Parole chiave: unità di misura toscane; aree di figure piane (triangoli, quadrilateri e poligoni regolari e non regolari); trasformazione di una figura piana in altre di uguale area; figure circolari; volumi di solidi, botti e tini

LORENZO FORESTANI

Lorenzo Forestani (Pescia, 1585 – 1623) è stato un francescano e un insegnante nella sua città natale. È l'autore di un importante trattato: la "*Pratica d'Arithmetica e Geometria*", più volte stampato.

Il trattato è diviso in sette Libri: i primi cinque sono dedicati all'Aritmetica, il sesto alla Geometria e il settimo si occupa dell'uso degli strumenti di misura degli agrimensori.

Questo articolo si occupa dei contenuti del Libro sesto, quello consacrato alla Geometria.

NOTE

I problemi sono numerati da Forestani: per chiarezza, i numeri sono qui indicati racchiusi fra parentesi quadre e scritti a sinistra del titolo del singolo problema, ad esempio:

"[29] Volume dell'acqua contenuta in un pozzo".

Nel Libro sono citate unità di misura lineari, superficiali e volumetriche usate sia a Pescia (in Valdinievole) che in altre località della Toscana.

- Dato che, ad esempio, il braccio è un'unità di misura che – a seconda delle circostanze – può indicare una lunghezza, una superficie o un volume, si è cercato di utilizzare le seguenti convenzioni:
  * braccio o braccia, senza connotazione: indica una lunghezza;
  * braccia quadre, per le superfici;
  * braccia cubiche, per i volumi.
- Alcuni problemi non recano l'indicazione delle unità di misura: la trascrizione che ne è fatta in questo articolo rispetta le scelte di Farnetani.
- Le lettere apposte ai vertici delle figure seguono le indicazioni di quelle usate da Forestani: egli usa le maiuscole. In un quadrilatero le lettere sono scritte in un modo per cui leggendole in senso orario esse risultano così disposte: A → B → D → C.
- In questo articolo sono stati rifatti e/o modificati con aggiunte alcuni degli schemi originali e altri disegni sono stati inseriti nel testo delle soluzioni di problemi che ne erano prive.
- In diversi problemi sono proposte figure geometriche contenenti triangoli rettangoli i cui lati hanno lunghezze che formano terne primitive o derivate: questa scelta dell'autore ha facilitato i calcoli, ma nella realtà queste situazioni non sono le più comuni.
- I numeri misti con frazioni sono stati scritti fra parentesi tonde con il simbolo infisso "+": "2 1/3" di Forestani è stato reso con "(2 + 1/3)".
- In alcuni casi i numeri misti sono stati trasformati nei loro equivalenti decimali: "2 ½" → "2,5".
- Talvolta è stato usato il simbolo "≈" che sta per "circa": $\pi \approx 3{,}14 \approx (3 + 1/7) \approx (22/7)$.

-	Alcuni argomenti sono ampliati in appositi riquadri chiamati “APPROFONDIMENTO”, graficamente separati dal testo.

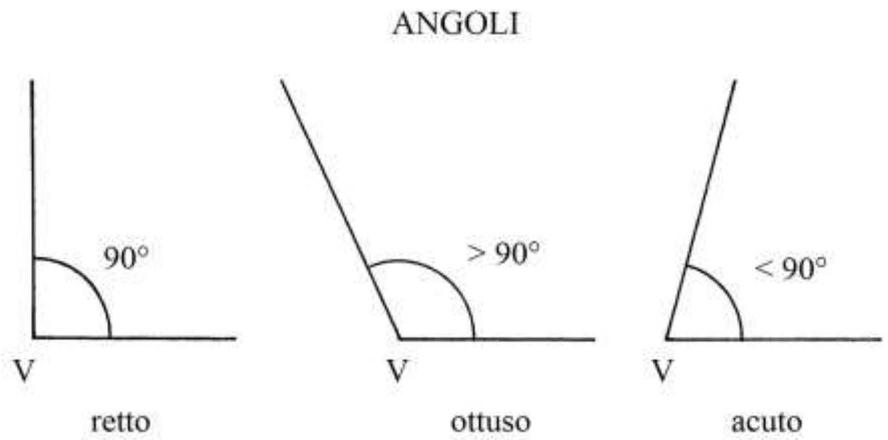
LIBRO SESTO
===========

La parte iniziale di questo Libro contiene alcune definizioni di geometria elementare, alcune delle quali sono accompagnate da degli schemi.

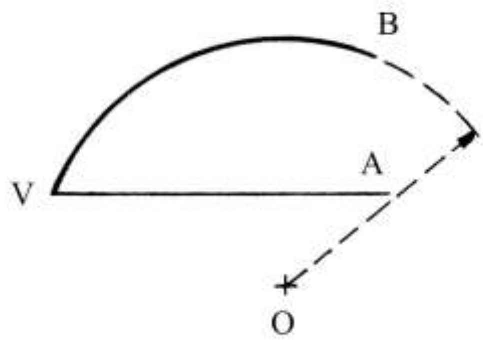
Secondo Forestani, il bravo agrimensore deve conoscere cinque cose: *punto*, *linea*, *angolo*, *superficie* e *corpo*.

Qui sono riprodotte alcune figure con le relative denominazioni usate dall’Autore che talvolta differiscono dalle definizioni oggi impiegate per alcuni enti geometrici: negli schemi sono talvolta riportate entrambe.

Gli angoli sono formati da linee rette. Le tre forme degli angoli sono:

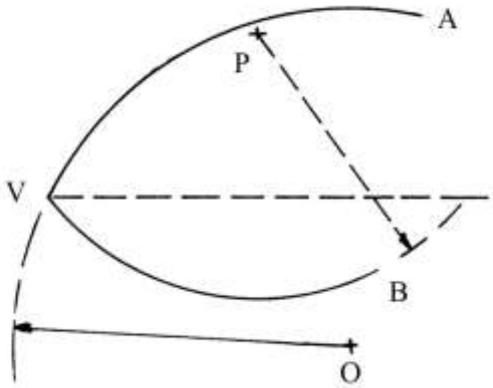


Forestani cita poi un’altra famiglia di angoli: quelli che hanno almeno un lato formato da una curva (arco di circonferenza o di altra curva piana):



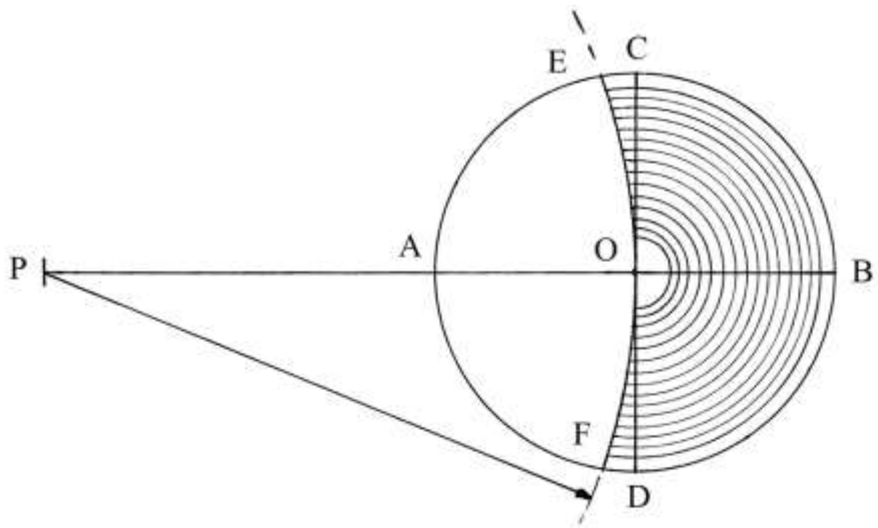
Un *angolo misto* ha un lato rettilineo, VA, e il secondo, VB, è un arco di circonferenza di centro O e raggio OV = OB.

Un *angolo curvilineo* ha due lati curvi, come nell’esempio che segue:



Il lato VA è un arco di circonferenza di centro O e raggio OV = OA e il lato VB è un altro arco di circonferenza di con centro in P e raggio PV = PB.

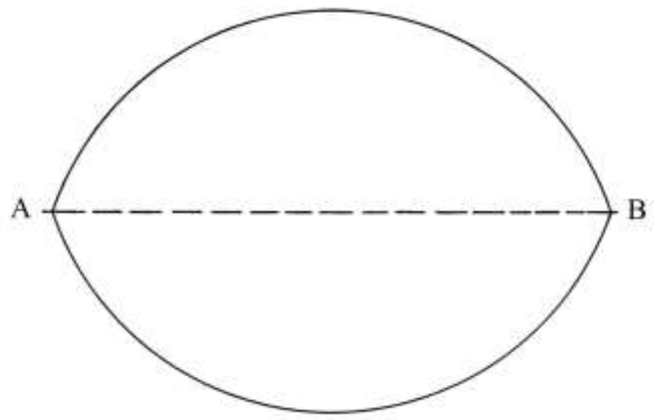
Un terzo esempio di questo tipo di archi è presentato nello schema che segue:



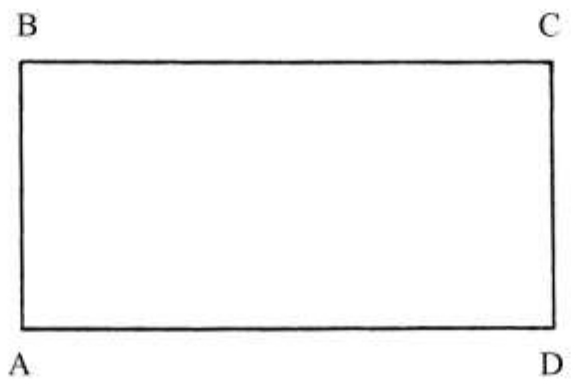
Forestani lo chiama "*angolo sferale*" e lo definisce come l'intersezione di due cerchi disposti in croce. Essi hanno centri in O e P e raggi OA e PO.

Per le superfici sono presentati quattro esempi:

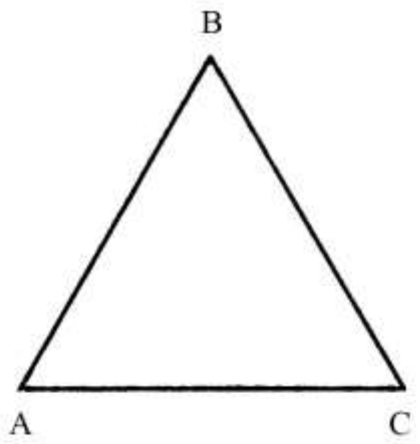
* *superficie curvilinee* [è così denominata da Forestani]: essa è una figura piana chiusa, delimitata da due linee curve:



* *superficie piana quadrangolare*: è una superficie delimitata da quattro segmenti, come è il caso del rettangolo ABCD:

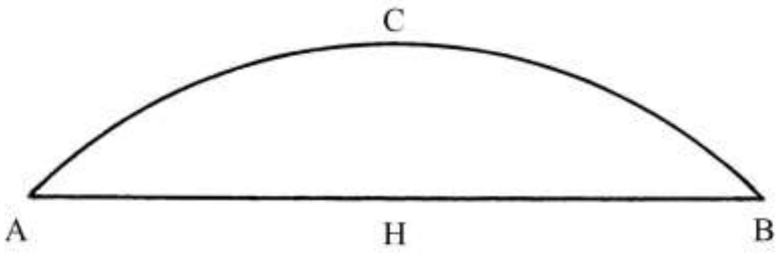


* *superficie piana triangolare*: è delimitata da tre segmenti consecutivi, come il triangolo ABC:



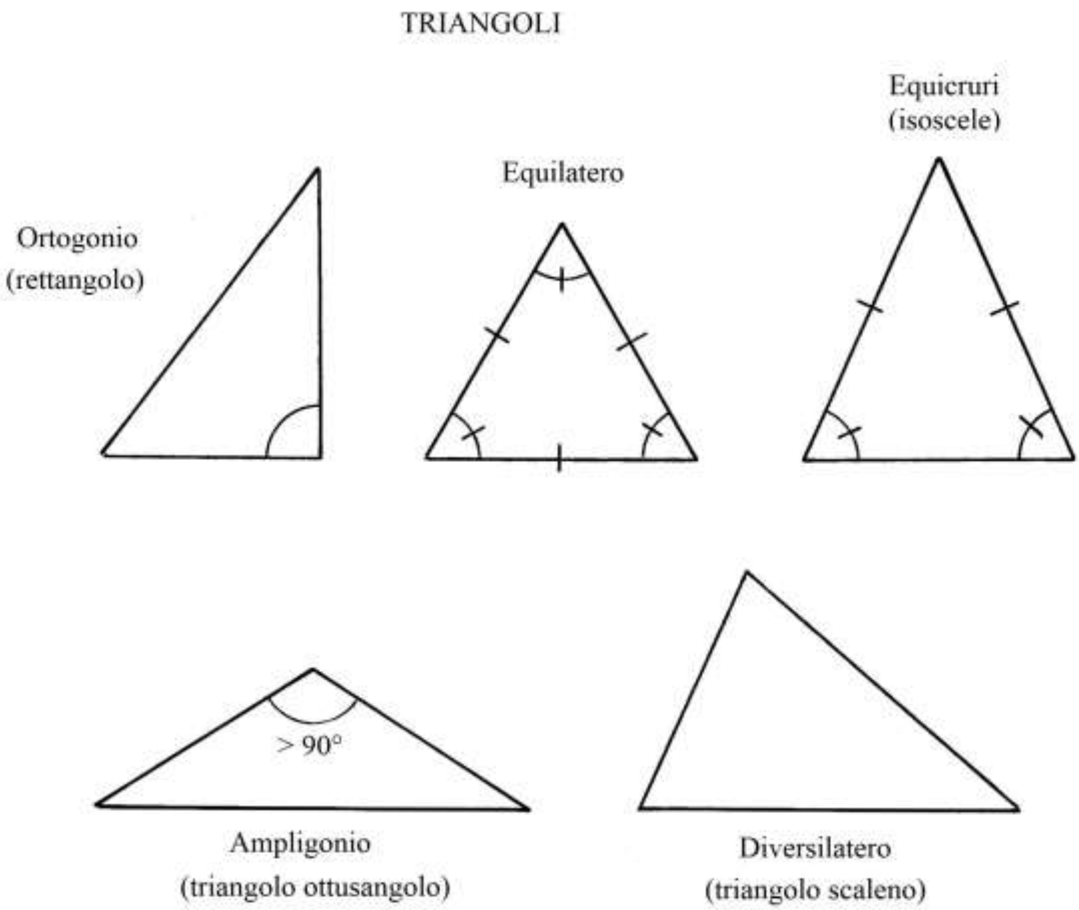
* *superficie mista*: è racchiusa da un segmento (AHB) e da un arco (ACB):

.



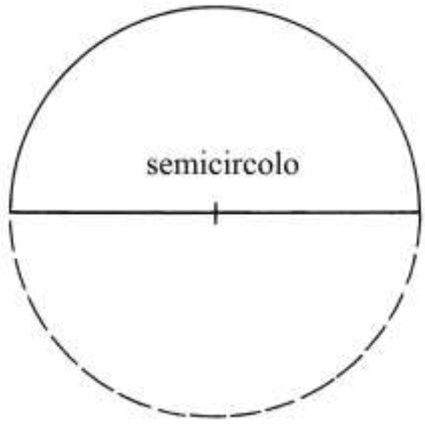
<u>I triangoli</u>

Forestani descrive *cinque* diversi tipi di triangoli dei quali fornisce il nome che per alcuni è differente da quello oggi usato (e indicato nello schema fra parentesi tonde):



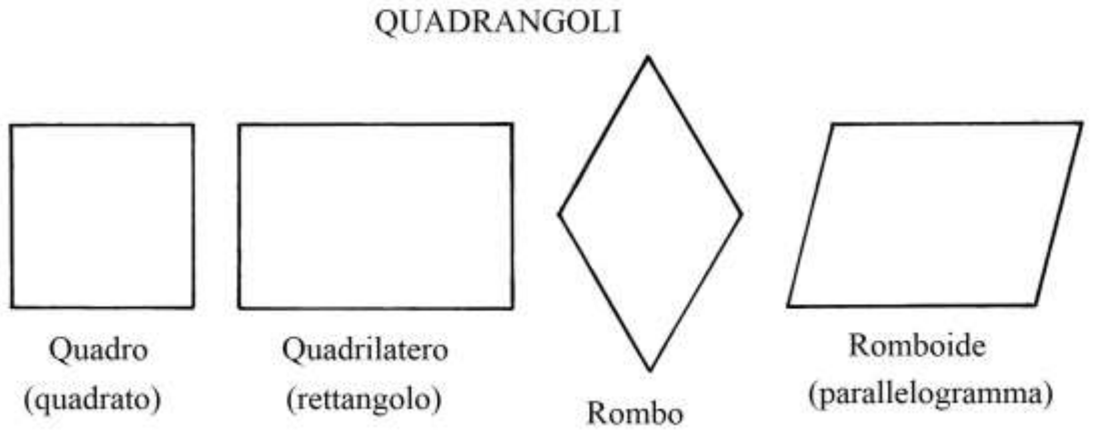
<u>Circonferenza e cerchio</u>

La nomenclatura usata da Forestani riguardo alla circonferenza e al cerchio coincide quasi del tutto con quella odierna, tranne che per il semicerchio che egli chiama *semicircolo*:



I quadrilateri

Forestani presenta quattro esempi di "*figure quadrangolari*":



Nello schema sono riportati sia i nomi attribuiti dall'Autore sia le moderne definizioni, se esistono, racchiuse fra parentesi tonde.

Secondo Euclide *romboide* indicava un quadrilatero che non era né un rombo né un rettangolo: il termine non è più usato.

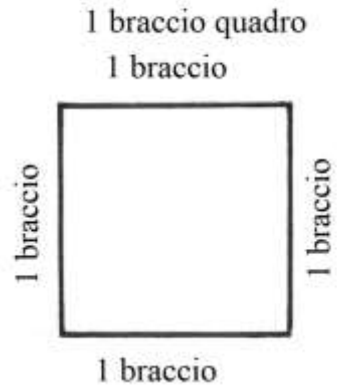
LE UNITÀ DI MISURA USATE A FIRENZE

A Firenze i terreni erano misurati in *staiora*: uno staioro si divideva in 12 *panora*, un panoro in 12 *pugnora* e un pugnoro era formato da 12 braccia quadre:

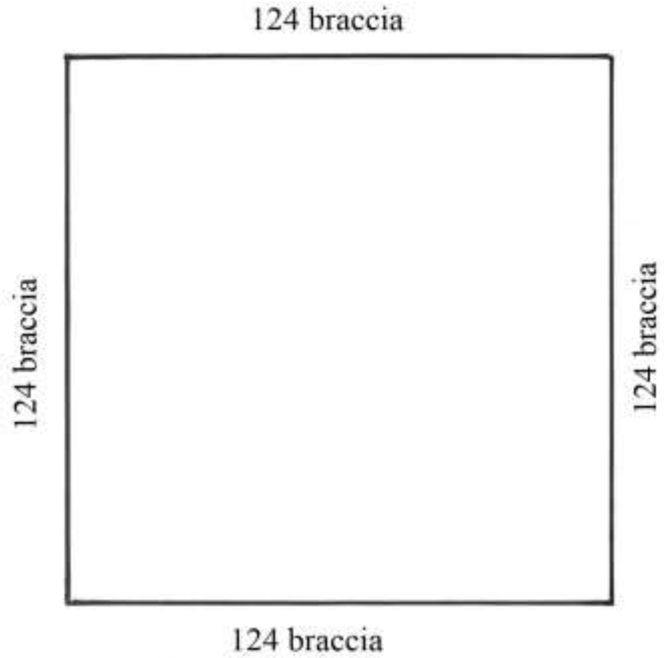
* 1 pugnoro = 12 braccia quadre;
* 12 pugnora = 1 panoro = 12^2 braccia quadre = 144 braccia quadre;
* 12 panora = 1 staioro = 12^2 pugnora = 12^3 braccia quadre = 1728 braccia quadre.

Forestani ricorda che il *braccio* usato per misurare la terra era diverso da quello impiegato per i panni e per gli altri impieghi: il primo era noto come *braccio da terra*.

Un braccio quadro era l'area di un quadrato con lati lunghi 1 braccio:



Un campo ha forma quadrata con lati lunghi 124 braccia:



L'area S di questo campo è:

S = 124 * 124 = 15376 braccia quadre.

Questo dato è poi progressivamente convertito nei multipli del braccio quadro:

* 15376/12 = 1281 pugnora + *4 braccia quadre*;
* 1281/12 = 106 panora + *9 pugnora*;
* 106/12 = 8 staiora + *10 panora*.

Sommando tutti i resti con il risultato in staiora si ottiene:

S = 8 staiora + 10 panora + 9 pugnora + 4 braccia quadre.

Utilizzando due sole unità di misura, l'area S è:

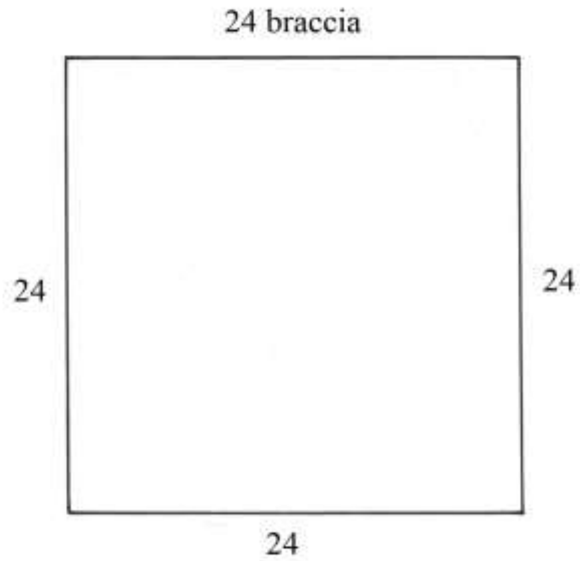
S = 8 staiora + (10 * 144 + 9 * 12 + 4) braccia quadre = 8 staiora + 1552 braccia quadre.

Le unità di misura usate a Siena

Nello Stato senese le terre erano vendute a *staia*.

Esse erano misurate a *tavole*: una tavola era lunga 6 braccia e la tavola quadra valeva 36 braccia quadre. La tavola era rappresentata da una pertica lunga esattamente 6 braccia: tavola e pertica sono sinonimi.

Un quadrato ha lati lunghi 24 braccia:



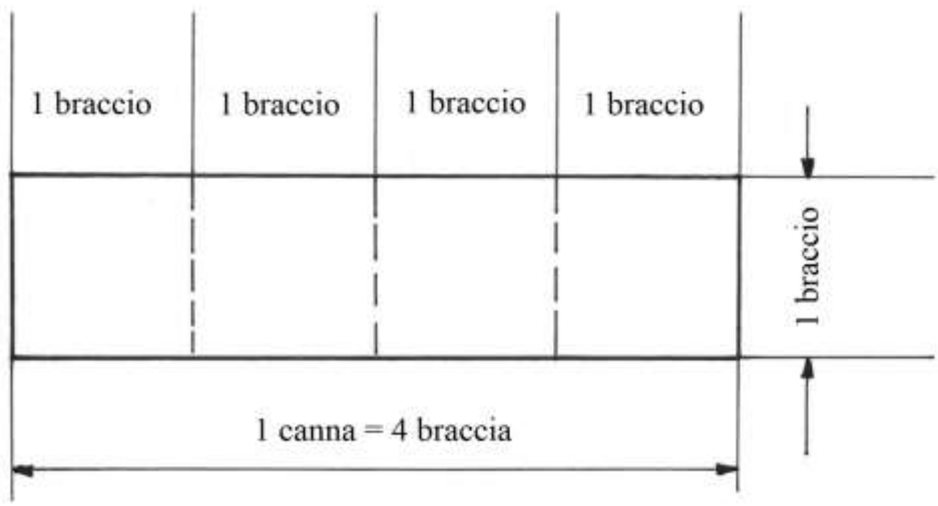
La sua area S è:

S = 24 * 24 = 576 braccia quadre che equivalgono a:

S = 576/36 tavole quadre = 16 tavole quadre.

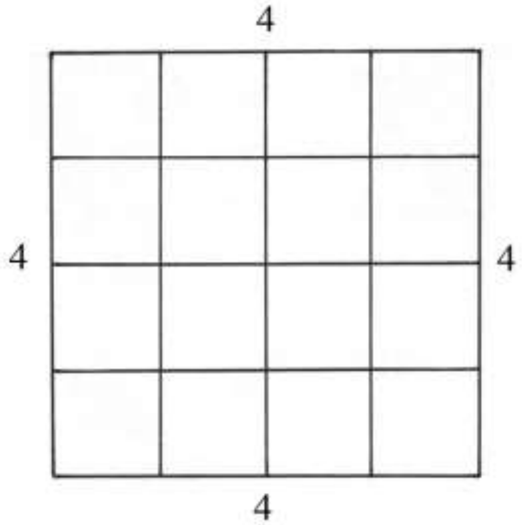
Forestani descrive un comportamento errato di alcuni misuratori: essi convertono l'area del quadrato dividendo solo per 6 (e non per 36) perché con la canna lunga 6 braccia ritengono che ogni 6 braccia – lineari – sia una canna quadrata. L'Autore invita a non confondere una linea con una superficie: forse in questo comportamento errato di alcuni vi è una vaga traccia dell'uso saltuario delle unità di misura strutturate secondo la tecnica delle "linee larghe", metodo utilizzato nel Medioevo a Pisa; una vaga traccia dell'uso delle "linee larghe" a Siena può ravvisarsi negli scritti dell'abacista Dionigi Gori (Siena 1510 – dopo il 1586).

Può darsi – è solo un'ipotesi – che a Siena, e anche in altre località, l'acquisto di un taglio di stoffa larga 1 braccio e lunga 4 braccia (e cioè una canna lineare) fosse chiamato comunemente "*una canna quadrata*": le stoffe sono sempre state acquistate misurando la lunghezza dato che la larghezza (l'*altezza*) delle singola pezza era fissa.



Sembra che Forestani – a p. 434 del suo trattato – non abbia ben chiara la differenza fra le lunghezze della tavola o pertica e della canna: la prima era lunga 6 braccia e la seconda 4 braccia.

La figura che segue presenta un quadrato che ha lati lunghi *4 braccia* e cioè *1 canna*:



La sua area è:

S = 4 * 4 = 16 braccia quadre = 1 canna quadra.

<u>Le unità di misura usate a Pisa</u>

A Pisa il terreno veniva misurato in *staiora*: uno staioro era formato da 66 pertiche quadre.
La pertica lineare pisana era lunga 5 braccia.
Un campo ha forma quadrata e i suoi lati sono lunghi 30 pertiche:

La sua area S è:

S = 30 * 30 = 900 pertiche quadre.

In staiora l’area è:

S = 900/66 staiora = (13 staiora + 42 pertiche quadre).

Le unità di misura usate a Pescia

A Pescia e nella Valdinievole i terreni erano misurati in *coltre*, *quartieri*, *scale* e *pertiche*.

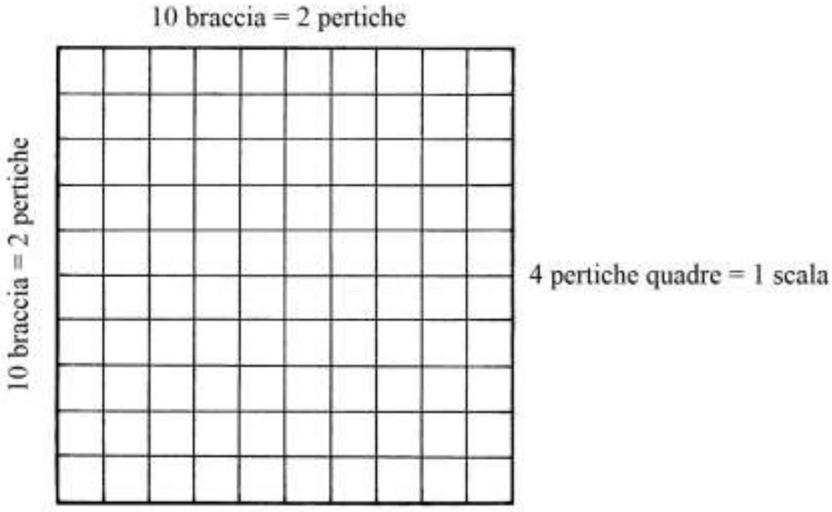
Lo strumento di misura lineare era la *canna* o *pertica* lunga 5 braccia.

