidamente assorbito dal terreno per percolazione verticale), viene praticata in campi quadri recintati da un piccolo argine. Questi campi sono necessariamente di modeste dimensioni e perfettamente orizzontali (altrimenti la sommersione non sarebbe omogenea), e *possono essere sistemati anche individualmente, a livello familiare, e con modesta necessità di coordinamento coi campi contigui. Comportano dunque una gestione di ambito familiare e di villaggio, e una sistemazione idraulica del territorio per aggiustamenti parziali e progressivi, senza bisogno di particolare pianificazione e centralizzazione.*

Invece l'irrigazione a solco viene praticata in campi lunghi, sottili strisce parallele tra di loro, che si estendono in lunghezza per molte centinaia di metri, in leggera e regolare pendenza, e che hanno una «testata alta» adiacente al canale da cui ricavano l'acqua, e una «testata bassa» verso acquitrini o bacini di drenaggio. L'acqua inonda solo i solchi, e il terreno è imbevuto per percolazione orizzontale. Questi campi, data la loro dimensione e il loro rigido posizionamento rispetto al canale, possono essere convenientemente sistemati solo in maniera coordinata o pianificata, colonizzando ex novo un'area piuttosto estesa, con grossi blocchi di campi paralleli ordinatamente disposti a spina di pesce ai lati del canale. La costante inclinazione del terreno si adatta alla morfologia del delta, con canali sopraelevati (per accumulo di sedimenti) entro i loro argini, e bacini o paludi laterali di sfogo dell'acqua eccedente. I campi lunghi dunque richiedono per l'impianto e la gestione la presenza di un'agenzia centrale di coordinamento. Una volta istallati, consentono una produttività su più larga scala, in connessione con le altre innovazioni che vedremo subito.

I campi lunghi - che la documentazione successiva mostra prevalenti nel sud basso-mesopotamico - sono già ben presenti nella prima documentazione amministrativa «arcaica» di Uruk III …"

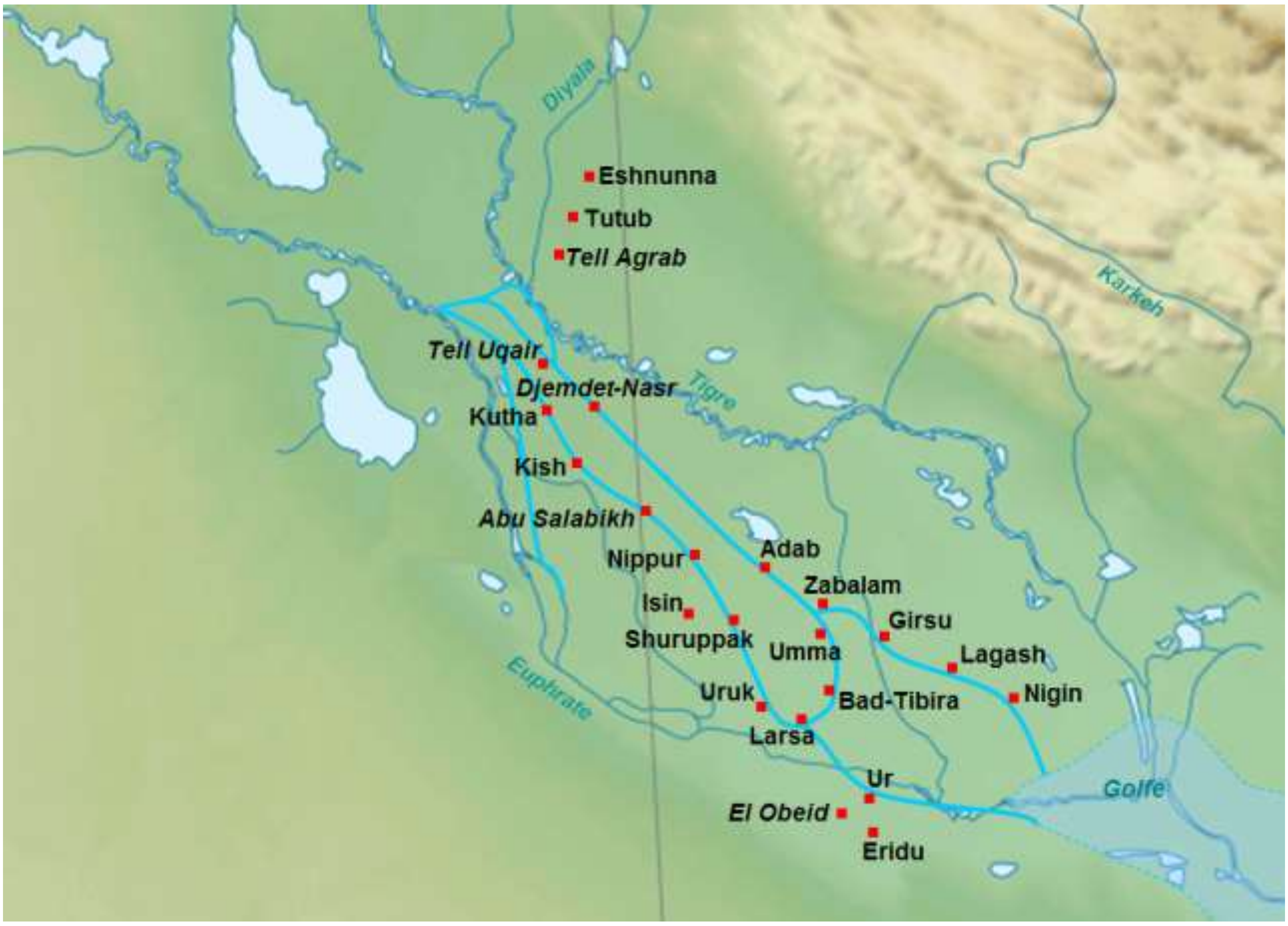
- -

<u>Le dimensioni dei campi</u>

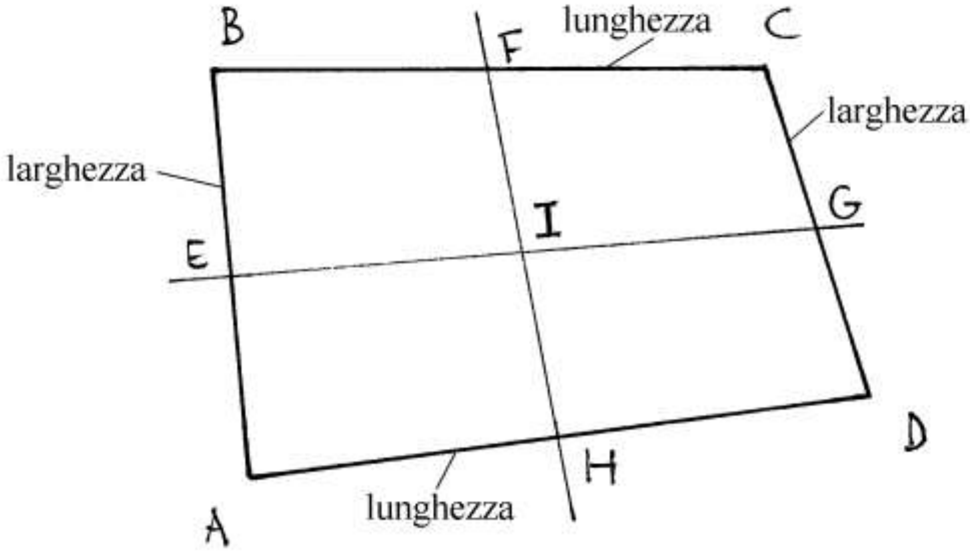
In vari musei sparsi fra diversi Stati sono conservate grosso modo 500 000 tavolette e di esse 500 sono di contenuto matematico o geometrico.

L'assiriologo italiano Mario Liverani in un fondamentale articolo ("The shape of neo-sumerian fields", "*Bulletin on Sumerian Agriculture*", V, 1990, pp. 147-86) ha descritto un insieme di tavolette risalenti all'epoca del re Shulgi (o Sulgi) di Ur con dati catastali riferiti a proprietà terriere nei pressi della città sumera di Lagash. Shulgi regnò nel periodo compreso fra il 2120 e il 2000 a.C.

La mappa che segue (tratta da Wikipedia) mostra le posizioni dei centri urbani sumerici:



<u>Il calcolo approssimato dell'area di un quadrilatero</u>
ABCD è un quadrilatero generico. I suoi lati opposti non sono paralleli.



E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati.

Gli agrimensori Sumerici usavano una formula pratica per calcolare l'area di un quadrilatero moltiplicando la *lunghezza media* (EG) per la *larghezza media* (FH):

Area = EG * FH

Invece, alcuni papiri egizi proponevano una soluzione leggermente diversa per lo stesso calcolo. L'area veniva ricavata con il prodotto delle *semisomme* dei due lati opposti:

Area = (AD * BC)/2 * (AB + DC)/2

Queste due espressioni sono varianti di quella che è conosciuta come la *formula degli agrimensori*, un metodo approssimato per calcolare l'area di un quadrilatero, metodo usato per millenni.

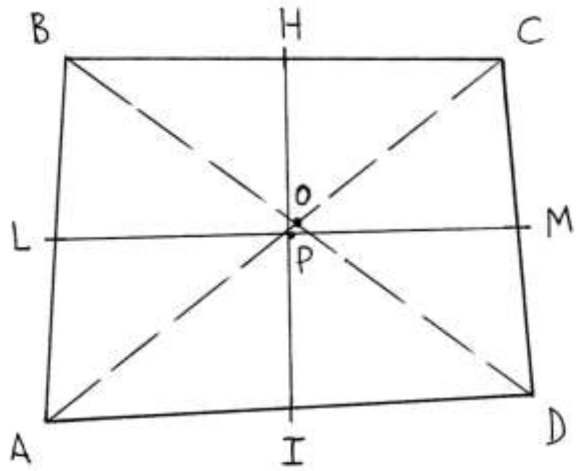
- APPROFONDIMENTO -

<u>Uso della formula degli agrimensori</u>

La figura che segue descrive la pianta, assai semplificata, di una stanza, di un'aula scolastica o di un piccolo terreno.

Essa ha la forma di un *trapezoide* perché non vi sono lati opposti paralleli.

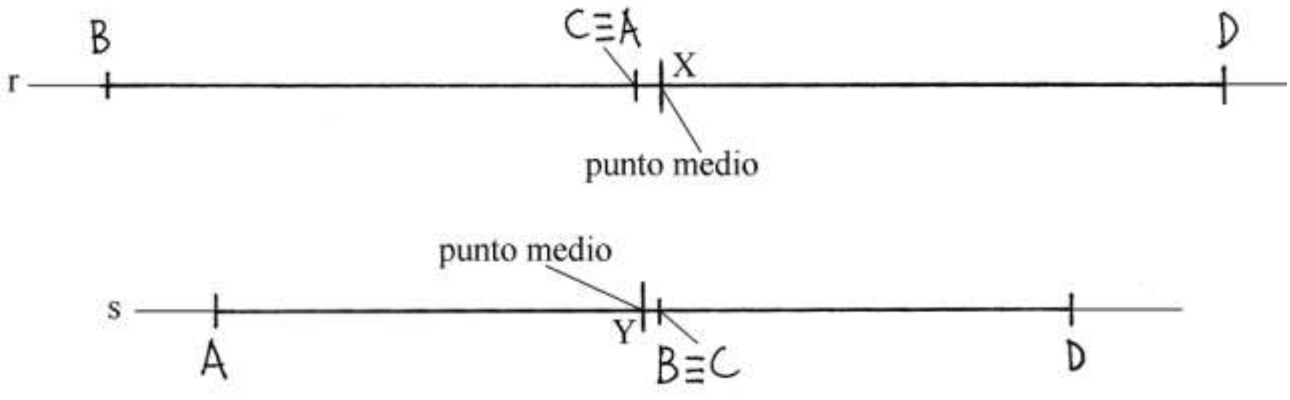
Deve essere misurata la sua superficie:



Le diagonali del quadrilatero si intersecano nel punto O.

H, I, L e M sono i punti medi dei quattro lati. I segmenti che collegano i punti medi dei lati opposti (HI e LM) si incrociano nel punto P, *non* coincidente con il punto O.

Un tecnico misura le lunghezze dei quattro lati e le due diagonali, AC e BD: se questi due ultimi segmenti hanno lunghezze non troppo diverse per gli usi pratici, può determinare con buona approssimazione la superficie del trapezoide calcolando la lunghezza media delle coppie di lati opposti: [BC e AD] e [AB e CD].



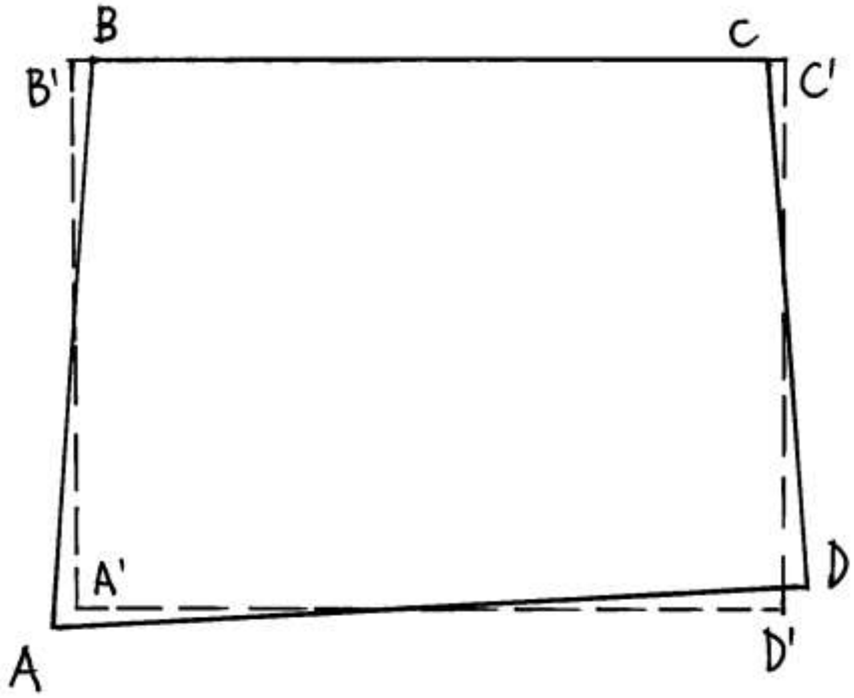
La precedente costruzione grafica è ottenuta riportando le lunghezze dei quattro lati su due distinte *rette*: r e s e dividendo a metà.

La costruzione determina le lunghezze medie:

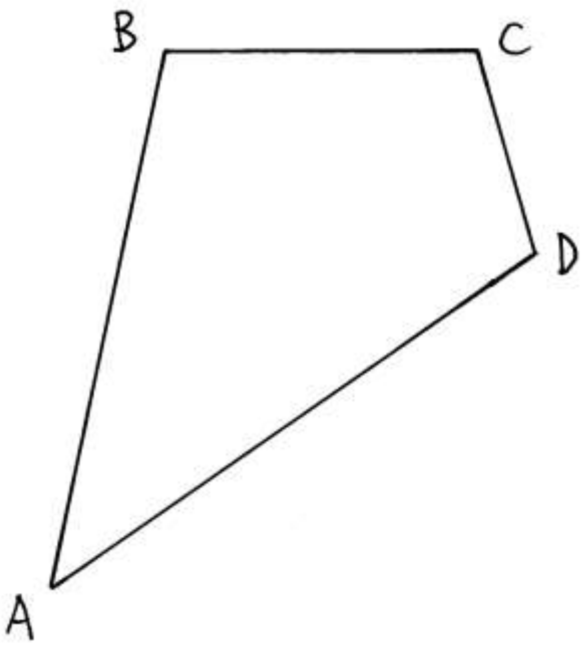
$$BC + AD = BX + XD$$
$$BX = XD = (BC + AD)/2$$
$$AB + CD = AY + YD$$
$$AY = YD = (AB + CD)/2$$

L'impiego della *formula degli agrimensori* fornisce un risultato accettabile quando le dimensioni dei lati opposti di un quadrilatero hanno valori vicini.

Il trapezoide ABCD della figura precedente può essere facilmente trasformato nel rettangolo A'B'C'D' che, con approssimazione accettabile per usi tecnici, ha la sua stessa superficie:



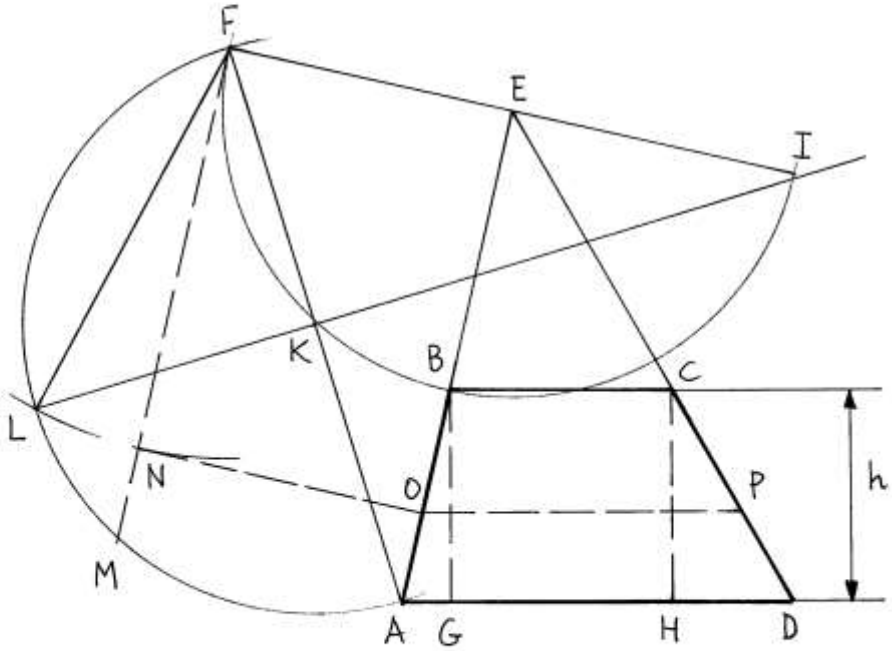
Se la formula è applicata a un quadrilatero di forma molto deformata rispetto a quella di in rettangolo, essa fornisce risultati aberranti, come nel caso della figura che segue:



- -

Una costruzione geometrica moderna

ABCD è un trapezio scaleno con i lati orizzontali AD e BC paralleli:



L'area del trapezio viene attualmente calcolata con il prodotto della somma delle basi (AD e BC) per l'altezza h (BG = CH), diviso per 2:

S = (AD + BC)/2 * BG .

Presso i Babilonesi il trapezio ABCD poteva rappresentare un terreno da dividere in due parti uguali con una linea parallela ai lati AD e BC con un eventuale vincolo imposto dalla presenza di canali di irrigazione paralleli a un lato obliquo o a entrambi (AB e CD).

Una dettagliata costruzione geometrica è descritta di seguito.

Prolungare i lati obliqui AB e CD fino a farli incontrare in un punto, E, esterno al trapezio. Per il punto E condurre una linea perpendicolare al segmento AE.

Fare centro in E e, con raggio EB, tracciare una semicirconferenza da F a I.

Disegnare il segmento FA e determinare il suo punto medio, K: per questo punto condurre la perpendicolare a FA.

Fare centro nel punto K e, con raggio KA, tracciare una semicirconferenza da F a A; disegnare la corda FL.

Tracciare la corda FM, parallela al segmento EA.

Con centro in F e raggio FL condurre un arco di circonferenza da L fino a intersecare la corda FM in un nuovo punto, N.

Dal punto N disegnare un segmento parallelo a FI, fino a incontrare il lato AB in un punto, O.

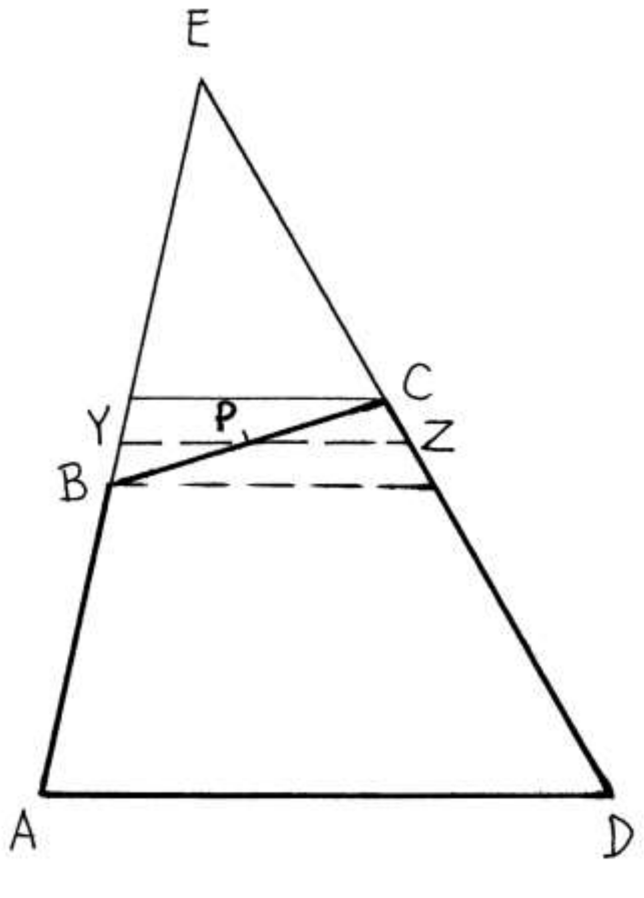
A partire dal punto O, tracciare un segmento parallelo al lato AD: il segmento OP taglia il trapezio ABCD in due aree di uguale superficie, AOPD e OBCP.

Nel caso di un trapezoide, senza lati paralleli, come è il caso della figura che segue, è possibile usare la precedente costruzione per ricavare una soluzione *approssimata* con un errore piccolo.

Il lato BC non è parallelo a quello AD. Determinare il punto medio del lato BC: è P.

Parallelamente al lato AD, tracciare un segmento passante per il punto P: è YZ.