L’Autore informa che Pescia, Montecarlo, Buggiano, Montecatini, Uzzano e Montevettolini usavano unità di misura lineari recanti gli stessi nomi – ad esempio canne e pertiche – ma che avevano lunghezze differenti.

A Pescia, un quadrato con lati lunghi 2 pertiche o canne aveva area S che è:

S = 2 * 2 = 4 pertiche quadre.

4 pertiche quadre valevano *1 scala*:



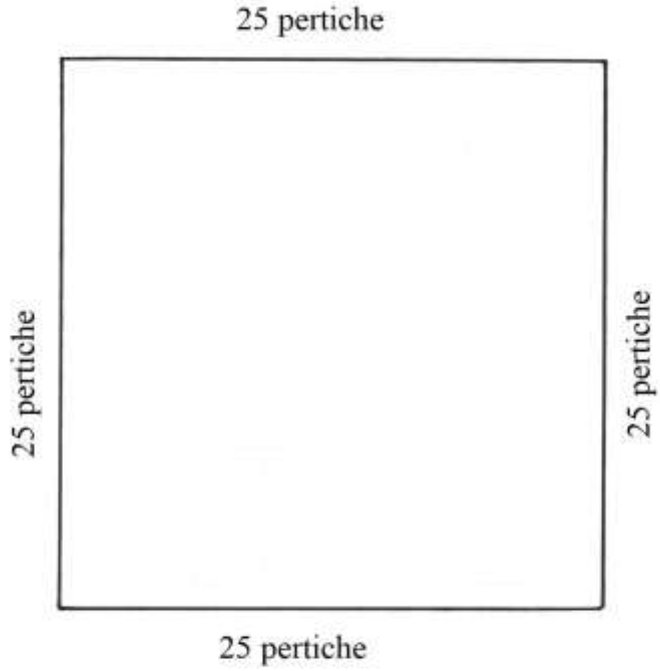
30 scale formavano *1 quartiere* e 4 quartieri componevano *1 coltra*:

* 1 pertica (lineare) = 5 braccia;
* 1 pertica quadra = 25 braccia quadre;
* 4 pertiche quadre = 1 scala =
* 30 scale = 1 quartiere;
* 4 quartieri = 1 coltra.

In *braccia quadre* si avevano le seguenti equivalenze:

* 1 pertica quadra = 25 braccia quadre;
* 1 scala = 4 pertiche quadre = 100 braccia quadre;
* 1 quartiere = 30 scale = 120 pertiche quadre = 3000 braccia quadre;
* 1 coltra = 4 quartieri = 120 scale = 480 pertiche quadre = 12000 braccia quadre.

Un campo ha forma quadrata con lati lunghi 25 pertiche:



La sua area S è:

S = 25 * 25 = 625 pertiche quadre.

L’area è poi convertita:

* 625/4 scale = 156 scale + *1 pertica quadra*;
* 156/30 quartieri = 5 quartieri + *6 scale*;
* 5/4 coltre = 1 coltra + *1 quartiere*.

Sommando i resti con 1 coltra si ha:

S = 625 pertiche quadre = (1 coltra + 1 quartiere + 6 scale + 1 pertica quadra).

- APPROFONDIMENTO -

Alcune informazioni sulle unità di misura usate a Pescia e negli altri centri della Valdinievole sono ricavabili dalle “Tavole di Ragguaglio” pubblicate nel 1782 a seguito della riforma metrologica introdotta in Toscana per volere del Granduca Pietro Leopoldo e dalle “Tavole di Ragguaglio” del Regno d’Italia pubblicate nel 1877.

Le pagine 379 e 380 che sono di seguito riprodotte sono ricavate da questa seconda pubblicazione.

PROVINCIA DI LUCCA

CIRCONDARIO DI LUCCA

COMUNI	MISURE LOCALI – DENOMINAZIONE	MISURE LOCALI – VALORE in MISURE METRICHE	MISURE METRICHE – DENOMINAZIONE	MISURE METRICHE – VALORE in MISURE LOCALI
	MISURE DI LUNGHEZZA			
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA	Braccio fiorentino	Metri 0,5836	Metro	Braccia 1,7134
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA	Passetto	1,1673	Id.	Passetti 0,8567
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA	Canna agrimensoria	2,9181	Id.	Canne 0,3427
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, ANTELMINELLI, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Braccio di Lucca	0,5905	Id.	Braccia 1,6935
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, ANTELMINELLI, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Canna di Lucca	2,3620	Id.	Canne 0,4234
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, ANTELMINELLI, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Pertica di Lucca	2,9525	Id.	Pertiche 0,3387
MONTECARLO	Braccio antico	0,5934	Id.	Braccia 1,6853
MONTECARLO	Braccio antico da terra	0,5696	Id.	1,7555
PIETRASANTA, STAZZEMA, SERRAVEZZA	Pertica	3,1881	Id.	Pertiche 0,3137
UZZANO	Braccio a terra	0,5743	Id.	Braccia 1,7412

Il Braccio fiorentino si divide in 20 Soldi,
il Soldo in 12 Denari,
il Denaro in 12 Punti.
Il Passetto, misura da stoffe, è eguale a 2 Braccia.
La Canna agrimensoria, base delle misure dei terreni, è eguale a 5 Braccia.
Una misura di 4 Braccia dicesi Canna mercantile.
Il Braccio lucchese dividesi in 12 Once,
l'Oncia in 12 Punti.
il Punto in 12 Atomi.
La Canna lucchese, misura mercantile ed architettonica, è di 4 Braccia.
La Pertica agrimensoria, base delle misure agrarie, è di 5 Braccia.
Il Braccio di Lucca secondo documenti che risalgono al 1809 sarebbe eguale a Metri 0,590432. Il suo valore metrico fu però stabilito in Metri 0,5905 e scelto così come tipo allorchè venne eseguita la triangolazione del già Ducato di Lucca, ed allorchè si è proceduto alle operazioni di riforma del Catasto.
Nel Comune di Serravezza per la misura del marmo si usava il Palmo di Genova eguale a Centimetri 25.
La Pertica di Pietra Santa è di Braccia fiorentine 5, Soldi 9, Denari 3.
Il Braccio a terra di Uzzano è di Soldi 19, Denari 8, 2/11 del Braccio fiorentino.

COMUNI	MISURE LOCALI – DENOMINAZIONE	MISURE LOCALI – VALORE in MISURE METRICHE	MISURE METRICHE – DENOMINAZIONE	MISURE METRICHE – VALORE in MISURE LOCALI
	MISURE DI SUPERFICIE			
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA	Braccio quadrato	Metri quadrati 0,3406	Metro quadr.	Braccia quadrate 2,9358
TUTTI I COMUNI DELLA PROVINCIA	Quadrato	Are 34,0619	Ettara	Quadrati 2,9358
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Braccio quadrato	Metri quadrati 0,3487	Metro quadr.	Braccia quadrate 2,8679
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Canna quadrata	5,5790	Id.	Canne quadrate 0,1792
LUCCA, BAGNI DI LUCCA, BORGO A MOZZANO, CAMAIORE, CAPANNORI, COREGLIA, PESCAGLIA, VIAREGGIO, VILLA BASILICA, MASSAROSA	Coltra	Are 40,0994	Ettara	Coltre 2,4938
MASSA E COZZILE, BORGO A BUGGIANO	Coltra	40,8743	Id.	2,4465
MONTECARLO	Braccio quadrato	Metri quadrati 0,3521	Metro quadr.	Braccia quadrate 2,8401
MONTECARLO	Coltra	Are 38,9392	Ettara	Coltre 2,5681
PIETRA SANTA, STAZZEMA, SERRAVEZZA	Staio	10,1637	Id.	Stata 9,8389

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
Montecarlo	Braccio a terra quadrato	Metri quadrati 0,3215	Metro quadr.	Braccia quadrate 3,0817
Uzzano	Coltra	Ettare 0,4010	Ettara	Coltre 2,4938

Il Quadrato, misura agraria, si divide in 10 Tavole,
la Tavola in 10 Pertiche,
la Pertica in 10 Deche,
la Deca in 10 Braccia quadrate.
La Coltra di Lucca, misura agraria, corrisponde a 460 Pertiche quadrate, e si divide in 4 Quartieri, ciascuno dei quali di 115 Pertiche quadrate.
Il Braccio quadrato nei conteggi si divideva in 12 parti eguali denominate Once superficiali, comprendenti ciascuna 12 Once quadrate.
L'Oncia superficiale si divide in 12 Punti superficiali,
il Punto superficiale in 12 Atomi superficiali.
La Coltra di Montecarlo, corrispondente a Braccia fiorentine quadrate 11431,881 si divida in 4 Quartieri,
il Quartiere in 30 Scale,
la Scala in 14 Pertiche quadrate,
la Pertica in 25 Braccia a terra quadrate.
La Coltra di Borgo a Buggiano si divide in 4 Quartieri,
il Quartiere in 30 Scale,
la Scala in 4 Pertiche,
la Pertica in 25 Braccia quadrate fiorentine.
Lo Staio di Pietra Santa, misura agraria, è di Braccia quadrate fiorentine 2983,8900 e si divide in 100 Pertiche quadrate.
La Coltra di Uzzano si divide in quattro Quartieri,
il Quartiere in 30 Scale,
la Scala in 4 Pertiche,
la Pertica in 25 Braccia quadrate.

MISURE DI VOLUME

COMUNI	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
Tutti i Comuni della Provincia	Traino	Metri cubi 0,3976	Metro cubo	Traini 2,5152
	Braccio cubo	0,1988	Id.	Braccia cube 5,0303
	Catasta	4,7714	Id.	Cataste 0,2096
Lucca, Bagni di Lucca, Borgo a Mozzano, Camaiore, Capannori, Coreglia, Pescaglia, Viareggio, Villa Basilica, Massarosa	Braccio cubo	0,2059	Id.	Braccia cube 4,8567
	Scandiglio	3,2944	Id.	Scandigli 0,3035
Barga	Passo	2,3855	Id.	Passi 0,4192
Pescia, Vellano, Montecarlo	Catasta	3,5783	Id.	Cataste 0,2795
	Braccio cubo	0,2089	Id.	Braccia cube 4,7870

Il Traino misura del legname da costruzione, è di due Braccia cube.
Il Braccio cubo si divide in 6 Bracciola o Braccia di Traino,
il Bracciolo in 12 Once di Traino,
l'Oncia di Traino in Soldi cubi 111 $^1/_9$,
il Soldo cubo in 27 Quattrini cubi,
il Quattrino cubo in 16 Denari cubi.
La Catasta, misura per la legna da fuoco, è di 24 Braccia cube, e si divide in Metà, Terzi, Quarti, ecc. La Catasta è rappresentata da un parallelepipedo rettangolo avente 6 Braccia di lunghezza, 1 $^1/_4$ di larghezza e 2 di altezza.
Il Braccio cubo di Lucca si divide in 12 Once solide,
l'Oncia in 12 Punti solidi,
il Punto in 12 Atomi solidi.
Lo Scandiglio di Lucca, misura per le pietre da taglio e pei sassi sparcati corrisponde a 16 Braccia cube.
Il Passo di Barga, misura pel legno da fuoco, è di 12 Braccia cube fiorentine.
La Catasta di Pescia, misura da legname, corrisponde a 18 Braccia cube. Talora però si fa di sole 16 Braccia cube, ed allora corrisponde a Steri 3,1807.

MISURE DI CAPACITÀ PER GLI ARIDI

COMUNI	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
Tutti i Comuni della Provincia	Sacco	Litri 73,0886	Ettolitro	Sacchi 1,3682
	Staio	24,3629	Id.	Staia 4,1046
	Quartuccio	0,3807	Litro	Quartucci 2,6269

Le località della Valdinievole, compresa Pescia, all'epoca (1877) facevano parte del Circondario di Lucca: con la creazione della Provincia di Pistoia, avvenuta nel 1927, i Comuni della Valdinievole cessarono di appartenere alla Provincia di Lucca per entrare a far parte di quella di Pistoia.

- -

Braccio da terra e braccio da panno

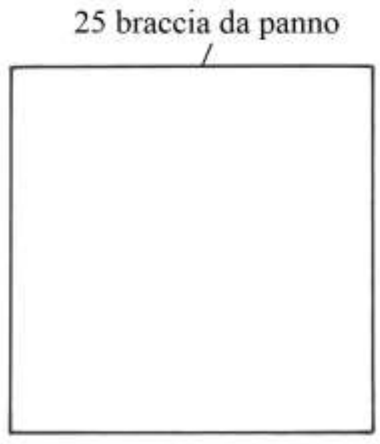
Il braccio usato per misurare i terreni era il braccio da terra, anche se Forestani non lo indica espressamente.

Ricordiamo alcuni rapporti fra le unità di misura usate a Pescia:

1 scala = 4 pertiche quadre = (4 * 25) braccia (da terra) quadre = 100 braccia (da terra) quadre.

Questa precisazione serve per comprendere il senso dell'ultimo paragrafo contenuto a p. 435 del trattato di Lorenzo Forestani.

Un quadrato ha lati lunghi 25 *braccia da panno*:



La sua superficie S è:

S = 25 * 25 = 625 braccia quadre da panno.

Forestani introduce una nuova equivalenza:

96 braccia quadre da panno = 1 scala.

Ne possiamo ricavare la seguente proporzione:

1 scala = 100 braccia (da terra) quadre = 96 braccia (da panno) quadre e

100 braccia (da terra) quadre = 96 braccia (da panno) quadre e

1 braccio (da panno) quadro = 100/96 di braccio (da terra) quadro e

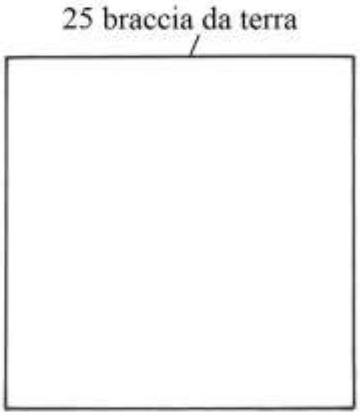
1 braccio da panno lineare = $\sqrt{(100/96)}$ braccio da terra lineare = $\sqrt{(25/24)}$ braccio da terra lineare.

La superficie di quel quadrato diviene:

S = 625/96 scale = (6 scale + 49 braccia da panno quadre).

Anche a Pescia il braccio da panno era leggermente più lungo del braccio da terra.

Infine, l'Autore fa l'esempio di un quadrato con lati lunghi 25 *braccia da terra*:



L’area S è:

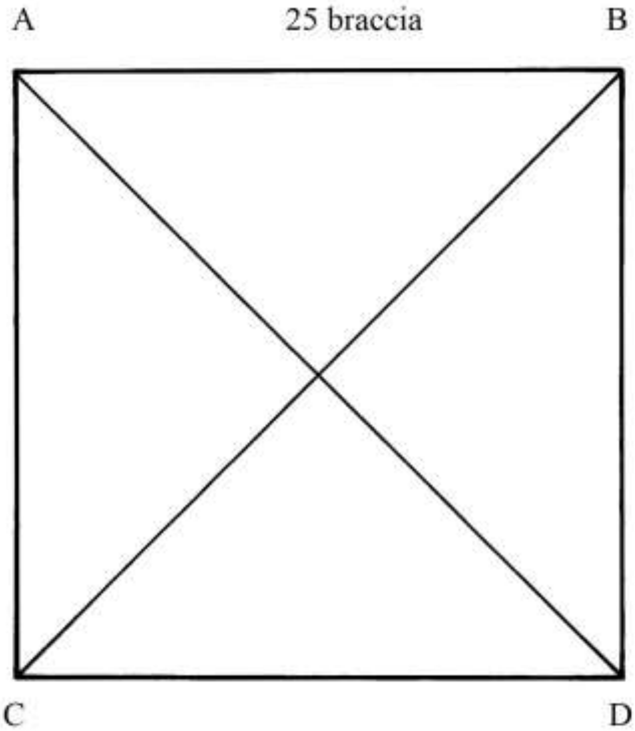
S = 25 * 25 = 625 braccia da terra quadre.

L’area è poi convertita nei multipli:

S = 625/25 pertiche quadre = 25 pertiche quadre = (25/4) scale = (6 scale + 1 pertica quadra).

<u>Diagonale di un quadrato</u>

Un quadrato ha lati lunghi 25 braccia: è chiesta la lunghezza di una diagonale, AD oppure BC.



La lunghezza è ricavata con una procedura che contiene i seguenti passi:

* calcolare l’area del quadrato: 25 * 25 = 625;
* moltiplicare per 2: 625 * 2 = 1250;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1250}$ = (35 + 5/14) braccia, lunghezza di AD.

La lunghezza di AD è:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 25^2 + 25^2 = 625 + 625 = 1250$ e

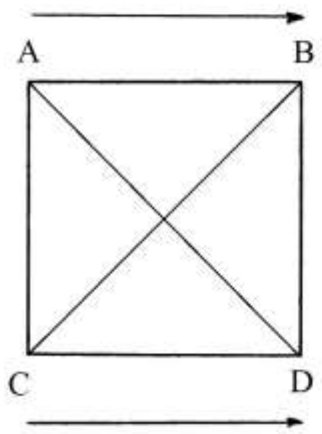
$AD = \sqrt{1250}$.

L'area di ABDC è:

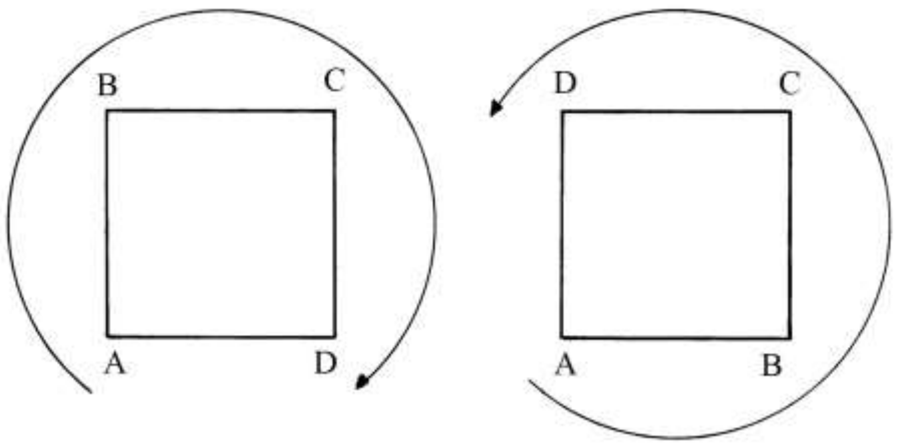
$S_{ABDC} = AB^2 = 25^2 = 625$ braccia quadre e il suo doppio è

$2 * S_{ABDC} = 2 * 625 = 1250$.

Le lettere apposte sullo schema originale (e su quello inserito qui sopra) sono maiuscole e sono orientate da sinistra verso destra:



Pare che oggi prevalga l'uso di apporre lettere disposte in senso orario o antiorario:



Area e diagonale di un rettangolo

Un rettangolo ha lunghezza di 30 pertiche e larghezza di 16.

Nel trattato, Forestani indica il rettangolo con la sigla "A.B.C.D.": le lettere sono tutte seguite da un *punto* (".").

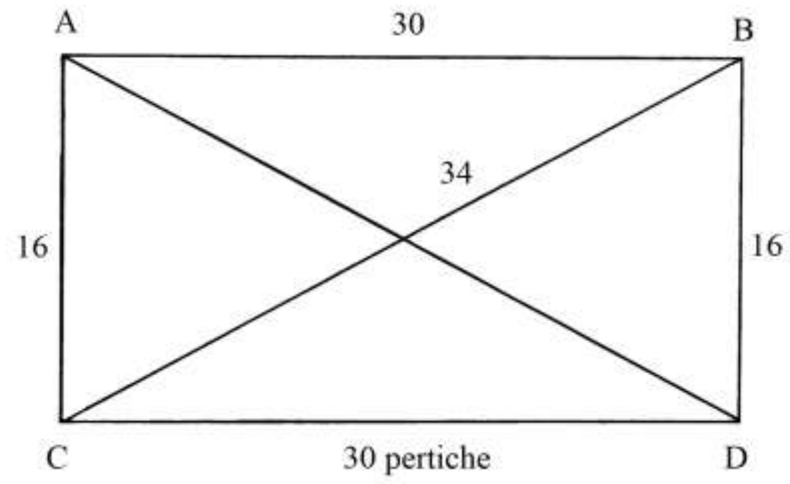
L'area del rettangolo è:

$S = CD * AC = 30 * 16 = 480$ pertiche quadre.

La lunghezza di una diagonale è:

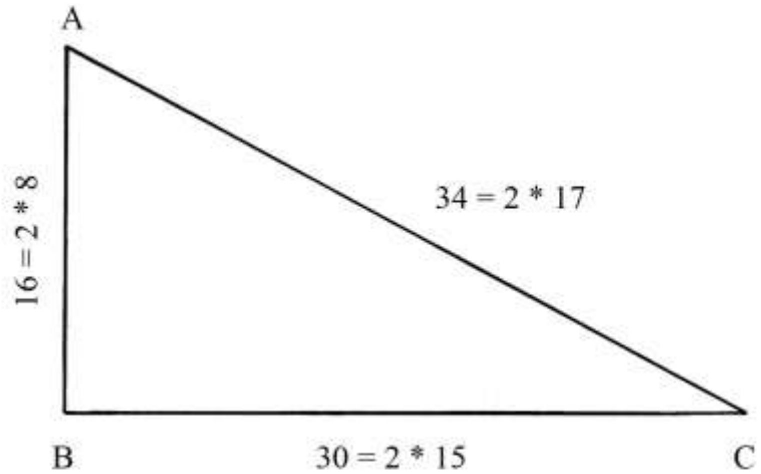
$AD^2 = CD^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 900 + 256 = 1156$ e

$AD = \sqrt{1156} = 34$ pertiche.



- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo rettangolo ABC ha lati con lunghezze che formano una terna derivata:



La terna 16 – 30 – 34 proviene da quella primitiva 8 – 15 – 17 i cui componenti sono moltiplicati per 2.

- -

<u>Area di un triangolo rettangolo</u>

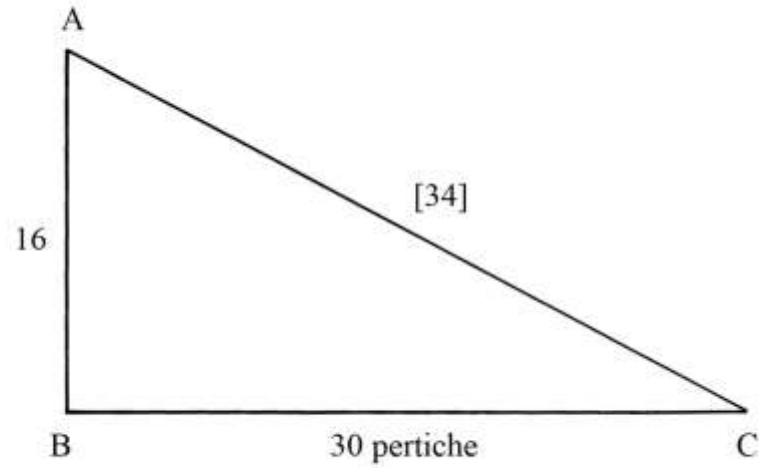
ABC è un triangolo rettangolo e i suoi cateti sono lunghi:

* AB = 16 pertiche;
* BC = 30 pertiche.

Il triangolo ABC è metà del rettangolo ABDC del precedente paragrafo.

La sua area S è:

S = AB * BC/2 = 16 * 30/2 = 240 pertiche quadre.



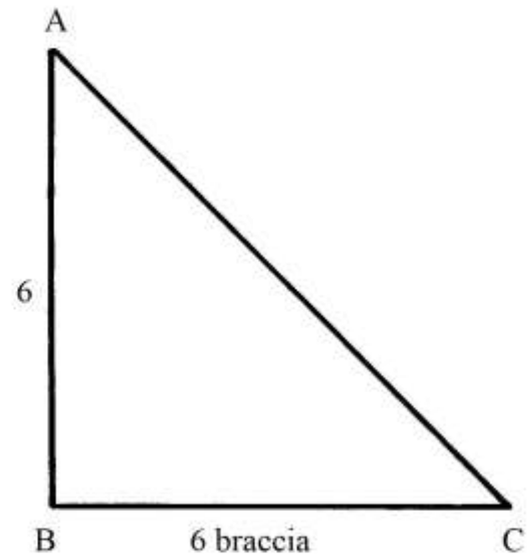
Per il calcolo dell'area, Farnetani presenta altre soluzioni equivalenti:

* S = (AB/2) * BC = (16/2) * 30 = 8 * 30 = 240 pertiche;
* S = (BC/2) * AB = (30/2) * 16 = 15 * 16 = 240 pertiche.

Secondo Forestani, l'ultima soluzione era il metodo usato dai misuratori.

<u>Triangolo rettangolo isoscele</u>

Un triangolo rettangolo ("*ortogonico*") isoscele ha cateti lunghi 6 braccia.



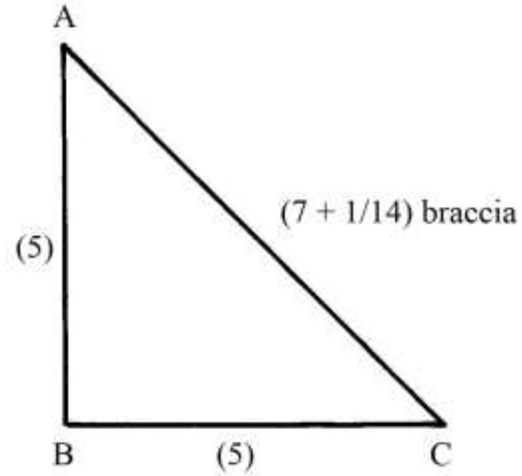
La sua area S è:

* S = AB * (BC/2) = 6 * (6/2) = 18 braccia quadre, oppure
* S = (AB/2) * BC = (6/2) * 6 = 18 braccia quadre.

PROBLEMI SULLE FIGURE PIANE

[1] Un altro triangolo rettangolo isoscele

Un triangolo rettangolo isoscele ha l'ipotenusa AC lunga (7 + 1/14) braccia.



Il problema chiede la lunghezza dei due cateti.

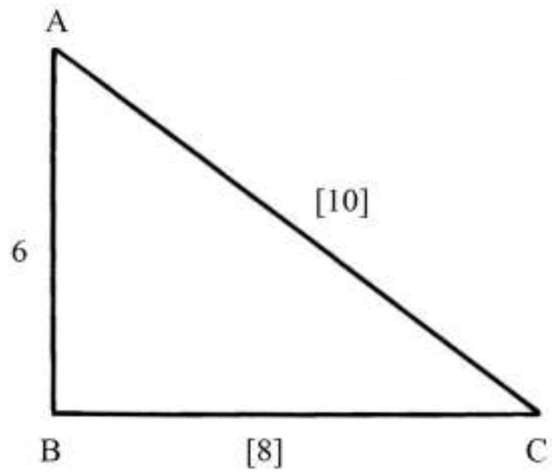
La soluzione contiene i seguenti passi che qui sono semplificati per arrotondare all'intero i risultati:

* moltiplicare (7 + 1/14) per sé stesso: (7 + 1/14) * (7 + 1/14) = 50;
* dividere per 2: 50/2 = 25;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{25}$ = 5 braccia, lunghezza dei due cateti.

[2] Triangolo rettangolo e terna pitagorica

Il problema implica l'uso delle terne pitagoriche e in particolare di una terna derivata da quella primitiva 3-4-5.

Deve essere costruito un triangolo rettangolo con lati aventi lunghezze in proporzione: è nota solo la lunghezza di un lato, uno dei due che formano l'angolo retto e cioè un cateto: AB è lungo 6 braccia e cioè un numero *pari*.



La procedura usata da Forestani per calcolare le lunghezze del secondo cateto e dell'ipotenusa è:

* dividere per 2 la lunghezza di AB: $6/2 = 3$;
* moltiplicare per sé stesso: $3 * 3 = 9$;
* sottrarre "1" da 9: $9 – 1 = 8$ braccia, lunghezza del secondo cateto, BC;
* aggiungere "2" a 8: $8 + 2 = 10$ braccia, lunghezza dell'ipotenusa AC.

L'Autore procede poi a delle verifiche.