Ripetere la precedente costruzione relativamente al nuovo trapezio scaleno AYZD:

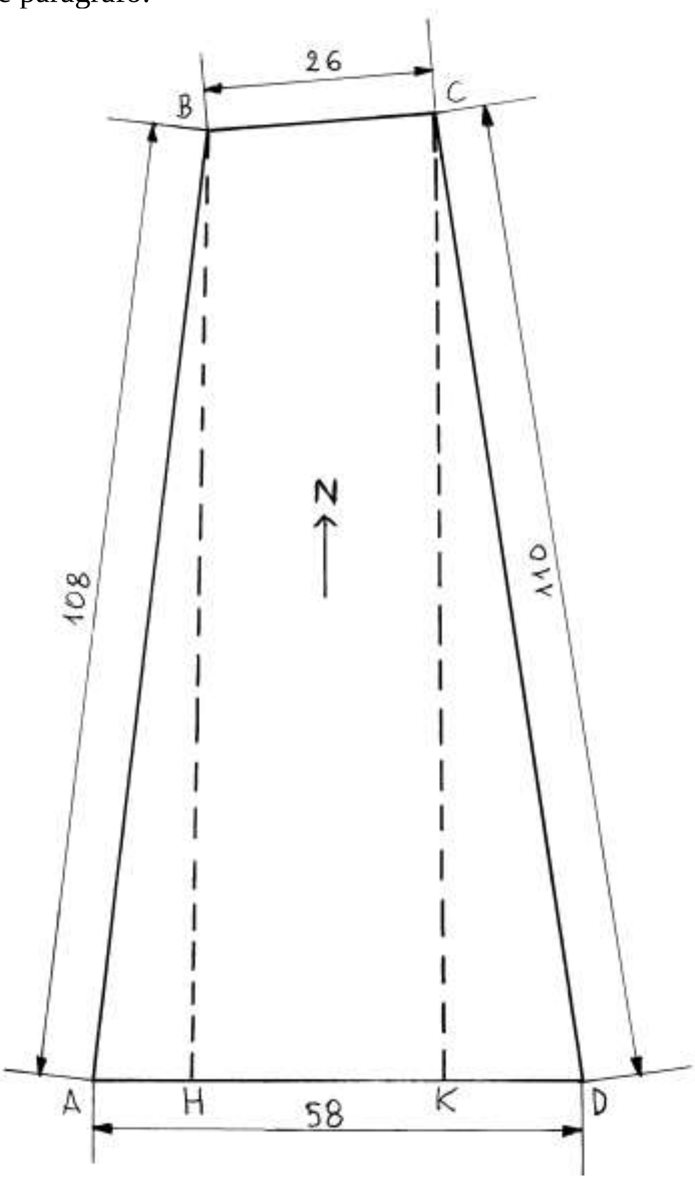


I Babilonesi

A loro volta, gli scribi Babilonesi scoprirono, intorno al 1800 a.C., la seguente soluzione *approssimata* per determinare la lunghezza del segmento OP parallelo alle basi AD e BC:

$$OP^2 = (AD^2 + BC^2)/2$$

Nella figura che segue sono tracciate le due altezze BH e CK relative al campo trapezoidale descritto nel precedente paragrafo:



\

La tavoletta che contiene la mappa del campo fornisce sia le dimensioni dei quattro lati sia l'area del campo:

S = 2 bûr + 9 iku e convertendo questi dati in *sar*

S = 2 bûr + 9 iku = 36 iku + 9 iku = 45 iku = 4500 sar (= 4500 nindan^2)

Con buona approssimazione, l'area del trapezoide ABCD può essere calcolata moltiplicando la media fra le lunghezze delle due basi (AD e BC)

$$(AD + BC)/2$$

per la media delle due altezze:

$$h = (BH + CK)/2$$

La media delle due basi vale

(AD + BC)/2 = (58 + 26)/2 = 84/2 = 42 nindan .

L'area è quindi uguale a

$$S = (AB + BC)/2 * h = 4500 \text{ sar} .$$

Sostituendo il valore medio delle due basi, 42 nindan, si ha:

$$42 * h = 4500 \text{ nindan}^2 = (4500 \text{ sar})$$

da cui deriva: $$h = 4500/42 \approx 107{,}14 \text{ nindan} .$$

Il valore calcolato di h è vicino alla media delle due altezze BH e CK, misurate o calcolate sullo schema.

Questi calcoli dimostrano che, probabilmente, gli scribi babilonesi erano di calcolare correttamente l'area di un trapezio o di un trapezoide, senza confondere la lunghezza dei lati obliqui (AB e CD) con quella delle due altezze (BH e CK).

I catasti dei terreni di Lagash

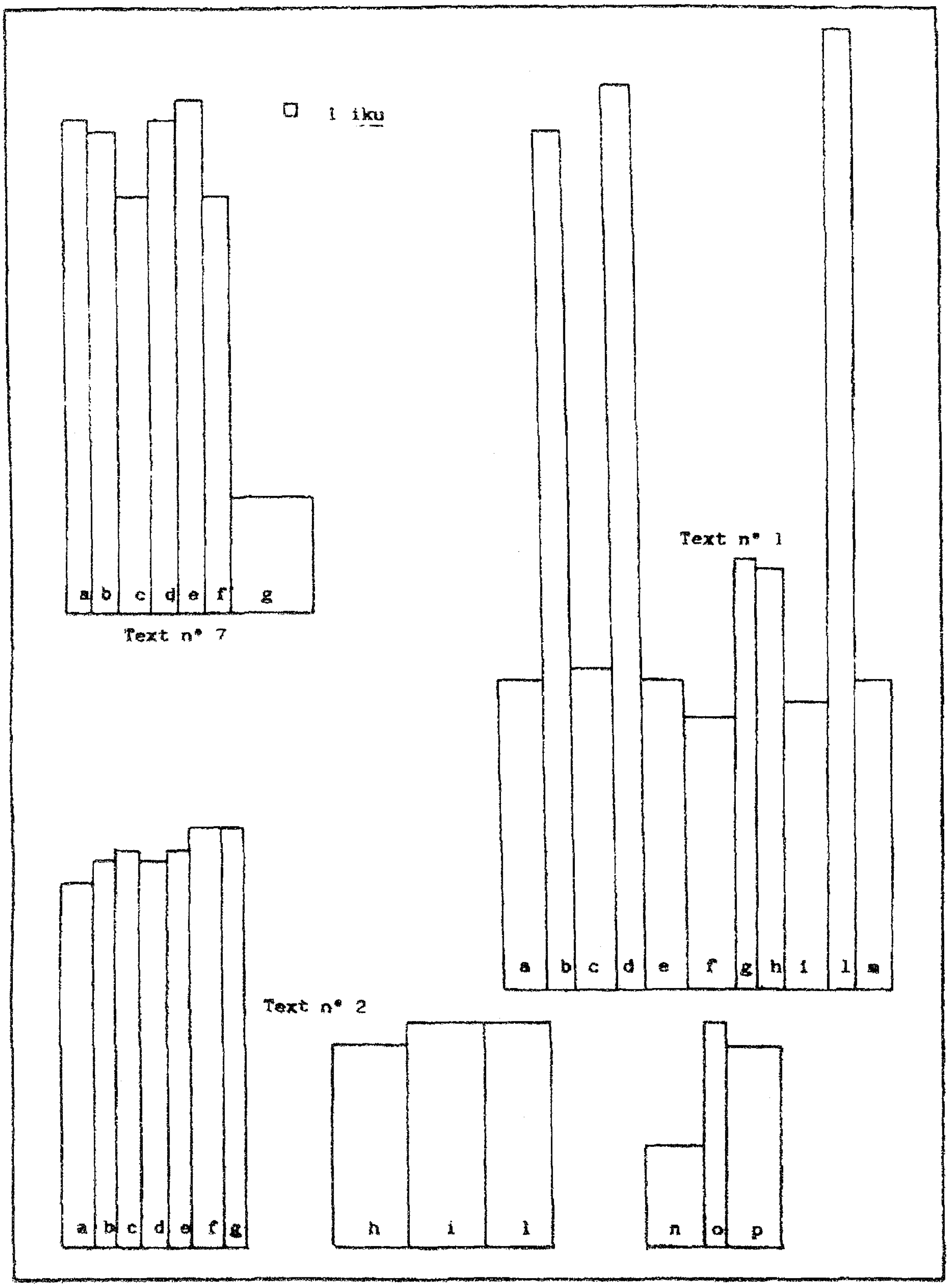
Al periodo dell'impero neo-sumerico di Ur risalgano almeno 30 catasti di superfici con le relative dimensioni: a uno di essi è dedicata una scheda a parte.

Nel citato articolo, Mario Liverani ha descritto un buon numero di tavolette sumeriche che descrivono una notevole varietà di campi situati nei pressi di Lagash.

La superficie media di quei campi era compresa fra i 100 e 125 *iku* (360 000 ÷ 450 000 m^2 e cioè 36 ÷ 45 ettari). La forma più comune era quella rettangolare: aumentando una delle due dimensioni, l'altra diminuiva in proporzione.

Liverani ha anche individuato la presenza di proprietà di dimensioni più piccole (50 e 75 *iku*) e più grandi (150, 200 e perfino 300 *iku*).

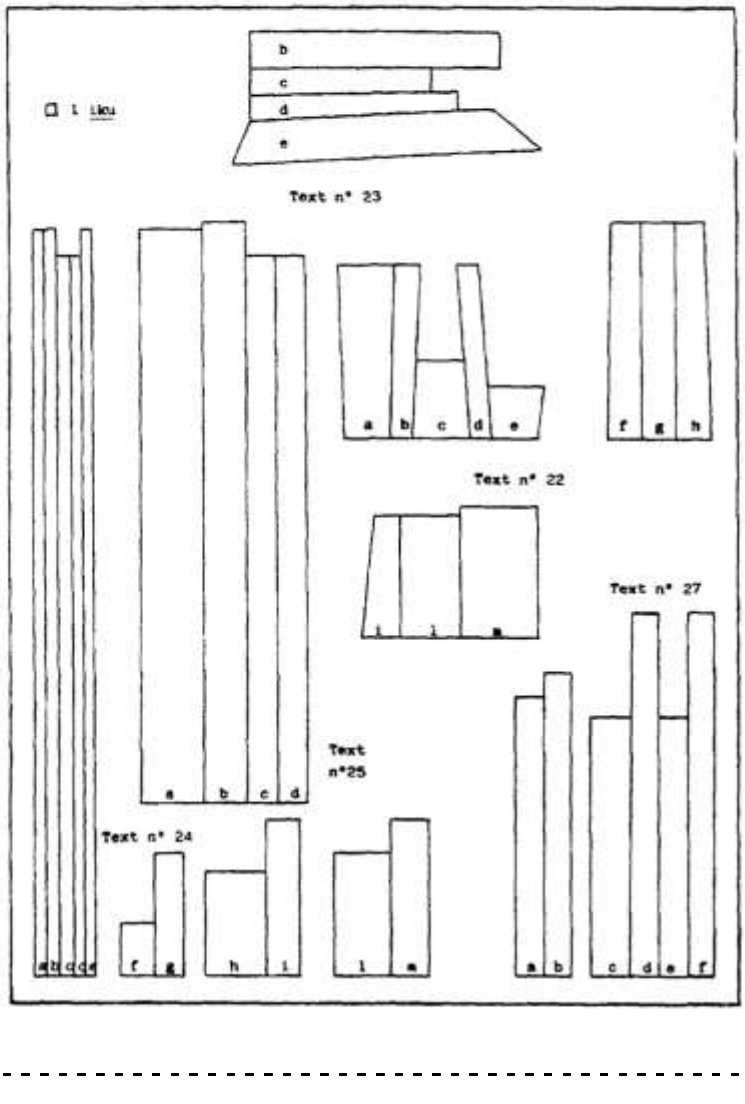
Nella figura che segue (dall'articolo di Liverani) sono riprodotte le forme in scala di alcuni campi: il piccolo quadrato disegnato in alto a sinistra ha la superficie di 1 *iku* (e cioè di 3600 m^2, cifra approssimata per eccesso, come spiegato nella precedente tabella delle unità di misura della superficie usate dai Sumeri):



I terreni descritti nel *Text n° 7*, nel blocco in alto a sinistra, avevano le seguenti dimensioni:

particella	dimensioni in *nindan*	area in *iku*	area in m^2 (approssimata per eccesso)	area in ettari (ha)
a	450 x 26,50	119,25	429 300	42,93
b	440 x 27,33	120,252	432 907,2	43,29
c	380 x 29,33	111,454	401 234,4	40,12
d	450 x 25,33	113,985	410 346	41,03
e	470 x 25	117,50	423 000	42,30
f	380 x 25,50	96,90	348 840	34,88
g	106 x 73	77,38	278 568	27,86

Le forme dei campi descritti nella precedente figura erano tutte rettangolari. In realtà in alcune tavolette erano incisi dati relativi a campi di forma più complessa, trapezoidali come nella figura che segue:



- -

Le tavolette degli agrimensori sumerici

La natura del materiale impiegato nella produzione delle tavolette cuneiformi, *argilla fresca*, non permetteva agli scribi sumerici e poi a quelli babilonesi la tracciatura di disegni geometrici molto precisi.

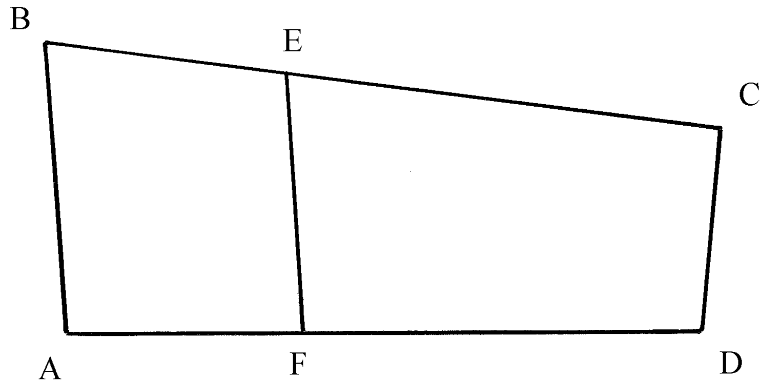
Le prime tavolette di argilla avevano forma quadrata e piccole dimensioni: 5 – 6 cm di lato. L'incisione dei segni cuneiformi era effettuata dagli scribi tenendo le tavolette nel palmo di una mano e impugnando con l'altra lo stilo.

In seguito le dimensioni delle tavolette crebbero fino a raggiungere e talvolta superare i 30 cm di lato.

Gli scribi dimostrarono una grande abilità nell'incisione delle tavolette: un *segno* cuneiforme era generalmente composto da più tratti e la sua altezza complessiva non superava i 4 mm.

I terreni e i campi non erano rappresentati in una scala corretta, ma deformati.

La mancanza di strumenti di disegno portò gli scribi a commettere anche gravi errori, come spiega la tavoletta YBC 4675, conservata all'Università di Yale (USA) e probabilmente realizzata nel Sud della Mesopotamia (a Larsa). Essa contiene un unico problema geometrico: data una superficie, di forma trapezoidale, dividerla in due parti di area uguale con una linea (la trasversale EF nella figura che segue) orientata come i due lati più corti. La figura riproduce la forma dello schema inciso sulla tavoletta (le lettere sono state aggiunte qui per comodità), ma essa non corrisponde alle dimensioni reali:



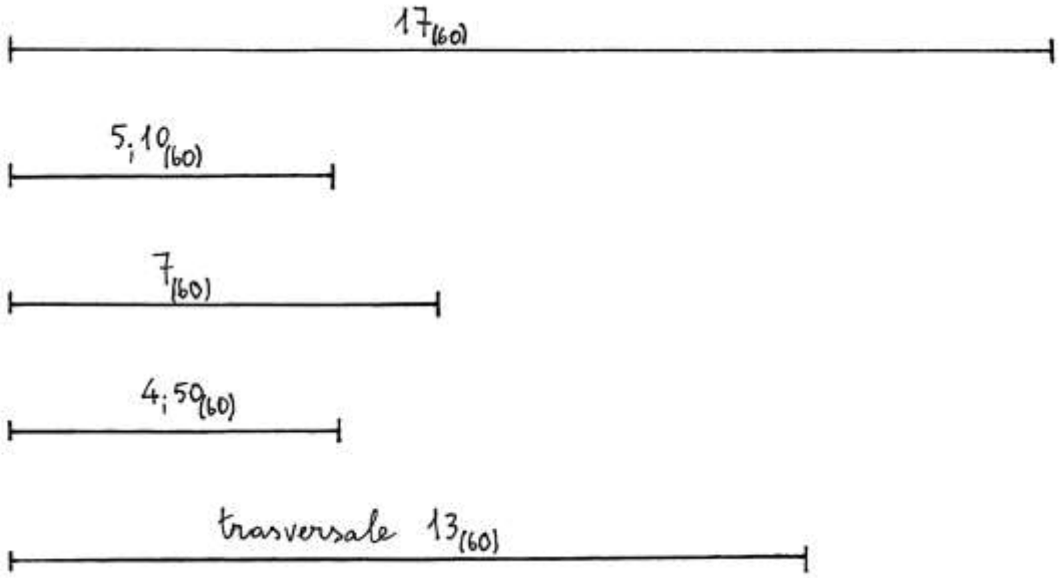
Sulla tavoletta sono riportate anche le lunghezze dei segmenti del trapezoide, in *nindan*:

* AB =17
* BC = 5; 10
* CD = 7
* AD = 4: 50
* EF = 13 .

Il segno di interpunzione *punto e virgola* (;) separa la parte intera da quella frazionaria dei numeri in base 60, secondo la convenzione introdotta dallo storico della matematica austro-americano Otto Eduard Neugebauer (1899 – 1990).

Con queste dimensioni la costruzione della figura è impossibile.

Il grafico che segue mette a confronto le lunghezze dei cinque segmenti:



Peraltro, la tavoletta utilizza la *formula degli agrimensori* per calcolare l'area:
Area = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 .
Infine, il testo calcola correttamente la lunghezza della trasversale EF:

$EF^2 = (AB^2 + CD^2)/2 = (17^2 + 7^2)/2 = (289 + 49)/2 = 169$ da cui

$EF = \sqrt{169} = 13$ *nindan*.

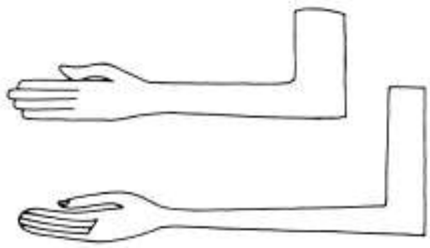
GLI EGIZI

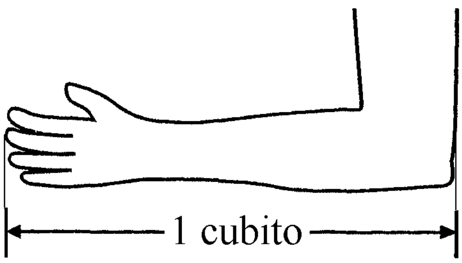
Le unità di misura egizie

La principale unità di misura lineare usata dagli Egizi nel campo architettonico era il *cubito reale*, lungo circa 52,5 cm.

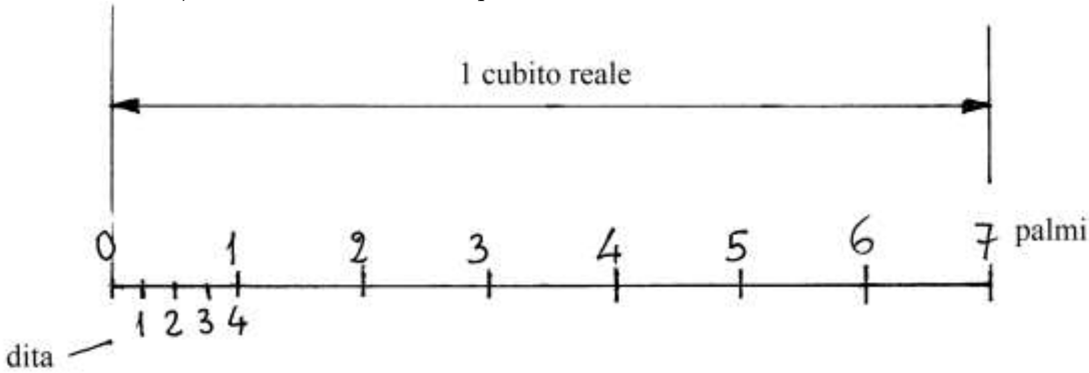
Il cubito era definito come la lunghezza dell'avambraccio dal gomito fino alla punta del dito medio.

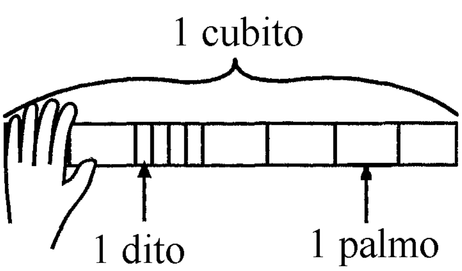
Il geroglifico che rappresentava il cubito era il disegno stilizzato di un avambraccio:





Il cubito reale era diviso in 7 palmi (lunghi circa 7,49 cm) e ciascun palmo era diviso in 4 dita (di circa 1,875 cm). Un cubito reale era quindi diviso in 28 dita:





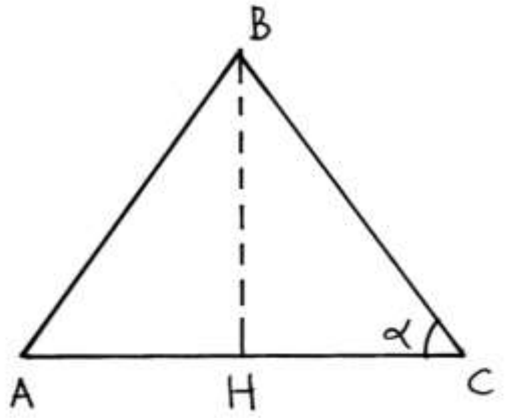
È da notare la presenza dei numeri 7 e 28 (= 7*4): forse essi sono stati usati per ragioni astronomiche (i cicli lunari).

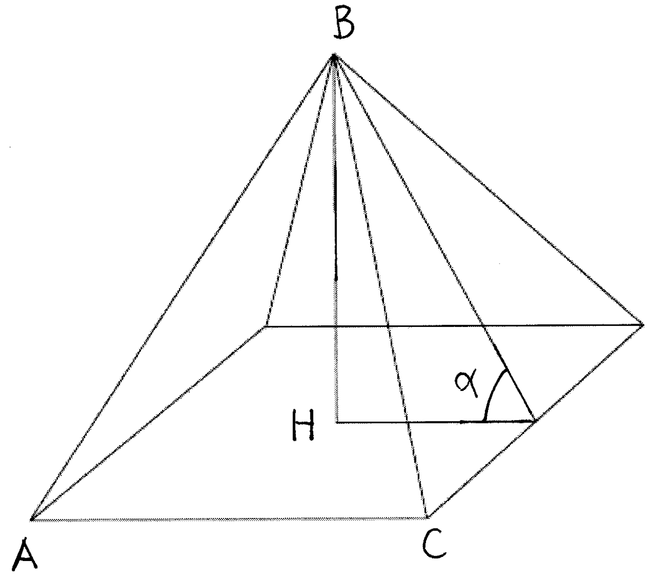
Per le misurazioni comuni, non architettoniche, era usato il *cubito piccolo*, formato da 6 palmi e 24 dita e corrispondente a una lunghezza di circa 44,7 cm.

La tabella che segue descrive sottomultipli e multipli del cubito reale:

unità	lunghezza in cubiti reali	lunghezze *approssimate* in cm, m o km
1 dito	1/28 cubito = ¼ palmo	1,875 cm
1 palmo	1/7 cubito = 4 dita	7,49 cm
1 cubito reale		52,4 ± 0,5 cm
1 asta (1 *khet*)	100 cubiti reali	52,5 m
1 fiume	20 000 cubiti reali	10,5 km

Il calcolo dell'inclinazione delle facce di una piramide era determinato per mezzo di un numero chiamato *seked* (o *seqed*), che corrisponde al moderno concetto di *cotangente*. Le figure che seguono mostrano la vista frontale e quella in assonometria di una piramide a base retta: l'angolo α è formato da una faccia laterale con la base mentre BH è l'altezza:





Il papiro Rhind

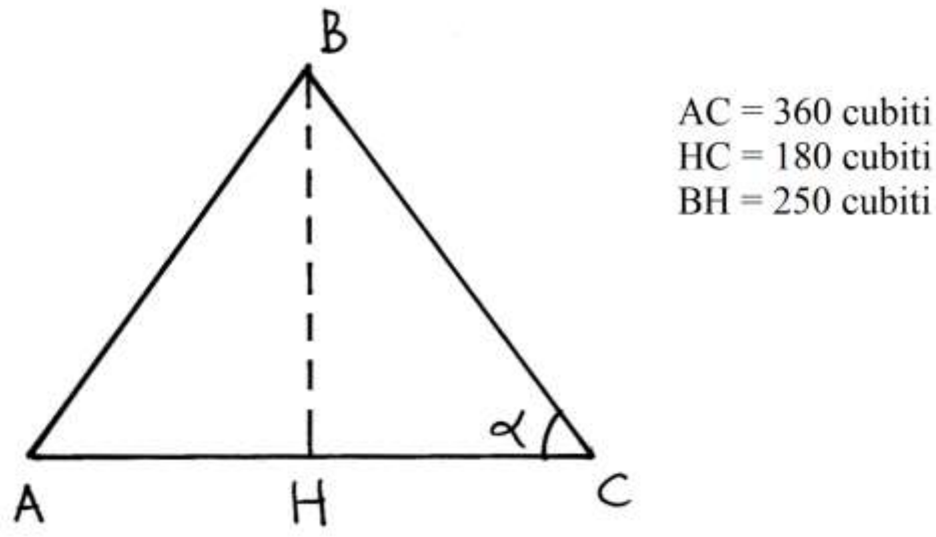
Il *papiro Rhind* reca questo nome perché fu acquistato dallo scozzese Henry Rhind in Egitto (a Luxor) nel 1858.

Esso contiene un testo di carattere matematico preparato dallo scriba egizio Ahmes verso il 1650 a.C. che nel suo testo affermò di averlo copiato da un papiro precedente, scomparso, che risalirebbe al periodo 2000 – 1800 a.C. È attualmente conservato a Londra.

Il papiro è lungo 3 m e alto 33 cm.

Il suo contenuto è vario: sono presenti tabelle di frazioni e 84 problemi aritmetici e geometrici con le soluzioni.

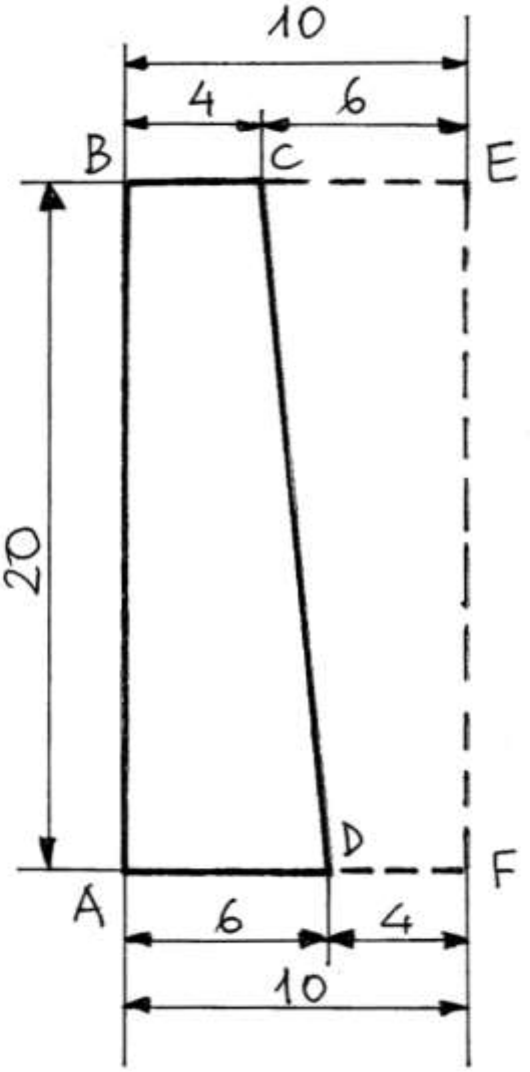
Fra i problemi di tipo geometrico vi è quello numero 56. Una piramide retta a base quadrata ha lato di base lungo 360 cubiti ed è alta 250 cubiti (nel papiro è sempre usato il *cubito reale*):



Il problema 52 del papiro Rhind

Lo scriba Ahmes propose il seguente problema (n. 52 del papiro Rhind): qual è l'area di un *triangolo troncato* con lato lungo 20 khet e con le basi lunghe 4 e 6 khet?

In realtà, il *triangolo troncato* è un trapezio rettangolo (ABCD nella figura che segue):



La *khet* è un’unità di misura della lunghezza che vale 100 cubiti.

Ahmes risolse il problema con una semplice costruzione: prolungò le basi AB e BC verso destra. Alla base più corta (BC) sommò un segmento (CE) lungo quanto la base più lunga (AD).

Alla base più lunga (AD) aggiunse un segmento (DF) lungo quanto la base più corta (BC).

I segmenti AF e BE avevano la stessa lunghezza, uguale a 10 khet.

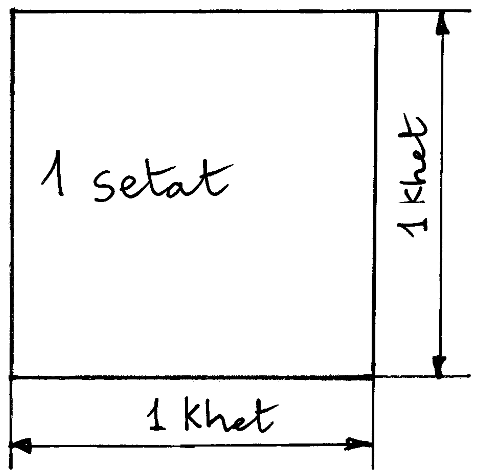
Il quadrilatero ABEF era un rettangolo, diviso dal segmento CD in due trapezi (ABCD e CEFD) di uguale superficie.

L’area di ciascun trapezio era la metà di quella del rettangolo ABEF.

L’area venne calcolata facendo la media fra le due basi del trapezio (AD e BC) e moltiplicando il risultato per l’altezza AB e cioè:

$$\text{superficie ABCD} = (AD + BC)/2 * AB = (6 + 4)/2 * 20 = 100 \text{ khet}^2 = 100 \text{ setat}$$

La *setat* era un’unità di misura della superficie e corrispondeva a quella di un quadrato con lato lungo 1 khet:



La soluzione del problema 52 proposta da Ahmes sembra essere quella della *formula degli agrimensori*.

- -

I TRATTATI DEI GROMATICI ROMANI

I trattati dei Gromatici furono scritti in buona parte fra il 75 e il 120 d.C.

Essi raccolgono le regole e le pratiche degli Agrimensori che risalivano almeno al 300 a.C., data intorno alla quale i Romani iniziarono a fondare le loro *colonie* in Italia.

Le date attribuite ai trattati sono state desunte dalle dediche agli Imperatori romani in carica o da loro citazioni.

Fra i principali autori sono i seguenti:

- Sesto Giulio Frontino, vissuto nel I secolo.
- Igino Gromatico, attivo a cavallo dell'anno 100.
- Agenio Urbico (*Agennius Urbicus*), operante fra l'81 e il 96.
- Balbo, scrisse fra il 102 e il 106.
- Marcus Iunius Nipsus, forse vissuto nel II secolo.
- Pseudo Igino, vissuto alla fine del II secolo.
- Siculo Flacco (*Siculus Flaccus*), attivo fra il 96 e il 291. Più probabilmente visse verso la fine del IV secolo.

Altri più piccoli trattati sono anonimi.

Tutti i manoscritti originali sono andati perduti. I loro testi furono raccolti in una collezione compilata nel corso del V secolo (o verso la fine di questo secolo) e conosciuta con l'espressione latina "*Corpus Agrimensorum Romanorum*" (o "*Gromatici Veteres*"). La collezione sarebbe stata redatta a Ravenna, in epoca bizantina. Da questo testo iniziale deriverebbero i manoscritti presenti in alcune biblioteche italiane, europee e americane.

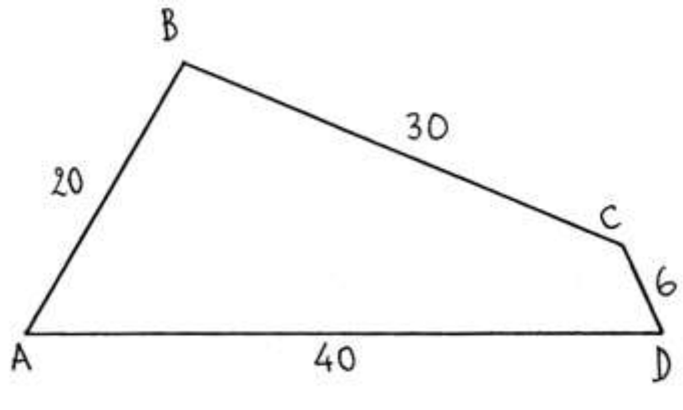
Quattro manoscritti sono illustrati con delle *miniature* per un insieme di circa 350 disegni di differenti tipologie: si va da semplici primitivi schizzi a più complesse mappe a colori di città o territori centuriati. I metodi grafici impiegati sono assonometrie e prospettive a volo d'uccello.

I trattati contenuti in quella raccolta furono ripetutamente copiati in Europa a partire dal VI secolo e fino almeno al XVII secolo. Subirono inoltre continui rimaneggiamenti.

Un campo irregolare

Il problema che segue è contenuto nel trattato anonimo che ha per titolo "*De iugeribus metiundis*" (e cioè "La misura degli iugeri").

Un campo ha la forma di un quadrilatero con i lati che hanno le dimensioni scritte sulla figura:



L'autore applica la *formula degli agrimensori* per calcolare l'area del quadrilatero moltiplicando le semisomme dei lati opposti:

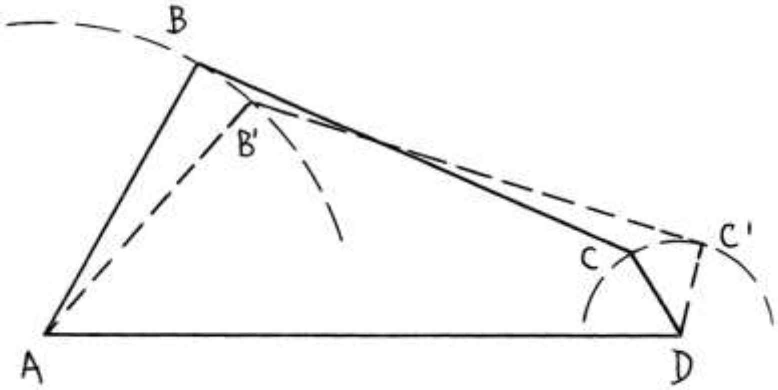
$$\text{Area ABCD} = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = (20 + 6)/2 * (40 + 30)/2 =$$
$$13 * 35 = 455 \text{ pertiche}^2 .$$

L’esposizione si conclude con la conversione dell’area da pertiche^2 a iugeri e tavole:

(455/288) = 1 iugero + 147 pertiche^2 = 1 iugero + (167/72) tavole =
1 iugero + 2 tavole + 23 pertiche^2 .

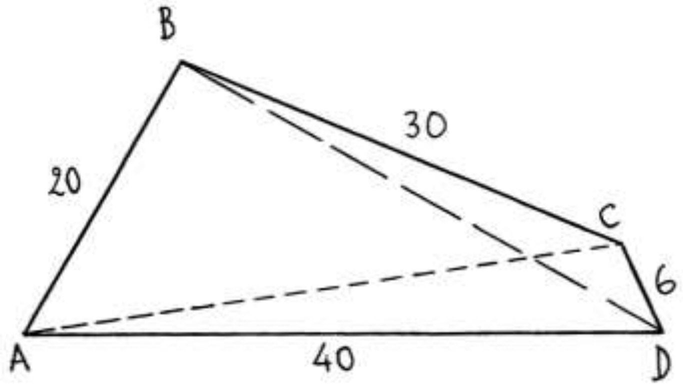
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il metodo usato è errato. Esistono infiniti quadrilateri che hanno le stesse dimensioni di quello mostrato nella precedente figura, come spiega il grafico che segue:



Il quadrilatero AB’C’D ha lati lunghi quanto i corrispondenti lati di ABCD.

Per individuare con certezza il quadrilatero occorre conoscere la lunghezza di almeno una delle due diagonali, AC o DB:



Una diagonale divide il quadrilatero in due triangoli, figure delle quali è facile calcolare le aree soltanto conoscendo le lunghezze di tutti i lati.

LA GEOMETRIA DI BOEZIO

Severino Boezio (480 – 524) è stato un politico, filosofo e matematico romano.

La sua opera geometrica mostra una chiara influenza dei trattati dei Gromatici latini.

Dato che le cifre arabe gli erano ignote perché giunte in Europa alcuni secoli più tardi, Boezio impiegò le cifre romane per indicare lunghezze e aree.

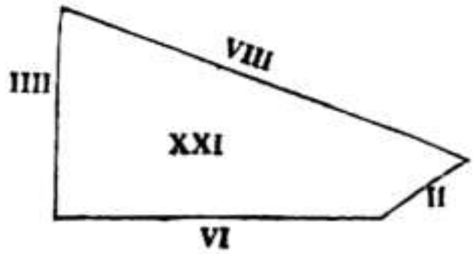
Le lunghezze furono scritte vicino ai lati e l'area all'interno.

Le unità di misura usate da Boezio sono il *piede* per le lunghezze e il *piede quadrato* (piede^2) per le superfici.

È ragionevole pensare che Boezio usasse il *piede romano* lungo l'equivalente di 29,57 cm.

Quadrilatero

Il quadrilatero presentato da Boezio ha forma irregolare:



Egli ne calcolò l'area in 21 piedi^2.

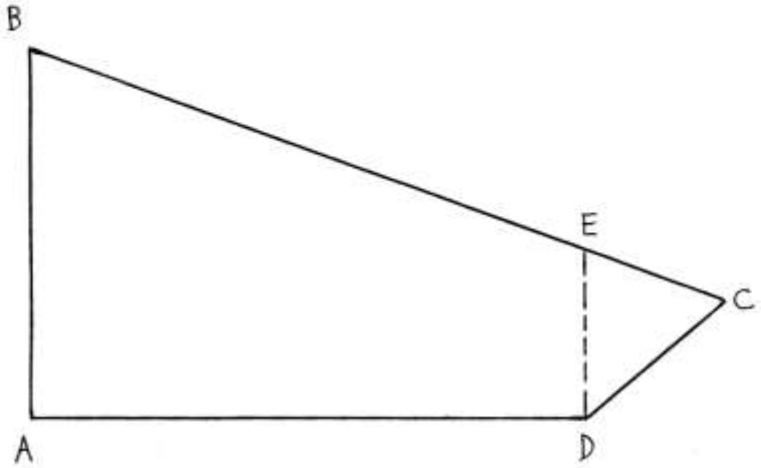
È evidente che Boezio applicò la *formula degli agrimensori*:

area = prodotti delle semisomme dei lati opposti.

In numeri, l'area è data da

Area = (4 + 2)/2 * (6 + 8)/2 = 3 * 7 = 21 piedi^2 .

La formula fornisce un risultato errato *per eccesso* come è facilmente dimostrabile scomponendo il quadrilatero ABCD nel trapezio ABED e nel triangolo DEC.



Viene dato per scontato che l'angolo BAD sia retto e che le basi AB e DE siano parallele e che ne consegua essere il poligono ABED un trapezio scaleno.

Rispettando le proporzioni con la figura di Boezio e calcolando le due aree e sommandole risulta una superficie reale di 18,855 piedi^2.

L'errore non è proprio trascurabile:

errore = (21 – 18,855)/18,855 ≈ 11,38% .

LA GEOMETRIA DI ALCUINO DA YORK

Alcuino di York (735 – 804) è stato un teologo britannico. Fu chiamato alla corte di Carlo Magno a Aquisgrana per organizzarvi la “*Scuola Palatina*”.

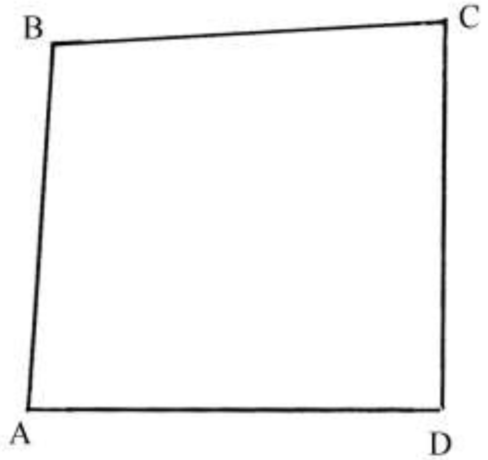
Fra i testi che gli sono attribuiti vi è un manoscritto di natura matematica (e geometrica) scritto in latino (“*Propositiones ad acuendos juvenes*”), tradotto in italiano da Raffaella Franci, con il titolo “*Giochi matematici alla corte di Carlomagno*”, citato in bibliografia.

Alcuni problemi sono descritti di seguito.

Problema n. 23

Un campo quadrangolare ha le seguenti dimensioni:

- AB = 30 pertiche;
- BC = 32 pertiche;
- CD = 32 pertiche;
- AD = 34 pertiche.



Esistono moltissimi quadrilateri con le stesse dimensioni. Questo poligono è una *struttura deformabile*: per renderla stabile è necessaria la presenza di una diagonale (AC o BD).

I numerosissimi differenti quadrilateri con lo spesso perimetro (p = 30 + 32 + 32 + 34 = 128 pertiche) hanno superfici differenti.

L’esempio presentato da Alcuino *sembra* avere l’angolo ADC *retto*.

Tracciando la diagonale AC si ottiene la scomposizione del quadrilatero in due triangoli si ha:

- il triangolo rettangolo ADC (che ha area calcolata in 544 pertiche^2);
- il triangolo scaleno ABC. Disegnando l’altezza BH, relativa al lato AC, si calcola facilmente l’area di questo triangolo: 470 pertiche^2.
- L’area totale del quadrilatero ABCD è : $A_{ABCD} = A_{ADC} + A_{ABC} =$
  $= 544 + 470 = 1014$ pertiche^2.

Alcuino propone di usare la *formula degli agrimensori*:

$$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * (AB + CD)/2 = (34 + 32)/2 * (30 + 32)/2 =$$
$$= 66/2 * 62/2 = 33 * 31 = 1023 \text{ pertiche}^2 .$$

La differenza fra la misura corretta (1014 pertiche^2) e il valore calcolato da Alcuino (1023 pertiche^2) è minimo, perché il quadrilatero ABCD si avvicina a un quadrato.

Il risultato ottenuto da Alcuino è errato per eccesso.

IL TRATTATO DI JACOPO DA FIRENZE

Premessa

Il *Tractatus Algorismi* fu scritto a Montpellier, nella Francia meridionale, dall’abacista Jacopo da Firenze nel 1307.

Ne sopravvivono tre copie manoscritte, in fiorentino, che sono conservate nel Codice 2236 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, nel Codice MS90 della Trivulziana di Milano e nel manoscritto Vaticano Latino 4826 a Roma.

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup ha pubblicato un approfondito studio sull’argomento basandosi sul manoscritto Vaticano, ritenuto il più completo dei tre, e poi ha collazionato i testi degli altri due manoscritti.

Il trattato è dedicato prevalentemente a problemi di natura aritmetica e alla descrizione delle caratteristiche delle monete correnti nei mercati dell’Europa e del Mediterraneo.

Inoltre, secondo Jens Høyrup il trattato è una delle prime esposizioni dell’algebra in italiano e, forse, sarebbe la prima in assoluto. A giudizio dello storico danese, da quest’opera deriverebbero altri successivi testi algebrici in italiano risalenti alla prima metà del Trecento.

Infine, alcuni problemi sono di natura geometrica nelle quali le dimensioni sono sempre espresse in braccia (lineari) e in braccia quadrate.

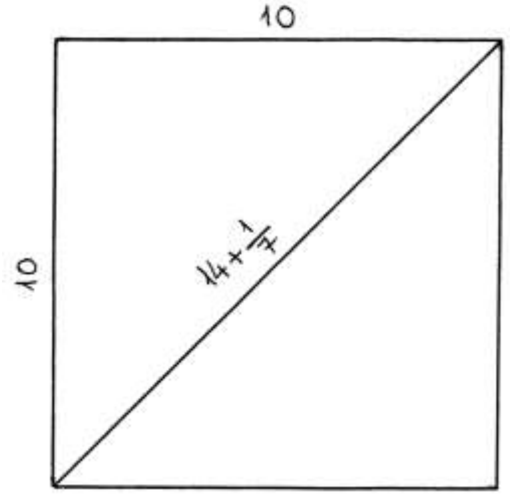
Nel sommario in italiano di un suo importante articolo Jens Høyrup [in bibliografia, 24] così riassume le sue opinioni su questo trattato:

> Nel 1307, un certo Jacopo da Firenze scrisse a Montpellier un *Tractatus algorismi* che contiene la prima presentazione sopravvissuta dell’algebra in un volgare europeo – probabilmente la prima presentazione in volgare italiano in assoluto. L’analisi del testo dimostra che l’algebra di Jacopo non è basata su nessuno dagli scritti algebrici latini, e neanche su un trattato arabo pubblicato; è dunque una testimonianza di un livello finora inesplorato dell’algebra araba. D’altra parte, Jacopo non utilizza un solo arabismo, e deve dunque aver preso la sua ispirazione da un ambiente di lingua romanza. Un’ispezione attenta di altri scritti algebrici italiani risalenti alla prima metà del Trecento svela che tutti sono legati a Jacopo o a questo ambiente (possibilmente catalano) e che nessuno ha legami con il *Liber abbaci* di Leonardo Fibonacci.

Le tesi di Jens Høyrup riguardo alle fonti di Jacopo da Firenze sono al centro di ampie discussioni fra gli storici della matematica.

Terreno quadrato

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 10 braccia.



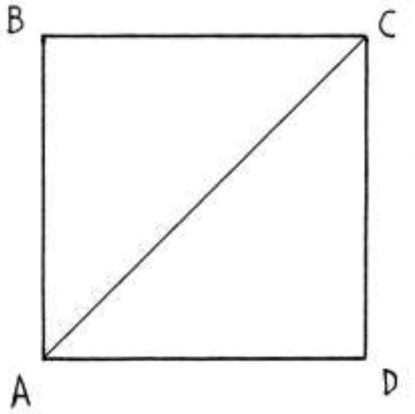
Il problema domanda la lunghezza di una diagonale.

La procedura utilizzata è:

* moltiplicare la lunghezza di un lato (una *faccia*) per quella del lato opposto: 10 * 10 = 100 ;

* moltiplicare le lunghezze degli altri due lati: $10 * 10 = 100$;
* sommare i due prodotti: $100 + 100 = 200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{200} \approx 14 + 1/7$ braccia, lunghezza approssimata di una diagonale.

[Sembra che nella soluzione di questo problema, Jacopo sia stato influenzato dall'antichissima ed errata *formula degli agrimensori* usata per il calcolo della superficie di un quadrilatero, che era ottenuta dal prodotto delle semisomme delle coppie di lati opposti:



$$\text{Area } ABCD = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = 2 * \text{lato}/2 * 2 * \text{lato}/2 = \text{lato}^2 .$$

Il quadrato della diagonale è calcolato da Jacopo con la formula:
$AC^2 = AB * CD + AD * BC$, ciò che può sostenere l'ipotesi dell'influenza esercitata dalla *formula degli agrimensori*.]

<u>LA GEOMETRIA PIANA DI PAOLO GHERARDI</u>

Gino Arrighi ha studiato due trattati matematici attribuiti all'abacista fiorentino Paolo Gherardi (o Gerardi).

Essi sono intitolati "*Libro di ragioni*" e "*Liber habaci*" e sono scritti in fiorentino. Sono contenuti nei Codici Magliabechiani, Classe XI, nn. 87 e 88 (secolo XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze.