Sono note le lunghezze di AB e di AC: quella di BC è data da:

$$BC^2 = AC^2 – AB^2 = 10^2 – 6^2 = 100 – 36 = 64 \quad \text{e}$$

$$BC = \sqrt{64} = 8 \text{ braccia.}$$

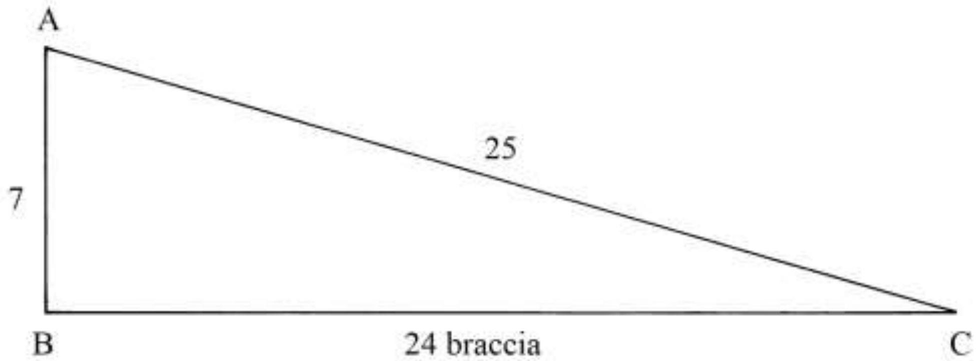
Sono date le lunghezze di AC e di BC e quella di AB è data da:

$$AB^2 = AC^2 – BC^2 = 10^2 – 8^2 = 100 – 64 = 36 \quad \text{e}$$

$$AB = \sqrt{36} = 6 \text{ braccia.}$$

[3] %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso è differente dal precedente e muove dal lato di un triangolo rettangolo la cui lunghezza è espressa da un numero *dispari*: il cateto AB è lungo 7 braccia.



La determinazione delle lunghezze del secondo cateto e dell'ipotenusa è ottenuta con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* sottrarre "1": $49 – 1 = 48$;
* dividere per 2: $48/2 = 24$ braccia, lunghezza del cateto BC;
* aggiungere "1": $24 + 1 = 25$ braccia, lunghezza dell'ipotenusa AC.

Le lunghezze dei lati del triangolo ABC formano una terna primitiva:

* $7^2 + 24^2 = 25^2$
* $49 + 576 = 625$.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Origine delle terne pitagoriche primitive secondo Pitagora</u>

Nella costruzione di triangoli rettangoli con lati aventi lunghezze formanti delle terne pitagoriche, Lorenzo Forestani ha applicato antiche regole risalenti ai geometrici greci, senza però citare alcun Autore.

Il matematico e ingegnere egiziano Erone (I secolo d.C.) e il matematico bizantino Proclo (412 – 485) attribuirono a Pitagora (circa 570 – 495 a.C.) una regola per la generazione di triangoli rettangoli con numeri interi *dispari* e diversi da 1.

La regola parte dalla scelta di un numero intero *dispari*, indicato con *n*, che corrisponde alla lunghezza del cateto più corto.

Facciamo un esempio e scegliamo il numero $n = 3$: esso rappresenta la lunghezza del cateto più corto del triangolo rettangolo equivalente.

La lunghezza del secondo cateto è data dalla formula:

cateto maggiore = $(n^2 – 1)/2 = (3^2 – 1)/2 = (9 – 1)/2 = 8/2 = 4$.

Infine, la lunghezza dell'ipotenusa è data da:

ipotenusa = $(n^2 – 1)/2 + 1 = (3^2 – 1)/2 + 1 = (9 – 1)/2 + 1 = 8/2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

L'ipotenusa è stata calcolata sommando 1 alla lunghezza del cateto maggiore.

Il triangolo che ne risulta è la terna pitagorica primitiva 3-4-5.

Facciamo un altro esempio per chiarire le idee e scegliamo il numero primo 5 quale lunghezza del cateto più corto.

Il cateto maggiore è lungo

$(5^2 – 1)/2 = (25 – 1)/2 = 24/2 = 12$ e l'ipotenusa è lunga:

$12 + 1 = 13$.

La terna pitagorica che ne risulta è 5-12-13 che è la seconda terna primitiva.

Sempre stando a Proclo, Platone (428 – 348 a.C.) avrebbe costruito le terne pitagoriche primitive a partire da un *numero pari*.

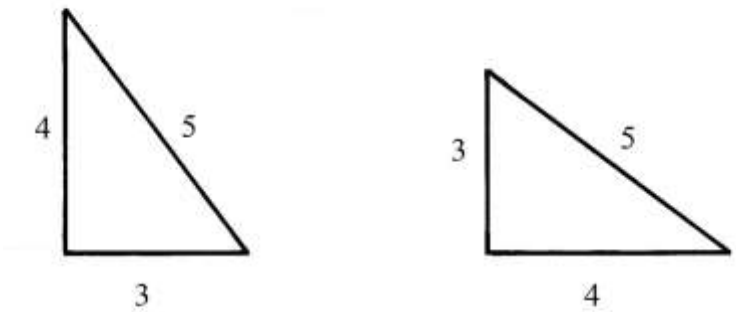
Il metodo è così articolato:

* scegliere un numero *pari*, ad esempio $n = 4$ che è la lunghezza del cateto più lungo del triangolo corrispondente alla terna;
* la lunghezza del cateto minore è data da

  $(n/2)^2 – 1 = (4/2)^2 – 1 = 2^2 – 1 = 4 – 1 = 3$;
* infine, la lunghezza dell'ipotenusa è ottenuta da:

  $(n/2)^2 + 1 = (4/2)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

La terna pitagorica che ne risulta è 4-3-5 che è identica a quella 3-4-5 facendole subire delle trasformazioni; la figura che segue mette a confronto i due metodi: a sinistra il triangolo 4-3-5 secondo il metodo di Platone e a destra quello ottenuto applicando il metodo di Pitagora:



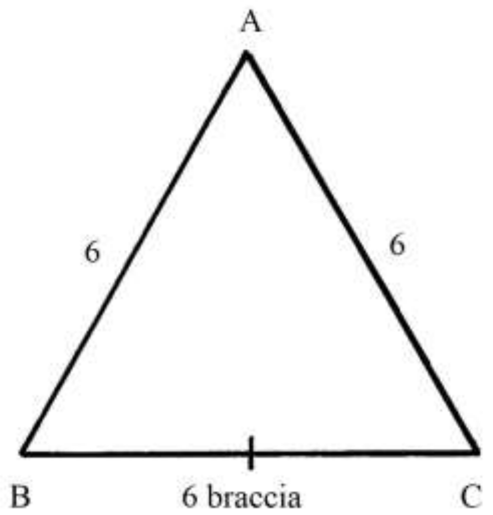
- -

[…] <u>Area di un triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 6 braccia.

L'Autore propone di calcolare la sua area con la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
* moltiplicare per 13/30: $36 * (13/30) = (15 + 3/5)$ braccia quadre, area del triangolo.

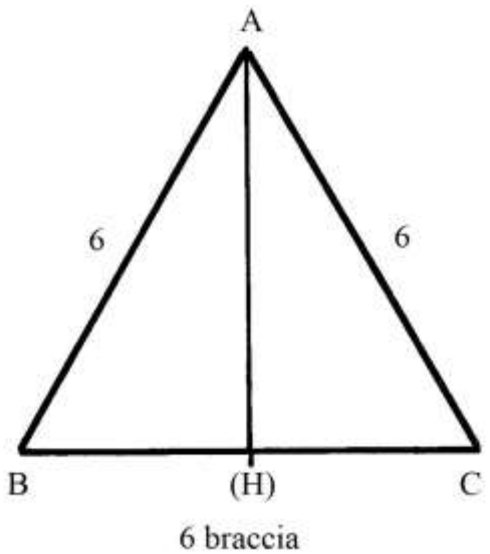


\- APPROFONDIMENTO -

La costante 13/30 ha bisogno di una spiegazione.

L'area S di un triangolo equilatero è data da:

$$S = AB * AH/2.$$



L'altezza AH divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e AHC.

La lunghezza di AH è:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 6^2 - (6/2)^2 = 36 - 9 = 27 \qquad e$$

$$AH = \sqrt{27} = 3 * \sqrt{3} = (AB/2) * \sqrt{3} = AB * (\sqrt{3})/2.$$

La formula dell'area può essere scritta come segue:

$$S_{ABC} = BC * AH/2 = AB * [AB * (\sqrt{3})/2]/2 = AB^2 * (\sqrt{3})/4.$$

La costante $(\sqrt{3})/2$ vale 0,8660254 e la costante $(\sqrt{3})/4$ è:

$$(\sqrt{3})/4 = [(\sqrt{3})/2]/2 = 0{,}8660254/2 = 0{,}4330127.$$

Il matematico e ingegnere egizio Erone di Alessandria (I secolo d.C.) propose una serie di formule approssimate per calcolare l'area di alcuni poligoni regolari a partire dal quadrato della lunghezza di un lato:

$$S = k * lato^2.$$

La costante *k* varia in relazione alla natura del poligono.

Per il triangolo equilatero *k* vale 13/30:

13/30 = 0,4(33), che è un numero decimale periodico: 4 è l'*antiperiodo* e (3) e (33…) è il periodo che si ripete all'infinito.

La differenza fra (√3)/4 e 13/30 è minima.

Forestani ha usato la regola proposta da Erone senza citare questo Autore.

- -

Una seconda soluzione è la seguente:

* sommare le lunghezze dei tre lati: AB + BC + AC = 6 + 6 + 6 = 18 [perimetro];
* dividere per 2: 18/2 = 9 [semiperimetro];
* sottrarre da 9 la lunghezza dei tre lati:
  9 – AB = 9 – 6 = 3,
  9 – BC = 9 – 6 = 3,
  9 – AC = 9 – 6 = 3;
* moltiplicare fra loro gli ultimi tre numeri: 3 * 3 * 3 = 27;
* moltiplicare l'ultimo numero per il semiperimetro: 27 * 9 = 243;
* estrarre la radice quadrata: √243 = (15 + 3/5) braccia^2, area di ABC.

La procedura è basata sulla formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo generico.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una terza soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per 13: 6 * 13 = 78;
* dividere per 15: 8/15 = (5 + 1/5), lunghezza dell'altezza AH;
* moltiplicare per metà della lunghezza di un lato (ad esempio BC):
  (5 + 1/5) * (6/2) = (5 + 1/5) * 3 = (15 + 3/5) braccia^2, area del triangolo ABC.

Questa terza soluzione offre all'inverso un metodo per ricavare la lunghezza dei lati del triangolo equilatero conoscendo soltanto quella dell'altezza AH, che è (5 + 1/5) braccia:

* moltiplicare la lunghezza di AH per 15: (5 + 1/5) * 15 = 78;
* dividere per 13: 78/13 = 6 braccia, lunghezza dei lati del triangolo ABC.

Anche questa soluzione usa la costante di Erone:

13/15 = 2 * (13/30).

[6] <u>Altezza di un triangolo isoscele</u>

ABC è un triangolo isoscele: i due lati obliqui AB e AC sono lunghi 13 braccia e la base BC è 10 braccia.

Il problema chiede la lunghezza dell'altezza AD (il "*catetto*").

Dato che il triangolo è isoscele, l'altezza AD cade nel punto medio di BC:

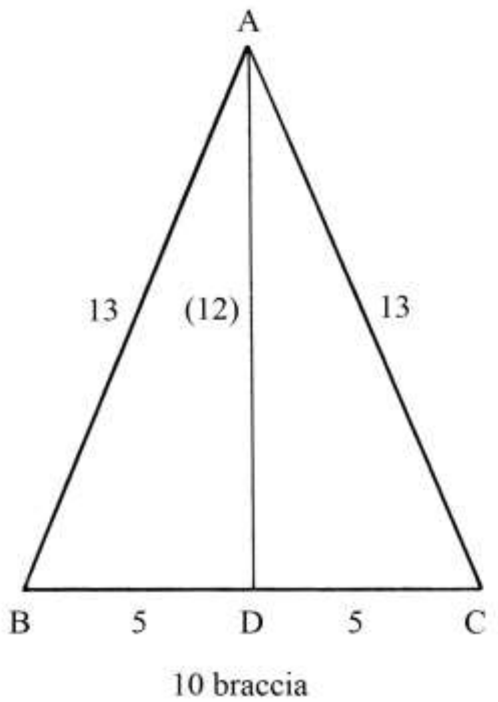
BD = BC = 10/2 = 5 braccia.

La lunghezza di AD è:

$AD^2 = AC^2 – DC^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144$ e

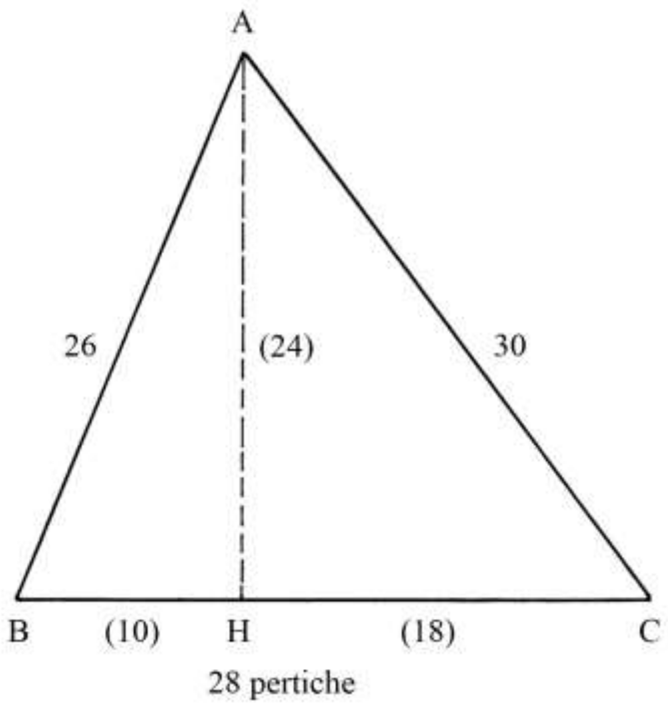
AD = √144 = 12 braccia.

L'altezza AD divide il triangolo ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABD e ADC. Le lunghezze dei loro lati formano una terna primitiva: 5-12-13.



[7 – 8] Area di un triangolo

Un campo triangolare boscoso o paludoso non è facilmente accessibile per misurare una sua altezza. Occorre misurare le lunghezze dei suoi lati e procedere al calcolo dell'area.



Il campo la forma e le dimensioni espresse in pertiche riportate nello schema.

Forestani presenta alcune soluzioni, avvertendo che la prima è errata, perché fra l'altro non tiene conto che il triangolo è scaleno e non isoscele. Eccone i passi:

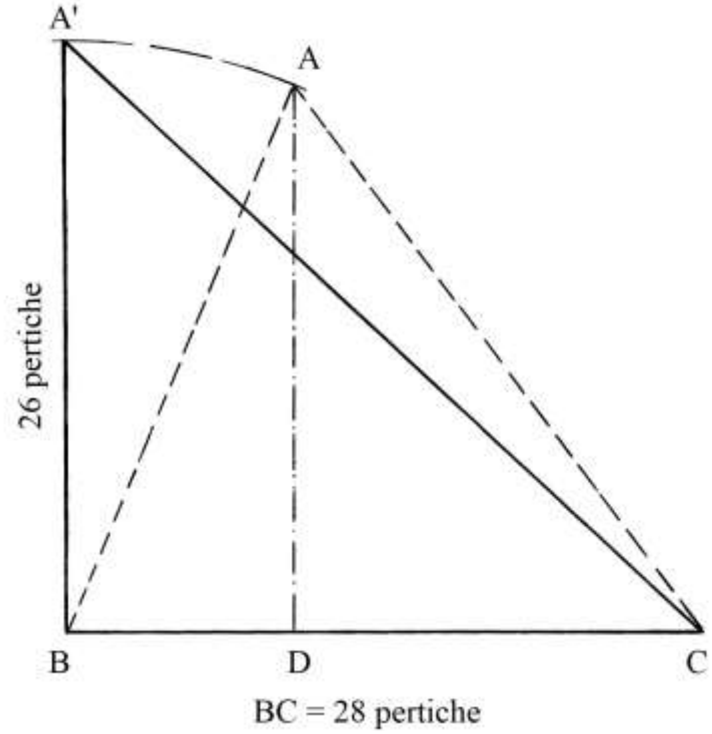
* considerare i due lati più corti, AB = 26 e BC = 28 pertiche;

* dividere per 2 la lunghezza del lato più corto, AB: $AB/2 = 26/2 = 13$;
* moltiplicare per la lunghezza del lato BC: $13 * 28 = 364$ pertiche quadre, area di ABC.

Il risultato è errato perché l'area del triangolo ABC è di 336 pertiche quadre, come spiegato di seguito.

- APPROFONDIMENTO -

L'erronea soluzione adottata dagli agrimensori trasforma il triangolo scaleno ABC in un triangolo rettangolo A'BC:



L'area di A'BC è:

$S_{A'BC} = (A'B/2) * BC = (26/2) * 28 = 364$ pertiche quadre.

L'ipotenusa A'C è lunga:

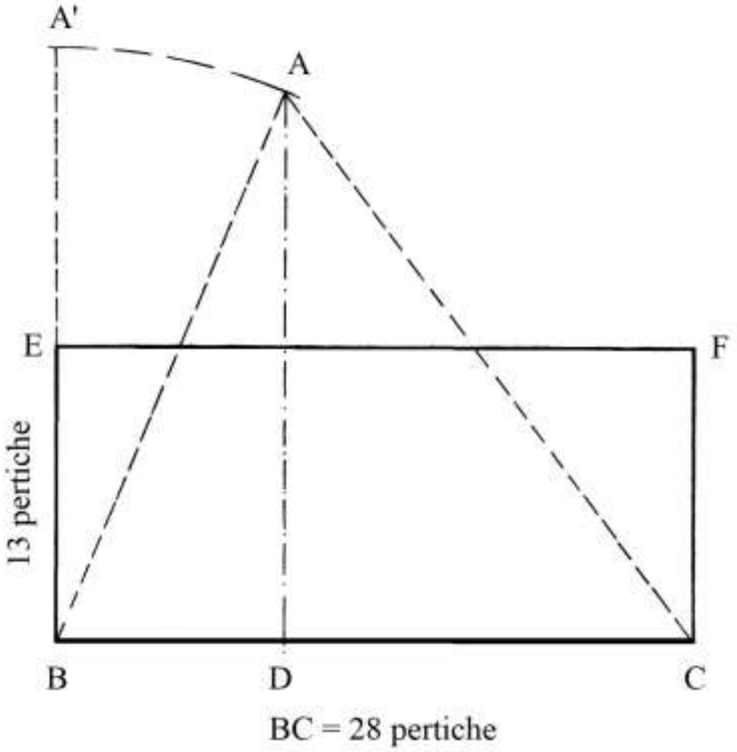
$A'C^2 = A'B^2 + BC^2 = 26^2 + 28^2 = 676 + 784 = 1460$ e

$A'C = \sqrt{1460} \approx 38{,}21$ pertiche.

Questa erronea soluzione può essere interpretata come la trasformazione del triangolo ABC in un rettangolo BEFC che lati lunghi:

$BE = A'B/2 = AB/2 = 26/2 = 13$ pertiche,

$BC = 28$ pertiche.



L'area di BEFC è:

S_{BEFC} = BE * BC = 13 * 28 = 364 pertiche quadre.

- -

La seconda e corretta soluzione applica, di nuovo e senza citare il suo Autore, la formula di Erone:

* sommare le lunghezze dei tre lati: AB + BC + AC = 26 + 28 + 30 = 26 + 28 + 30 = 84 [perimetro];
* dividere per 2: 84/2 = 42 [semiperimetro];
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza di AB: 42 – 26 = 16;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza di BC: 42 – 28 = 14;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza di AC: 42 – 30 = 12;
* moltiplicare 16 per 14: 16 * 14 = 224;
* moltiplicare per 12: 224 * 12 = 2688;
* moltiplicare per il semiperimetro: 2688 * 42 = 112896;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{112896}$ = 336 pertiche quadre, area di ABC.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo ABC è in realtà un triangolo con lati lunghi 13, 14 e 15 i cui valori sono moltiplicati per 2.

Il triangolo 13 – 14 – 15 è stato a lungo studiato dai geometri, almeno a partire dal già ricordato Erone di Alessandria.

Questo triangolo possiede un'importante proprietà: le lunghezze dei suoi lati, quella dell'altezza AD e l'area sono espressi da *numeri interi*.

- -

Una ulteriore soluzione è legata al calcolo della lunghezza dell'altezza AD che viene ricavata con la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza di ciascun lato per sé stessa:

$AB * AB = 26 * 26 = 676$,
$BC * BC = 28 * 28 = 784$,
$AC * AC = 30 * 30 = 900$;

* sommare i quadrati della lunghezza di BC e di quella di uno dei due lati rimanenti, ad esempio AB: $BC^2 + AB^2 = 784 + 676 = 1460$;
* sottrarre il quadrato della lunghezza di AC: $1460 - AC^2 = 1460 - 900 = 560$;
* dividere per il doppio della lunghezza del terzo lato, BC: $560/(2 * BC) = 560/(2 * 28) = 560/56 = 10$ pertiche, lunghezza di BD;
* sottrarre dalla lunghezza di BC: $BC - BD = 28 - 10 = 18$ pertiche, lunghezza di DC.

La procedura è riassunta nella formula che segue:
$BD = (BC^2 + AB^2 - AC^2)/(2 * BC)$.

La lunghezza di DC è ricavabile con una procedura e una formula equivalenti alle precedenti:

$$DC = (BC^2 + AC^2 - AB^2)/(2 * BC) = (28^2 + 30^2 - 26^2)/(2 * 28) = (784 + 900 - 676)/56 = 1008/56 = 18 \text{ pertiche.}$$

La formula era nota a Erone di Alessandria.

La lunghezza di AD è data da:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576 \quad \text{e}$$
$$AD = \sqrt{576} = 24 \text{ pertiche.}$$

La lunghezza di AD può essere calcolata anche considerando il triangolo rettangolo ADC:

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = 30^2 - 18^2 = 900 - 324 = 576 \quad \text{e}$$
$$AD = \sqrt{576} = 24 \text{ pertiche.}$$

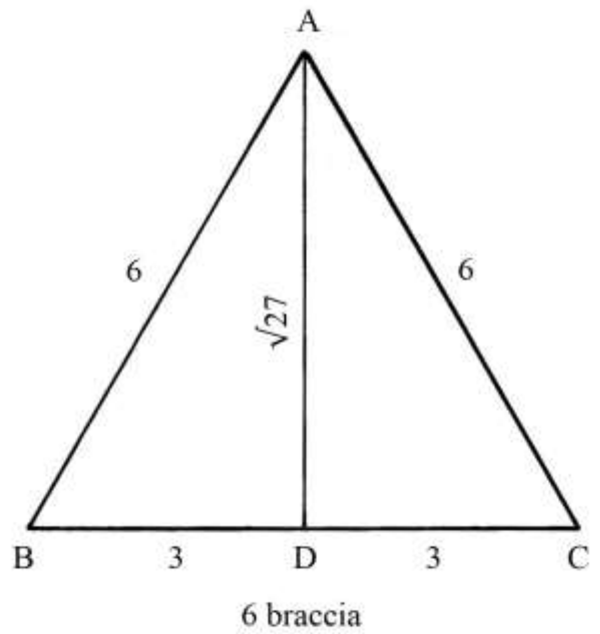
Infine, l'area di ABC è:

$$S_{ABC} = (BC/2) * AD = (28/2) * 24 = 14 * 24 = 336 \text{ pertiche quadre.}$$

[…]

Altezza di un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero i cui lati sono lunghi 6 braccia.



Deve essere ricavata la lunghezza dell'altezza AD relativa al lato BC.

AD divide il triangolo equilatero in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni, ABD e ADC: i cateti BD e DC hanno uguale lunghezza che è di 3 braccia.

La lunghezza di AD è data da:

$AD^2 = AC^2 – DC^2 = 6^2 – 3^2 = 36 – 9 = 27$ e

$AD = \sqrt{27}$ braccia.

Dato che 27 non è un quadrato perfetto ed è un numero *sordo*, la sua radice è leggermente approssimata per eccesso da Forestani:

$\sqrt{27} = (5 + 1/5)$ braccia.

Il quadrato di (5 + 1/5) è:

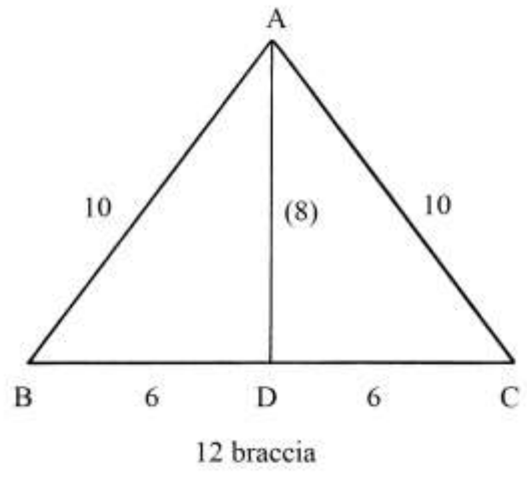
$(5 + 1/5)^2 = (27 + 4/100)$.

L'area S del triangolo è:

$S = AD * DC = \sqrt{27} * 3 = \sqrt{(27 * 9)} = \sqrt{243}$ braccia quadre.

[…] Altezza e area di un triangolo isoscele

Un triangolo isoscele ha i lati obliqui AB e AC lunghi 10 braccia e la base BC lunga 12.



Il problema chiede l'altezza AD e l'area del triangolo.

AD divide la base BC in due segmenti di uguale lunghezza:

BD = DC = 6 braccia.

La lunghezza di AD è:

$AD^2 = AC^2 – DC^2 = 10^2 – 6^2 = 100 – 36 = 64$ e

$AD = \sqrt{64} = 8$ braccia.

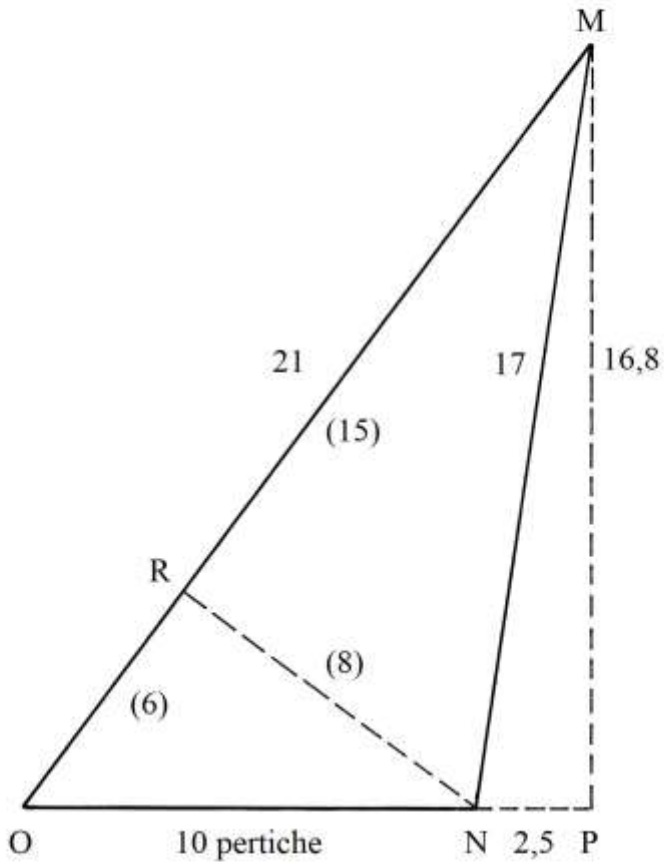
L'area S di ABC è:

$S_{ABC} = AD * DC = 8 * 6 = 48$ braccia quadre.

AD divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABD e ADC. Essi hanno lati con lunghezze che formano la terna derivata 6-8-10 che proviene dalla primitiva 3-4-5.

[10] Area di un triangolo generico

Un terreno boscoso o poco accessibile viene misurato con l'aiuto dello *squadro*. Esso ha la forma di un triangolo scaleno come MNO:



Le dimensioni sono implicitamente espresse in *pertiche*:

* MN = 17,
* MO = 21,
* ON = 10.

Il problema chiede l'area del triangolo.

L'Autore suggerisce alcune soluzioni.