Paolo Gherardi era un mercante e un maestro di abaco fiorentino, vissuto fra Firenze e Montpellier, nel Sud della Francia.

Nel suo articolo citato in bibliografia, Maryvonne Spiesser descrive la importante presenza toscana nelle località del Meridione francese:

"*…È certo che la vicina Italia ha svolto un ruolo nello sviluppo dei trattati commerciali francesi, almeno su quelli che sono originari del Midi. Sono noti due maestri fiorentini, venuti a insegnare la loro arte a Montpellier (Jacopo da Firenze – intorno al 1307 – e Paolo Gherardi – intorno al 1327). La sede del Papato a Avignone nel corso di buona parte del XIV secolo aveva favorito la circolazione degli uomini e incrementato le comunicazioni fra l'Italia e la Francia. A questa epoca, circa il 25% della popolazione di Avignone e dal 10 al 15% di quella di Montpellier era di origine toscana. Un'altra testimonianza dei legami con l'Italia nell'ambito matematico è data da un'aritmetica anonima, l'*Arte dell'Abbaco*, conservata nella Biblioteca Ricardiana di Firenze (manoscritto 2511), che è stata scritta nella regione di Avignone intorno al 1330…*".

Questa nutrita presenza di Toscani spiega la presenza di più maestri d'abaco a Montpellier, a Avignone e in altre località occitane o provenzali.

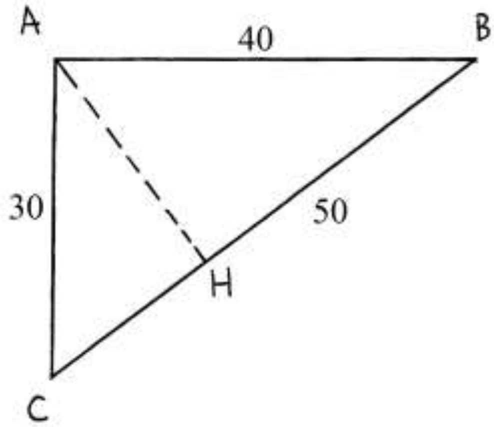
Il "*Libro di ragioni*" di Paolo Gherardi è stato composto a Montpellier nel 1328 e impiega le cifre indo-arabiche.

Secondo Gino Arrighi, il "*Liber habaci*" sarebbe anteriore al "*Libro di ragioni*": esso usa i *numeri romani*.

Entrambi i trattati contengono problemi aritmetici, alcuni algebrici, baratti di monete e alcuni problemi di geometria piana e di geometria solida.

<u>Triangolo pitagorico</u>

Un terreno ha forma triangolare con lati lunghi 50, 40 e 30 *canne*.



È chiaro che si tratta di un triangolo rettangolo pitagorico, con i lati lunghi 10 volte la più semplce terna pitagorica, quella 3-4-5.

Il problema chiede di calcolare le lunghezze dei segmenti [CH e HB] che rappresentano le proiezioni dei due lati più corti [i cateti AC e AB] sul terzo lato [l'ipotenusa CB] e la lunghezza dell'altezza [AH].

La procedura impiegata è la seguente:

* sommare le lunghezze dei due lati più corti: $30 + 40 = 70$;

* dividere per la lunghezza del lato maggiore: 70 : 50 = 1 + 2/5 ;
* sottrarre la lunghezza del lato minore da quella del lato intermedio: 40 – 30 = 10 ;
* moltiplicare per (1 + 2/5): 10 * (1 + 2/5) = 14 ;
* sommare alla lunghezza del lato maggiore: 14 + 50 = 64 ;
* dividere per 2: 64 : 2 = 32 canne, lunghezza della proiezione di AB su CB e cioè di HB;
* sottrarre da 50: 50 – 32 = 18 canne, lunghezza della proiezione CH.

Per calcolare l'altezza [AH] che Gherardi chiama "*lista di traverso*", l'Autore usa i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato orizzontale [AB] per se stessa: 40 * 40 = 1600 ;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza di [HB]: 32 * 32 = 1024 ;
* sottrarre da 1600: 1600 – 1024 = 576 ;
* estrarre la radice quadrata: √576 = 24 canne, altezza [AH] [l'Autore ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB];
* moltiplicare per se stessa la lunghezza del lato più corto [il cateto AC]: 30 * 30 = 900 ;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza della proiezione [di AC che è CH]: 18 * 18 = 324 ;
* sottrarre da 900: 900 – 324 = 576 ;
* estrarre la radice quadrata: √576 = 24 canne, altezza [AH] rispetto all'ipotenusa.

Per calcolare l'area, Gherardi usa una procedura un po' contorta:

* sommare le lunghezze del cateto più lungo [AB] e della sua proiezione [HB]: 40 + 32 = 72 ;
* dividere per 2 la "*lista*" [cioè l'altezza AH]: 24 : 2 = 12 ;
* moltiplicare per 2 la proiezione [CH]: 18 * 2 = 36 ;
* moltiplicare per 12: 36 * 12 = 432 canne^2 [area del triangolo rettangolo AHB]:
* sommare le lunghezze del cateto più corto [AC] e della sua proiezione [CH] sull'ipotenusa [CB]: 30 + 18 = 48 ;
* dividere per 2: 48 : 2 = 24 ;
* dividere per 2 l'altezza: 24 : 2 = 12 ;
* moltiplicare per 24: 24 * 12 = 288 canne^2 [area del triangolo ACH];
* sommare le due aree: 432 + 288 = 720 canne^2 [area del triangolo rettangolo ABC].

Nota: il metodo impiegato e i risultati ottenuti da Gherardi riguardo alle aree sono *errati*.
Usando le lettere, descriviamo la procedura messa in atto da Gherardi:

Area AHB = (AB + HB)/2 * AH/2, invece della formula corretta
Area AHB = HB * AH /2.

Area AHC = (AC + CH)/2 * AH/2 invece di
Area AHC = CH * AH /2.

I risultati corretti sono:

Area AHB = (32 * 24)/2 = 384 canne^2 ;
Area AHC = (18 * 24)/2 = 216 canne^2 .

L'area dell'intero triangolo ABC è:

Area ABC = Area AHB + Area AHC = 384 + 216 = 600 canne^2.

La riprova della correttezza di questo risultato è dalle due formule seguenti:

Area ABC = AC * AB/2 = 30 * 40/2 = 600 canne^2 e

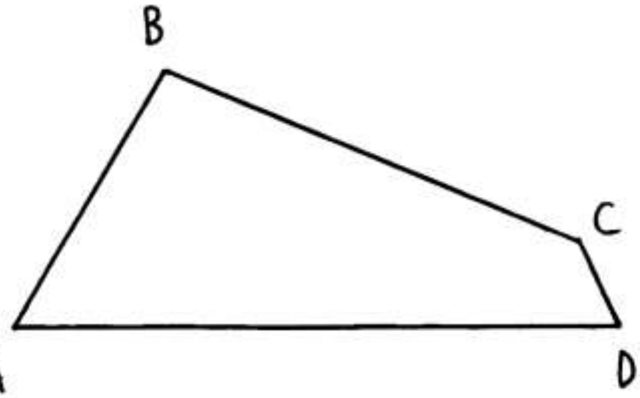
Area ABC = CB * AH/2 = 50 * 24 /2 = 600 canne^2 .

- APPROFONDIMENTO -

L'errore metodologico commesso da Paolo Gherardi nella soluzione di questo problema è dovuto all'applicazione dell'antica *formula degli agrimensori*, tramandata anche dai testi dei Gromatici romani?

L'ipotesi sembra fondata.

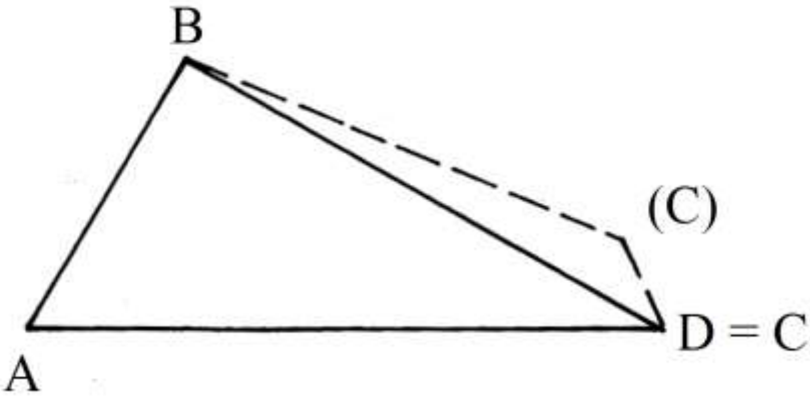
La figura che segue presenta un quadrilatero, ABCD:



La *formula degli agrimensori* calcola la sua area con il prodotto delle *semisomme* delle lunghezze dei lati opposti:

Area ABCD = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2.

Se la lunghezza del lato CD si riduce a *zero*, il quadrilatero si trasforma in un triangolo scaleno ABD: il lato BC viene modificato e i vertici D e C coincidono:



La formula diviene:

Area ABCD = (AB + 0)/2 * (AD + BC)/2 = AB/2 * (AD + BC) .

Le formule usate da Gherardi per calcolare le aree dei triangoli rettangoli AHB e AHC

Area AHB = (AB + HB)/2 * AH/2 e

Area AHC = (AC + CH)/2 * AH/2

sembrano confermare l'ipotesi dell'impiego della *formula degli agrimensori*, con le conseguenze viste.

- -

LA GEOMETRIA DI BOYSSET

Bertrand (anche Bertran) Boysset (in *provenzale*) è stato un agrimensore vissuto a Arles, in Provenza, fra circa il 1355 e il 1416.

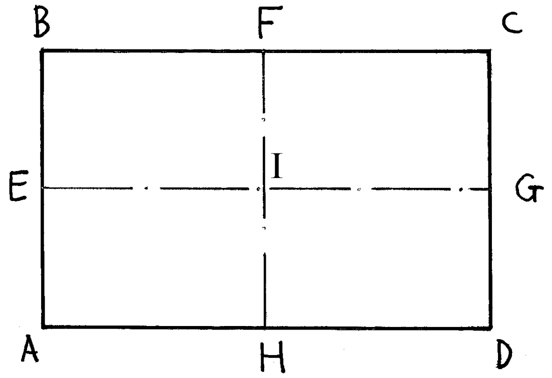
Ha lasciati alcuni manoscritti in provenzale e fra di essi due opere geometriche:

- *La siensa de destrar*, sull'agrimensura;
- *La siensa d'atermenar* (determinazione dei confini).

Entrambi i trattati sono, nell'ordine, contenuti nello stesso manoscritto n. 327 della Biblioteca Municipale di Carpentras.

L'area di un rettangolo

In un caso, Boysset usò un curioso metodo per calcolare l'area di un rettangolo: la *moltiplicazione in croce*.



Invece di determinare le lunghezze di due lati (AD e DB), egli misurò le lunghezze delle due *mediane* (EG e FH) che si incontrano nel punto I formando una croce costituita da quattro angoli retti:

formula di Boysset: $\text{Area}_{ABCD} = EG * FH$

Nel caso ABCD sia un rettangolo perfetto, il risultato ottenuto da Boysset è uguale a quello della formula oggi usata:

$$\text{Area}_{ABCD} = AD * AB = EG * FH$$

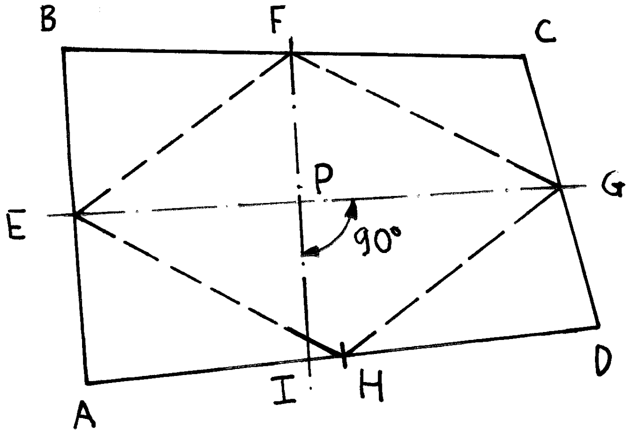
In questo caso valgono le relazioni:

$$AD = EG = BC \quad \text{e} \quad AB = FH = CD$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il metodo usato da Boysset è un po' più complicato.

ABCD è il quadrilatero e E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati:



Tracciare il segmento EG. Dal punto F abbassare la perpendicolare alla mediana EG che incontra nel punto P (formando angoli retti).

Disegnare *tratteggiati* i lati del quadrilatero inscritto EFGH. Questo ultimo ha superficie uguale a metà di quella di ABCD.

Boysset calcolò l'area di EFGH con la seguente formula:

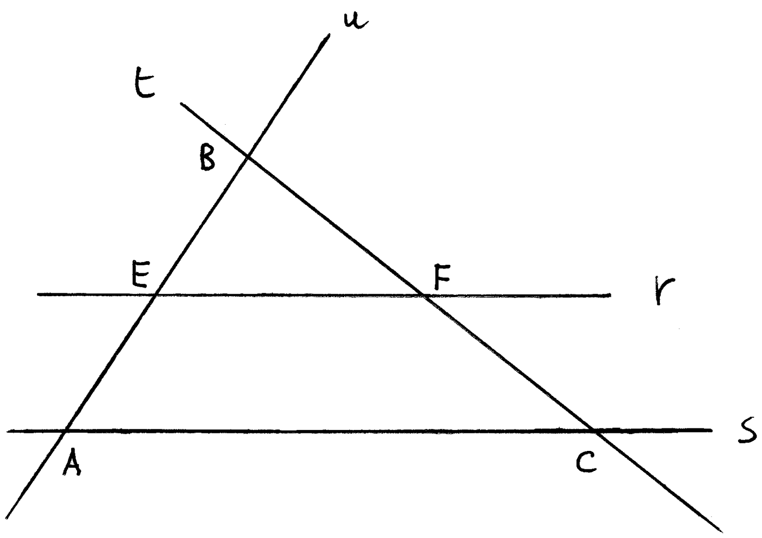
$$\text{Area}_{EFGH} = EG * FP$$

Di conseguenza, l'area di ABCD è

$$\text{Area}_{ABCD} = 2 * \text{Area}_{EFGH} = 2 * EG * FP$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

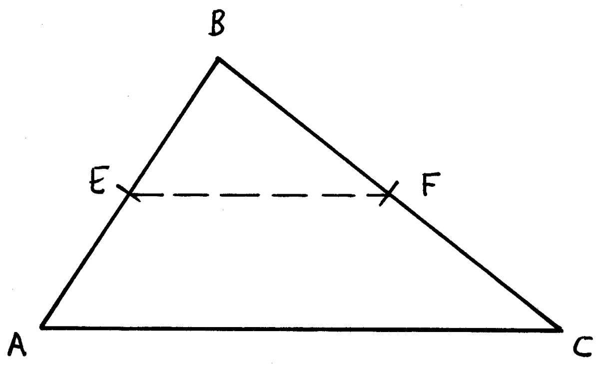
Un'altra ipotesi può essere suggerita riguardo al metodo impiegato da Boysset per calcolare l'area di un quadrilatero, presumendo che egli avesse conoscenza del *teorema di Talete*: un fascio di rette parallele (r e s) che sono tagliate da due rette trasversali (t e u) originano segmenti corrispondenti sulle prime, con rapporti costanti:



I punti A, B, C, E e F sono le intersezioni fra le quattro rette.

Valgono le seguenti proporzioni:
BE : BF = EA : FC
AB : BC = BE : BF
EF : AC = BE : AB

Vediamone subito un'applicazione.
ABC è un generico triangolo scaleno:



Il punto B corrisponde all'intersezione delle rette t e u. Il segmento AB giace sulla retta s e quello EF è posizionato sulla retta r.

E e F sono i punti *medi* dei lati AB e BC.

EF divide ABC in due poligoni: il triangolo EBF e il trapezio AEFC.

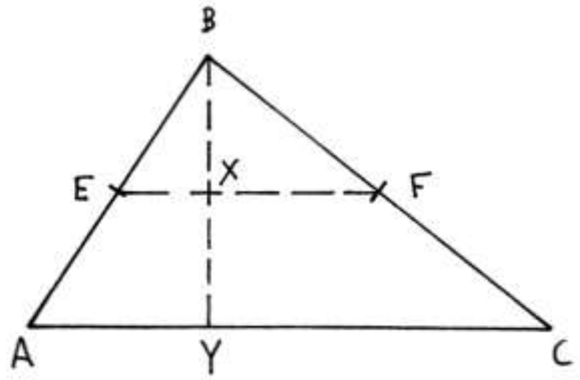
I triangoli ABC e EBF sono *simili* per cui valgono le seguenti proporzioni:

AB : EB = 2 : 1 BC: BF = 2 : 1

Ne consegue che AC : EF = 2 : 1.

La lunghezza del segmento è la *metà* di quella di AC.

BY è l'altezza relativa al AC e BX è l'altezza relativa al lato EF:



L'area del triangolo ABC è data da

$$\text{Area}_{ABC} = AC * BY/2 .$$

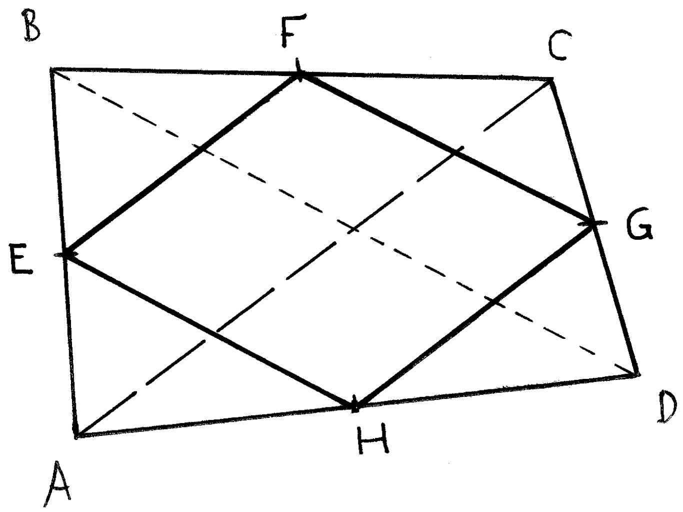
L'altezza BX è lunga $BX = BY/2$.

L'area di EBF è:

$$\text{Area}_{EBF} = (EF * BX)/2 = ½ * (AC/2 * BY/2) =$$
$$¼ * (AC * BY)/2 = ¼ * \text{Area}_{ABC} .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCD è un quadrilatero con le diagonali AC e BD:



Il triangolo ABC corrisponde al triangolo usato qui sopra.

Anche i punti G e H sono i medi dei lati CD e AD.

EFGH è un quadrilatero inscritto in ABCD e ottenuto collegando i punti medi di questo ultimo.

I lati EF e GH sono fra loro paralleli, paralleli a BD e hanno la stessa lunghezza:

EF = GH = ½ BD.

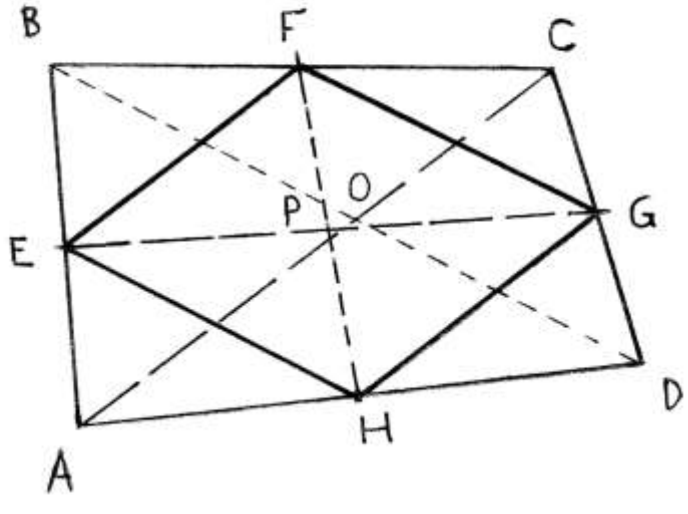
Applicando al triangolo BCD le considerazioni utilizzate per il triangolo ABC, risulta che i lati EH e FG sono paralleli alla diagonale BD e hanno la stessa che è pari alla metà di quella di AC.

EFGH è un perfetto *parallelogramma*.

Esso è noto come *quadrilatero* o *parallelogramma* di Varignon, dal nome del matematico francese Pierre Varignon (1654 – 1722): esso ha superficie uguale alla metà di quella del quadrilatero ABCD.

Magdeleine Motte ha avanzato l'ipotesi che Boysset avesse in qualche modo utilizzato un metodo simile a quello codificato da Varignon tre secoli dopo, ma non le è chiara la fonte alla quale avrebbe attinto.

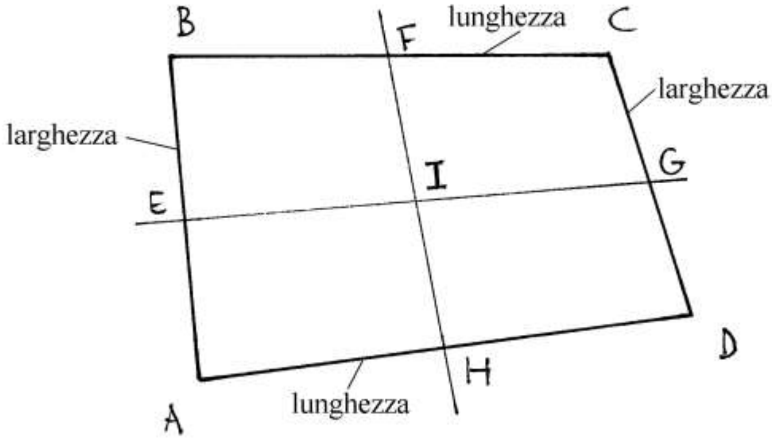
Le diagonali del quadrilatero ABCD si incontrano nel punto O, che *non* coincide con il punto P, intersezione delle sue mediane (che sono le diagonali di EFGH):



- APPROFONDIMENTO -

Il metodo della *moltiplicazione in croce* di Boysset richiama – *ma solo alla lontana* – quello conosciuto come la *formula degli agrimensori*, già nota ai geometri Sumeri e Babilonesi e di altri popoli antichi.

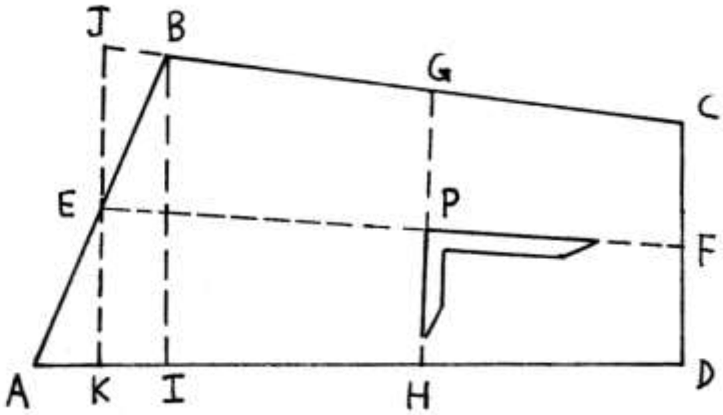
ABCD è un quadrilatero generico. I suoi lati opposti non sono paralleli.



E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati: per determinare le loro posizioni, Boysset era costretto a misurare tutti e *quattro* lati.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel capitolo 38 del trattato di agrimensura, *foglio 58 verso*, Boysset suggerì ai suoi lettori la scelta fra due metodi per la misura e il calcolo dell'area di un terreno a forma di quadrilatero. Il *primo metodo*, sconsigliato da Boysset, implicitamente rinvia all'uso della *formula degli agrimensori*:

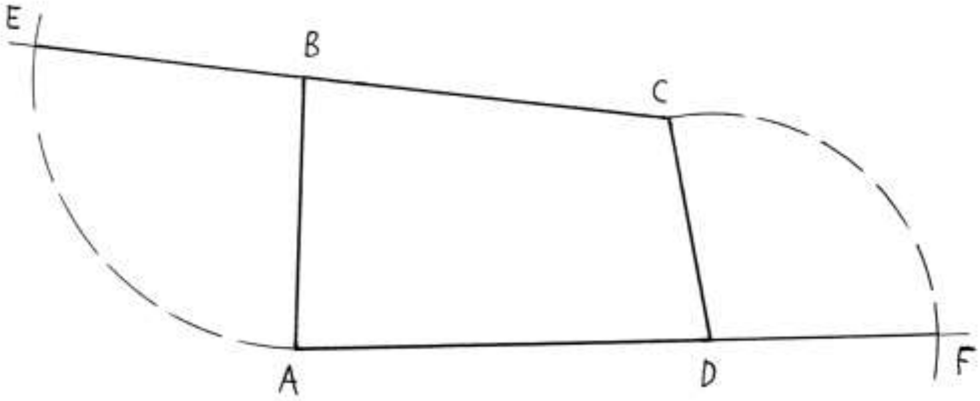


Applicandola, occorreva misurare i quattro lati del quadrilatero e poi moltiplicare le semisomme dei lati opposti.

Il *secondo metodo*, consigliato da Boysset e descritto nella figura qui sopra, consisteva nella scomposizione del quadrilatero ABCD nel quasi trapezio BCDI e nel triangolo rettangolo ABI.

Boysset usò la *formula degli agrimensori* solo nel caso della misura delle dimensioni di un territorio complesso e accidentato contenente montagne, vallate e fitti boschi: era evidente l'impossibilità di penetrare all'interno dei boschi (da Magdeleine Motte, p. 277).

Il matematico catalano Abraham bar Hiyya (1170 – 1136), anche conosciuto come Savasorda, scoprì in Provenza l'uso di metodi errati per calcolare l'area di un terreno a forma di quadrilatero. Oltre alla *formula degli agrimensori*, Savasorda notò l'uso di un secondo metodo errato:



ABCD è il solito quadrilatero. Prolungare verso sinistra il lato BC e verso destra quello AD: Con il compasso *ribaltare* le lunghezze dei lati AB e CD.

Il metodo proponeva di calcolare l'area moltiplicando le lunghezze di *due lati consecutivi*:

$$\text{Area}_{ABCD} = AB * BC = BE * BC$$

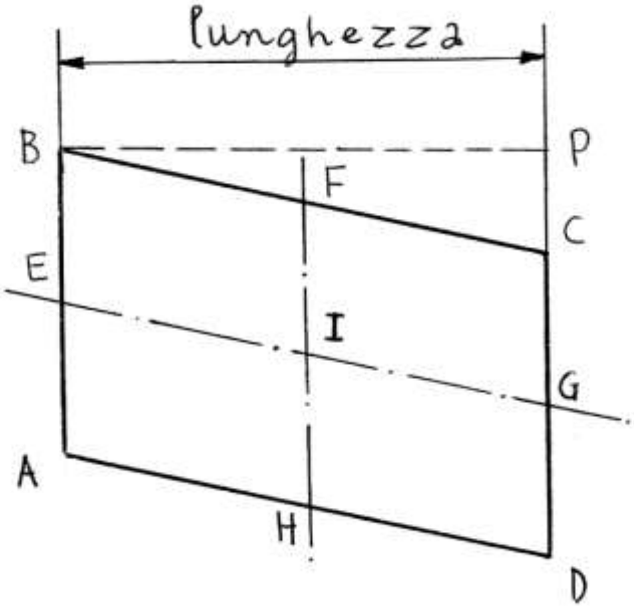
oppure

$$\text{Area}_{ABCD} = AD * DC = AD * DF$$

Entrambe le formule sono approssimate e forniscono risultati tanto più errati quanto più il quadrilatero si allontana dalla forma rettangolare.

La formula degli agrimensori applicata a un parallelogramma

ABCD è un parallelogramma (con i lati opposti paralleli e di uguale lunghezza):



E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati e EG e FH sono le *mediane* del quadrilatero.

La formula *corretta* per calcolare l'area del parallelogramma è data da

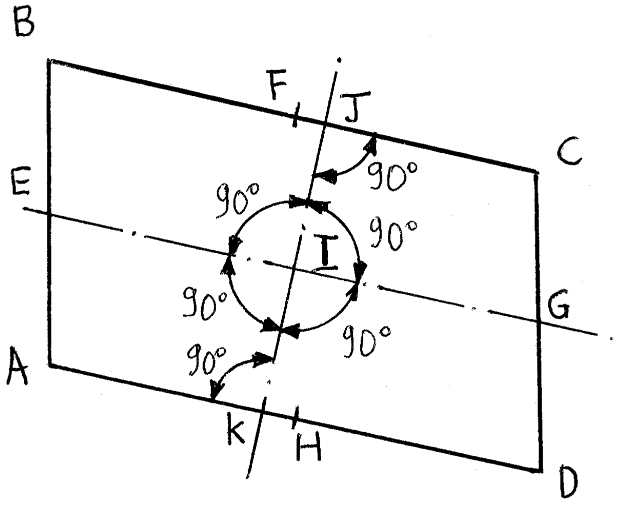
$\text{Area}_{ABCD} = AB * BP$

Il segmento BP è *perpendicolare* al lato AB e il suo punto P è collocato sul prolungamento di DC.

Applicando la *formula degli agrimensori* l'area è

Area $_{ABCD}$ = EG * HF = AD * AB e il risultato è *errato per eccesso*.

Se le conoscenze geometriche fossero state un po' più solide, avrebbe dovuto applicarsi il metodo *corretto* descritto nella figura che segue:



EG è una mediana e I è il suo punto medio.

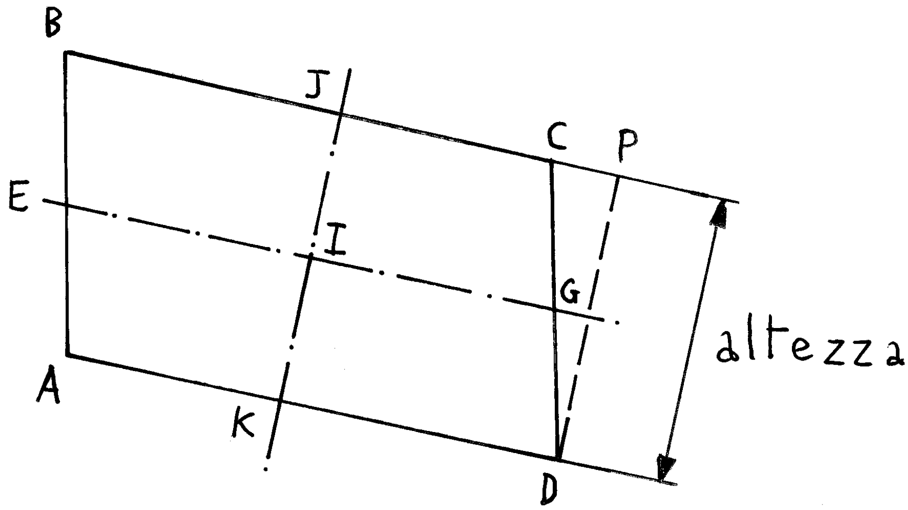
Per il punto I tracciare la perpendicolare alla mediana: è JK.

Questo ultimo segmento è l'altezza relativa ai lati AD e BC.

L'area *corretta* del parallelogramma è data dal prodotto

Area $_{ABCD}$ = base * altezza = AD * JK = EG * JK.

Il segmento PD è *perpendicolare* al lato AD ed è la sua altezza relativa:



Ma PD è parallelo a JK ed ha la stessa lunghezza: quindi, la formula precedente può essere scritta come segue:

Area $_{ABCD}$ = AD * PD

- -

LA GEOMETRIA DI TOMMASO DELLA GAZZAIA

Tommaso della Gazzaia (o dell'Agazzaia o degli Agazzari) visse a Siena fra la fine del Trecento e l'inizio del Quattrocento: morì nel 1433.

Egli apparteneva a una delle più influenti famiglie senesi, gli Agazzari.

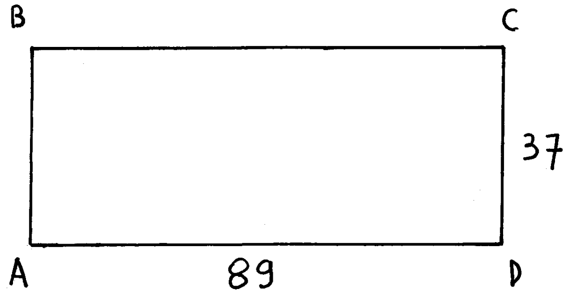
Ricoprì numerose cariche pubbliche a Siena e fu suo ambasciatore presso altri Stati italiani.

Fu pure podestà a Bologna, Pisa, Lucca e Todi.

Il codice C. III. 23 della Biblioteca degl'Intronati di Siena contiene un trattato attribuito a Tommaso, in cui sono affrontati problemi di aritmetica, algebra e geometria e vi sono descritte le monete di molte città e Stati e i loro rapporti di cambio.

Area di un terreno quadrangolare

Un campo fa la forma di un quadrilatero che ha lati (*facce* nel linguaggio di Tommaso) lunghi 89 e 37 canne:

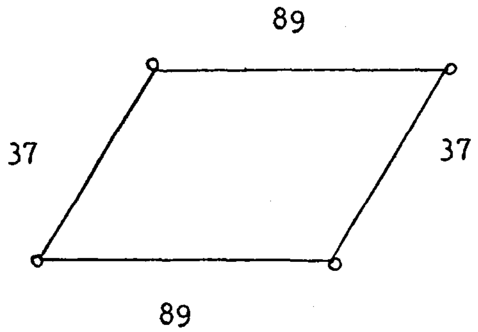


L'area è calcolata moltiplicando l'*ampiezza* (il lato più corto) per la *lunghezza* (il lato più lungo):

Area = ampiezza * lunghezza = 37 * 89 = 3293 canne^2.

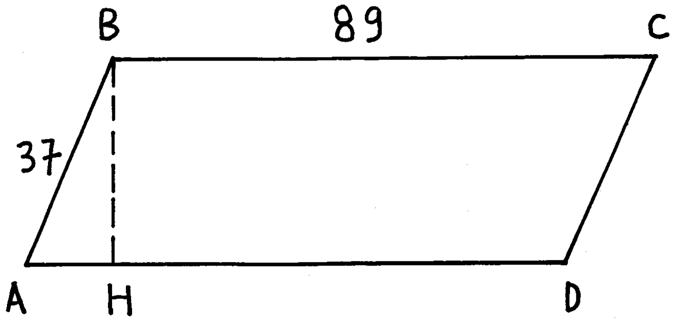
Le lettere ai vertici non sono presenti nella trascrizione e sono qui aggiunte per chiarire i concetti sottostanti ai problemi.

Lo schema contenuto nel testo stampato mostra un *parallelogramma* invece di un rettangolo:



Inoltre, il disegno è fuori scala.

Se nelle intenzioni di Tommaso il quadrilatero era realmente un parallelogramma, la sua area sarebbe minore di quella calcolata in 3293 canne^2 per il caso del rettangolo, come spiega la figura che segue:



In questa ipotesi, l’area del quadrilatero è data dal prodotto della lunghezza (AD = BC) per l’altezza BH che è più corta dei lati obliqui AB e CD.

Nella soluzione offerta da Tommaso vi è forse un’eco dell’antichissima ed errata *formula degli agrimensori*? Essa calcola l’area del parallelogramma con il prodotto delle semisomme dei lati opposti:

$$\text{Area}_{ABCD} = (AD + BC)/2 * (AB + CD)/2 =$$
$$(89 + 89)/2 * (37 * 37)/2 = 89 * 37 = 3293 \text{ canne}^2 .$$

.

Nota: sugli schemi di Tommaso della Gazzaia sono scritte le dimensioni dei singoli spigoli o delle aree, quasi sempre all’interno dei poligoni e delle altre figure geometriche.

ORBETANO DA MONTEPULCIANO

Il manoscritto Moreni 130 della Biblioteca Riccardiana di Firenze contiene un trattato – *Regole di geometria pratica* – attribuito a Orbetano da Montepulciano, un geometra e agrimensore, forse operante anche a Siena. Agrimensore lo deve essere stato perché la prima parte del manoscritto è dedicata a problemi di misurazioni e divisioni di terreni. Fu anche un *misuratore* perché si interessò ai calcoli relativi al contenuto delle botti e alla misurazione di edifici.

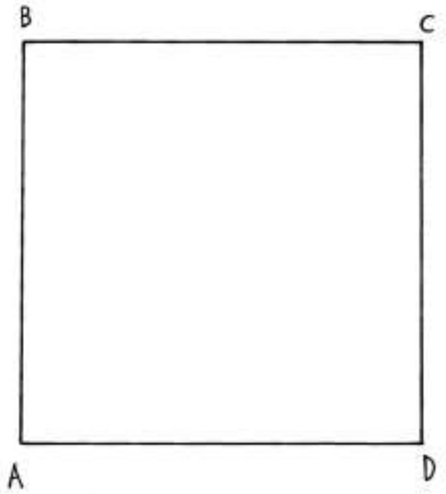
L'unità di misura che egli preferì è la *pertica* corrispondente alla *canna agrimensoria* lunga 5 braccia.

Il testo sarebbe stato composto intorno al 1464.

Secondo Annalisa Simi, la ricercatrice dell'Università di Siena che lo ha trascritto e pubblicato, la struttura del trattato ipotizzerebbe la sua composizione per un uso personale dell'autore. Infatti, i problemi affrontati sono descritti senza soluzione di continuità e il testo non mostra divisioni in capitoli e paragrafi.

Area di un quadrato

Un terreno ha forma quadrata e ciascun lato è lungo 10 pertiche:



La procedura proposta da Orbetano per calcolarer l'area è la seguente:

* sommare le lunghezze di due lati [*opposti?*]: $10 + 10 = 20$;
* dividere per 2: $20 : 2 = 10$;
* sommare le lunghezze degli altri due lati: $10 + 10 = 20$;
* dividere per 2: $20 : 2 = 10$;
* moltiplicare i due *quozienti*: $10*10 = 100$ pertiche^2 che equivalgono alla superficie di un *moggio* e sono l'area di ABCD.

La procedura può essere sintetizzata nella formula che segue:

$$\text{Area} = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = (10 + 10)/2 * (10 + 10)/2 = 10 * 10 = 100 \text{ pertiche}^2 .$$

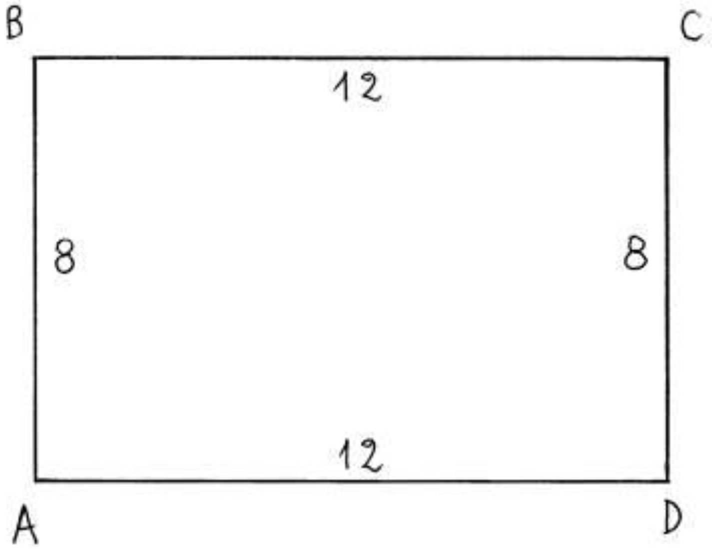
La formula fornisce un risultato è esatto, anche se il prodotto della lunghezza di un lato per se stessa è la via più semplice per calcolare l'area di un quadrato:

$$\text{Area quadrato} = AB^2 = 10^2 = 100 \text{ pertiche}^2.$$

La procedura impiegata da Orbetano richiama la *formula degli agrimensori* che risaliva agli Egizi: essa forniva e fornisce risultati esatti solo nel caso di quadrilateri aventi tutti gli angoli retti, come è il caso dei rettangoli e dei quadrati.

Area di un terreno rettangolare

Un terreno ha forma rettangolare e le dimensioni in pertiche scritta sulla figura:



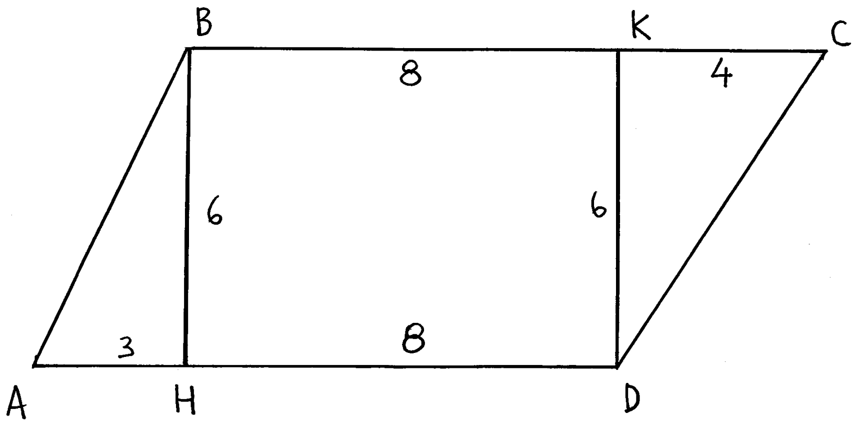
La procedura usata è la seguente:

* sommare le lunghezze dei lati opposti, AD e BC: 12 + 12 = 24 ;
* dividere per 2: 24 : 2 = 12 ;
* sommare le lunghezze degli altri due lati opposti: 8 + 8 = 16 ;
* dividere per 2: 16 : 2 = 8 ;
* moltiplicare i due quozienti: 12*8 = 96 pertiche^2 che è l'area del terreno rettangolare ABCD.

Anche in questo caso è riemersa la *formula degli agrimensori*: l'area è stata ricavata dal prodotto delle semisomme dei lati opposti.

Area di un quadrilatero

Un quadrilatero ha soltanto *due* lati paralleli, AD e BC:



I lati obliqui, AB e DC, non sono paralleli e hanno lunghezze differenti.
Le due altezze, BH e KD, hanno uguale lunghezza, pari a 6 pertiche.
Orbetano chiama *mezo quatro* i triangoli rettangoli ABH e DKC.

Il calcolo dell'area del quadrilatero richiese la misura di tutte le lunghezze. La soluzione adottata è basata sulla *scomposizione* del poligono nei triangoli rettangoli ABH e DKC e nel rettangolo HBKD.

La procedura per il calcolo prevede i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza di KC: 4 : 2 = 2 ;
* moltiplicare per la lunghezza di KD: 2*6 = 12 pertiche^2, area del triangolo rettangolo KDC;
* dividere per 2 la lunghezza di AH: 3 : 2 = 1,5 ; [Orbetano rappresenta il numero 1,5 come 1.1/2]
* moltiplicare per la lunghezza di BH: 1,5*6 = 9 pertiche^2, area di ABH;
* sommare le aree dei due triangoli rettangoli: 12 + 9 = 21 pertiche^2 ;
* sommare le lunghezze dei due lati orizzontali di HBKD: 8 + 8 = 16 ;
* dividere per 2: 16 : 2 = 8 ;
* sommare le lunghezze delle due altezze (BH e KD): 6 + 6 = 12 ;
* dividere per 2: 12 : 2 = 6 ;
* moltiplicare le due semisomme: 8*6 = 48 pertiche^2, area del rettangolo HBKD;
* sommare le aree dei due triangoli e quella del rettangolo: 21 + 48 = 69 pertiche^2, area del quadrilatero ABCD.

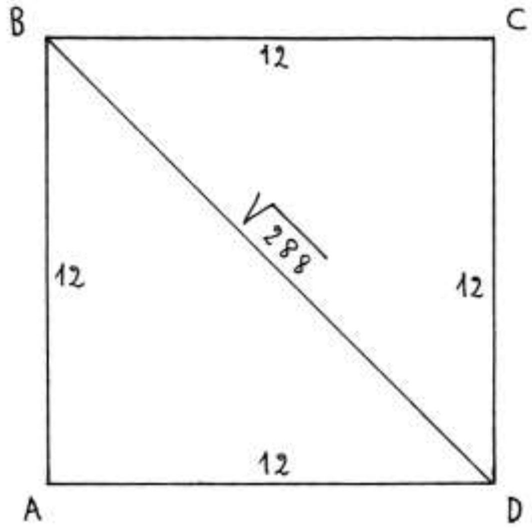
Orbetano applicò anche in questo caso la *formula degli agrimensori*:

$$\text{Area}_{\text{HBKD}} = (\text{HD} + \text{BK})/2 * (\text{HB} + \text{KD})/2$$

Evidentemente, questa antica formula era largamente usata fino almeno al XV secolo.

<u>Terreno quadrato</u>

Un terreno quadrato ha lato lungo 12 pertiche:



Il problema chiede di di calcolare l'area e la lunghezza della diagonale (BD).

Come in altre figure riprodotte dal trattato, le dimensioni sono scritte sui segmenti o sui lati e, generalmente, al centro della linea alla quale si riferiscono.

La procedura applicata contiene i seguenti passi:

* "*addunare 12 da uno lato e 12 dall'altro*" [sommare le lunghezze di due lati opposti] : 12 + 12 = 24 ;
* dividere il risultato per 2: 24 : 2 = 12 ;
* sommare le lunghezze de "*l'altre faccie*": 12 + 12 = 24 ;

* dividere per 2: 24 : 2 = 12 ;
* moltiplicare i due quozienti: 12*12 = 144 pertiche^2 che è l'area del quadrato ABCD.

La procedura impiegata da Orbetano per calcolare l'area è riassumibile con la seguente formula:

$$\text{Area}_{ABCD} = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2$$

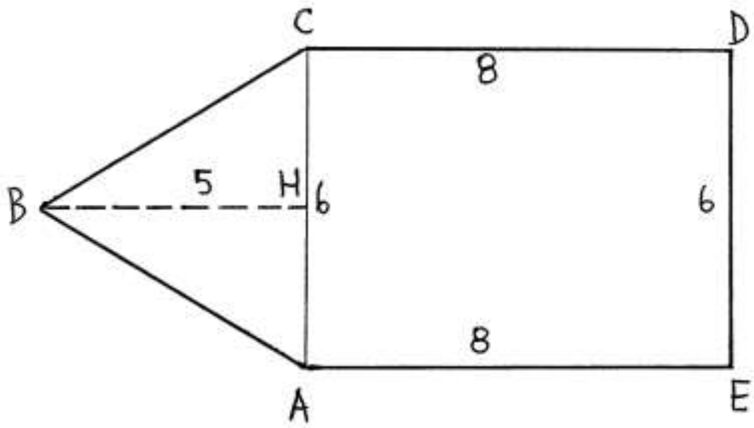
che, di nuovo, è la *formula degli agrimensori*.