La prima utilizza la formula di Erone:

* sommare le lunghezze dei tre lati: MN + MO + ON = 17 + 21 + 10 = 48 [perimetro];
* dividere per 2: 48/2 = 24 [semiperimetro];

* estrarre la radice quadrata di: √[24 * (24 – MN) * (24 – MO) * (24 – ON)] = = √[24 * (24 – 17) * (24 – 21) * (24 – 10)] = √(24 * 7 * 3 * 14) = √7056 = 84 pertiche quadre, area del triangolo MNO.

La seconda soluzione richiede il calcolo dell'altezza NR, ma l'Autore non offre alcun esempio di procedura e fornisce solo il risultato: RN = 8 pertiche.

Risolviamo con l'aiuto dell'algebra elementare: NR divide MNO in due triangoli rettangoli, NRO e NRM, che hanno un cateto in comune, che è rappresentato dalla stessa altezza NR.

OR è lunghezza incognita: OR = x, quindi si ha:

RM = OM – OR = 21 – x.

La lunghezza di NR può essere ricavata in due modi differenti:

* $NR^2 = ON^2 – OR^2 = 10^2 – x^2 = (100 – x^2)$;
* $NR^2 = MN^2 – RM^2 = 17^2 – (21 – x)^2$.

Le due espressioni sono equivalenti:

$(100 – x^2) = 17^2 – (21 – x)^2$

$100 – x^2 = 289 – (441 – 42 * x + x^2)$

$100 - x^2 = 289 – 441 + 42 * x – x^2$

100 + 441 – 289 = 42 * x

252 = 42 * x

x = 252/42 = 6 pertiche = OR.

La lunghezza della proiezione RM è:

RM = OM – OR = 21 – 6 = 15 pertiche.

L'altezza NR è:

$NR^2 = ON^2 – OR^2 = 10^2 – 6^2 = 100 – 36 = 64$ e

NR = √64 = 8 pertiche.

L'area del triangolo OMN è:

S_{OMN} = OM * NR/2 = 21 * 8/2 = 21 * 4 = 84 pertiche quadre.

- APPROFONDIMENTO -

Forse, Forestani ha ricavato la lunghezza di NR con il metodo già incontrato in precedenza:

* moltiplicare la lunghezza di ciascun lato per sé stessa:
  ON * ON = 10 * 10 = 100,
  MN * MN = 17 * 17 = 289,
  OM * OM = 21 * 21 = 441;
* sommare i quadrati della lunghezza di OM e di quella di uno dei lati rimanenti, ad esempio ON: $OM^2 + ON^2 = 441 + 100 = 541$;
* sottrarre il quadrato del terzo lato, MN: $541 – MN^2 = 541 – 289 = 252$;
* dividere per il doppio della lunghezza di OM: 252/(2 * OM) = 252/(2 * 21) = 252/42 = = 6 pertiche, lunghezza di OR.

La lunghezza di NR è data da:

$NR^2 = NO^2 – OR^2 = 10^2 – 6^2 = 100 – 36 = 64$ e

NR = √64 = 8 pertiche.

L'area S_{OMN} è:

S_{OMN} = OM * NR/2 = 21 * 8/2 = 84 pertiche quadre.

- -

Una terza soluzione è da impiegare nel caso che il terreno sia inaccessibile. Con gli strumenti sono misurate le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo OMP: quella del lato OM, l'ipotenusa, è nota.

Il cateto PM risulta lungo (16 + 4/5) = 16,8 pertiche.

A sua volta, il cateto OP è lungo 12,5 pertiche e ne consegue:

NP = OP – ON = 12,5 – 10 = 2,5 pertiche.

L'area dell'intero triangolo OMP è:

S_{OMP} = OP * PM/2 = 12,5 * 16,8/2 = 105 pertiche quadre.

L'area del triangolo rettangolo NMP è:

S_{NMP} = NP * PM/2 = 2,5 * 16,8/2 = 21 pertiche quadre.

Infine, l'area di OMN è data dalla differenza fra quella di OMP e quella di NMP:

S_{OMN} = S_{OMP} – S_{NMP} = 105 – 21 = 84 pertiche quadre, che è il valore già trovato con gli altri metodi.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo OMN è scomposto dall'altezza NR in due triangoli rettangoli: ORN e RMN.

Il primo ha lati lunghi:

* OR = 6,
* NR = 8,
* ON = 10.

Questi numeri formano la terna derivata 6-8-10 che è ottenuta moltiplicando per 2 i membri della terna primitiva 3-4-5.

Il secondo triangolo, RMN, ha lati lunghi:

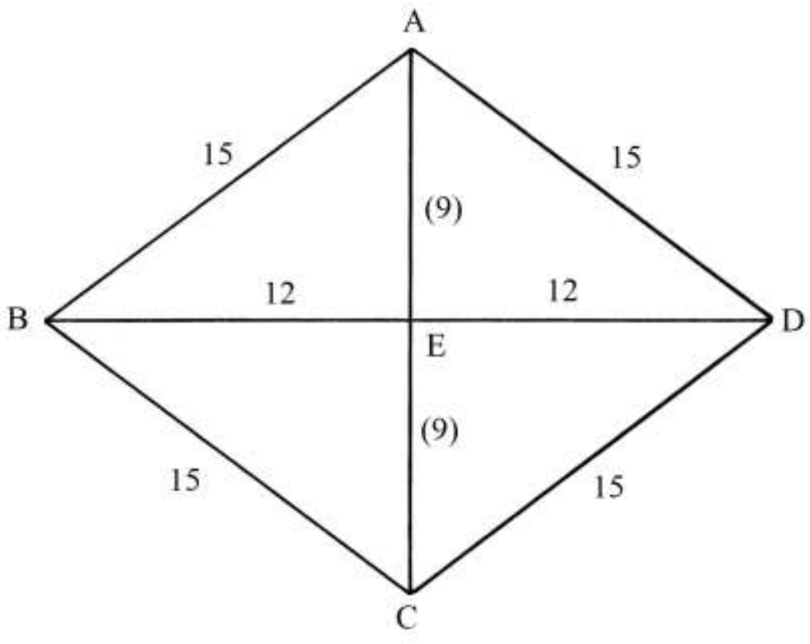
* RN = 8,
* RM = 15;
* MN = 17.

I tre numeri formano la terna primitiva 8-15-17.

- -

[11] Area e diagonale minore di un rombo

ABCD è un rombo i cui lati sono lunghi 15 e la diagonale maggiore BD è 24.



Devono essere calcolati l'area e la lunghezza della diagonale minore AC.

L'Autore chiama "*diametro maggiore*" la diagonale maggiore BD e "*diametro minore*" la diagonale minore AC.

La descrizione di questo problema non indica alcuna unità di misura, lineare o superficiale.

Le due diagonali si intersecano ad angolo retto nel centro E e si dividono reciprocamente in due parti uguali: esse ripartiscono il rombo in quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni.

Consideriamo il triangolo ABE: AE è un cateto la cui lunghezza è data da:

$AE^2 = AB^2 – BE^2 = 15^2 – (24/2)^2 = 15^2 – 12^2 = 225 – 144 = 81$ e

$AE = \sqrt{81} = 9$.

La diagonale minore AC è lunga:

AC = 2 * BE = 2 * 9 = 18.

L'area S del rombo è:

S = BD * (AC/2) = 24 * (18/2) = BD * AE = 24 * 9 = 216.

Oppure è data da:

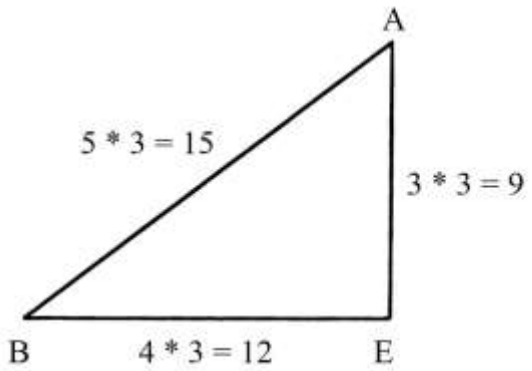
S = (BD * AC)/2 = (24 * 18)/2 = 432/2 = 216.

I due triangoli isosceli BAD e BCD hanno aree uguali e pari a *metà* di quella dell'intero rombo:

S_{BAD} = (BD * AE)/2 = (24 * 9)/2 = 108.

- APPROFONDIMENTO -

I quattro triangoli che compongono il rombo hanno i lati con lunghezze che formano la terna derivata 9-12-15 che proviene dalla primitiva 3-4-5:

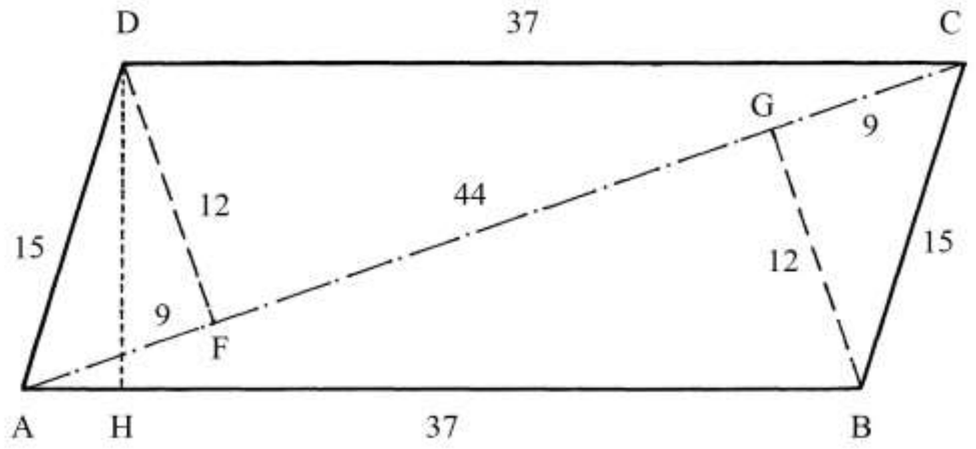


La scelta da parte di Lorenzo Forestani di lunghezze dei lati dei triangoli formanti terne, primitive o derivate, semplifica i calcoli eliminando spesso soluzioni che richiedono l'estrazione di radici quadrate.

- -

[12] <u>Area di un parallelogramma</u>

Un parallelogramma (un *romboide*" secondo Forestani) ha lati opposti di uguale lunghezza. Anche gli angoli opposti hanno identica ampiezza.



I due lati orizzontali, AB e DC, sono lunghi 37 e i due obliqui, AD e CB, sono 15.

L'Autore non indica alcuna unità di misura, lineare a superficiale.

La diagonale maggiore AC è lunga 44.

Dai vertici D e B sono tracciate le perpendicolari alla diagonale AC: DF e BG.

La diagonale AC divide il parallelogramma in due triangoli, ADC e ACB, che hanno uguali dimensioni e in comune possiedono la stessa AC.

Per ricavare l'area del parallelogramma occorre calcolare la lunghezza delle due altezze DF e BG. A questo scopo, l'Autore propone la seguente procedura:

* elevare al quadrato le lunghezze di AC, AD e DC:
  $AC^2 = 44^2 = 1936$,
  $AD^2 = 15^2 = 225$,
  $DC^2 = 37^2 = 1369$;
* sommare AC^2 e AD^2: $1936 + 225 = 2161$;
* sottrarre DC^2: $2161 – 1369 = 792$;
* dividere per il doppio della lunghezza di AC: $792/(2 * 44) = 792/88 = 9$, lunghezza di AF e di CG.

La formula che segue riassume la procedura:

$AF = (AC^2 + AD^2 – DC^2)/(2 * AC)$.

La lunghezza di FC (e di GA) è:

$FC = AC – AF = 44 – 9 = 35 = GA$.

La lunghezza di DF (e di BG) è data da:

$DF^2 = AD^2 – AF^2 = 15^2 – 9^2 = 225 – 81 = 144$ e

$DF = \sqrt{144} = 12$.

L'area del parallelogramma è:

$S_{ABCD} = AC * DF = 44 * 12 = 528$.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo ADC è diviso dall'altezza DF in due triangoli rettangoli, ADF e DFC, i cui lati hanno le seguenti lunghezze:

* ADF: AF = 9, DF = 12 e FA = 15; questi tre numeri formano la terna derivata 9-12-15, multipla della primitiva 3-4-5;
* DFC: DF = 12, FC = 35 e DC = 37; i tre numeri formano la terna primitiva 12-35-37.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

DH è un'altezza relativa alla base AB e la sua lunghezza è data da:

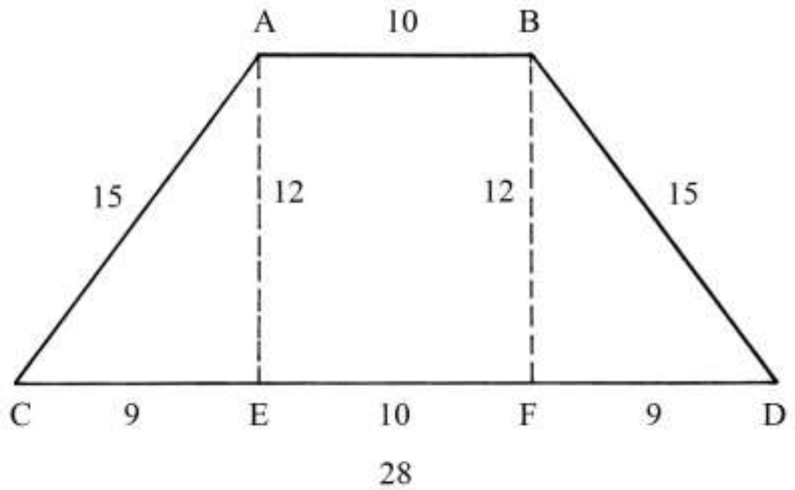
$DH = S_{ABCD}/37 = 528/37$.

- -

[14] Area di un trapezio isoscele

ABDC è un trapezio isoscele; le basi sono parallele e lunghe: AB = 10 e CD = 28.

I lati obliqui AC e DB hanno entrambi lunghezza uguale a 15.



Dai vertici A e B abbassare le perpendicolari AE e BF; il trapezio risulta diviso in tre poligoni:

* i triangoli rettangoli ACE e BDF;
* il rettangolo ABFE.

Il problema chiede l'area del trapezio e per calcolarla occorre conoscere la lunghezza di AE = BF.

La lunghezza di EF è uguale a quella di AB: EF = AB = 10.

Dato che il trapezio è isoscele, le lunghezze di CE e di FD sono uguali:

CE = FD = (CD – AB)/2 = (28 – 10)/2 = 18/2 = 9.

Consideriamo il triangolo rettangolo ACE; il suo cateto AE è lungo:

$AE^2 = AC^2 – CE^2 = 15^2 – 9^2 = 225 – 81 = 144$ e

AE = √144 = 12.

L'area del trapezio è calcolata da Lorenzo Forestani con due metodi.

Il primo metodo richiede il calcolo delle aree dei tre poligoni che formano il trapezio ABDC:

* S_{ACE} = AE * CE/2 = 12 * 9/2 = 54;
* l'area di BDF è uguale a quella di ACE: $S_{BDF} = S_{ACE}$ = 54;
* S_{ABFE} = EF * AE = 10 * 12 = 120.

L'area dell'intero trapezio è:

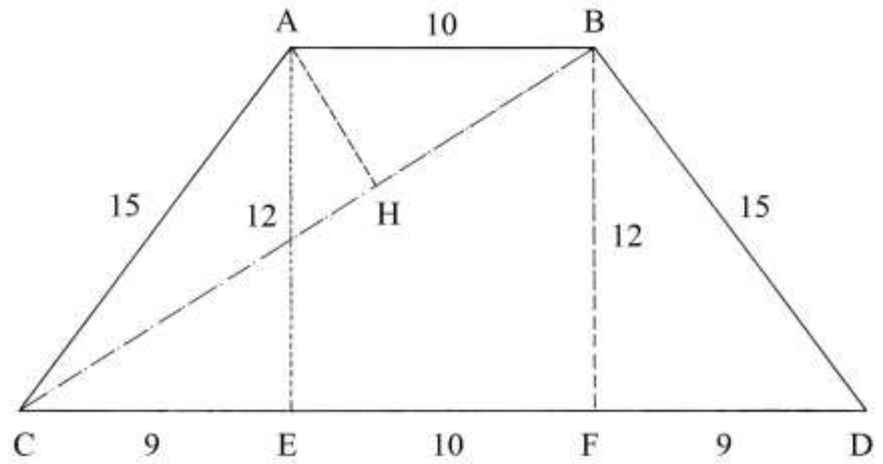
$S_{ABDC} = S_{ACE} + S_{BDF} + S_{ABFE}$ = 54 + 54 + 120 = 228.

Il secondo metodo è basato sulla semisomma delle lunghezze e sulla conoscenza della lunghezza di AE (e di BF):

S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * AE = [(10 + 28)/2] * 12 = (38/2) * 12 = 19 * 12 = 228.

[15] %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, Forestani suggerisce di misurare il terreno con le pertiche e con lo squadro: occorre determinare le lunghezze della diagonale CB e del segmento AH che è un'altezza del triangolo CAB.



CB è pure l'ipotenusa del triangolo rettangolo CBF che ha cateti lunghi:
CF = 19 e BF = 12.
CB è lunga:

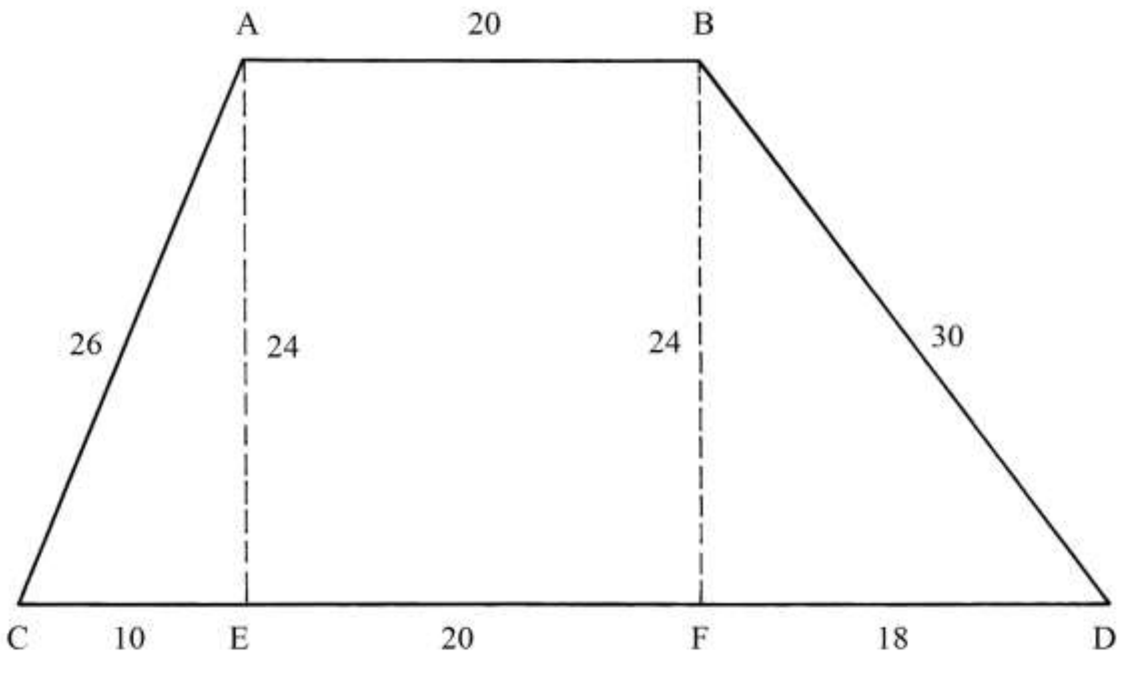
$CB^2 = CF^2 + BF^2 = 19^2 + 12^2 = 361 + 144 = 505$ e

$CB = \sqrt{505}$.

Ma 505 non è un quadrato perfetto e ciò complica i calcoli per la determinazione della lunghezza di AH.

[16] <u>Area di un trapezio scaleno</u>

ABDC è un trapezio scaleno: le basi AB e CD sono parallele.



Il problema chiede l'area del quadrilatero.

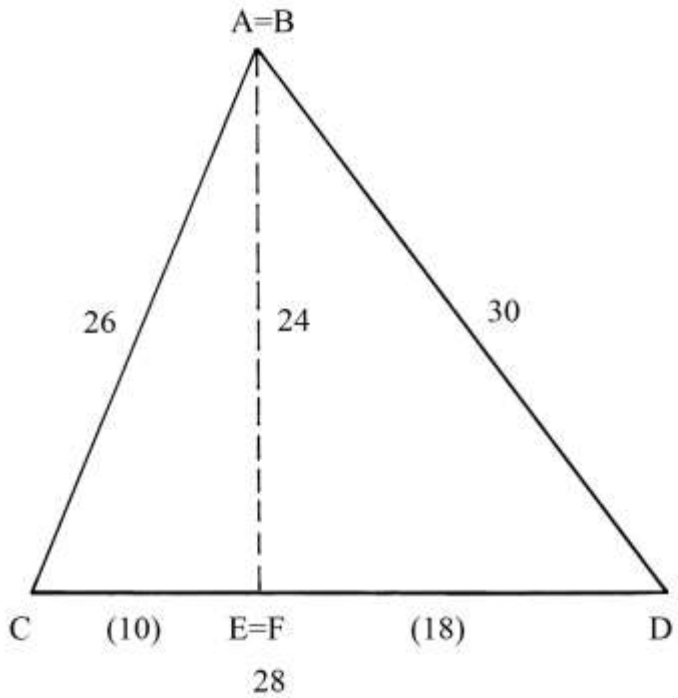
Dai vertici A e B tracciare le perpendicolari alla base maggiore CD: sono le altezze AE e BF che hanno uguali lunghezze.

Il segmento EF ha lunghezza uguale a quella della base minore AB: EF = 20.

Il trapezio è scomposto in tre poligoni:

* il triangolo rettangolo ACE;
* il triangolo rettangolo BDF;
* il quadrilatero (è un rettangolo) ABFE.

La soluzione proposta è lo scorporo dei due triangoli e la loro successiva unione lungo le loro altezze AE e BF:



La base del nuovo triangolo, C'D' è lunga:

CD = (CD + FD) = (CD – EF) = (CD – AB) = (48 – 20) = 28.

Ricaviamo la lunghezza di AE = BF con l'aiuto dell'algebra elementare.

La lunghezza di CE è l'incognita x: CE = x.

Ne consegue:

ED = CD – CE = (28 – x).

L'altezza AE è lunga:

$AE^2 = AC^2 – CE^2 = 26^2 – x^2$

BF è lunga:

$BF^2 = BD^2 – FD^2 = 30^2 – (28 – x)^2$.

Ma AE e BF hanno uguale lunghezza e sono uguali anche i loro quadrati:

$AE^2 = BF^2$.

Uguagliamo le due espressioni:

$26^2 – x^2 = 30^2 – (28 – x)^2$

$676 – x^2 = 900 – (784 – 56 * x + x^2)$

$676 – x^2 = 900 – 784 + 56 * x – x^2$

676 – 900 + 784 = 56 * x

560 = 56 * x

x = 560/56 = 10.

Ne consegue: FD = 28 – x = 28 – 10 = 18.

Le altezze AE e BF sono lunghe:

$AE^2 = AC^2 – CE^2 = 26^2 – 10^2 = 676 – 100 = 576$ e

$AE = \sqrt{576} = 24$.

$BF^2 = BD^2 – FD^2 = 30^2 – 18^2 = 900 – 324 = 576$ e
$BF = \sqrt{576} = 24$.

L’area del trapezio ABDC è:
$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * AE = [(20 + 48)/2] * 24 = 34 * 24 = 816$.

- APPROFONDIMENTO -

Di nuovo, in questo trapezio compaiono due terne; il triangolo ACE ha lati lunghi:

* CE = 10 = 2 * 5;
* AE = 24 = 2 * 12;
* AC = 26 = 2 * 13.

Il triangolo ACE ha lati con lunghezze espresse da una terna derivata da primitiva 5-12-13.

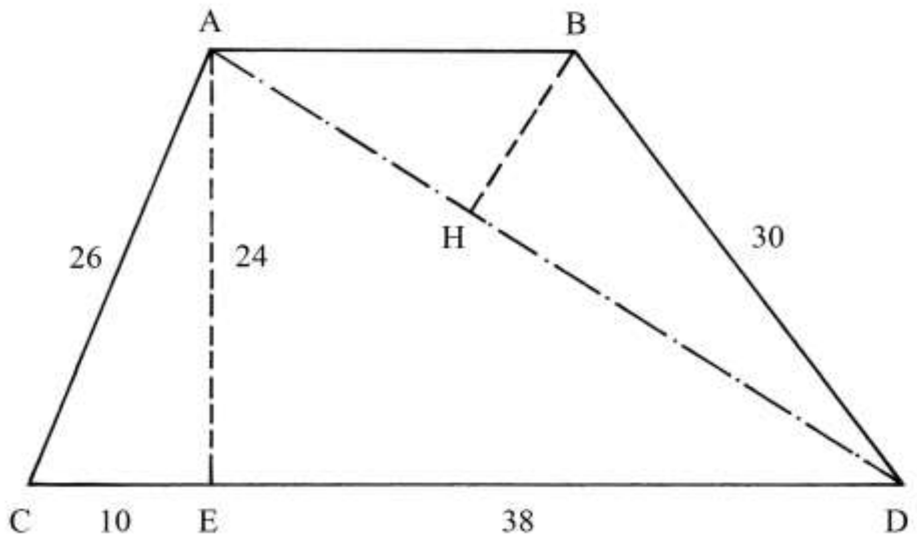
Il triangolo BDF ha lati lunghi:

* FD = 18 = 6 * 3;
* BF = 24 = 6 * 4;
* BD = 30 = 6 * 5.

Il triangolo BDF ha lati con lunghezze espresse con un numeri che formano una terna derivata dalla terna primitiva 3-4-5.

- -

[17] Forestani suggerisce di misurare le dimensioni del trapezio con l’aiuto dello squadro:



La diagonale AD divide il trapezio in due triangoli: ACD e ABD.

Con gli strumenti sono misurate le lunghezze della diagonale AD e dell’altezza BH. AD è lunga:

$AD^2 = AE^2 + ED^2 = 24^2 + 38^2 = 576 + 1444 = 2020$ e
$AD = \sqrt{2020} \approx 44,944$.

2020 non è un quadrato perfetto.

Il calcolo dell’area del triangolo ABD è complicato.

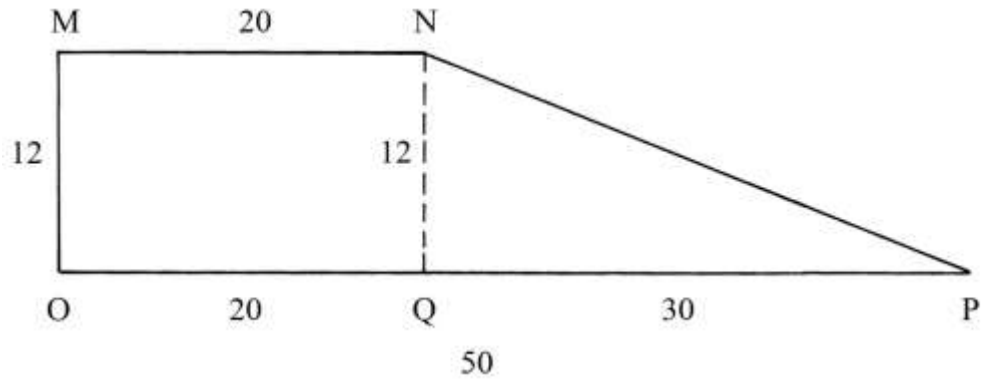
Questa soluzione si dimostra poco percorribile nel caso concreto, per via dei numeri.

[18] Terreno a forma di trapezio rettangolo

Un terreno ha la forma di un trapezio rettangolo con le dimensioni scritte sullo schema: non sono fornite le unità di misura.

L'area S del trapezio OMNP è data da:

$S_{OMNP} = [(OP + MN)/2] * MO = [(50 + 20)/2] * 12 = 35 * 12 = 420.$



Un'altra soluzione prevede il calcolo delle aree dei due poligoni che formano il trapezio rettangolo: l'altezza NQ lo scompone nel rettangolo OMNQ e nel triangolo rettangolo NQP.

Le due aree sono:

* $S_{OMNQ} = OQ * OM = 20 *12 = 240;$
* $S_{NQP} = (QP * NQ)/2 = (30 * 12)/2 = 180.$

L'area dell'intero trapezio è:

$S_{OMNP} = S_{OMNQ} + S_{NQP} = 240 + 180 = 420.$

[19] Area di un quadrilatero

Forestani introduce un altro metodo per il calcolo dell'area di un quadrilatero privo di angoli retti e fornisce un esempio non accompagnato da alcuno schema.