Per ricavare la lunghezza della diagonale AD, Orbetano usa i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di una delle "*faccie*" (e cioè un *lato,* ad esempio quello AB) per se stessa: 12*12 = 144 ;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza di un altro lato (ad esempio AD): 12*12 = 144 ;
* sommare i due quadrati: 144 + 144 = 288 che è il quadrato della lunghezza della diagonale BD.

Area di un pentagono non regolare

Per facilitare la comprensione del metodo impiegato da Orbetano, alla sua figura sono aggiunte le lettere ai vertici:



Il poligono ha cinque lati ma non è un pentagono regolare. Per facilitarne la misurazione esso è scomposto in un triangolo isoscele, ABC, e in rettangolo ACDE.

Le dimensioni sono espresse in *pertiche* e sono scritte sui lati all'interno del poligono.

Orbetano misurò le lunghezze dei singoli lati con una *squadra*: ma dato che la pertica equivale a 2,91813 m non poteva avere a disposizione una squadra di grandi dimensioni. Probabilmente egli effettuò misurazioni plurime con l'aiuto di squadre, di *compassi da agrimensore* (con aste lunghe fino a 2 metri) e della *catena d'agrimensore* lunga anche un multiplo della pertica.

Per calcolare l'area dei due poligoni nei quali aveva scomposto il pentagono, Orbetano applicò al rettangolo ACDE la consueta *formula degli agrimensori*:

* sommare i due lati più corti (AC e DE): 6 + 6 = 12 :
* dividere per 2: 12 : 2 = 6 ;
* sommare i due lati più lunghi (AE e CD): 8 + 8 = 16 ;
* dividere per 2: 16 : 2 = 8 ;
* moltiplicare i due quozienti: 6*8 = 48 pertiche^2 , area di ACDE;
* misurare la lunghezza di BH: 5 pertiche ;
* dividere per 2 la lunghezza di AC: 6 : 2 = 3 ;

*	moltiplicare 3 per BH: del triangolo ABC;	$3*5 = 15$ pertiche^2, area
*	sommare le due aree: area del pentagono non regolare ABCDE.	$48 + 15 = 63$ pertiche^2,

DUE CODICI AZTECHI

Il *Codice Vergara* è conservato a Parigi mentre il *Codice di Santa Maria Asuncion* è custodito a Città del Messico.

I due codici contengono centinaia di mappe catastali di terreni agricoli utilizzati dagli agricoltori Aztechi: su di esse sono riportate le dimensioni lineari e le superfici.

Si tratta in gran parte di lotti di terreno di forma *quadrilatera* e in alcuni casi triangolare.

Alcuni studiosi americani e messicani sono riusciti a decifrare il significato dei simboli contenuti sulle mappe, simboli che indicavano lunghezze e dimensioni:

* Barbara J. Williams è professore di Geografia e geologia all'Università del Wisconsin;
* Herbert R. Harvey, professore di Antropologia all'Università del Wisconsin;
* Maria del Carmen Jorge y Jorge, professore di Matematica all'Università Nazionale autonoma di Città del Messico.

Un fondamentale studio sul *Codice Vergara* è stato condotto dalla Jorge y Jorge, dalla Williams, dalla C.E. Garza – Hume e da Arturo Oliva e pubblicato nel 2001 su PNAS (vedere la bibliografia). In allegato all'articolo, i quattro ricercatori hanno pubblicato un grande archivio (*Appendix.pdf* all'indirizzo http://www.pnas.org/content/suppl/2011/08/26/1107737108.DCSupplemental). Che consta di ben 459 pagine. Vi sono riprodotte le mappe in due differenti misurazioni: una corrisponde a quella disegnata nel Codice e l'altra a quella che fornisce la superficie massima.

Di ciascun terreno sono indicate le lunghezze dei lati e l'area.

I dati sono stati ricalcolati con almeno due metodi:

* la *formula degli agrimensori*;
* la *formula di Bretschneider* per determinare l'area massima di ciascun terreno.

L'unità di misura della lunghezza

L'unità di misura della lunghezza usata dagli Aztechi era il *tlalcuahuitl*, che per semplicità è qui abbreviata con T.

Un quadrato di lato 1 T ha area uguale a 1 T^2.

L'unità T equivaleva alla lunghezza di 2,5 metri, ma talvolta si discostava da questo standard.

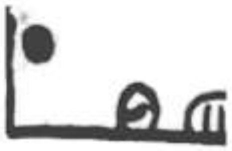
L'unità di superficie T^2 vale 2,5*25 = 6,25 m^2.

I simboli per le frazioni

Gli Aztechi usarono alcuni pittogrammi per indicare le frazioni di T:

* una *freccia* valeva ½ T ;
* un *braccio* 1/3 T ;
* un *osso* 1/5 T ;
* un *cuore* 2/5 T ;
* una *mano* 3/5 T .

La figura che segue è tratta dallo studio di Williams e Harvey e si riferisce ai simboli contenuti nel *Codice di Santa Maria Asuncion*.

Monad glyphs in Acolhua land documents	Glosses Nahuatl	Proportion of monads to standard "land rods" (T)	Fractional equivalent of (T)	Metric equivalent (1T equals 2.5 m)
	Cemmatl one hand	5 : 3	3 / 5	1.5 m
	Cenyollotli one heart	5 : 2	2 / 5	1.0 m
	Cemomitl one bone	5 : 1	1 / 5	0.5 m
	Cemacolli one arm	3 : 1	1 / 3	0.83 m
	Cemmitl one arrow	2 : 1	1 / 2	1.25 m

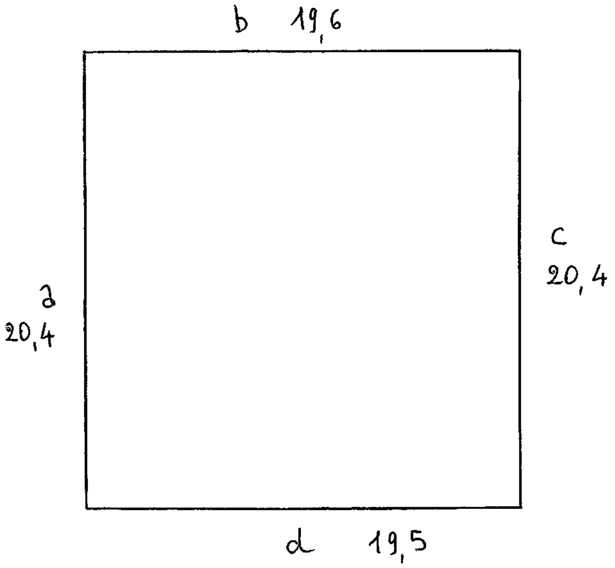
<u>I metodi usati dagli agrimensori Aztechi</u>

Stando alle ricostruzioni che sono state effettuate, gli agrimensori Aztechi avrebbero usato una pluralità di metodi per calcolare la superficie dei terreni di forma quadrangolare. Essi possono essere classificati in *cinque* distinti gruppi:

A. prodotto delle lunghezze di due lati *adiacenti*.
B. Prodotto della media di due lati *opposti* per un lato adiacente.
C. Formula degli agrimensori.
D. Regola del triangolo.
E. Regola della compensazione (più o meno).

A – Prodotto delle lunghezze di due lati adiacenti

Il primo caso è descritto nella figura che segue, che mostra un campo con le lunghezze indicate sulla figura:



Le dimensioni dei quattro lati sono le seguenti:

* a = 20 + *cuore* = 20 + 2/5 = 20,4 T;
* b = 19 + *mano* = 19 + 3/5 = 19,6 T;
* c = 20 + *cuore* = 20 + 2/5 = 20,4 T;
* d = 19 + *freccia* = 19 + ½ = 19,5 T.

L'area è calcolata moltiplicando le *lunghezze* arrotondate per difetto dei due lati adiacenti *a* e *b*:

Area ≈ a * b ≈ 20 * 19 ≈ 380 T^2.

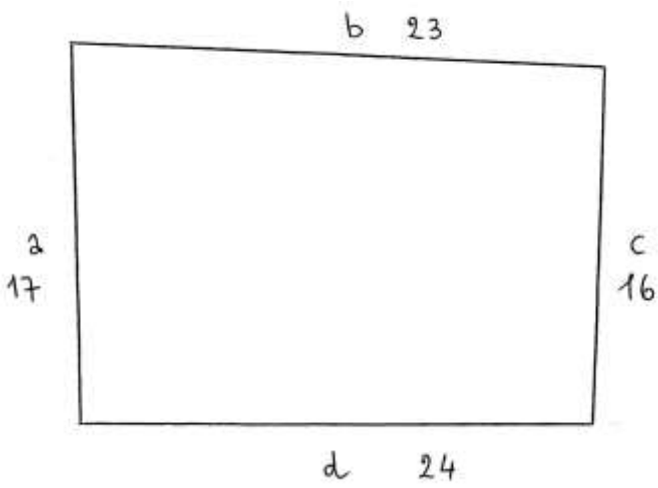
In questo caso, l'area può essere ricavata dal prodotto delle lunghezze di qualsiasi coppia di lati adiacenti:

Area ≈ a * b ≈ = b * c ≈ c * d ≈ d * a . Infatti, sostituendo alle quattro coppie le lunghezze dei corrispondenti lati, il risultato non cambia:

Area ≈ 20 * 19 ≈ 19 * 20 ≈ 20 * 19 ≈ 19 * 20 ≈ 380 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso è presentato nella figura che segue:



L'area del quadrilatero è calcolata moltiplicando le lunghezze dei lati adiacenti a e b:

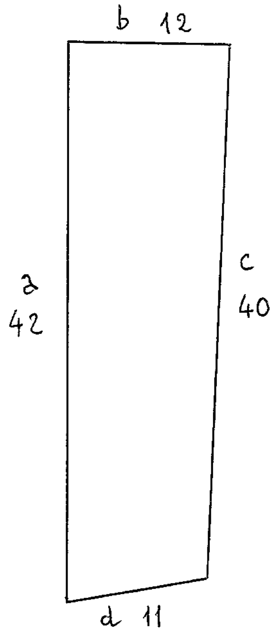
$$\text{Area} = a * b = 17 * 23 = 391\ T^2.$$

Se fossero state usate le altre tre coppie di lati adiacenti, i risultati sarebbero stati leggermente diversi:

$$b * c = 23 * 16 = 368\ T^2\ ;$$
$$c * d = 16 * 24 = 384\ T^2\ ;$$
$$d * a = 24 * 17 = 408\ T^2\ .$$

<u>B – Prodotto della media di due lati opposti per un lato adiacente</u>

Nel primo caso, il quadrilatero ha la forma e le dimensioni contenute nella figura che segue:

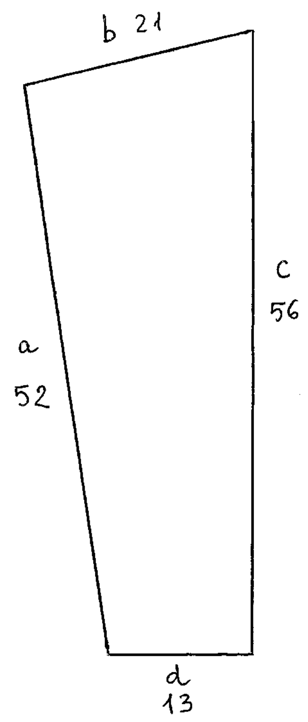


La sua area è calcolata da

$$\text{Area} = (a + c)/2 * d = (42 + 40)/2 * 11 = 41 * 11 = 451\ T^2.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel secondo caso, il quadrilatero ha lati lunghi 52, 21, 56 e 13 T:

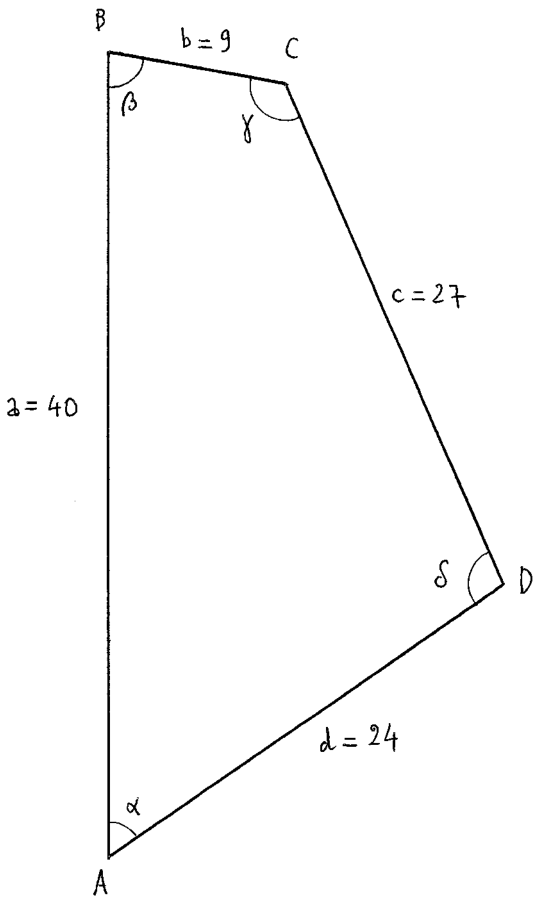


La sua area vale

Area = a * (b + d)/2 = 52 * (21 + 13)/2 = 52 * 17 = 884 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel terzo caso, il quadrilatero ha lati lunghi 40, 9, 27 e 24 T:



La sua area è data da

Area = c * (b + d)/2 = 27 * (9 + 24)/2 = 27 * 16,5 = 445,5 T^2, ma sul *Codice* è scritto 432 T^2, perché probabilmente l'espressione (9 + 24)/2 è stata arrotondata per difetto all'intero più vicino, 16 T.

La soluzione fornisce un risultato chiaramente arrotondato *per difetto* perché trascura la presenza del lato più lungo, a = 40 T.

- APPROFONDIMENTO -

La formula di Bretschneider

Stando al disegno del campo della figura precedente, i suoi angoli interni valgono:

* $\alpha = 55°$;
* $\beta = 80°$;
* $\gamma = 124°$;
* $\delta = 101°$.

Le somme delle ampiezze delle due coppie di angoli opposti valgono:

$\alpha + \gamma = 55 + 124 = 179°$

$\beta + \delta = 181°$.

Il quadrilatero ABCD *non è ciclico* perché non può essere inscritto in un cerchio: solo tre dei suoi quattro vertici giacciono sulla stessa circonferenza.

A questi quadrilateri è applicabile la formula di Bretschneider, dal nome del matematico tedesco Carl Anton Bretschneider che la propose nel 1842. Essa è un'estensione della formula di Brahmagupta e serve a calcolare l'area di qualsiasi quadrilatero convesso, anche non ciclico.

La formula è:

$$Area = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d) - abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

Nella formula, *p* è il semiperimetro:

2*p = a + b + c + d   e   p = (a + b + c + d)/2 .

L'espressione

$$\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

può essere sostituita con la sua equivalente

$$\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right).$$

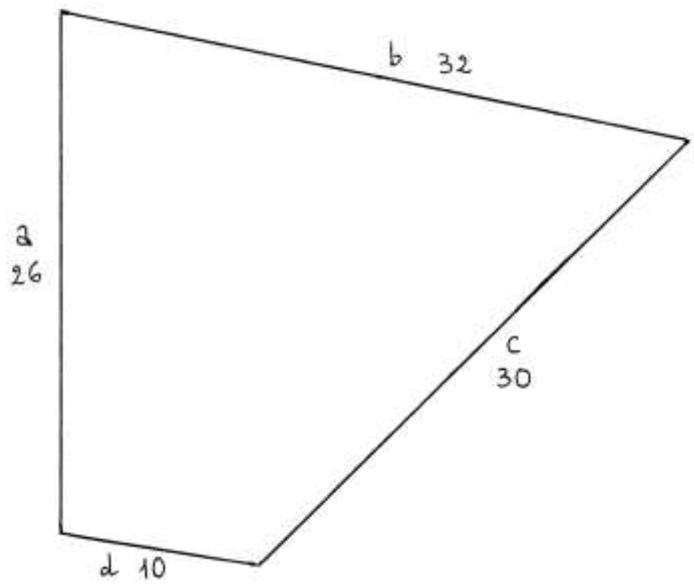
Applicando la formula al caso concreto, l'area A vale ≈ 495,14 T^2.

Nell'articolo della Del Carmen Jorge, della Williams e di altri due AA., citato in bibliografia, è stata impiegata la formula di Bretschneider a tutti i terreni: nel caso specifico, hanno ottenuto un'*area massima* di 495,2 T^2.

- -

C – Formula degli agrimensori

Il primo caso è quello di un quadrilatero con lati lunghi 26, 32, 30 e 10 T:



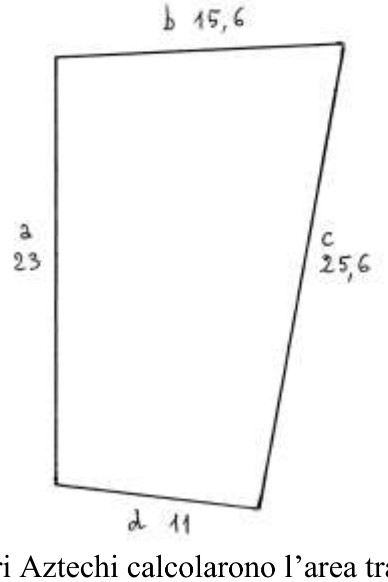
La sua area è data dalla *formula degli agrimensori*:

Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(26 + 30)/2]*[(32 + 10)] = 28 * 21 = 588 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso presenta un quadrilatero con lati lunghi come segue:

* a = 23 T ;
* b = 15 + *mano* = 15 + 3/5 = 15,6 T ;
* c = 25 + *mano* = 25 + 3/5 = 25,6 T ;
* d = 11 T.



Gli agrimensori Aztechi calcolarono l'area tralasciando la parte frazionaria delle lunghezze dei lati *b* e *c* e arrotondando il risultato per *difetto*:

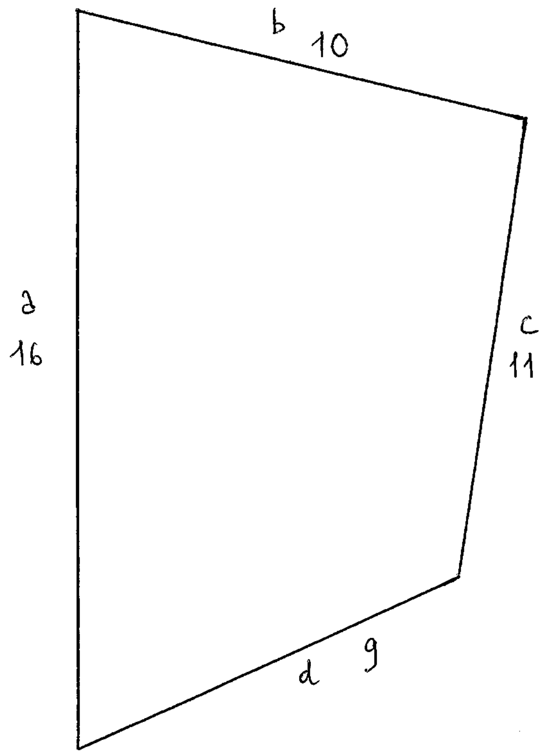
Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(23 + 25)/2]*[(15 + 11)] = 24 * 13 = 312 T^2.

Il risultato corretto è:

Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(23 + 25,6)/2]*[(15,6 + 11)] = 24,3 * 13,3 = 323,19 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il terzo caso si riferisce a un quadrilatero che ha lati lunghi 16, 10, 11 e 9 T:



L'area è data da:

Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(16 + 11)/2]*[(10 + 9)] ≈ 14 * 9 = 126 T^2.

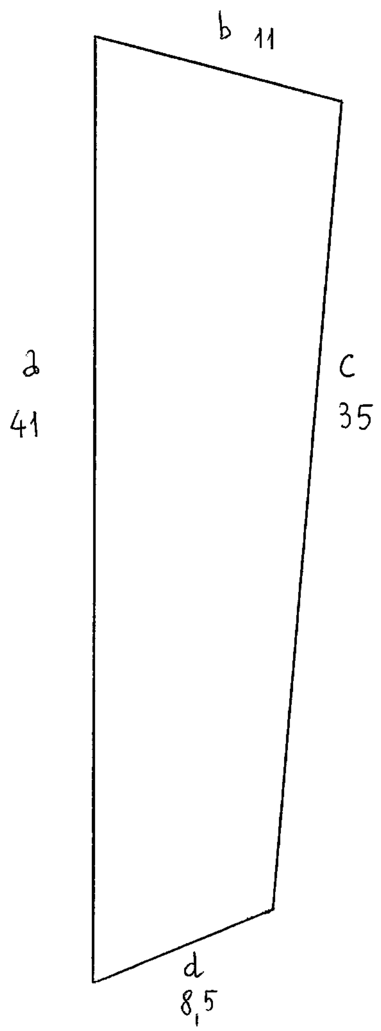
Il calcolo ha subito due arrotondamenti: la media fra le lunghezze di a e c è stata arrotondata per *eccesso* a 14 e quella fra le lunghezze di b e d per *difetto* a 9.

Il calcolo corretto è:

Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(16 + 11)/2]*[(10 + 9)] = 13,5 * 9,5 = 128,25 T^2.

D – Regola del triangolo

Il *primo caso* considera un quadrilatero che ha lati lunghi 41, 11, 35 e 8 + *freccia* (e cioè 8,5 T):



L’area è calcolata con la formula

Area = (a * b)/2 + (c * d)/2 = (41 * 11)/2 + (35 * 8,5)/2 →

→ (41 * *12*)/2 + (35 * *8*)/2 ≈ 246 + 146 = 386 T^2.

In *corsivo* sono indicate le lunghezze arrotondate per eccesso o per difetto.

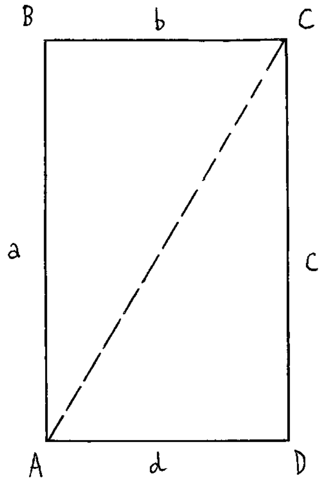
Il risultato corretto è

Area = (a * b)/2 + (c * d)/2 = (41 * 11)/2 + (35 * 8,5)/2 = 225,5 + 148,75 = 374,25 T^2.

Il metodo, come messo in evidenza, dalla formula calcola l’area sommando i prodotti di due coppie di lati *adiacenti*, quali sono le coppie “a e b” e “c e d”.