Egli propone di misurare "*in croce*" il poligono: con questa espressione egli suggerisce la misura dei quattro lati percorrendo l'esterno del quadrilatero.

Un terreno ha due lati opposti lunghi 20 e 22 pertiche: la loro lunghezza media è:

(20 + 22)/2 = 21 pertiche.

Il quadrilatero possiede un'altra coppia di lati opposti, lunghi 12 e 13 pertiche: la loro lunghezza media è:

(12 + 13)/2 = 12,5 pertiche.

L'area S di questo ipotetico quadrilatero è ricavata da Forestani con il prodotto dei due valori medi:

S = 21 * 12,5 = 262,5 pertiche quadre.

L'Autore ha applicato alla soluzione di questo problema l'antica "*formula degli agrimensori*".

Lo schema che segue è un'ipotesi di pianta basata sui dati forniti dall'Autore.

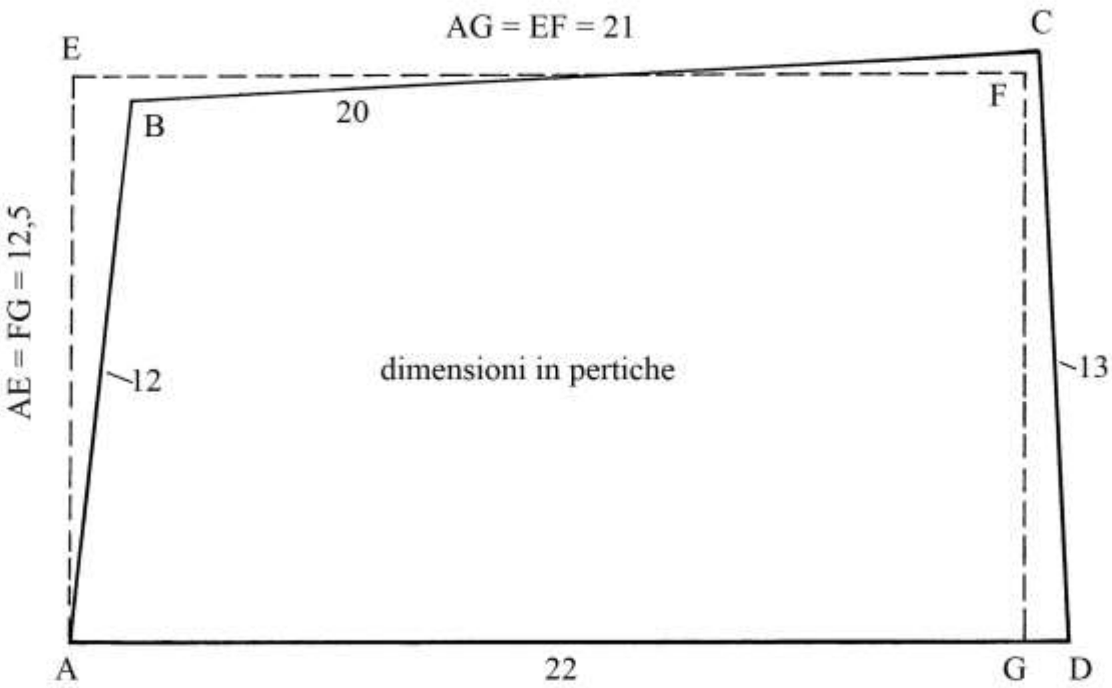
ABCD è il quadrilatero con i lati che recano le lunghezze misurate.

AEFG è il rettangolo che in teoria avrebbe area equivalente a quella di ABCD: per distinguerlo da questo ultimo, il primo quadrilatero è disegnato in parte a tratti.

AG e EF sono lunghi 21 pertiche e AE e FG sono 12,5 pertiche.

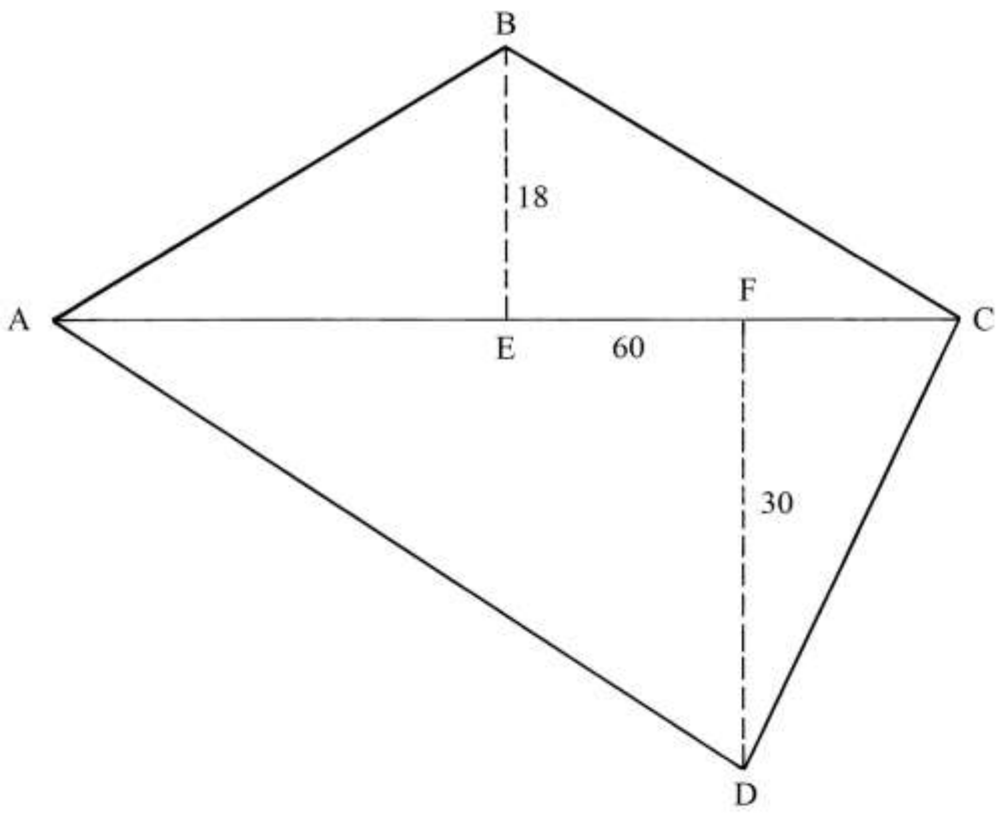
Il rettangolo AEFG ha area:

$S_{AEFG} = AG * AE = 21 * 12,5 = 262,5$ pertiche quadre.



[20] Area di un campo a forma di quadrilatero

ABCD è un campo che ka forma di un quadrilatero:



Il poligono non possiede alcun angolo retto: la diagonale maggiore AC è misura e risulta lunga 60 pertiche.

La diagonale minore BD è più corta dell'altra ma non è considerata ai fini della soluzione del problema che è la determinazione dell'area del terreno.

Uno *squadro* viene fatto scorrere lungo AC per misurare le lunghezze di EB (18 pertiche) e di FD (30 pertiche).

Il quadrilatero è diviso in due triangoli, ABC e ACD, che hanno in comune la base AC, diagonale maggiore di ABCD.

L'Autore propone due metodi equivalenti per il calcolo dell'area di ABCD.

Il primo moltiplica la lunghezza di AC per la semisomma delle altezze BE e DF:

$(BE + DF)/2 = (18 + 30)/2 = 24$ pertiche

$S_{ABCD} = 24 * AC = 24 * 60 = 1440$ pertiche quadre.

Il secondo metodo richiede il calcolo separato delle aree dei due triangoli e poi la loro somma:

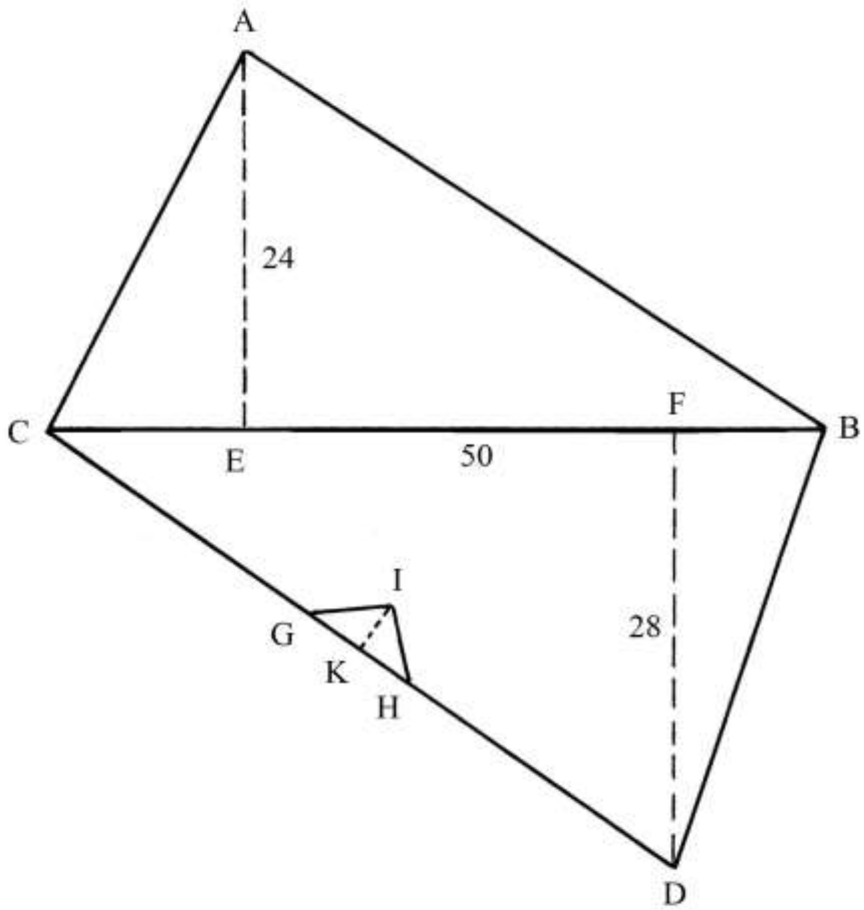
$S_{ABC} = BE * AC/2 = 18 * 60/2 = 540$ pertiche quadre

$S_{ACD} = DF * AC/2 = 30 * 60/2 = 900$ pertiche quadre

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 540 + 900 = 1440$ pertiche quadre.

[…] <u>Area di un terreno che contiene una proprietà di un terzo</u>

ABDC è un terreno di forma quadrangolare e privo di angoli retti. Sul suo lato CD è presente una porzione triangolare, GIH, di proprietà di un terzo.



Deve essere calcolata l'area del terreno al netto di quella di GIH.

CB è una delle due diagonali del quadrilatero ed è lunga 50 pertiche; essa divide il quadrilatero in due triangoli scaleni, ABC e BDC che hanno in comune la stessa diagonale.

Con gli strumenti posizionati su CB sono misurate le due altezze:

* AE = 24 pertiche;
* DF = 28 pertiche.

L'area lorda del quadrilatero ABDC è:

$S_{ABDC} = [(AE + DF)/2] * CB = [(24 + 28)/2] * 50 = 26 * 50 = 1300$ pertiche quadre.

La proprietà GIH ha dimensioni:

* GH = 16 pertiche;
* IK = 5 pertiche.

La sua area è:

$S_{GIH} = (GH * IK)/2 = (16 * 5)/2 = 40$ pertiche quadre.

La superficie netta del terreno è:

$S_{NETTA} = S_{ABDC} – S_{GIH} = 1300 – 40 = 1260$ pertiche quadre.

Infine, l'area è convertita nei multipli della pertica quadra:

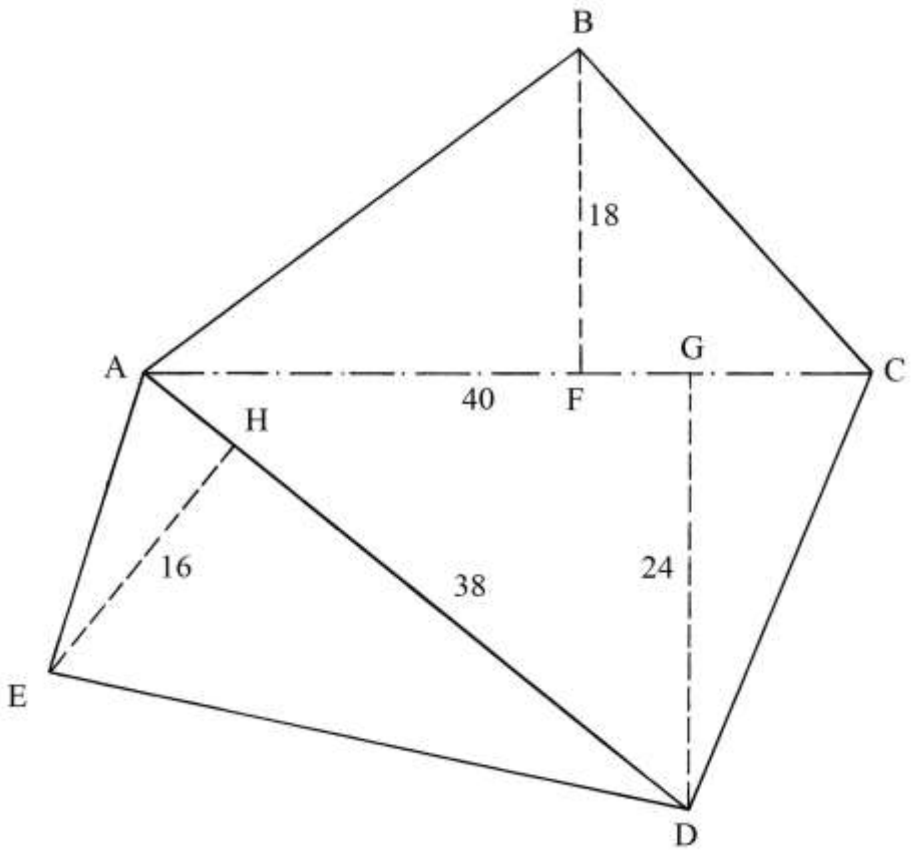
* 1260/480 coltre = 2 coltre + *300 pertiche quadre*;
* 300/120 quartieri = 2 quartieri + 60 *pertiche quadre*;
* 60/4 scale = 15 scale.

In conclusione, l'area netta del terreno è:

$S_{NETTA} = 1260$ pertiche quadre = (2 coltre + 2 quartieri + 15 scale).

[21] <u>Area di un campo pentagonale</u>

Un terreno ha la forma di un pentagono irregolare: è chiesta la sua superficie.



Dal vertice A sono disegnate le due diagonali: AC (40 pertiche) e AD (38 pertiche).
Esse dividono il pentagono in tre triangoli: ABC, ACD e AED.
Con gli strumenti sono misurate tre altezze dei triangoli:

* BF = 18 pertiche;
* DG = 24 pertiche;
* EH = 16 pertiche.

La diagonale AC è comune ai triangoli ABC e ACD: essi formano il quadrilatero ABCD. La sua area è:

S_{ABCD} = [(BF + DG)/2] * AC = [(18 + 24)/2] * 40 = (42/2) * 40 = 21 * 40 = 840 pertiche quadre.

L'area del residuo triangolo AED è:

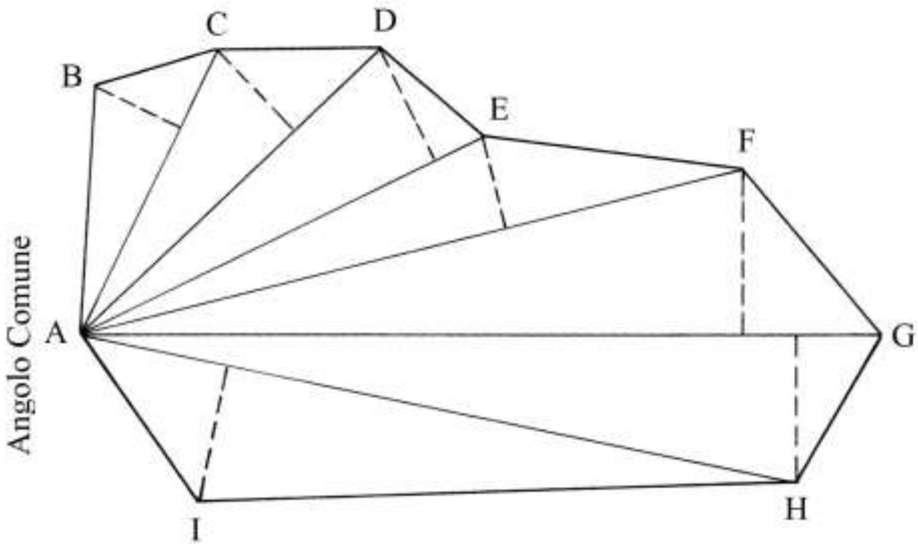
S_{AED} = AD * EH/2 = 38 * 16/2 = 304 pertiche quadre.

L'area dell'intero campo è:

S_{ABCDE} = S_{ABCD} + S_{AED} = 804 + 304 = 1184 pertiche quadre.

[23] <u>Misurazioni di terreni irregolari</u>

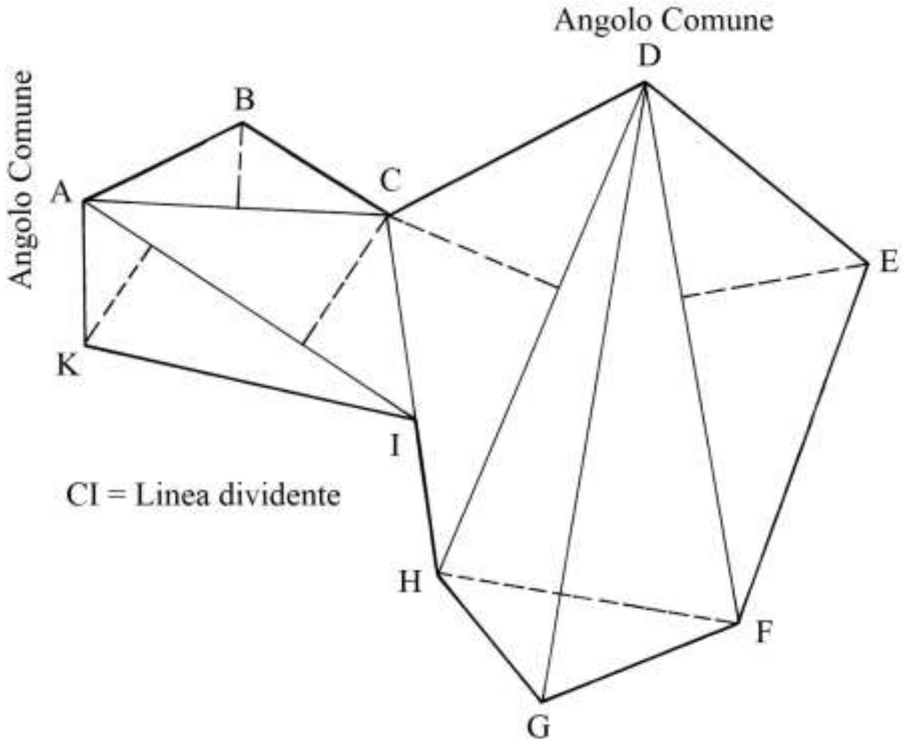
Lo schema che segue mostra un terreno ha la forma di un poligono irregolare delimitato da 9 lati.



Scegliere un vertice, ad esempio quello A: Forestani lo definisce "*Angolo Comune*".
Da questo punto deve essere tracciate (o misurate) delle corde interne al poligono e quindi la scelta dell'Angolo Comune deve rispettare questa condizione.
Le corde sono delle diagonali del poligono: AC, AD, AE, AF, AG e AH.
Lo schema qui sopra riproduce l'originale con leggere modifiche.
Il terreno ABCDEFGHI è così diviso in *sette* triangoli.
Dai vertici B, C, D, E, F, H e I tracciare le altezze verso le basi dei triangoli.
L'area del terreno è ottenuta dalla somma delle aree dei sette triangoli nei quali esso è stato idealmente diviso per poterlo misurare.

[24] Un altro terreno di forma irregolare

Un terreno ha una forma così complessa da non poter fissare un unico "Angolo Comune". Esso è delimitato da ben *dieci* lati.



Per tracciare tutte le corde occorrenti e che siano contenute all'interno del poligono, è necessario dividerlo in *due* parti: nell'esempio provvede allo scopo la corda CI, definita da Forestani "Linea dividente": essa separa ABCIK da CDEFGHI.

ABCIK è poi diviso in tre triangoli e CDEFGHI in quattro triangoli con delle corde o diagonali tracciate dai due "Angoli Comuni" che sono A e D.

Dai punti B, C, E, F, H e K sono tracciate con linee a tratti le altezze dei sette triangoli.

L'area dell'intero terreno è data dalla somma delle aree di tutti i triangoli.

[25] Vendita parziale di un terreno

Un terreno ha la forma di un rettangolo: è lungo 40 pertiche e largo 20. Nello schema che segue è il quadrilatero ABDC.

Deve essere venduta una porzione rettangolare della superficie di *4 quartieri* da ritagliare a partire da CD.

Un quartiere vale:

1 quartiere = 30 scale = 120 pertiche quadre

4 quartieri corrispondono a 480 pertiche quadre.

La superficie in vendita ha lunghezza di 40 pertiche: è lunga quanto CD.

La larghezza della superficie da vendere è:

480/40 = 12 pertiche.

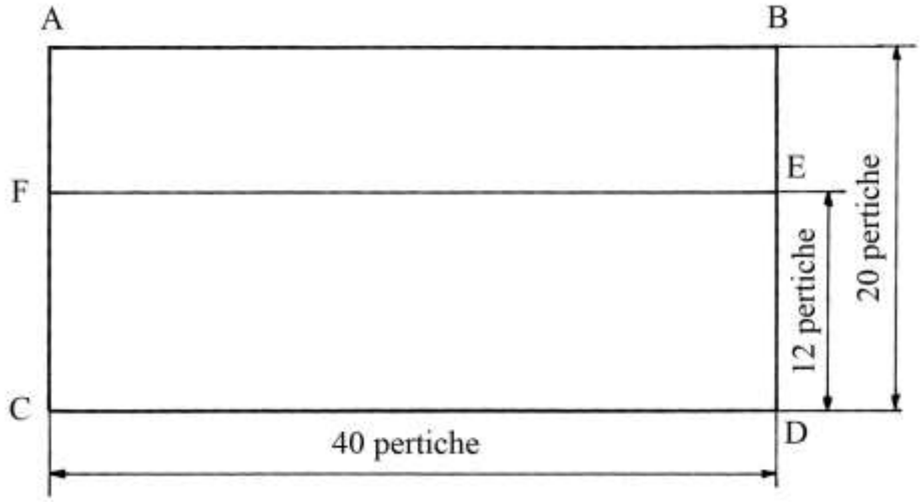
Da C e da D misurare verso l'alto la lunghezza di 12 pertiche:

CF = DE = 12 pertiche.

Collegare F con E.

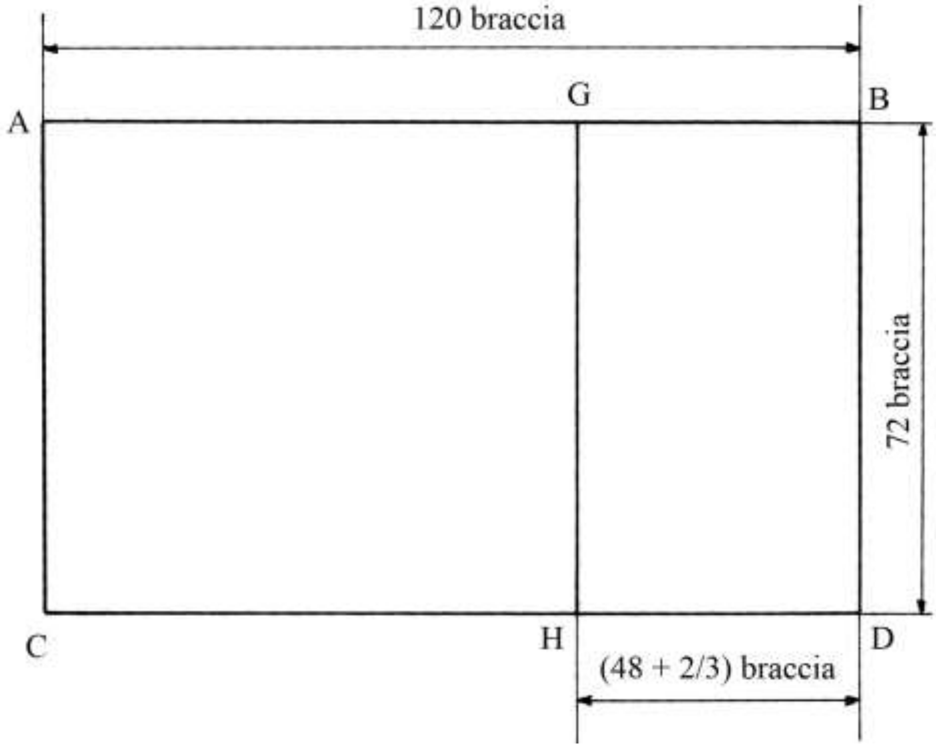
Il rettangolo FEDC ha area:

$S_{FEDC} = CD * CF = 40 * 12 = 480$ pertiche quadre = 4 quartieri.
FEDC è la porzione di terreno da vendere.



[26] <u>Un'altra vendita parziale</u>

Un terreno ha la forma di un rettangolo lungo 120 braccia e largo 72.



Dal terreno deve essere tagliata una striscia verticale, rettangolare, a partire dal lato BD e di area uguale a *1 quartiere*.

Ricordiamo che questa unità di superficie equivale a 3000 braccia quadre.

La parte da asportare è GBDH: è un rettangolo alto BD = 72 braccia.

La sua larghezza GB è data da:

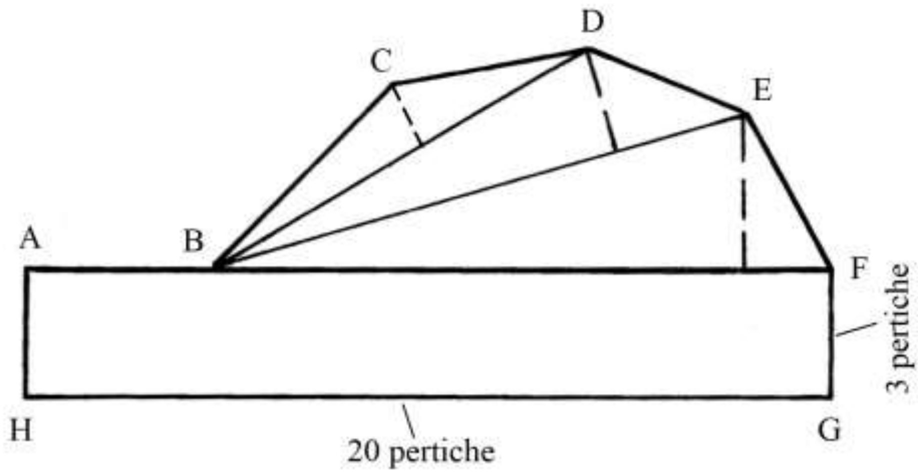
GB = 3000/BD = 3000/72 = (41 + 2/3) braccia.

Farnetani conclude con una riprova:

S_{GBDH} = GH * GB = 72 * (41 + 2/3) = 3000 braccia quadre = 1 quartiere.

[27] Un terreno rettangolare aggiuntivo

Un terreno ha la forma di un pentagono irregolare: è BCDEF.



Esso viene diviso in tre triangoli per mezzo di altrettante corde uscenti dal punto B: sono BC, BD e BE.

Le tre altezze disegnate con linee a tratti muovono dai vertici C, D e E e permettono di calcolare l'insieme delle aree del pentagono: 180 pertiche quadre.

Al terreno deve essere aggiunta una striscia rettangolare lunga 20 pertiche e con un lato orizzontale misurato da F verso sinistra:

FA = 20 pertiche.

Il terreno risultante dall'unione di BCDEF e della striscia aggiuntiva deve avere un'area di 240 pertiche quadre.

Il rettangolo aggiunto è AFGH e la sua area è:

S_{AFGH} = 240 – S_{BCDEF} = 240 – 180 = 60 pertiche quadre.

La larghezza di AH = FG è data da:

AH = S_{AFGH} /AF = 60/20 = 3 pertiche.