- APPROFONDIMENTO -

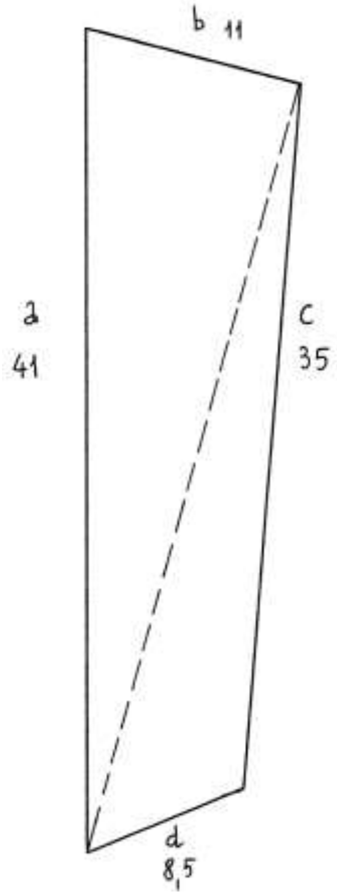
La *regola del triangolo* sembrerebbe derivata dall'assimilazione di un quadrilatero a un rettangolo, poi diviso in due triangoli rettangoli (o quasi) da una diagonale (AC), come è il caso della figura che segue:



L'area del quadrilatero ABCD è ricavata da:

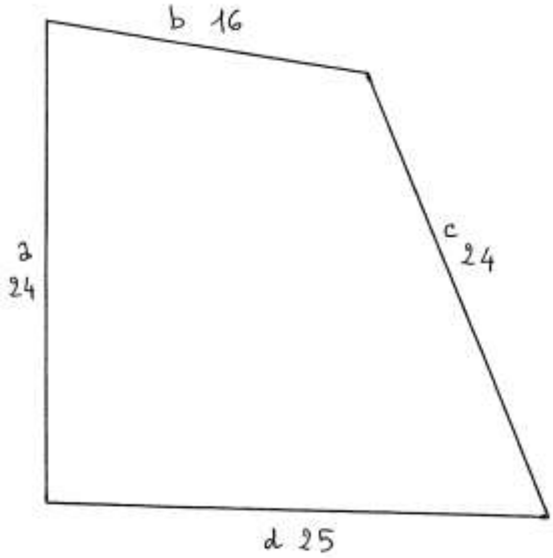
Area = (AB * BC)/2 + (CD * AD)/2 = (a * b)/2 + (c * d)/2, che riporta alla formula usata dagli agrimensori Aztechi per calcolare l'area di alcuni casi particolari di quadrilateri, apparentemente assimilabili a dei rettangoli, con sufficienza approssimazione.

Nel caso del quadrilatero visto sopra, la diagonale lo divide in due triangoli che hanno lati a-b e c-d, ma esso è assai lontano dalla forma del rettangolo:



- -

Il *secondo caso* si riferisce a un quadrilatero che ha lati lunghi 24, 16, 25 e 24 T:

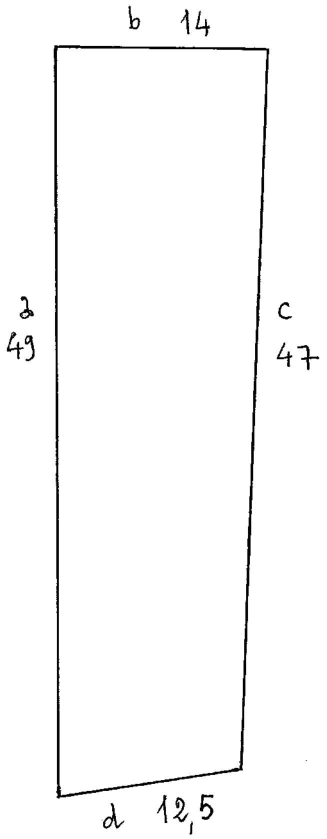


L’area è calcolata con la formula:

Area = (a * b)/2 + (c * d)/2 = (24 * 16)/2 + (24 * 25)/2 = 192 + 300 = 492 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *terzo caso* considera un quadrilatero con lati lunghi 49, 14, 47 e 12 + *freccia* (= 12,5) T:



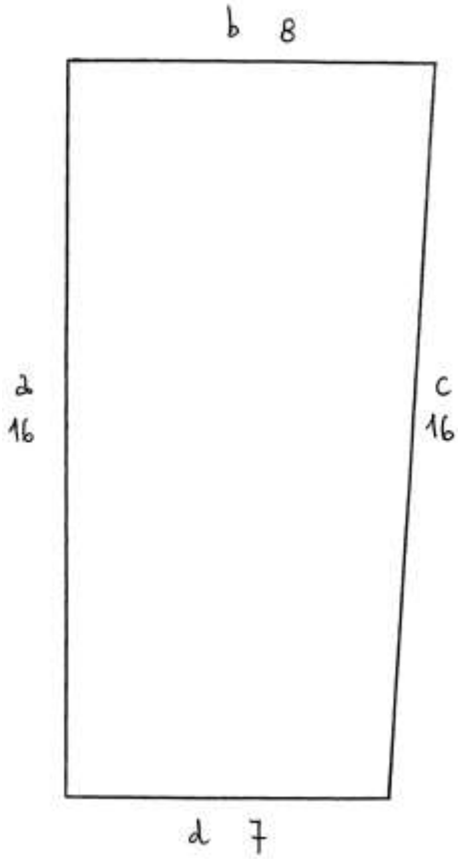
La sua area è:

Area = (a * d)/2 + (b * c)/2 = (49 * 12)/2 + (14 * 47)/2 = 294 + 329 = 623 T^2.

La lunghezza del lato *d* è arrotondata per difetto a 12 T.

E – Regola della compensazione (più o meno)

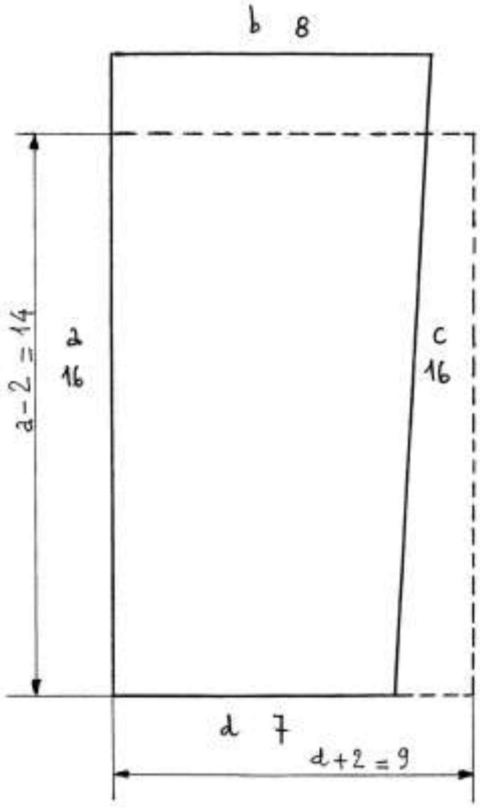
Il *primo caso* è quello di un quadrilatero con lati lunghi 16, 8, 16 e 7 T:



L'area è calcolata con il prodotto di due lati *adiacenti* (ad esempio *a* e *d*) alle lunghezze dei quali è aggiunta o sottratta la stessa cifra, in questo caso 2:

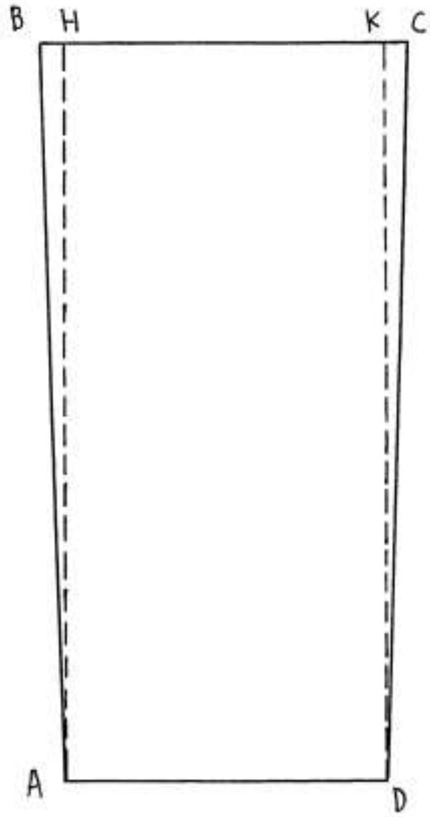
Area = (a – 2) * (d + 2) = (16 – 2) * (7 + 2) = 14 * 9 = 126 T^2.

Il quadrilatero è assimilato a un *rettangolo* che ha lati lunghi 14 e 9 T, disegnato con linee tratteggiate nella figura che segue:



- APPROFONDIMENTO -

Con buona approssimazione, il quadrilatero precedente può essere avvicinato a un *trapezio isoscele* con basi lunghe 8 e 7 T e lati obliqui lunghi 16 T:



Per calcolarne l'area è necessario ricavare l'altezza AH = DK:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}.$$

Ma BH è:

$$BH = \frac{BC - AD}{2} = \frac{8-7}{2} = 0{,}5\ T.$$

L'altezza AH è:

$$BH = \frac{BC - AD}{2} = \frac{8-7}{2} = 0{,}5\ T.$$

L'area del trapezio isoscele ABCD è:

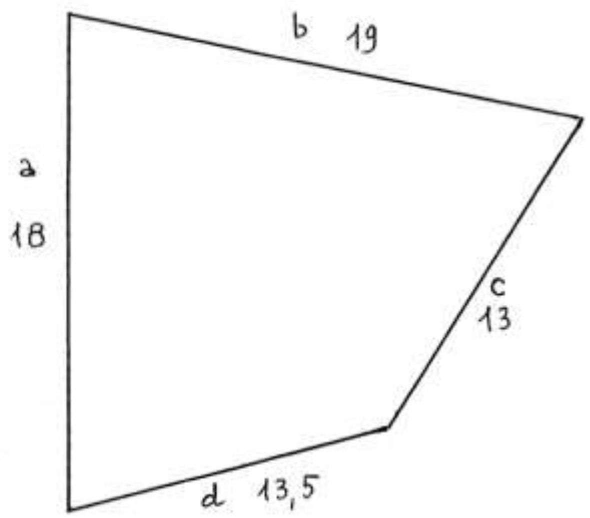
$$\text{Area trapezio} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AH =$$

$$= \frac{7+8}{2} \cdot 15{,}992 = 119{,}94\ T^2$$

Il risultato è leggermente inferiore a quello calcolato dagli agrimensori Aztechi, 126 T^2.

- -

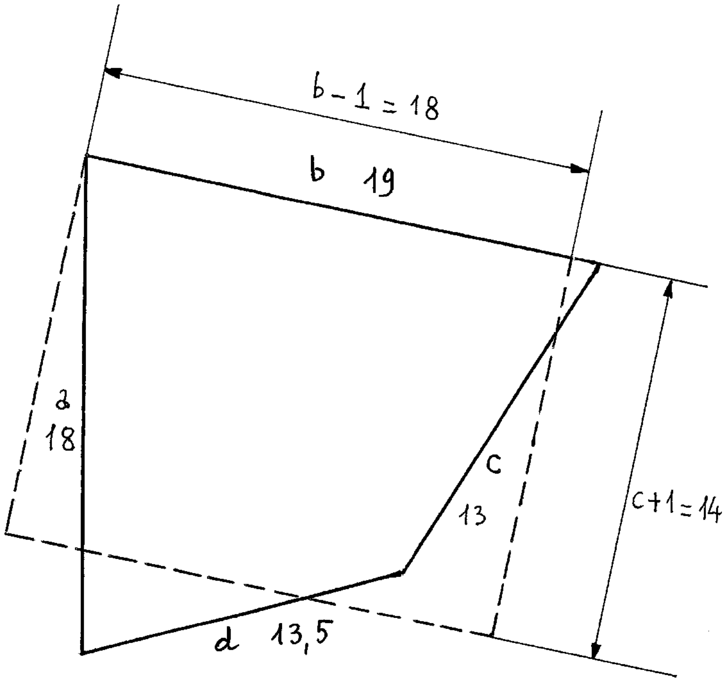
Il *secondo caso* è quello di un quadrilatero che ha lati lunghi 18, 19, 13 e 13 + *freccia* (= 13,5) T:



L'area è calcolata con la formula

Area = (b – 1) * (c + 1) = (19 – 1) * (13 + 1) = 18 * 14 = 252 T^2.

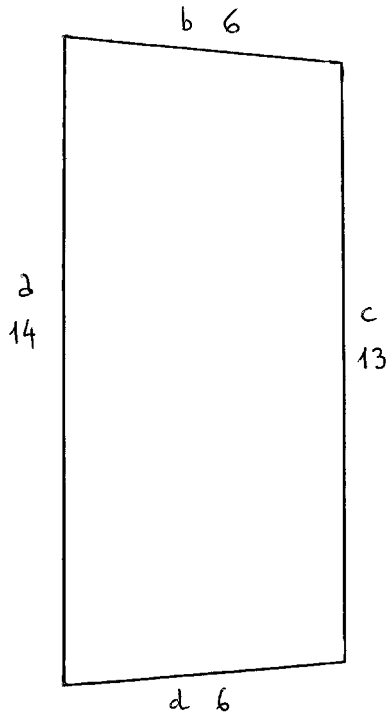
Il quadrilatero è stato trasformato in un rettangolo che ha lati lunghi 18 e 14 T:



Nota: l’intero che viene aggiunto o sottratto alla/dalla lunghezza di un lato può essere 1 oppure 2. In un qualsiasi formula è usato *un* solo intero: 1 o 2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

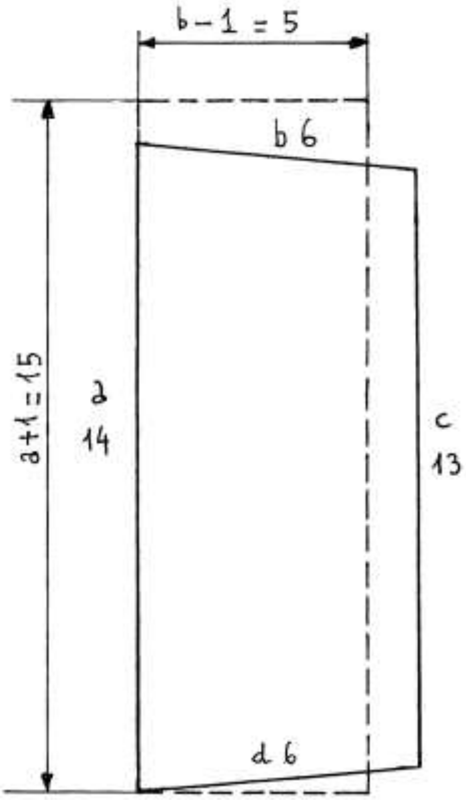
Il *terzo caso* è quello di un quadrilatero che ha lati lunghi 14, 6, 13 e 6 T:



La formula che ne calcola l’area è:

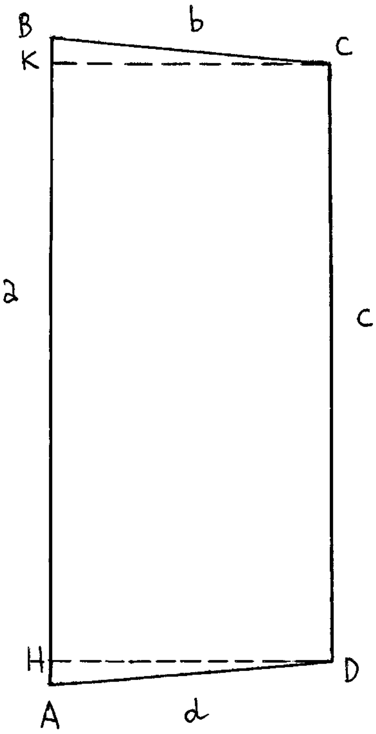
Area = (a + 1) * (b – 1) = (14 + 1) * (6 – 1) = 15 * 5 = 75 T^2.

Gli agrimensori Aztechi hanno assimilato questo quadrilatero a un rettangolo con lati lunghi 15 e 5 T:



- APPROFONDIMENTO -

Anche in questo caso, il quadrilatero è assimilabile a un *trapezio isoscele,* ABCD:



HD e KC sono due altezze del trapezio e hanno uguale lunghezza.
Procediamo a calcolare l’area del trapezio. L’altezza KC è data da

$$KC = \sqrt{BC^2 - BK^2}.$$

Ma

$$BK = AH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{a - c}{2} = \frac{14 - 13}{2} = 0{,}5\ T$$

, per cui

$$KC = \sqrt{6^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{36 - 0{,}25} \cong 5{,}979\ T.$$

L'area del trapezio è

$$Area_{ABCD} = \frac{AD + CD}{2} \cdot KC = \frac{14 + 13}{2} \cdot 5{,}979 = $$
$$= 80{,}7165\ T^2.$$

L'area calcolata dagli agrimensori Aztechi (75 T^2) è errata per *difetto*.

- -

LE TABELLE MILLESIMALI

Il *Condominio* è un istituto giuridico che designa la comproprietà di parti di edifici (e dei loro impianti, quali l'ascensore o l'antenna televisiva centralizzata) che contengono più unità immobiliari quali abitazioni, uffici, negozi, cantine e garage.

Le *tabelle millesimali* descrivono le quote delle proprietà di un edificio in un condominio: una singola quota viene rappresentato come rapporto numerico fra il valore di una unità immobiliare e quella dell'intero edificio fatta uguale a 1000: da ciò deriva il nome attribuito a queste tabelle.

Per conseguire una maggiore precisione, molto spesso le quote sono rapportate al valore 1000,00, ottenuto aggiungendo *due* cifre decimali.

Le tabelle millesimali servono a suddividere le spese di un Condominio fra i diversi proprietari in proporzione ai valori delle singole proprietà e all'uso che ciascuna di esse può fare dei servizi dell'edificio.

Il primo passo per la preparazione delle tabelle è il *rilievo* e la misura delle superfici e delle altezze delle proprietà.

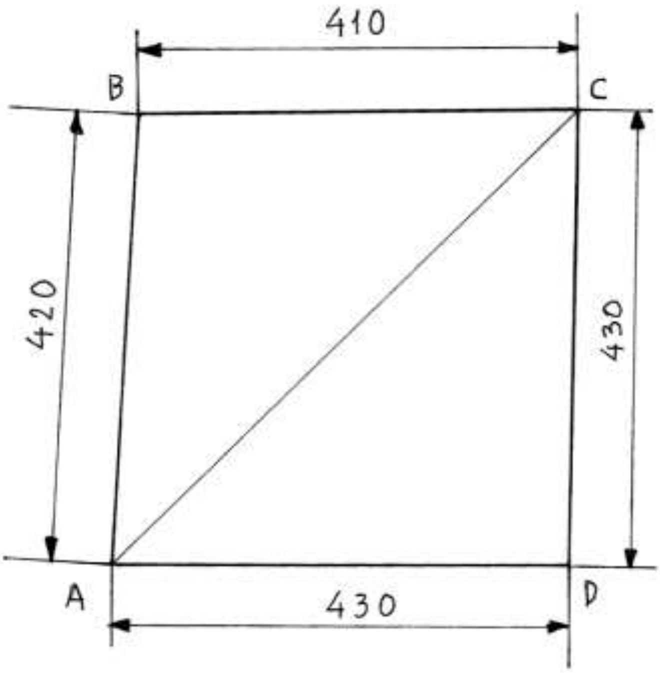
La superficie di una stanza (o *vano*) viene calcolata dopo aver misurato le sue dimensioni a un'altezza di 1-1,5 metri dal pavimento, per tener conto del fatto che l'intonaco dei muri è più spesso verso il basso, anche per la presenza dei battiscopa.

In Italia, gli *usi locali* relativi alla proprietà immobiliare variano da città a città: in una località un appartamento della superficie netta di 60 m^2, composto da due camere, cucina, bagno, ingresso, ripostiglio e un piccolo terrazzo è definito come *trivani*, in altre città come *bivani* (perché gli usi locali non considerano la cucina e gli altri vani accessori). Nel primo caso, la cucina è considerata come il *terzo vano*.

Nel catasto fabbricati quell'ipotetica abitazione è valutata come formata da 4 vani: le due camere e la cucina sono i primi tre vani e l'insieme di bagno, ingresso e ripostiglio costituiscono il quarto vano.

Il calcolo dell'area di un vano

Una stanza di un'abitazione ha la forma e le dimensioni in cm descritte nella figura che segue:



La stanza ha la forma di un quadrilatero.

Il perimetro *p* della stanza è:

p = AB + BC + CD + AD = 420 + 410 + 430 + 430 = 1690 cm.

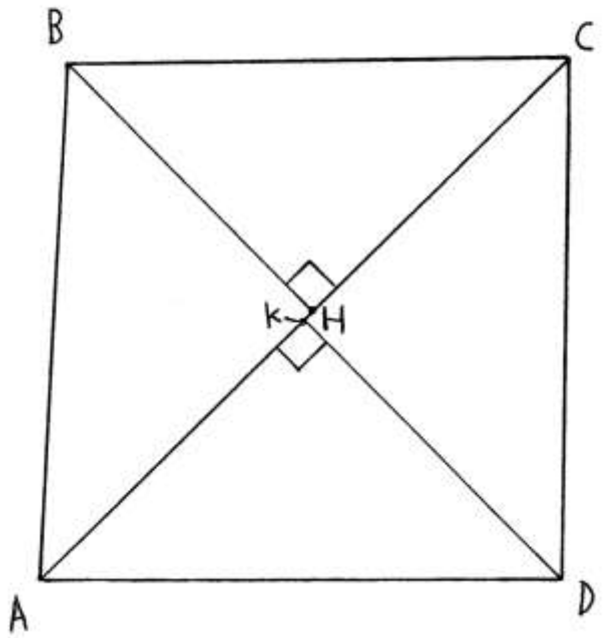
Per semplificare i calcoli, convertiamo tutte le lunghezze da centimetri a metri.

Prima dell'avvento dell'Informatica e dei programmi dedicati e degli strumenti di misura basati sul laser, le misure erano effettuate con il metro e, talvolta, i calcoli venivano fatti con l'impiego di metodi approssimati dei quali la *formula degli agrimensori* è un esempio, almeno nel caso di superfici di forma quadrangolare.

Applicando quella formula al caso di ABCD, la sua area è ottenuta con il prodotto delle semisomme delle coppie di *lati opposti*:

Area ABCD = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = (4,2 + 4,3)/2 * (4,3 + 4,1)/2 =
= 4,25 * 4,2 = 17,85 m^2 .

I tecnici più scrupolosi non si limitavano a misurare le lunghezze dei quattro lati, ma rilevavano le lunghezze delle due diagonali, AC e BD nella figura che segue:



La diagonale AC divide il quadrilatero in due triangoli:

* ABC è un triangolo scaleno;

* ACD è un triangolo isoscele (perché ha due lati, AD e CD, di uguale lunghezza).

BH è l'altezza del triangolo ABC rispetto alla base AC e DK è l'altezza di ACD rispetto alla diagonale AC.

Con opportune misure è possibile determinare, con accettabile approssimazione, le lunghezze delle due altezze: BH = 2,85 m e KD = 3 m e quella della diagonale AC che è lunga 6,15 m.

L'area di ABC è:

Area ABC = (AC * BH)/2 = (6,15 * 2,85)/2 = 8,76375 m^2 .

L'area di ACD è:

Area ACD = (AC * KD)/2 = (6,15 * 3)/2 = 9,225 m^2 .

L'area del quadrilatero ABCD è data dalla somma delle aree dei due triangoli:

Area ABCD = Area ABC + Area ACD = 8,76375 + 9,225 ≈ 17,99 m^2.

La differenza fra l'area calcolata con la formula degli agrimensori (17,85 m^2) e quella calcolata con la misura delle lunghezze dei lati e delle diagonali (17,99 m^2) è minima, perché il quadrilatero si avvicina alla forma di un quadrato.