[28] Alcuni consigli per gli Agrimensori

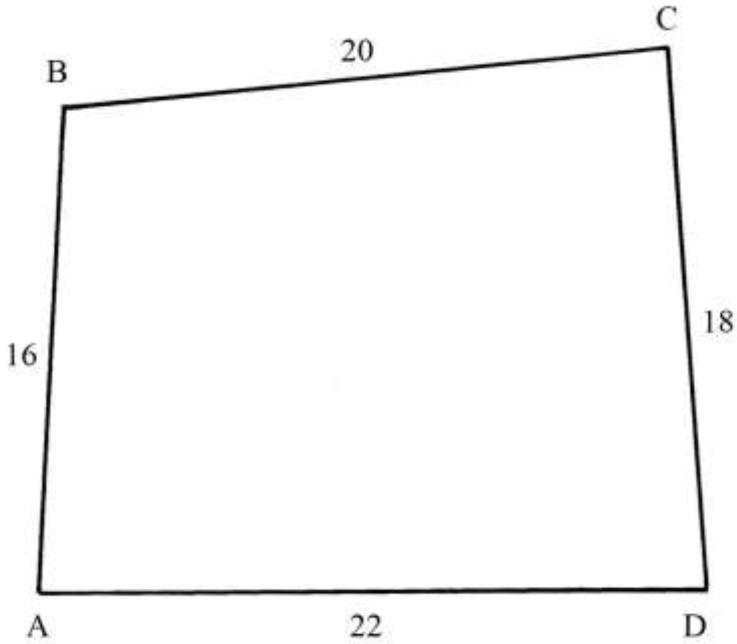
Forestani presenta alcuni suggerimenti che offre agli Agrimensori professionisti.

Egli li richiama al realismo: la divisione di un terreno in quadrilateri e in triangoli offre la misurazione più precisa, ma non sempre è possibile.

Perciò egli giustifica l'uso del metodo della "formula degli agrimensori" (che Forestani non chiama con il suo vero nome) e al riguardo fa un esempio: un quadrilatero ha due lati opposti lunghi 20 e 22 *canne* e l'altro coppia di lati opposti ha lunghezze di 16 e 18 *canne*.

I pratici calcolano l'area di ABCD moltiplicando fra loro le semisomme delle lunghezze delle coppie di lati opposti:

S_{ABCD} = [(AD + BC)/2] * [(AB + CD)/2] = [(22 + 20)/2] * [(16 + 18)/2] =
= 21 * 17 = 357 canne quadrate.



dimensioni in *canne*

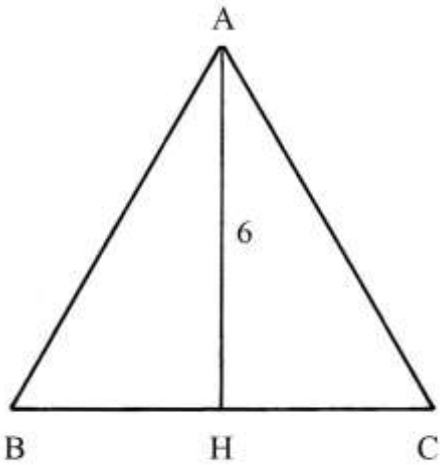
Alcuni Agrimensori criticavano il metodo della cosiddetta “formula degli agrimensori”: Forestani rispondeva giustificando la soluzione con il risparmio di tempo che offriva rispetto a quello occorrente per effettuare la divisione di un terreno in soli triangoli.

Infine, l’Autore ricorda un dato di fatto: un terreno misurato due volte, anche a brevissima distanza di tempo, può fornire risultati assai differenti.

L’Autore non chiarisce quale tipo di canna ha usato: se quella lunga 4 braccia o quella lunga 5 braccia, usata a Pescia.

[29] Lati e area di un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero di cui è nota solo l’altezza (“il catetto”) AH, lunga 6.



Sono chieste la lunghezza dei lati e l’area del triangolo.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza dell’altezza AH per sé stessa: 6 * 6 = 36;

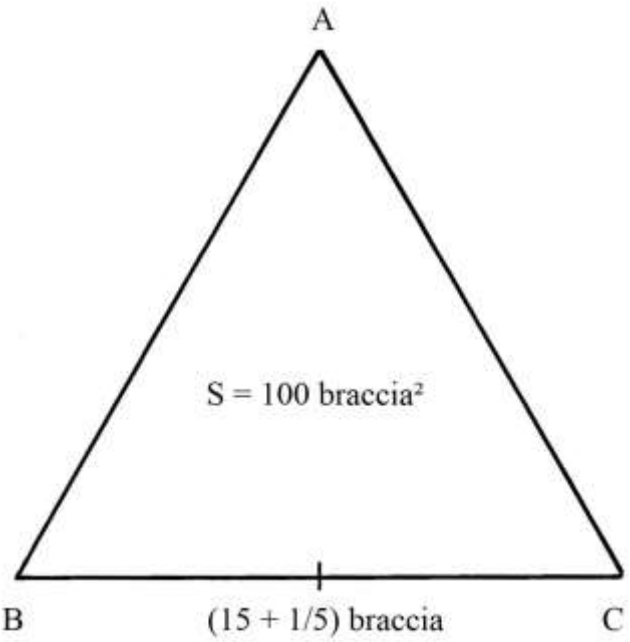
* dividere per 3: $36/3 = 12$;
* sommare 36 e 12: $36 + 12 = 48$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48}$, lunghezza dei lati del triangolo;
* dividere per 2 la lunghezza dell'altezza AH: $6/2 = 3$;
* elevare al quadrato: $3^2 = 9$;
* moltiplicare $\sqrt{9}$ per $\sqrt{48}$: $\sqrt{9} * \sqrt{48} = \sqrt{432}$, area del triangolo equilatero.

L'elevazione al quadrato di metà della lunghezza di AH sembra un passaggio inutile, benché il risultato sia corretto. Più semplicemente, l'area di ABC può essere calcolata come segue:

$$S_{ABC} = (AH/2) * BC = (6/2) * \sqrt{48} = 3 * \sqrt{48} = \sqrt{(9 * 48)} = \sqrt{432}.$$

[30] <u>Lunghezza dei lati di un triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha area di 100 braccia quadre: il problema chiede la lunghezza dei lati.



La procedura proposta contiene i seguenti passi:
* moltiplicare l'area per 2: $100 * 2 = 200$;
* moltiplicare l'area per (1/6 + 1/7): $100 * (1/6 + 1/7) = 100 * (13/42) \approx 31$:
* sommare con 200: $31 + 200 = 231$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{231} \approx (15 + 1/5)$ braccia, lunghezza dei lati di ABC.

Indicando con *S* l'area e con ℓ la lunghezza dei lati, la procedura è riassunta nella formula che segue:

$$\ell = \sqrt{[S * (2 + 1/6 + 1/7)]}.$$

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione *sembra* in parte richiamare la formula approssimata proposta da Erone di Alessandria per il calcolo dell'area di un triangolo equilatero conoscendo la lunghezza ℓ dei lati:

$S = 13/30 * \ell^2$, con il coefficiente 13/30 che vale:

$13/30 = 0,4(3)$, che è un numero periodico.

Applichiamo la formula di Erone per ricavare la lunghezza ℓ dei lati:

$100 = 13/30 * \ell^2$, da cui si ha:

$\ell^2 = (30 * 100)/13 = 3000/13$ e

$\ell = \sqrt{(3000/13)} \approx \sqrt{230,769} \approx 15,19$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo: il risultato coincide con quello ottenuto da Forestani.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La formula oggi usata è:

$S = (\sqrt{3})/2 * \ell^2/2 = (\sqrt{3})/4 * \ell^2$ e

$\ell^2 = S * 4/\sqrt{3}$ e

$\ell = \sqrt{(S * 4/\sqrt{3})} = \sqrt{[(100 * 4 * \sqrt{3})/3]} \approx 15,96$ braccia.

- -

Forestani propone una seconda procedura:

* moltiplicare l'area per sé stessa: $100 * 100 = 10000$;
* moltiplicare per (5 + 1/3) [= 16/3]: $10000 * (5 + 1/3) = (53333 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(53333 + 1/3)} \approx 230,94$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{230,94} \approx (15 + 1/5)$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo.

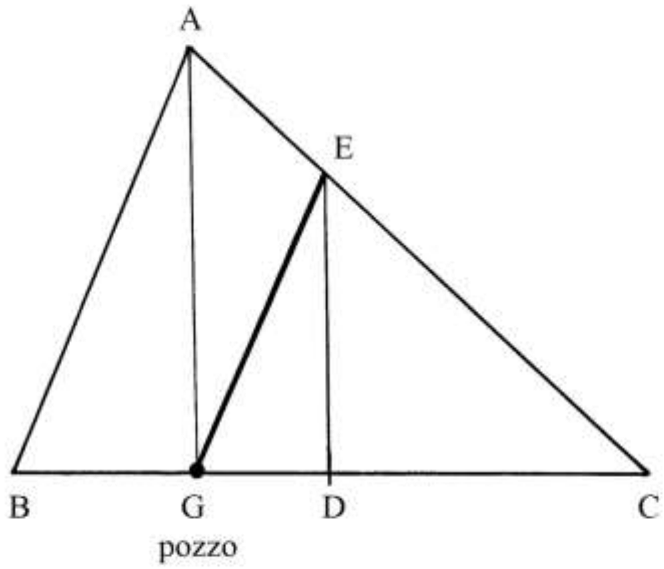
La procedura può essere riassunta nella formula che segue:

$\ell = \sqrt{[\sqrt{(S^2 * 16/3)}]}$.

I due metodi proposti da Forestani sono entrambi approssimati e forse sono il frutto di sue esperienze miranti a semplificare i calcoli.

[31] <u>Divisione di un terreno in due parti uguali</u>

Un campo ha forma triangolare: sulla base BC è posizionato in G un pozzo.



Il terreno è di proprietà di due fratelli che vogliono dividerlo in due parti uguali garantendo ad entrambi l'accesso al pozzo.

Determinare il punto medio di BC: è D. Collegare G con A e parallelamente a GA tracciare a GA tracciare una corda da D fino a incontrare in E il lato AC.

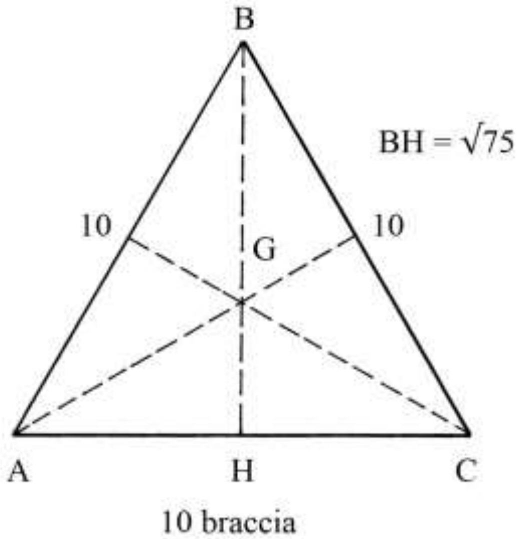
La corda EG divide il triangolo ABC in due parti uguali: il quadrilatero AEGB e il triangolo ECG.

Entrambi i poligoni hanno un vertice posizionato nel pozzo G.

Il problema è un classico nei trattati di geometria pratica.

[32] Centro di un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero i cui lati sono lunghi 10 braccia.



G è il centro (baricentro, ortocentro, incentro e circocentro) del triangolo.

Tracciare le tre altezze (e bisettrici degli angoli): esse si incontrano in G.

Il problema chiede la lunghezza dei segmenti GA, GB e GC che sono uguali.

Consideriamo GB: esso è parte dell'altezza BH ed è lungo i suoi 2/3.

Forestani propone due soluzioni equivalenti.

La prima contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 3: $100/3 = (33 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(33 + 1/3)}$ braccia, lunghezza di GB.

La seconda soluzione prevede i seguenti passi:

* la lunghezza dell'altezza è $\sqrt{75}$ braccia;
* moltiplicare per 2/3: $(\sqrt{75}) * 2/3 = \sqrt{(75 * 4/9)} = \sqrt{(300/9)} = \sqrt{(33 + 1/3)}$ braccia, lunghezza di GB.

- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo il dato fornito da Forestani riguardo al valore dell'altezza: $BH = \sqrt{75}$.

La lunghezza di BH è data da:

$$BH^2 = BA^2 - AH^2 = 10^2 - (10/2)^2 = 100 - 25 = 75 \text{ e}$$

$$BH = \sqrt{75}.$$

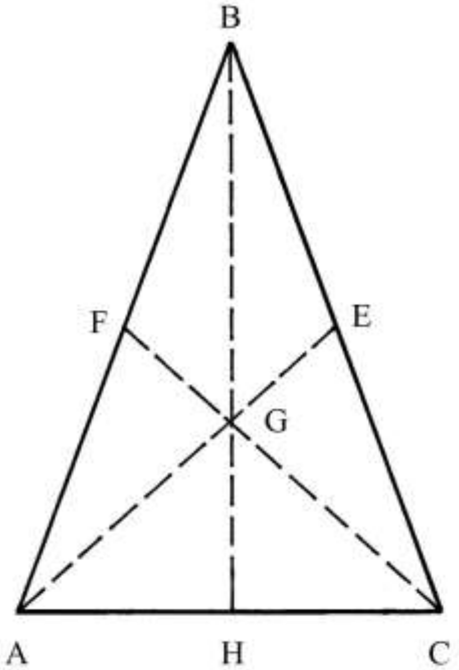
Ne consegue:

$$BG = 2/3 * BH = 2/3 * \sqrt{75} = \sqrt{[(4/9) * 75]} = \sqrt{(300/9)} = \sqrt{(33 + 1/3)} \text{ braccia.}$$

- -

[33] Divisione di un triangolo isoscele in due parti uguali

ABC è un triangolo isoscele ("*equicrurio*"). Il triangolo deve essere diviso in due parti uguali.



Per farlo esistono tre modi diversi: devono essere fissati i punti medi dei tre lati che sono E, F e H.

Collegare ciascun vertice al punto medio del lato opposto: sono tracciate le *mediane* AE, BH e CF.

Esse si incontrano nel punto G che è il baricentro del triangolo.

AE divide il triangolo ABC in due triangoli scaleni di area uguale a metà di quella dello stesso ABC: sono ABE e AEC.

Anche BH divide ABC in due triangoli rettangoli di area uguale a metà: sono ABH e BHC.

Infine, CF divide ABC in due triangoli scaleni di aree uguali e sempre pari a metà di quella dello stesso ABC: sono AFC e CFB.

[34] Divisione di una linea in parti uguali

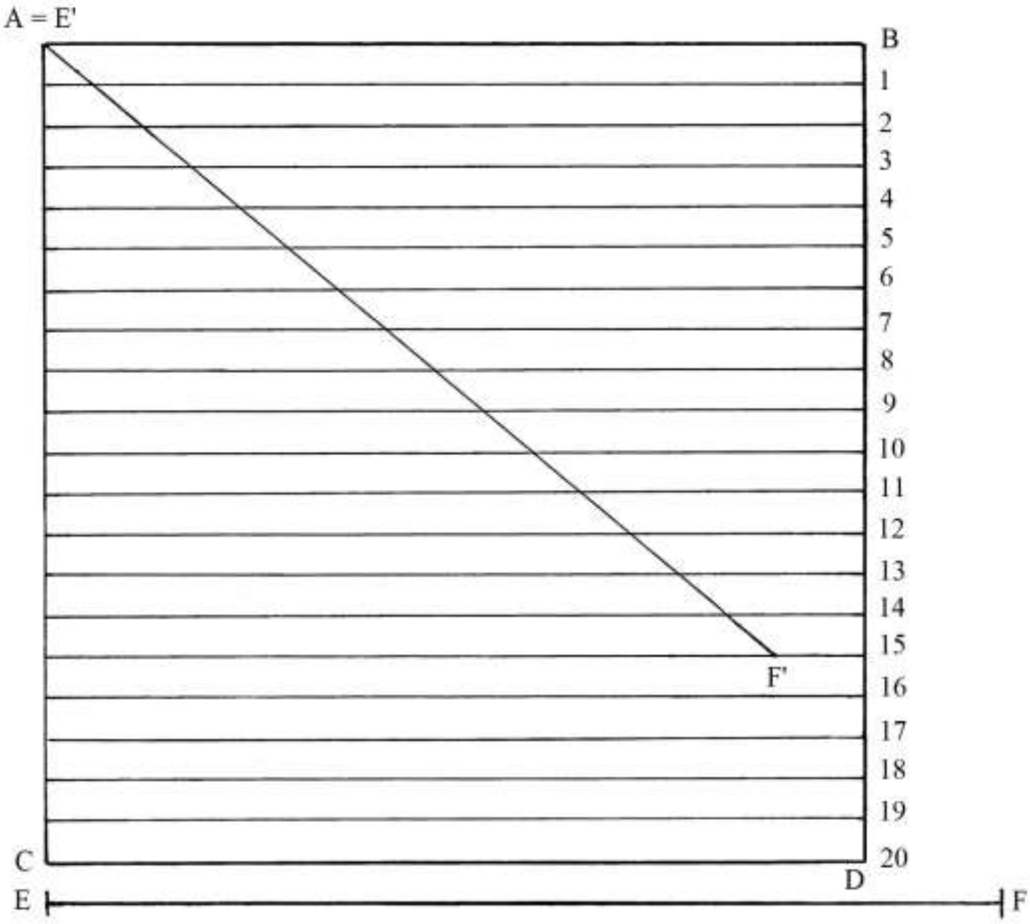
Disegnare un quadrato, ABCD, con lati lunghi 20 unità.

Tracciare le linee orizzontali a distanza di "1".

È data una linea, EF, lunga a piacere, che deve essere divisa, ad esempio, in 15 parti uguali.

Con il compasso riportare la lunghezza di EF sulla griglia, a partire dal punto A=E' fino a fissare il punto F' sulla linea orizzontale segnata con 15: A-F' è lunga quanto EF.

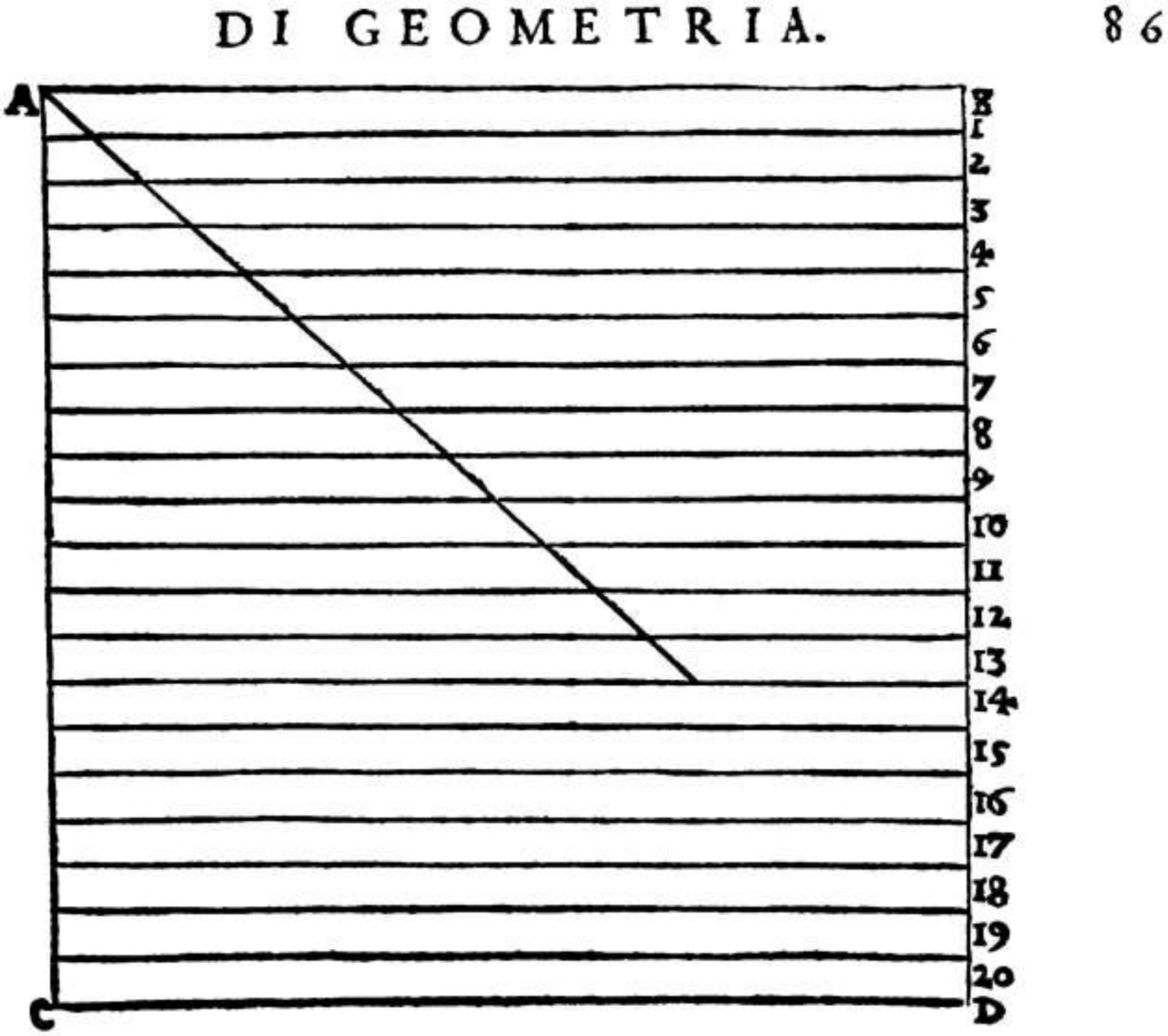
Il segmento AF' è diviso in 15 parti uguali.



- APPROFONDIMENTO -

Giovan Francesco Peverone (Cuneo 1509 – Milano 1559) pubblicò il trattato citato in Bibliografia: questo Autore è stato fra le fonti ricordate nel testo di Lorenzo Forestani.

Nel trattato di Peverone è contenuto un esempio di questo metodo di divisione di una linea in parti uguali:



- -

[35] Triangolo equilatero equivalente a un quadrato

LOMN è un quadrato e P è il punto medio del suo lato OM.

Forestani critica il citato Peverone che avrebbe erroneamente convertito il quadrato LOMN in un triangolo equilatero con una soluzione geometrica: prolungare verso il basso il lato OM; fare centro in M e con raggio MP tracciare una semicirconferenza da P a R.

Secondo Peverone, OR sarebbe il primo laro del triangolo equilatero ORS con area uguale a quella di LOMN.

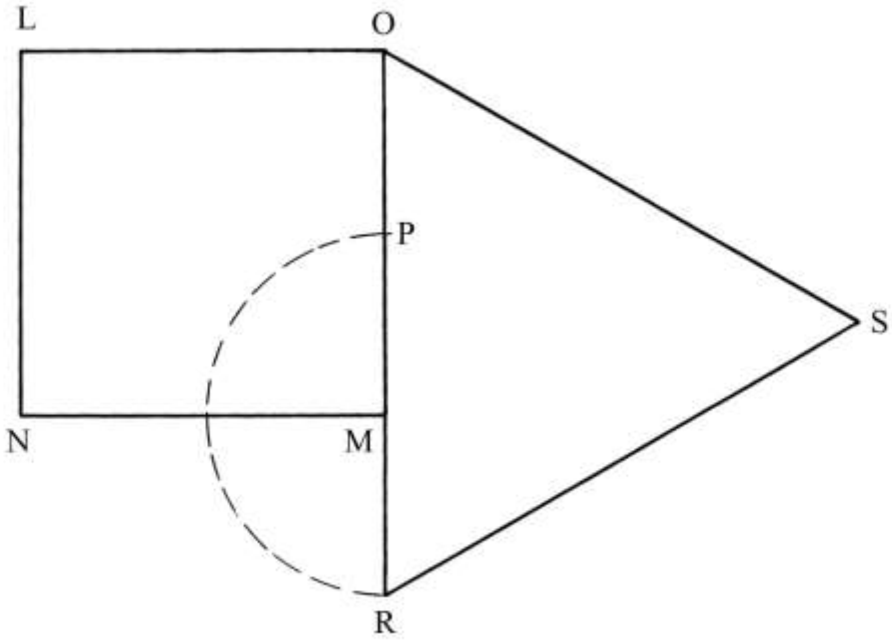
Forestani spiega così l'errore: se il lato del quadrato è lungo 10, il lato OR del triangolo equilatero è lungo 15.

L'area del quadrato è:

$$S_{LOMN} = 10 * 10 = 100.$$

L'area di ORS è:

$$S_{ORS} = (\sqrt{3})/4 * OR^2 = (\sqrt{3})/4 * 15^2 \approx 97{,}4278.$$



L’area del triangolo è più piccola di quella del quadrato.

Per calcolare l’esatta lunghezza dei lati del triangolo equilatero con area uguale a 100, Forestani richiama la prima regola usata per risolvere un simile problema nel paragrafo contrassegnato con [30].

S è l’area del triangolo equilatero e ℓ è la lunghezza del suo lato, con S = 100:

$$\ell = \sqrt{[S * (2 + 1/6 + 17)]} = \sqrt{[100 * (2 + 1/6 + 1/7)]} = (15 + 1/5).$$

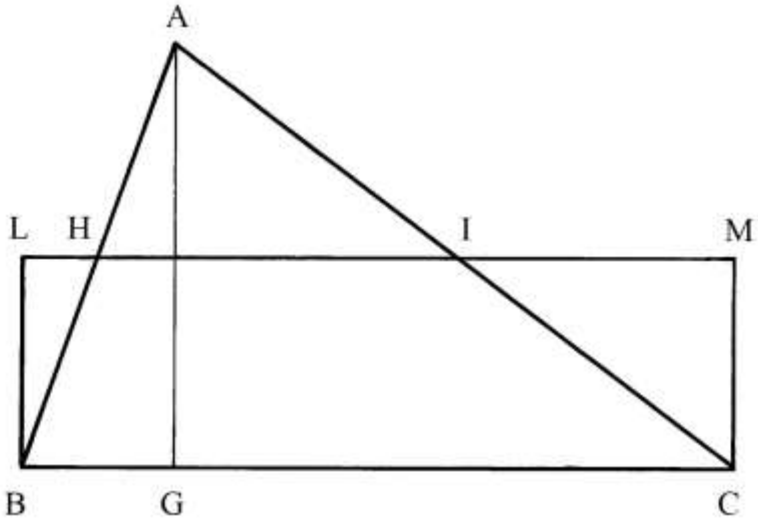
La soluzione di Peverone è approssimata per difetto:

$$(15 + 1/5) – 15 = 1/5.$$

Essa è accettabile nelle applicazioni pratiche.

[36] <u>Quadrilatero equivalente a un triangolo</u>

ABC è un triangolo: deve essere trasformato in un rettangolo di area uguale.



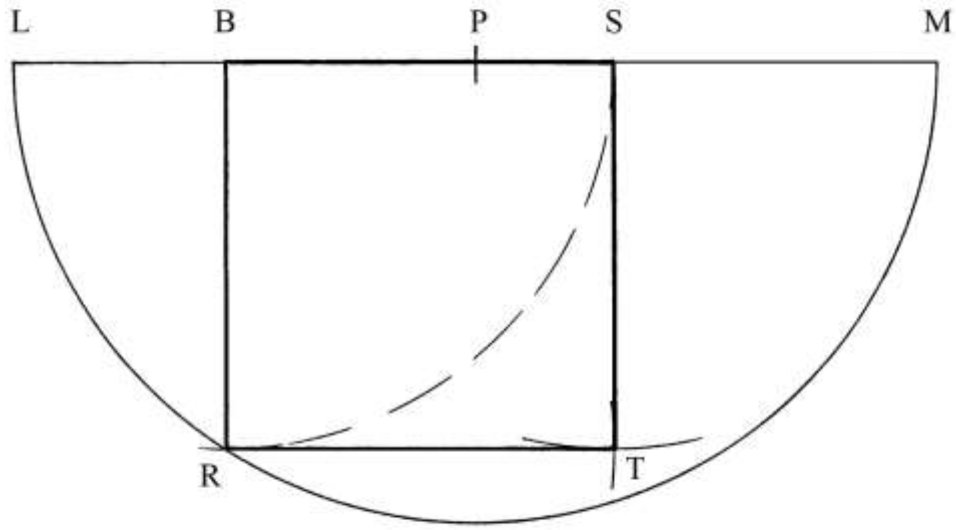
Dal punto A tracciare l’altezza AG, perpendicolare alla base BC.

Dai punti B e C disegnare verso l’alto linee parallele a AG.
Determinare i punti medi di AB e di AC: sono H e I.
Per H e per I tracciare una linea che fissa i punti L e M.
BLMC è un rettangolo che ha la stessa area di AC.

[37] Quadrato equivalente a un rettangolo

Il rettangolo BLMC di cui al precedente problema deve essere convertito in un quadrato di area uguale.

La costruzione proposta da Forestani è corretta ma troppo sintetica.



Tracciare una linea orizzontale lunga quanto LM. Dal punto L riportare verso destra la lunghezza di LB.

Da B abbassare la perpendicolare a LM.

Determinare il punto medio di LM: è P.

Fare centro in P e con raggio PL = MN disegnare una semicirconferenza che interseca in R la perpendicolare: BR è il lato del quadrato che ha area uguale a quella del rettangolo BLMC.

Completare il quadrato BRTS.

[38] Triangolo rettangolo isoscele doppio di un quadrato

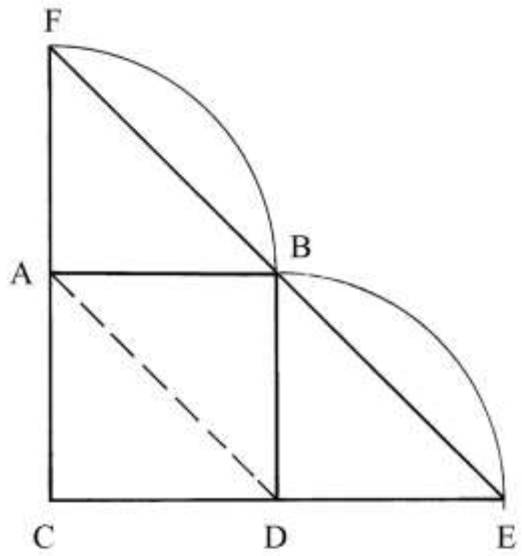
ABDC è un quadrato e deve essere costruito un triangolo rettangolo di area doppia.

Prolungare verso l’alto il lato AC e verso destra quello CD.

Con il compasso fare centro in A e in D con raggio AB = DB e disegnare due archi di circonferenza che fissano i punti F e E.

Collegare F con E.

Il triangolo CFE ha area doppia di quella del quadrato ABDC.

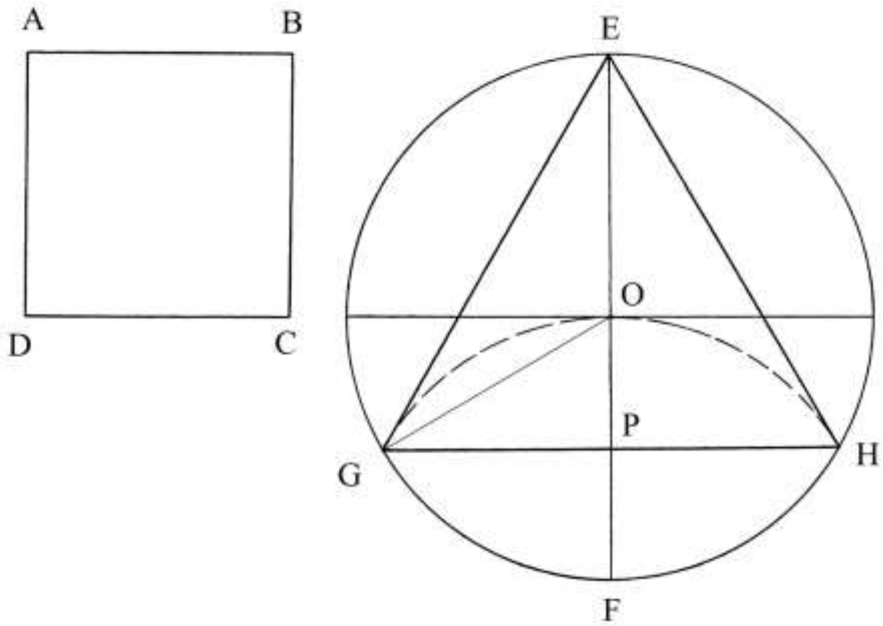


[39] Quadrato triplo di un altro

ABCD è un quadrato e deve essere costruito un secondo quadrato con area tripla di quella del primo.

Il quadrato ha lati lunghi 7 braccia e area S_{ABCD} che è:

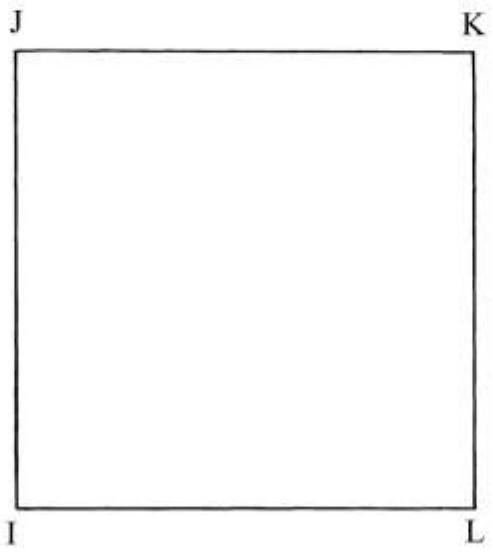
$S_{ABCD} = 7 * 7 = 49$ braccia quadre.



Con raggio lungo quanto il lato del quadrato ABCD disegnare una circonferenza con centro in O. Tracciare il diametro verticale EF e con raggio OF fare centro in F e disegnare l'arco GH. La circonferenza è divisa in tre parti uguali.

GEH è un triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro O.

Con il compasso misurare la lunghezza del lato GH e con questa costruire il quadrato IJKL:



Secondo Forestani i lati del triangolo GEH sono lunghi √147 braccia.

- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza dei lati del triangolo equilatero è ricavabile con semplici passaggi. Il diametro del cerchio, EF, è lungo il doppio del lato AB:

EF = 2 * AB = 2 * 7 = 14 braccia.

P è il punto medio del lato GH e il punto medio del raggio OF. Si ha:

$PG^2 = OG^2 – OP^2 = 7^2 – (7/2)^2 = 49 – 3{,}5^2 = 49 – 12{,}25 = 36{,}75$.

GH = 2 * PG

$GH^2 = (2 * PG)^2 = 4 * PG^2 = 4 * 36{,}75 = 147$ da cui

GH = √147 braccia.

Il quadrato di lato IJ ha lati lunghi quanto GH. Il quadrato IJKL ha area:

$S_{IJKL} = IJ^2 = GH^2 = (\sqrt{147})^2 = 147$ braccia quadre.

Calcoliamo il rapporto fra l'area di IJKL e quella di ABCD:

$S_{IJKL}/S_{ABCD} = 147/49 = 3$.

La costruzione proposta da Forestani è esatta.

- -

[40] Quadrato sette volte più grande di un altro

ABCD è un quadrato e deve esserne costruito uno che abbia area *sette* volte più grande; i suoi lati sono lunghi 1 braccio e la sua area è:

$S_{ABCD} = 1 * 1 = 1$ braccio quadro.

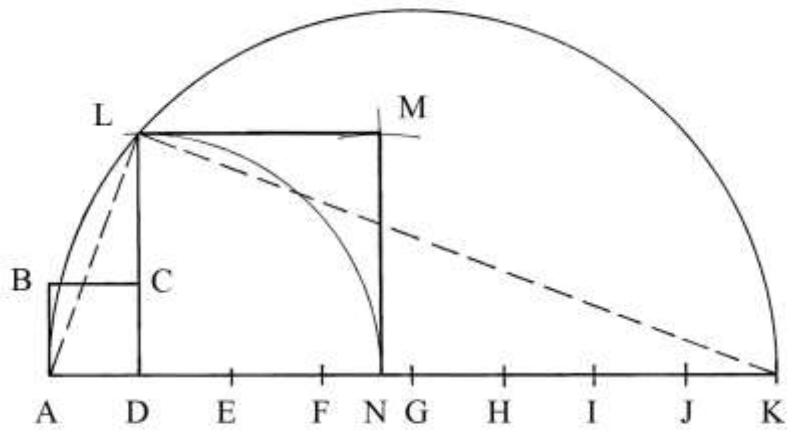
Per via aritmetica non è possibile ricavare con esattezza un quadrato che abbia area uguale a 7 volte quella di ABCD e cioè 7 braccia quadre: il suo lato è lungo √7, numero irrazionale.

Prolungare verso destra il lato AD e verso l'alto quello DC.

A partire da D, riportare sulla semiretta orizzontale per *sette* volte la lunghezza di AD: sono fissati i punti E, F, G, H, I, J e K.

DK è lungo:

DK = 7 * AD.



G è il punto medio di AK:

GA = GK = 4 * AD = 4 * 1 = 4 braccia.

Fare centro in G e con raggio GA = GK tracciare una semicirconferenza da A a K: essa taglia in L il prolungamento di DC.

ALK è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

DL è il lato di un quadrato, DLMN, che ha area uguale a 7 volte quella di ABCD.

Per il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli – utilizzato da Forestani ma non citato – si ha la seguente proporzione:

AD : DL = DL : DK da cui

$DL^2 = AD * DK = 1 * 7 = 7$ e

$DL = \sqrt{7}$ braccia.

Ma DL^2 è anche l'area del quadrato DLMN:

$S_{DLMN} = DL^2 = 7$ braccia quadre.

[41] <u>Quadrato di area uguale a quella di un cerchio</u>

La costruzione è ovviamente approssimata.

Nel testo originale la descrizione della soluzione del problema non è completa perché si interrompe alla fine della pagina 464: a pagina 465 è contenuto uno schema ad esso collegato.

AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari di un cerchio di centro O.

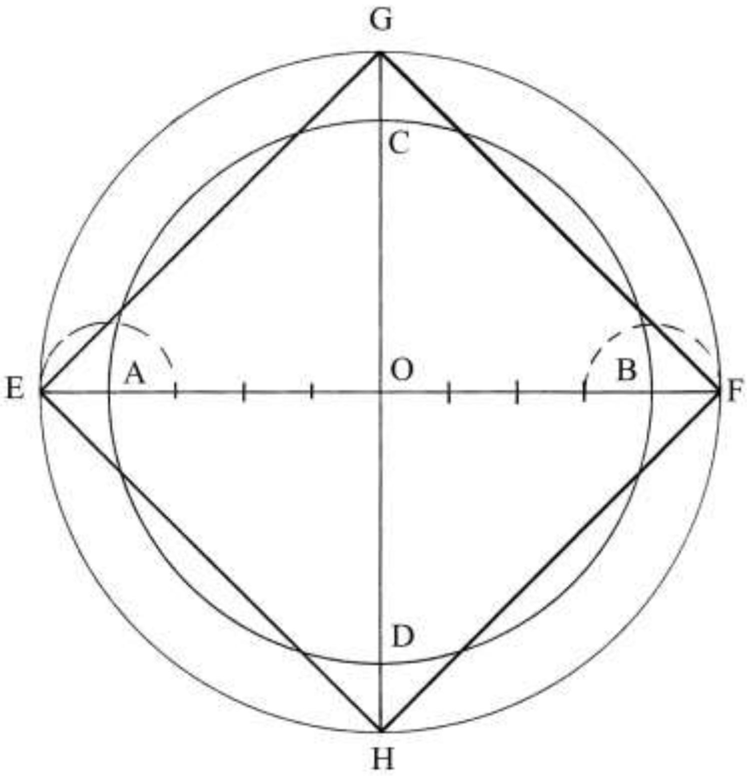
AB è diviso in *otto* parti uguali.

Sul prolungamento di AB sono fissati due punti, E e F:

AE = BF = 1/8 * AB.

Fare centro in O e con raggio OE = OF disegnare una seconda circonferenza che fissa i punti G e H.

EGFH è un quadrato che *avrebbe* area uguale a quella del cerchio di raggio OA.



\- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo la soluzione proposta da Forestani.

Il cerchio di centro O e raggio OA ha area:

$S_{CERCHIO} = \pi * r^2 = 22/7 * OA^2$.

Il quadrato EGFH ha diagonali EF e GH lunghe:

EF = GH = 10/8 * AB = 20/8 * OA = 5/2 * OA.

L'area di EGFH è:

$S_{EGFH} = EF^2/2 = (5/2 * OA^2)/2 = 25/8 * OA^2$.

Confrontiamo i due coefficienti 22/7 ($\approx \pi$) e 25/8:

$22/7 \approx 3,1428$

$25/8 = 3,125$

π vale: $\pi \approx 3,14159\ldots$

Ne consegue che 25/8 < 22/7 e che l'area del quadrato EGFH è *leggermente* minore di quella del cerchio di raggio OA.

L'esatta quadratura del cerchio è impossibile.

La costante 26/8 è una buona approssimazione del valore di π anche se 22/7 si avvicina ad esso maggiormente.

Il valore approssimato 25/8 per π fu usato dal XX secolo a.C. dai geometri Babilonesi e fu impiegato anche dall'architetto romano Vitruvio nel I secolo a.C.

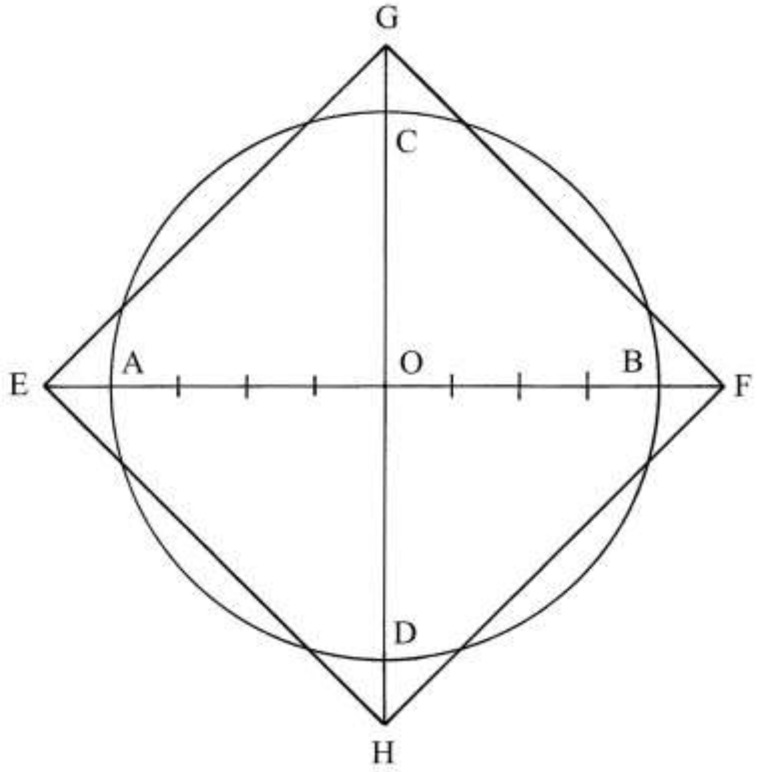
\- -

[42] Cerchio di area uguale a quella di un quadrato

Il problema è l'inverso del precedente.

È dato il quadrato EGFH: EF e GH sono le sue diagonali.

Dividere in *dieci* parti uguali la diagonale EF.



A e B sono due punti fra loro simmetrici rispetto al centro O: OA è lungo i 4/5 di OE.
Fare centro in O e con raggio OA = OB disegnare una circonferenza che incrocia la diagonale GH nei punti C e D.
Il quadrato EGFH ha area:

$$S_{EGFH} = EF^2/2.$$

Il cerchio di centro O e raggio OA ha area:

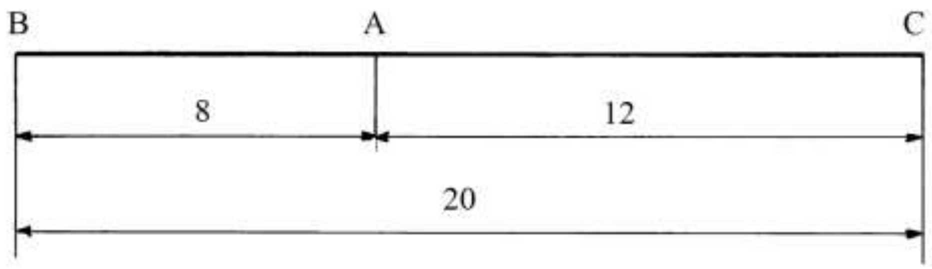
$$S_{CERCHIO} = \pi * OA^2 = 22/7 * (4/5 * OE)^2 = 22/7 * (4/5 * EF/2)^2 =$$
$$= 22/7 * (2/5 * EF)^2 = 22/7 * 4/25 * EF^2 = 88/175 * EF^2.$$

La costante 88/175 vale 0,502857.
Il cerchio ha area *leggermente* più grande di quella del quadrato EGFH:

$$88/175 * EF^2 > EF^2/2$$
$$88/175 > 0,5.$$

[43] Un triangolo impossibile

Un triangolo ha lati lunghi 8, 12 e 20 canne.
La sua costruzione è impossibile:



dimensioni in *canne*

Per essere costruibile, le lunghezze dei lati di un triangolo devono rispettare una semplice regola: la lunghezza di un lato (ad esempio quella di BC) deve essere *minore* della somma delle lunghezze degli altri due lati (BA e AC):

BC< (BA + AC).

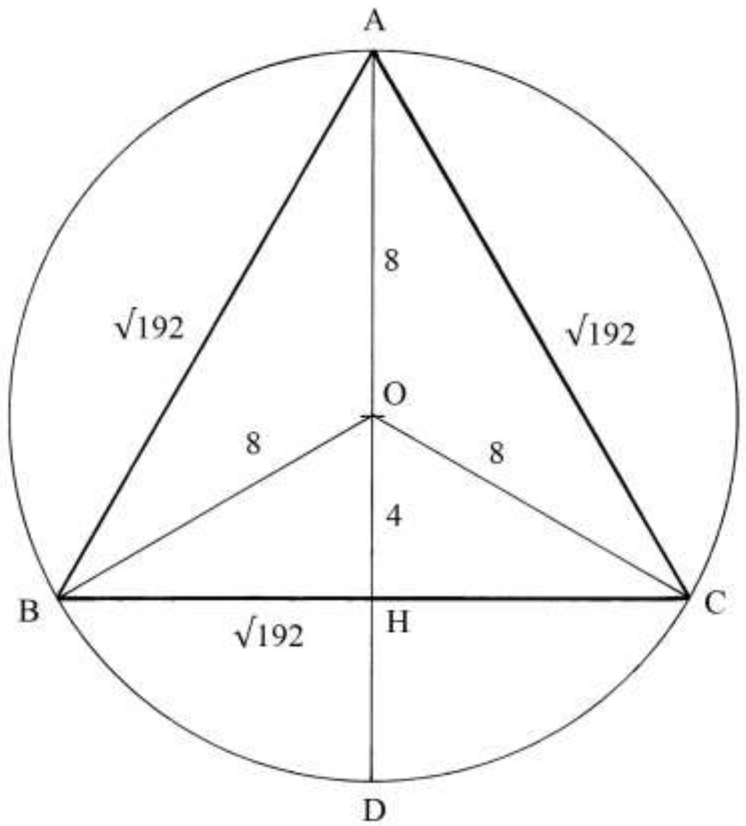
In questo caso si ha:

BC = BA + AC

20 = 8 + 12.

[44] <u>Lunghezza dei lati di un triangolo equilatero</u>

ABC è un triangolo equilatero e O è il suo centro.



La distanza fra il centro O e i vertici del triangolo – A, B e C – è lunga 8 braccia.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del triangolo.

Tracciare una linea verticale passante per A e per O.

La lunghezza di AO è noto essere i 2/3 dell'altezza AH e OH è la metà di AO:

* AO = 8 braccia;
* OH = (AO)/2 = 8/2 = 4 braccia.

Ne consegue:

AH = AO + OH = 8 + 4 = 12 braccia.

Per il punto H tracciare la perpendicolare a AH.

Procediamo alla costruzione del triangolo equilatero. Con raggio OA fare centro in O e disegnare una circonferenza che passa per A e per D e taglia la retta perpendicolare passante per H in due punti: B e C.

ABC è il triangolo equilatero.

Tracciare i raggi OB e OC, entrambi lunghi 8 braccia.

La procedura proposta da Forestani contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di AH per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* dato che il quadrato della lunghezza dell'altezza di un triangolo equilatero è s*esquiterzo* rispetto al quadrato della lunghezza dei lati, si ha:

$4 * AH^2 = 3 * BC^2$

$BC^2 = 4/3 * AH^2 = 4/3 * 12^2 = 4/3 * 144 = 192$ e

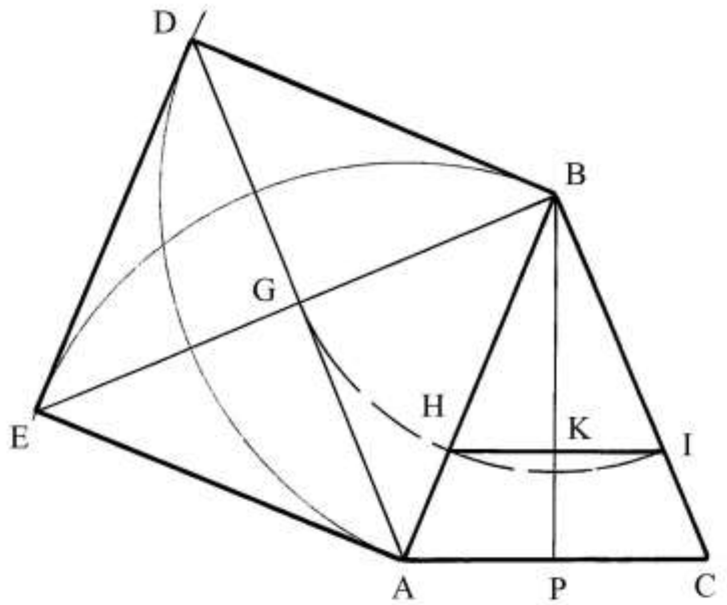
$BC = \sqrt{192}$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo.

La proporzione *sesquiterza* vale 4 : 3.

[45] Divisione di un triangolo isoscele in due parti uguali

ABC è un triangolo isoscele: AB e BC hanno uguale lunghezza.

BP è l'altezza relativa alla base AC.



Sul lato AB costruire il quadrato ABDE e tracciare le diagonali AD e BE che si intersecano nel centro G.

Fare centro in B e con raggio BC disegnare un arco da G fino a incontrare in H il lato AB e in I quello BC.

Tracciare HI, parallela a AC.

HI divide ABC in due poligoni che hanno aree uguali e pari a metà di quella dello stesso ABC:

* il triangolo BHI;
* il trapezio isoscele AHIC.

Le aree sono:

$S_{BHI} = BK * HI/2;$

$S_{AHIC} = [(AC + HI)/2] * KP.$

- APPROFONDIMENTO -

BH è lungo quanto metà della diagonale BE:

$BE^2 = BA^2 + AE^2 = 2 * BA^2$ e

$BE = BA * \sqrt{2}.$

Ne consegue:

$BH = BG = BE/2 = (BA * \sqrt{2})/2 = BA/\sqrt{2}.$

Problemi simili a questo erano contenuti in trattati medievali.

- -

[46] Le proporzioni in un triangolo diviso

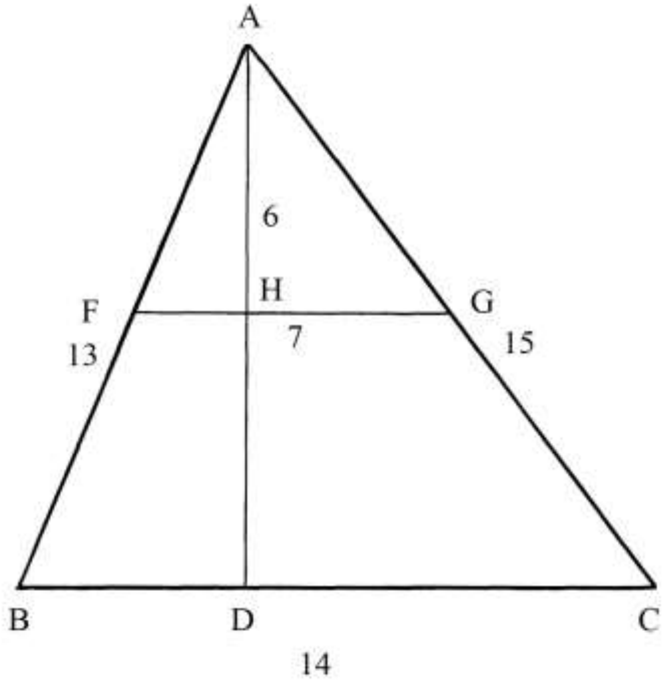
Il paragrafo sembra voler approfondire i rapporti esistenti in un triangolo come quello ABC del precedente paragrafo e in quello del paragrafo che segue.

Il testo originale a p. 466 è interrotto:

46 D'ogni triangolo, quella proportione che è dalla potenza della baſe a tutta
la ſuperficie del triangolo, e ancora dalla potenza della linea diuidente alla par-
te della ſuperficie, che diuide, cioè quella, che ſi toglie via, eſſendo la detta li-
nea equidiſtante alla baſe, come per eſſempio

[47] Triangolo con l'altezza divisa a metà

ABC è il notissimo triangolo 13 – 14 – 15:



Forestani non indica alcuna unità di misura, lineare o superficiale.

L'Autore fornisce di nuovo la lunghezza del "*catetto*" AD (è un'altezza), 12, e quella dell'area, 84.

Il punto H divide l'altezza in due parti uguali: AH = HD = 6.

La lunghezza di FG è calcolata con una proporzione:

AD : BC = AH : FG

12 : 14 = 6 : FG da cui

FG = (14 * 6)/12 = 7.

L'area del triangolo AFG è:

S_{AFG} = (AH * FG)/2 = (6 * 7)/2 = 21.

L'area di AFG è *un quarto* di quella di ABC:

S_{AFG}/S_{ABC} = 21/84 = ¼.

L'Autore calcola l'area di AFG anche con un'altra proporzione:

$BC^2 : S_{ABC} = FG^2 : S_{AFG}$

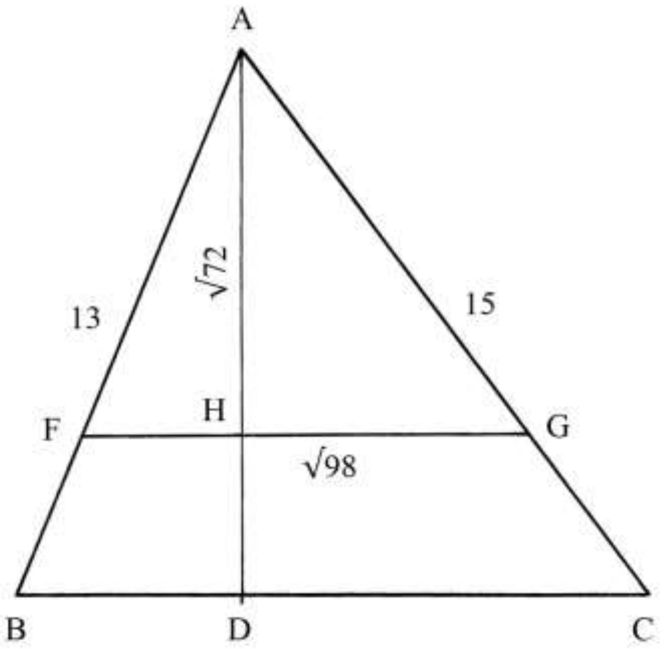
$14^2 : 84 = 7^2 : S_{AFG}$

$196 : 84 = 49 : S_{AFG}$

S_{AFG} = (84 * 49)/196 = 21.

[48] Triangolo 13-14-15 diviso in due parti uguali

ABC è il consueto triangolo con lati lunghi 13, 14 e 15.



Deve essere diviso in due parti con aree uguali a metà di quella di ABC, e cioè 84/2 = 42, con una corda parallela al lato BC.

La lunghezza della corda è ricavata con una proporzione:

$BC^2 : S_{ABC} = FG^2 : S_{AFG}$

$14^2 : 84 = FG^2 : 42$

$196 : 84 = FG^2 : 42$ da cui

$FG^2 = (196 * 42)/84 = 98$ e

$FG = \sqrt{98}$.