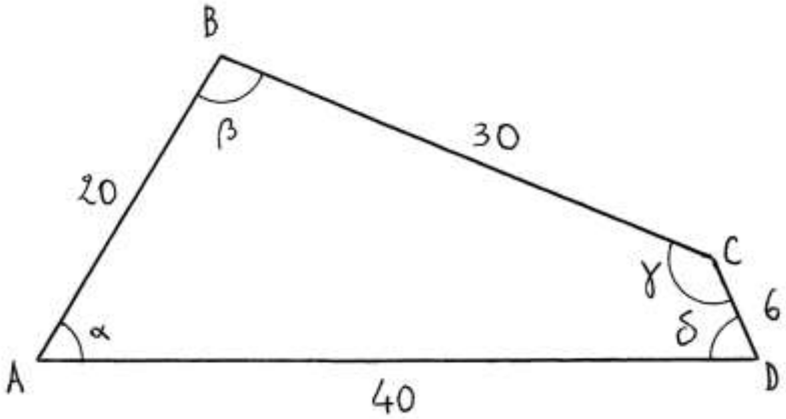
Gli eventuali errori derivanti dall’impiego della formula degli agrimensori nel corso della redazione delle tabelle millesimali di un Condominio potevano essere compensati. Facciamo l’esempio di un edificio che ha sei piani fuori e due appartamenti di 60 m^2 e di 80 m^2 su ciascun piano.

È ragionevole ipotizzare che le abitazioni sovrastanti rispettivamente di 60 m^2 e di 80 m^2 siano di uguali dimensioni.

Se in tutte le abitazioni si trovano vani di forma un po’ irregolare, eventuali calcoli approssimati coinvolgono e interessano tutte le proprietà, compensandosi a vicenda.

IL “BACO” NELLA “FORMULA DEGLI AGRIMENSORI”

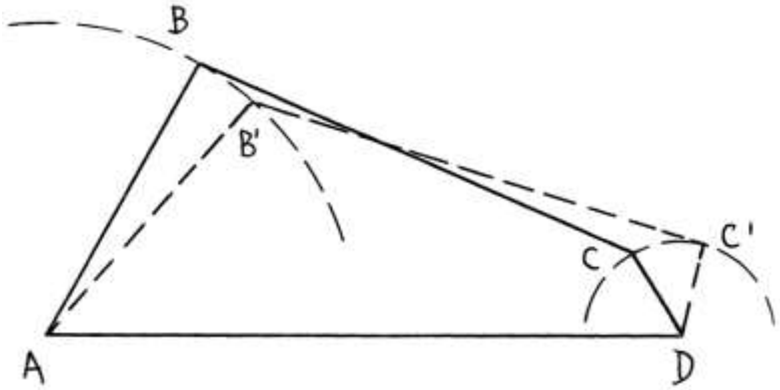
La figura che segue rappresenta un campo a forma di quadrilatero con le lunghezze in *pertiche* (1 *pertica decempeda* dei Romani valeva 10 piedi e cioè circa 295,7 cm), i cui valori sono scritti sui lati, esempio già incontrato nel paragrafo relativo alla geometria dei Gromatici romani:



L’esempio è ricavato dai testi dei Gromatici romani. Essi ne calcolarono l’area impiegando la *formula degli agrimensori* e cioè con il prodotto delle semisomme dei lati opposti:

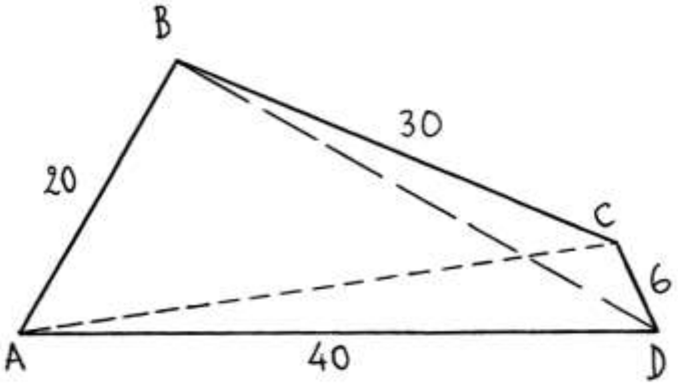
Area ABCD = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = (20 + 6)/2 * (40 + 30)/2 =
= 13 * 35 = 455 pertiche^2.

Il metodo usato è errato. Esistono infiniti quadrilateri che hanno le stesse dimensioni di quello mostrato nella precedente figura, come spiega il grafico che segue:



Il quadrilatero AB’C’D ha lati lunghi quanto i corrispondenti lati di ABCD.

Per individuare con certezza il quadrilatero occorre conoscere la lunghezza di almeno una delle due diagonali, AC o DB:



Una diagonale divide il quadrilatero in due triangoli, figure delle quali è facile calcolare le aree soltanto conoscendo le lunghezze di tutti i lati.

Un’altra soluzione del problema del corretto calcolo dell’area è data dalla conoscenza dell’ampiezza degli angoli interni del quadrilatero, come evidenziato nella prima figura: la situazione del poligono è così esattamente definita.

Gli angoli hanno le seguenti ampiezze:

* $\alpha = 60°$;
* $\beta = 97°$;
* $\gamma = 136°$;
* $\delta = 67°$.

Le somme delle ampiezze delle due coppie di angoli opposti valgono:

$\alpha + \gamma = 60 + 136 = 196°$;

$\beta + \delta = 97 + 67 = 164°$.

Il *perimetro 2*p* del quadrilatero è:

$2*p = AB + BC + CD + DA = 20 + 30 + 6 + 40 = 96$.

Il *semiperimetro p* vale:

$p = 2*p/2 = 96/2 = 48$.

A questo quadrilatero applichiamo la citata *formula di Bretschneider*.

La formula è:

$$Area = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d) - abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

Nella formula, *p* è il semiperimetro.

Chiamiamo AB =a , BC = b , CD = c e DA = d .

Occorre poi calcolare il prodotto delle lunghezze dei quattro lati:

$a * b * c * d = AB * BC * CD * DA = 20 * 30 * 6 * 40 = 144\,000$.

L’espressione

$\cos(\alpha + \gamma)/2 = \cos(196/2) = \cos 98° \approx -0{,}1391731$

e quella

$\cos(\beta + \delta)/2 = \cos(164/2) = \cos 82° \approx 0{,}1391731$

hanno lo stesso *valore assoluto*.

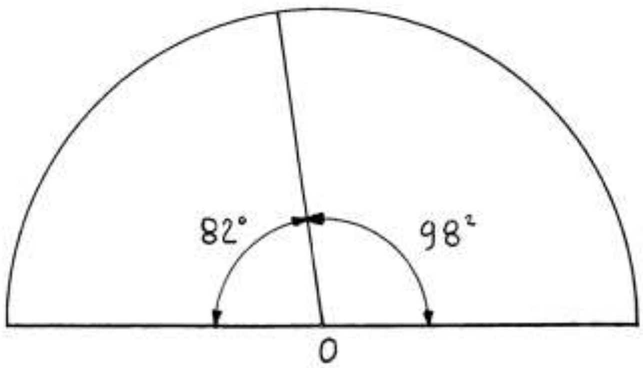
L’espressione

$$\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

può essere sostituita con la sua equivalente

$$\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)$$

: gli angoli di 98° e di 82° sono *supplementari*:

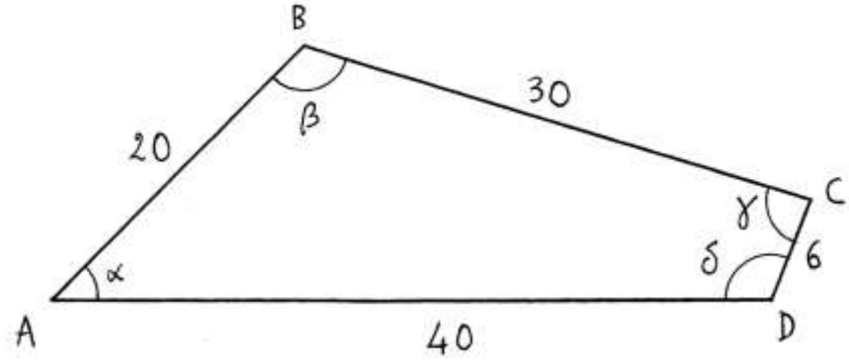


Con questi dati, applichiamo la formula di Bretschneider: essa fornisce un’area di ≈ 408,1113109, che può essere arrotondata per difetto a 408.

Il risultato calcolato con questa formula è inferiore a quello ottenuto con la formula degli agrimensori: 408 contro 455.

Sembra ragionevole affermare che l'impiego della formula degli agrimensori tende a sovrastimare l'area di un terreno a forma di quadrilatero, a tutto vantaggio del Fisco e a danno del singolo agricoltore. La regola è infatti nota anche con l'espressione "*Taxman's Rule*" e cioè *regola dell'esattore delle imposte*.

Il terreno della figura iniziale viene deformato nel modo presentato nella figura che segue:



Il risultato della trasformazione geometrica è un quadrilatero per così dire più *schiacciato* che conserva le stesse lunghezze dei lati ma cambiano le ampiezze dei suoi angoli interni.

Applicando la formula degli agrimensori, l'area è di nuovo 455 pertiche^2.

Gli angoli interni hanno le seguenti ampiezze:

* $\alpha = 45°$;
* $\beta = 117°$;
* $\gamma = 86°$;
* $\delta = 112°$.

Le somme delle ampiezze delle due coppie di angoli opposti valgono:

$\alpha + \gamma = 45 + 86 = 131°$;

$\beta + \delta = 117 + 112 = 229°$.

L'espressione

$\cos (\alpha + \gamma)/2 = \cos (131/2) = \cos 65{,}5° \approx 0{,}41469324$

e quella

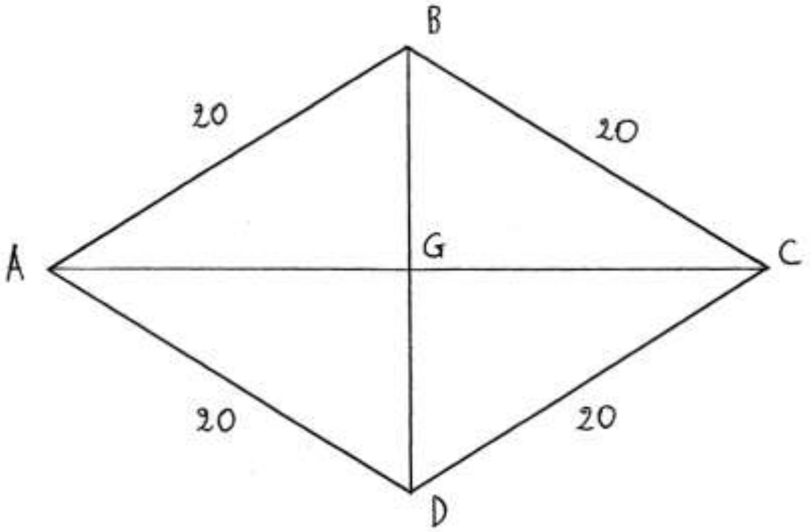
$\cos (\beta + \delta)/2 = \cos (229/2) = \cos 114{,}5° \approx -0{,}41469324$

hanno lo stesso *valore assoluto*.

Applicando la formula di Bretschneider con questi nuovi dati, si ricava che l'area di ABCD si è ridotta a 380,2370972 pertiche^2 e cioè a 380 pertiche^2, ciò che conferma l'assurdità dell'impiego della formula degli agrimensori.

I limiti della formula degli agrimensori

La figura che segue rappresenta un rombo con lati lunghi 20:



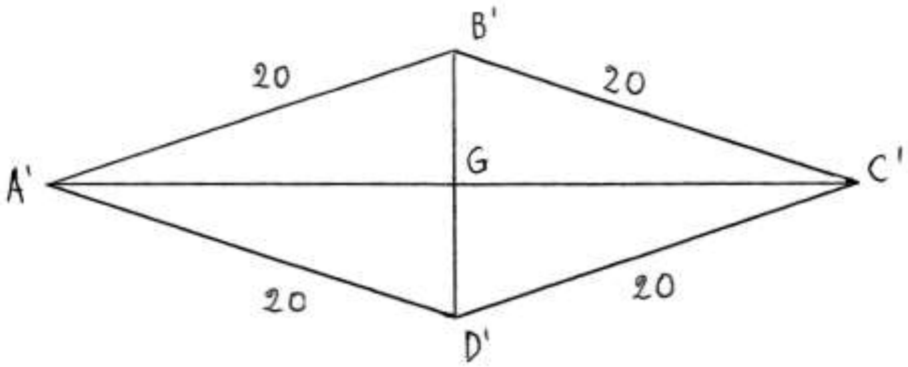
L'area di un rombo è correttamente calcolata moltiplicando le diagonali AC e BD e dividendo il risultato per 2:

Area ABCD = (AC * BD)/2 .

Applicando la formula degli agrimensori, l'area è data da

Area = (AB * BC)/2 * (BC + AD)/2 = (20 + 20)/2 * (20 + 20)/2 = 400, che è l'area di un quadrato con lato lungo 20 unità. Il rombo *non* può avere area uguale a quella del quadrato.

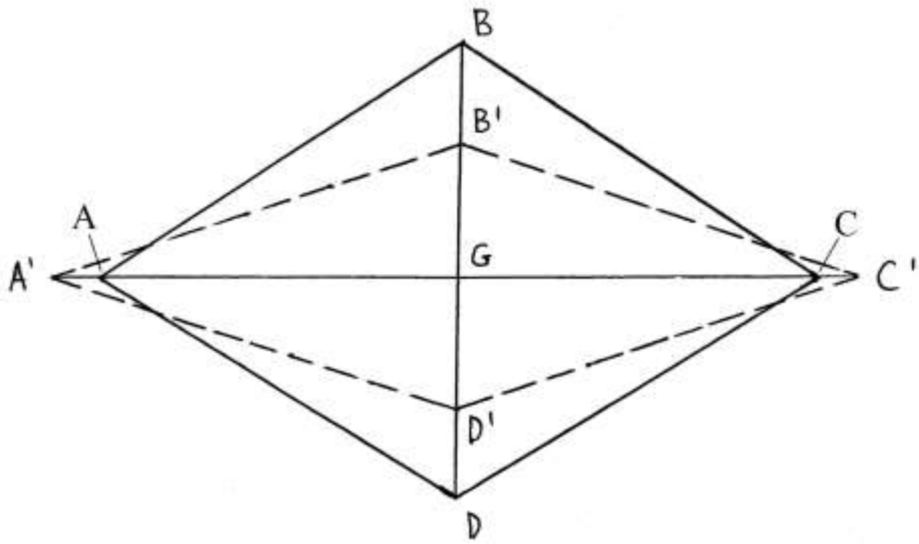
Anche il rombo della figura che segue ha lati lunghi 20 unità:



Con la formula degli agrimensori, la sua area è:

Area = (AB * BC)/2 * (BC + AD)/2 = (20 + 20)/2 * (20 + 20)/2 = 400 e cioè è uguale a quella del primo rombo.

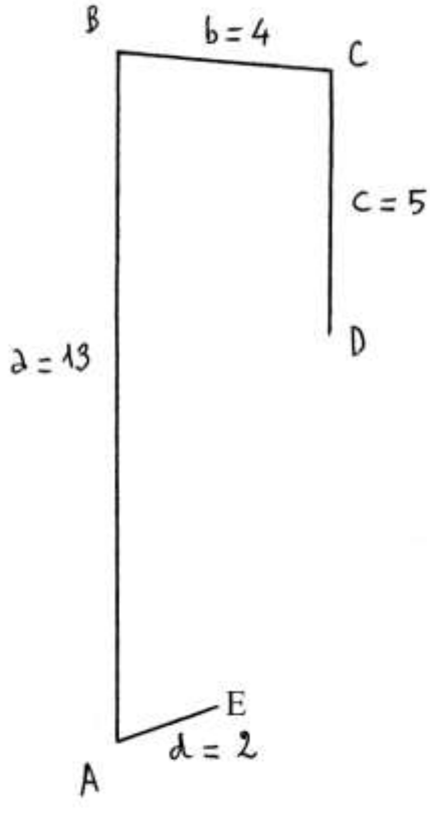
Mettendo a confronto i due rombi si ha il seguente grafico:



Semplicemente osservando la figura e senza ricorrere a dimostrazioni geometriche, risulta evidente che il rombo ABCD ha una superficie maggiore di quello A'B'C'D'.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro limite è mostrato con il grafico che segue:



ABCDE è una *linea spezzata aperta*. I quattro segmenti possono essere ruotati a piacimento, ma essi non formeranno mai un quadrilatero.

La formula degli agrimensori si applica perfino a questo quadrilatero impossibile e fornisce un risultato assurdo:

Area ABCD = (a + c)/2 * (b + d)/2 = (13 + 5)/2 * (4 + 2)/2 = 9 * 3 = 27 .

Bibliografia

1. Alcuino di York, “Giochi matematici alla corte di Carlomagno. Problemi per rendere acuta la mente dei giovani”, a cura di Raffaella Franci, Pisa, Edizioni ETS, 2005, ristampa 2010, pp. 143.
2. Arrighi Gino, “Due trattati di Paolo Gherardi matematico fiorentino”, in “Accademia delle scienze di Torino. Atti. Classe di scienze morali storiche e filologiche”, Torino, v. 101 (1966-67), pp. 61-82 [ristampato in Gino Arrighi, “La matematica dell’età di mezzo”, Pisa, Edizioni ETS, 2004, pp. 81-98].
3. Balbus, “Presentation systématiques de toutes les figures”, a cura di Jean Yves Guillaumin, Napoli, Jovene Editore, 1996, pp. 217.
4. Caressa Paolo, “La matématica de los romanos: una vindicación” [in spagnolo], aprile 2012. http://www.caressa.it/pdf/matematica-romani.pdf
5. Caressa Paolo, “La matematica degli antichi Romani (I)”, in “XlaTangente”, n. 38, 2013, pp. 17 – 20.
6. Caressa Paolo, “La matematica degli antichi Romani (II)”, in “XlaTangente” , n. 39, giugno 2013, pp. 17 – 19.
7. Cuomo Serafina, “Ancient mathematics”, Londra – New York, Routledge, 2001, pp. xii-290.
8. D’Ambrosio Ubiratan, “Etnomatematica”, trad. it., Bologna, Pitagora Editrice, 2002, pp. XI-187.
9. Damerow Peter, “The Impact of Notation Systems: From the Practical Knowledge to Babylonian Geometry”, in “Spatial Thinking and External Representation. Towards a Historical Epistemology of Space”, Berlino, Edition Open Access, 2016, pp. 93-119.
10. Del Carmen Jorge y Jorge. Maria – Williams, Barbara – Gazza-Hume, Clara E. – Oliva, Arturo, “Mathematical accuracy of Aztech land survey assessed from record in the *Codex Vergara*”, in PNAS, september 13, 2001, vol. 108, n. 37, pp. 15053-15057.
11. Frontin [Frontino], “Frontin. L’Œuvre Gromatique”, “Commission des Communautés Européennes – Action Cost G2 “Paysages Antiques et Structures Rurales””, Luxembourg, 1998, pp. XIX-120.
12. Gazzaia (della) Tommaso, “Pratica di geometria e tutte misure di terre” (dal ms. C III. 23 della Biblioteca Comunale di Siena), a cura di Cinzia Nanni e con introduzione di Gino Arrighi, Siena, Servizio Editoriale dell’Università di Siena, 1982, pp. 77.
13. Gerberto d’Aurillac (Papa Silvestro II), “Opera Mathematica”, a cura di Nicolaus Bubnov, Berlino, R. Friedlander & Sohn, 1899, pp. CXIX + 620 + IV tavv. f.t.
14. Gerbertus_1_2010.pdf Roma, pp.297 http://www.icra.it/gerbertus
15. Gherardi Paolo, “Opera matematica. Libro di ragioni – Liber habaci”, Codici Magliabechiani Classe XI, nn. 87 e 88 (sec. XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze (a cura e con introduzione di Gino Arrighi), Lucca, Maria Pacini Fazzi Editore, 1987, pp. 173.
16. Ghersi Italo, “Matematica dilettevole e curiosa”, Milano, Hoepli, quinta ediz., 1988 (ristampa 2004), pp. VIII-777.
17. Ghione Franco, “Una formula corrotta”, https://art.torvergata.it/retrieve/handle/2108/122514/247374/Una%20formula%20corrotta.pdf .
18. “Les arpenteurs romains”. Hygin le Gromatique – Frontin, a cura di Jean-Yves Guillaumin, Parigi, Les Belles Lettres, 2005, pp. 265.
19. Gupta R.C. (Radha Charan), “An ancient approximate rule for the area of polygon”, in “Gaṇita Bhāratī”, Indian Society for History of Mathematics, vol. 12, Nos. 3-4 (1990), pp. 108-112.
20. Gupta R.C. (Radha Charan), “Primitive area of quadrilateral and averaging”, in “Gaṇita Bhāratī”, Indian Society for History of Mathematics, vol. 19, Nos. 1-4 (1997), pp. 52-59.

21. Gupta R.C., “Cultural Unity of Ancient Mathematics: the example of the Surveyor’s Rule”, in HPM Newsletter, No. 50, July 2002, pp. 2-3.
22. Gupta R.C., “Techniques of ancient empirical Mathematics”, in “Indian Journal of History of Science”, 45.1 (2010), pp. 63-100.
23. Høyrup Jens, “L’Algèbre de Jacopo de Florence: un défi a l’historiographie de l’algèbre presque-moderne”, 2000, pp. 18 (MARRAKECH_2002_Conference_contribution.pdf).
24. Høyrup Jens, “Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra”, Historia Mathematica, 33, (2006), pp. 4-42.
25. Høyrup Jens, “Jacopo da Firenze’s *Tractatus Algorismi* and Early Italian Abbacus Culture”, Basel – Boston – Berlin, Birkhäuser, 2007, pp. xii-482.
26. Hygin l’arpenteur, “L’étabilissement des limites” (traduzione francese), Napoli, Jovene Editore, 1996, pp. XIV-188.
27. Knijnik Gelsa: http://webapp1.dlib.indiana.edu/virtual_disk_library/index.cgi/4273355/FID840/eqtyres/erg/111575/1575.htm (accesso 24 aprile 2017)
28. Lewis M. J. T., “Surveying Instruments of Greece and Rome”, New York, Cambridge University Press, 2001, pp. xx-389.
29. Motte Magdeleine, “Manuscrit 327 de l’Inguimbertine dit « Traité d’Arpentage » (Bertran Boysset), traduzione dal provenzale in francese, Presses Universitaires de la Méditerranée, Montpellier, 2010, pp. 501.
30. Portet Pierre”, “Bertrand Boysset, la vie et les oeuvres techniques d’un arpenteur medieval (v.1355 – v.1416), Parigi, Éditions Le Manuscrit, tomo I, 2004, pp. 272 e tomo II, 2004, pp. 323.
31. Spiesser Maryvonne, “Les manuels d’arithmétique pour les marchands dans la France du XV^{e} siècle”, in “Bulletin de l’APMEP”, n° 444, 2003, pp. 32-50.
32. Materni Marta, “Gerberto d’Aurillac: un maestro delle *artes reales*”, Fregene (Roma), Edizioni Spolia, 2007, cd-rom.
33. Orbetano da Montepulciano, “Regole di geometria pratica” [dal manoscritto Moreni 130 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze], a cura e con introduzione di Annalisa Simi, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, n. 19, Siena, 1991, pp. 95.
34. Victor Stephen K., “Practical geometry in the High Middle Ages”, Filadelfia, The American Philosophical Society, 1979, pp. xii-638.
35. Williams Barbara J. – Del Carmen Jorge y Jorge Maria, “Surface area computation in ancient Mexico: documentary evidence of Acolhua-Aztec proto-geometry”, in “Simmetry: Culture et Scienxe”, vol. 12, Nos. 1-2, 2001, pp. 185-200.