La lunghezza di AH è calcolata da Forestani con i seguenti passi:

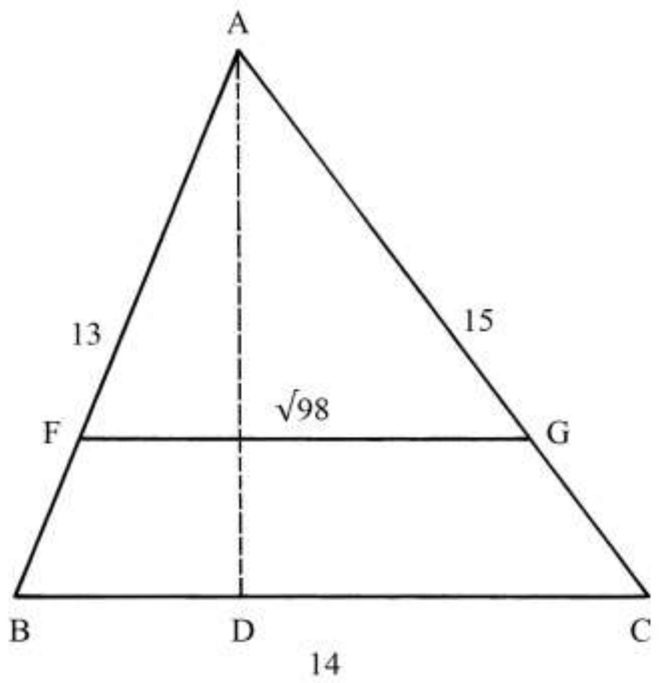
* moltiplicare la lunghezza di AD per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* dividere per 2: 144/2 = 72;
* estrarre la radice quadrata: √72, lunghezza di AH.

L'area di AFG è:

$S_{AFG} = (FG * AH)/2 = (\sqrt{98} * \sqrt{72})/2 = \sqrt{(98 * 72/4)} = \sqrt{1764} = 42$, che è il dato iniziale.

[*49*] <u>Triangolo 13-14-15 diviso in due parti uguali</u>

L'Autore propone un altro metodo per calcolare la lunghezza del segmento FG che divide in due parti uguali il triangolo ABC.



La procedura usata è la seguente:
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* dividere per 2: 225/2 = 112,5;
* estrarre la radice quadrata: √(112,5), lunghezza di AG;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* dividere per 2: 169/2 = 84,5;
* estrarre la radice quadrata: √(84,5), lunghezza di AF.

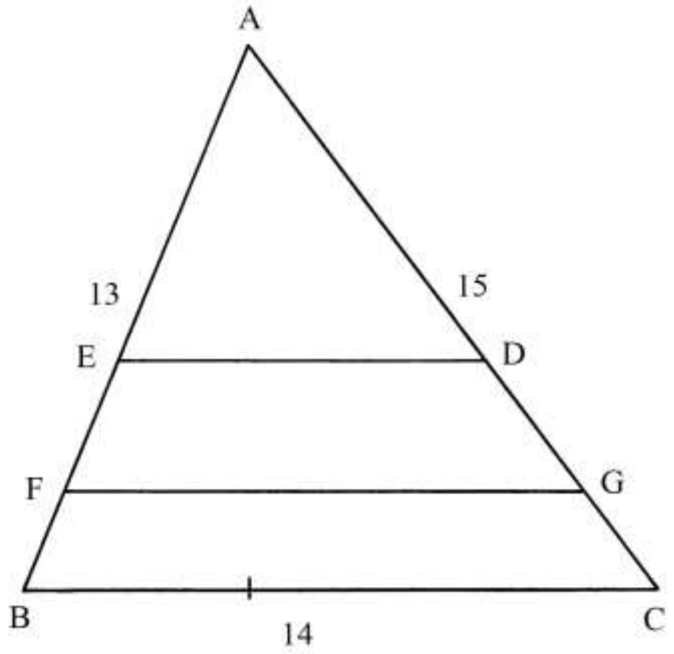
La lunghezza di FG è così calcolata:
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* dividere per 2: 196/2 = 98;
* estrarre la radice quadrata: √98, lunghezza di FG.

[50] <u>Divisione di un triangolo in tre parti uguali</u>

Il solito triangolo 13-14-15 deve essere diviso in *tre* parti uguali, con segmenti paralleli alla base BC.

La procedura contiene i seguenti passi:
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* dividere per 3: 225/3 = 75;
* estrarre la radice quadrata: √75, lunghezza di AD;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* dividere per 3: 169/3 = (56 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(56 + 1/3), lunghezza di AE;
* calcolare i 2/3 del quadrato della lunghezza di AC: 2/3 * 225 = 150;
* estrarre la radice quadrata: √150, lunghezza di AG;
* calcolare i 2/3 del quadrato della lunghezza di AB: 2/3 * 169 = (112 + 2/3);
* estrarre la radice quadrata: √(112 + 2/3), lunghezza di AF;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* dividere per 3: 196/3 = (65 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(65 + 1/3), lunghezza di ED;
* calcolare i 2/3 del quadrato della lunghezza di BC: 2/3 * 196 = (130 + 2/3);

*	estrarre la radice quadrata:	√(130 + 2/3), lunghezza di FG.



ABC è ora diviso in tre poligoni di area uguale a 84/3 = 28:

* il triangolo scaleno ADE;
* il trapezio scaleno DEFG;
* il trapezio scaleno FGCB.

[51] <u>Divisione di un triangolo in due parti non uguali</u>

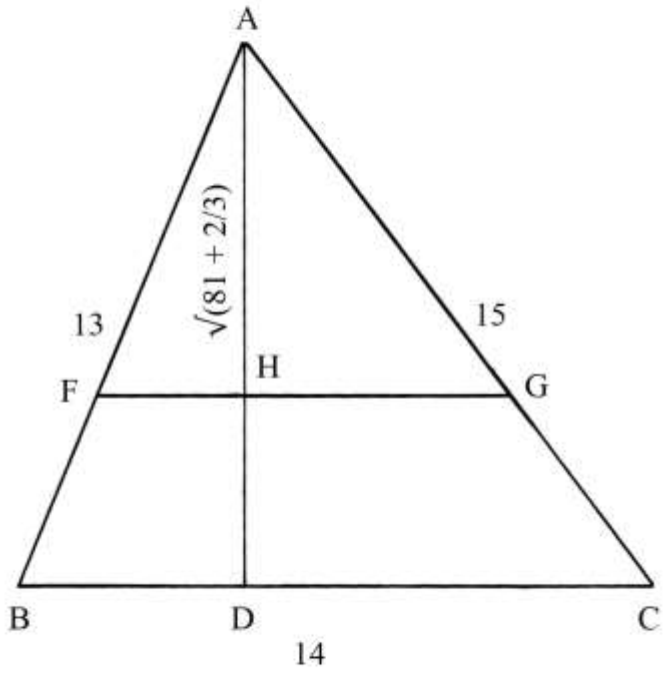
Il consueto triangolo ABC con lati lunghi 13, 14 e 15 deve essere diviso in due parti con una corda, FG, parallela alla base BC: una delle due parti, il triangolo AFG, deve avere area uguale a 35, ricordando che l'intero ABC ha area uguale a 84.

La soluzione è ottenuta con una proporzione:

$BC^2 : S_{ABC} = FG^2 : S_{AFG}$
$14^2 : 84 = FG^2 : 35$
$196 : 84 = FG^2 : 35$
$FG^2 = (196 * 35)/84 = (81 + 2/3)$ e
$FG = \sqrt{(81 + 2/3)}$.

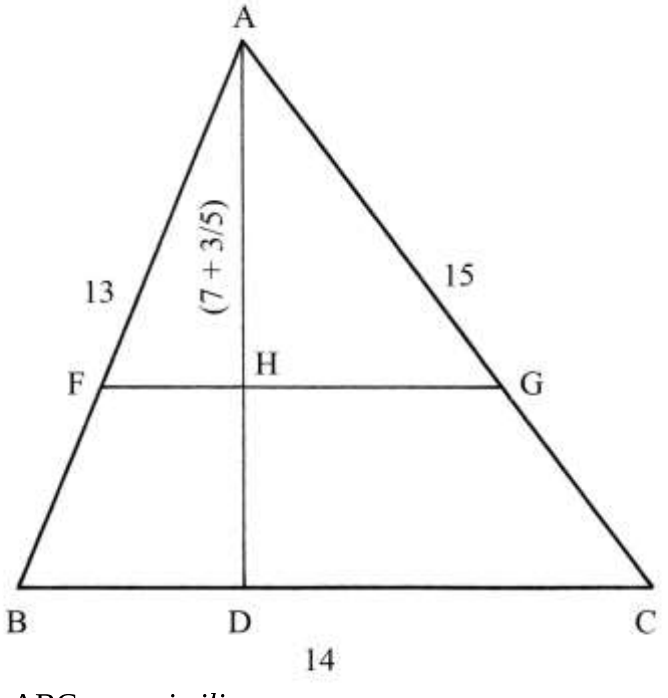
Anche la lunghezza di AH è ricavata con una proporzione:

$AH^2 : S_{AFG} = AD^2 : S_{ABC}$
$AH^2 : 35 = 12^2 : 84$
$AH^2 = (35 * 12^2)/84 = (35 * 144)/84 = 60$ e
$AH = \sqrt{60}$.



[53] <u>Altra divisione del triangolo 13-14-15</u>

Il triangolo ABC deve essere diviso in due parti con una corda parallela alla base BC.



I triangoli AFG e ABC sono *simili*.

Il triangolo AFG deve avere area uguale a 2/5 di quella di ABC:

$S_{AFG} = 2/5 * S_{ABC} = 2/5 * 84 = (33 + 3/5)$.

La lunghezza di AH è ricavata con una proporzione:

$AH^2 : S_{AFG} = AD^2 : S_{ABC}$

$AH^2 : (33 + 3/5) = 12^2 : 84$

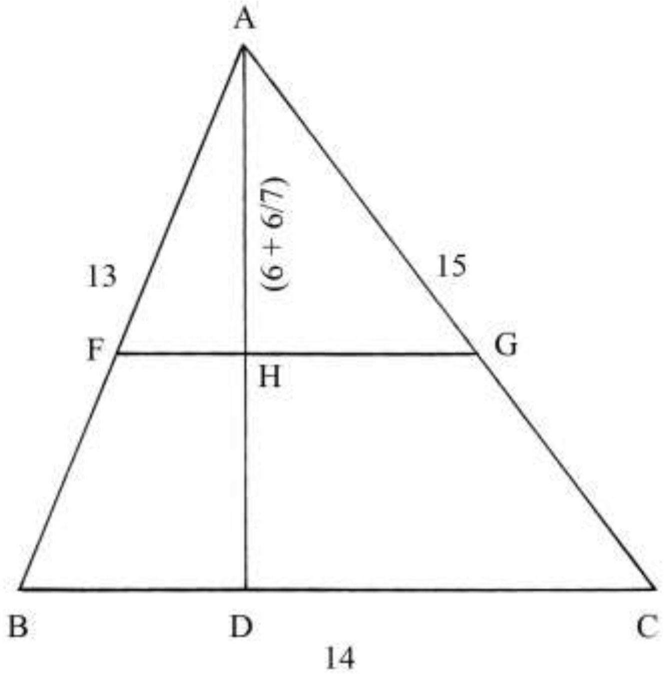
$AH^2 : (33 + 3/5) = 144 : 84$

$AH^2 = (33 + 3/5) * 144/84 = (57 + 3/5)$ e

$AH \approx (7 + 3/5)$.

[53] Un’altra divisione del triangolo 13-14-15

In questo problema, Forestani introduce l’unità di misura lineare, il *braccio*.



ABC viene diviso con una corda, FG, parallela alla base BC e lunga 8 braccia.

I triangoli ABC e AFG sono simili per cui è possibile ricavare la lunghezza di AH con l’aiuto di una proporzione:

AH : FG = AD : BC

AH : 8 = 12 : 14

AH = (8 * 12)/14 = 96/14 = (6 + 6/7) braccia.

[54] Divisione del triangolo 13-14-15 in due parti

Il solito triangolo 13-14-15 ha i lati obliqui scambiati di posizione rispetto ai casi precedenti: il lato lungo 15 (AB) è collocato a sinistra e quello lungo 13 (AC) è a destra.

La base BC è sempre lunga 14.

Il triangolo deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente dal punto E posizionato su AB, a distanza 3 braccia dal vertice A.

BEF è un triangolo rettangolo che ha l’ipotenusa BE lunga:

BE = BA – EA = 15 – 3 = 12.

AD è l’altezza relativa a BC che, come sappiamo, è lunga 12.

I triangoli rettangoli BEF e BAD sono simili e vale la proporzione:

BE : BA = FE : AD da cui

FE = (BE * AD)/BA = (12 * 12)/15 = 144/15 = (9 + 2/3).

La lunghezza di BF è data da:

$BF^2 = BE^2 – FE^2 = 12^2 – (9 + 2/3)^2 = 144 – 93,44 = 50,56$ e

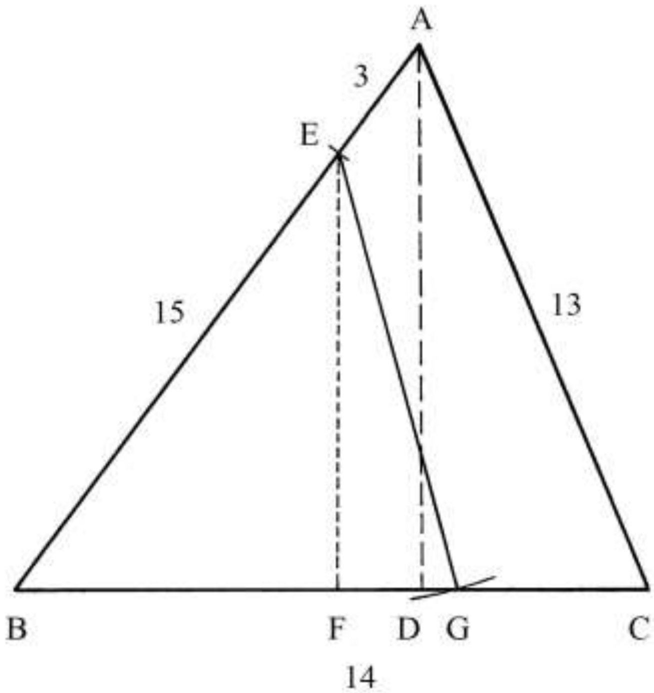
BF = √(50,56) ≈ 7,11.

AD è l’altezza relativa alla base BC: sappiamo dalle soluzioni di precedenti problemi relativi al triangolo 13-14-15 che BC è diviso come segue:

* BD = 9,
* DC = 5.

La lunghezza del segmento FD è:

FD = BD – BF = 9 – 7,11 = 1,89.



Forestani vuole dividere ABC in due parti di area uguale con una corda uscente da E fino a un punto, G, collocato su BC.

La lunghezza della corda EG è ricavata con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza di FD per sé stessa: FD * FD = 1,89 * 1,89 = 3,5721;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di FE: (9 + 2/3) * (9 + 2/3) = 93,44;
* sommare con il quadrato della lunghezza di FD: 93,44 + 3,5721 = 97,0121;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(97,0121)} \approx 9,85$ braccia, lunghezza della corda EG.

Il triangolo BEG ha area di 42 braccia quadre, uguale a quella del quadrilatero AEGC e pari a metà di quella di ABC.

- APPROFONDIMENTO -

La descrizione del problema e lo schema contenuti nel testo di Farnetani probabilmente contengono degli errori. Inoltre la soluzione proposta pare piuttosto complessa.

È assai più semplice costruire un triangolo, BEG, che abbia area uguale a metà di quella di ABC e cioè 84/2 = 42.

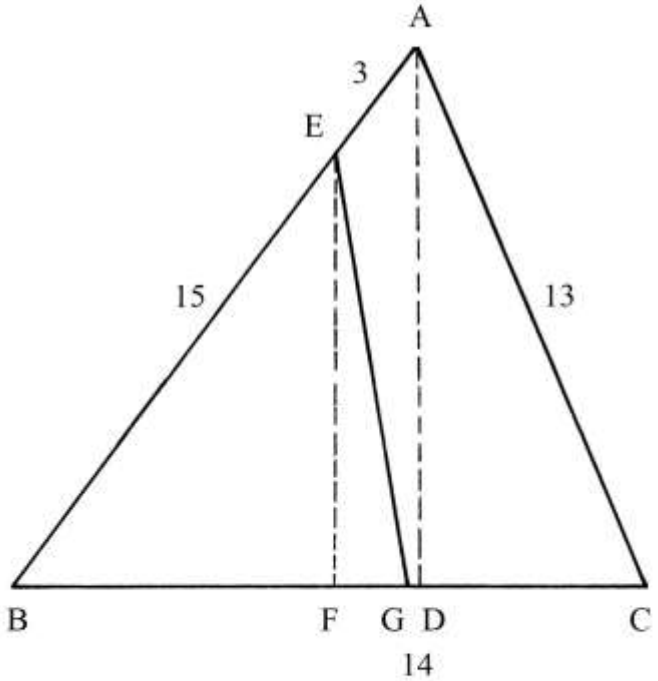
Dopo aver fissato il punto E, occorre utilizzare la lunghezza di FE già calcolata da Forestani:

FE = (9 + 2/3).

Conoscendo l'area di BEG possiamo ricavare la lunghezza della base BG:

$BG = (2 * S_{BEG})/FE = (2 * 42)/(9 + 2/3) = 84/(9 + 2/3) \approx 8,69$.

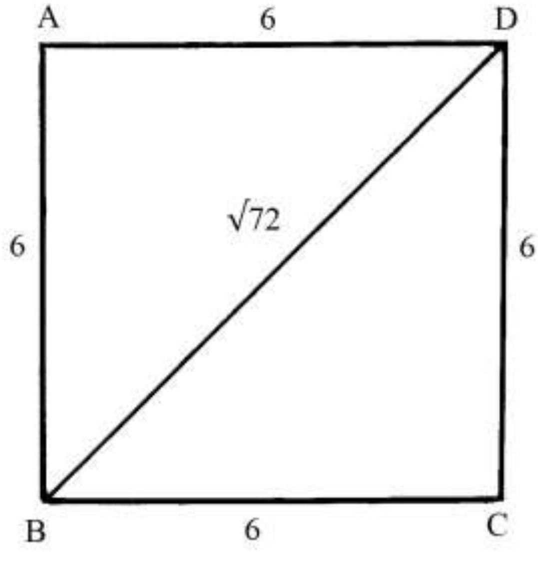
La soluzione qui proposta è più semplice e porta a un risultato leggermente diverso da quello al quale giunge la procedura impiegata da Forestani: il punto G viene a trovarsi *a sinistra* rispetto a D.



- -

[55] Diagonale di un quadrato

ABCD è un quadrato con lati lunghi 6.



La lunghezza della diagonale ("*diametro del quadrato*" secondo Forestani) BD è:

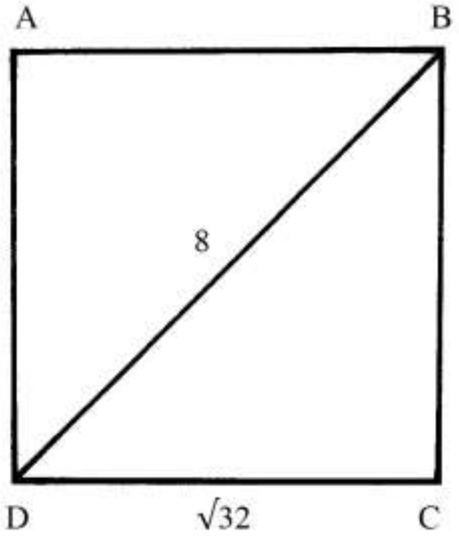
$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$ e

$BD = \sqrt{72}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo caso è dato dal quadrato di cui è nota solo la lunghezza delle diagonali: DB è lunga 8.

Deve essere calcolata la lunghezza dei lati del quadrato.

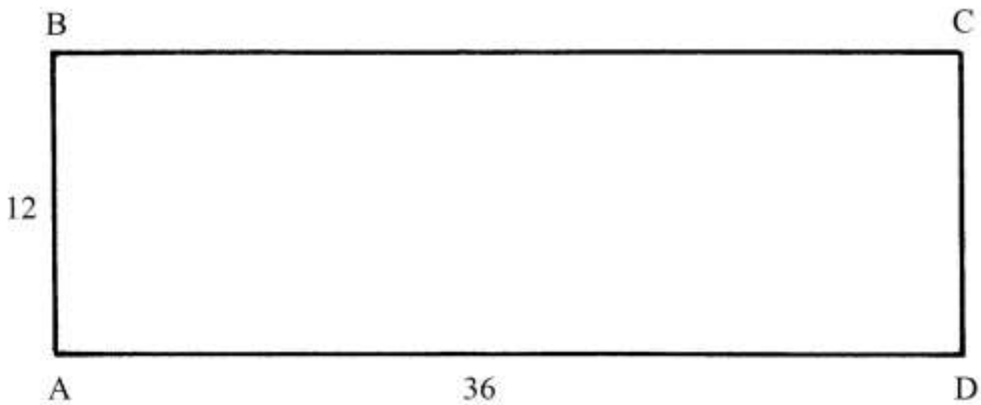


La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza della diagonale DB per sé stessa: $8 * 8 = 64$;
* dividere per 2: $64/2 = 32$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{32}$, lunghezza dei lati del quadrato.

[56] Lunghezze dei lati di un rettangolo

Un rettangolo ha area uguale a 432; i suoi lati hanno lunghezze che stanno in proporzione 3 : 1.



Il problema chiede le loro lunghezze.

La soluzione contiene i seguenti passi:

* dividere l'area per 3 [rapporto fra lunghezza e larghezza del rettangolo]: $432/3 = 144$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$, larghezza dei lati del rettangolo: AB = CD;
* moltiplicare per 3: $12 * 3 = 36$, lunghezza del rettangolo, AD = BC.

L'area del rettangolo è:

$S_{ABCD} = AB * AD = 12 * 36 = 432.$

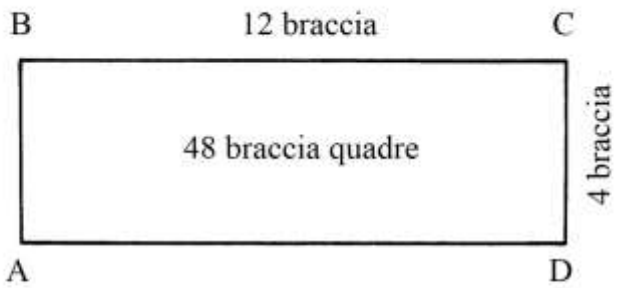
[57] <u>Due spalliere</u>

Una spalliera rettangolare ha superficie di 48 braccia quadre ed è 3 volte più lunga che larga (come nel caso del rettangolo considerato nel precedente problema): essa vale 50 ducati.

Una seconda spalliera vale 100 ducati e deve avere forma rettangolare con la stessa proporzione di 3 : 1 fra la lunghezza e la larghezza.

La prima spalliera ha dimensioni che Forestani non calcola ma che è facile ricavare con la procedura utilizzata per la soluzione del precedente problema:

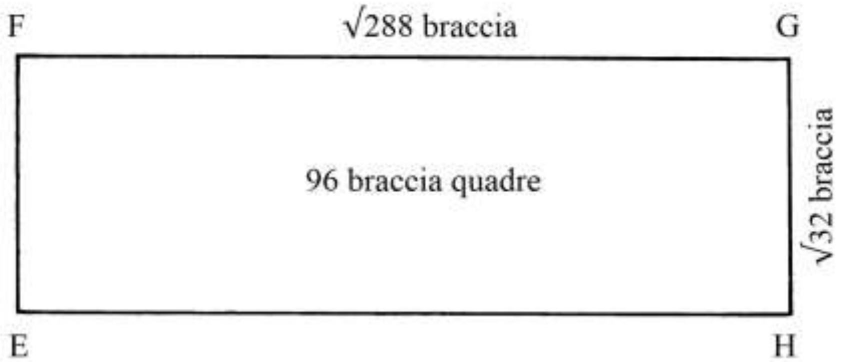
* dividere l'area per 3 [rapporto fra lunghezza e larghezza del rettangolo]: 48/3 = 16;
* estrarre la radice quadrata: √16 = 4 braccia, larghezza della prima spalliera, AB = CD;
* moltiplicare per 3: 4 * 3 = 12 braccia, lunghezza della prima spalliera, AD *= BC;
* moltiplicare la lunghezza di AB per quella di AD: AB * AD = 4 * 12 = 48 braccia, area di ABCD.



Occorre ora calcolare l'area della seconda spalliera con una proporzione:

$S_{ABCD} : 50 \text{ ducati} = S_{SECONDA} : 100 \text{ ducati}$

$S_{SECONDA} = S_{ABCD} * 100/50 = 2 * S_{ABCD} = 2 * 48 = 96$ braccia quadre.



Le dimensioni della seconda spalliera sono ricavate con una procedura simile a quella usata sopra:

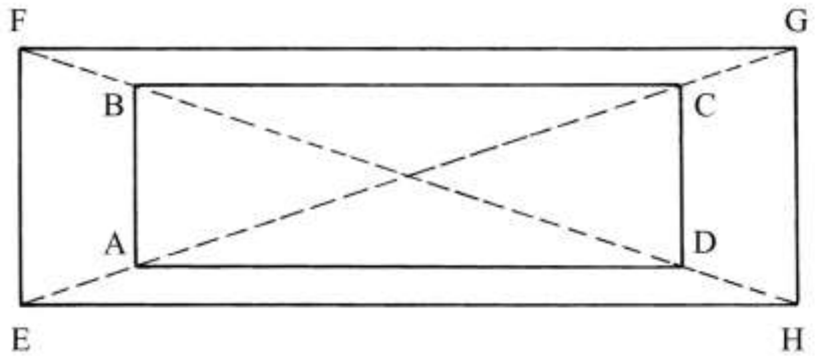
* dividere l'area di 96 braccia quadre per 3: 96/3 = 32;
* estrarre la radice quadrata: √32 braccia, lunghezza di EF = EH;
* moltiplicare per 3: 3 * √32 = √(9 * 32) = √288 braccia, lunghezza di EH = FG.

Verifichiamo il risultato:

$S_{EFGH} = EF * EH = \sqrt{32} * \sqrt{288} = \sqrt{(32 * 288)} = \sqrt{9216} = 96$ braccia quadre, area della spalliera di valore uguale a 100 ducati.

- APPROFONDIMENTO -

Le due spalliere, ABCD e EFGH, hanno la forma di due rettangoli *simili*:



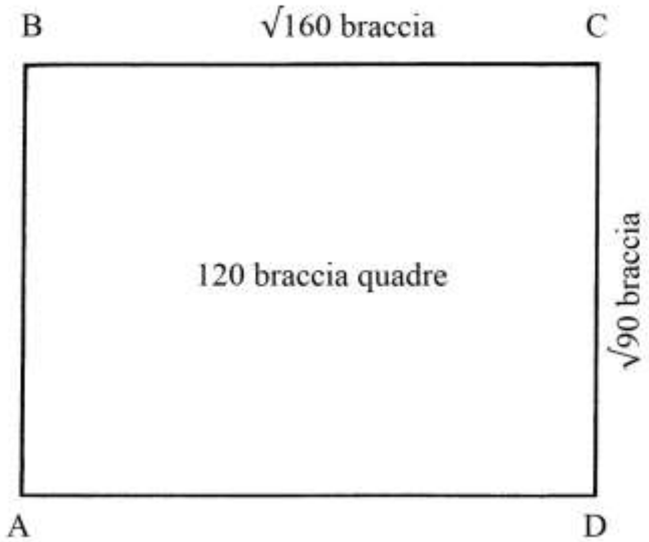
Le diagonali di ABCD (AC e BD) giacciono su quelle di EFGH (EG e FH).

- -

[58] Un'altra spalliera

Una spalliera ha forma rettangolare e area di 120 braccia quadre e fra la lunghezza e la larghezza vi è una proporzione *sesquialtera*: il problema chiede le lunghezze dei lati.

Le lunghezze sono in proporzione 4 : 3.



La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare 3 per 4: $3 * 4 = 12$;
* dividere l'area per 12: $120/12 = 10$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{10}$;
* moltiplicare per 4: $\sqrt{10} * 4 = \sqrt{(10 * 16)} = \sqrt{160}$ braccia, lunghezza di AD e di BC;
* moltiplicare $\sqrt{10}$ per 3: $\sqrt{10} * 3 = \sqrt{(10 * 9)} = \sqrt{90}$ braccia, lunghezza di AB e di CD.

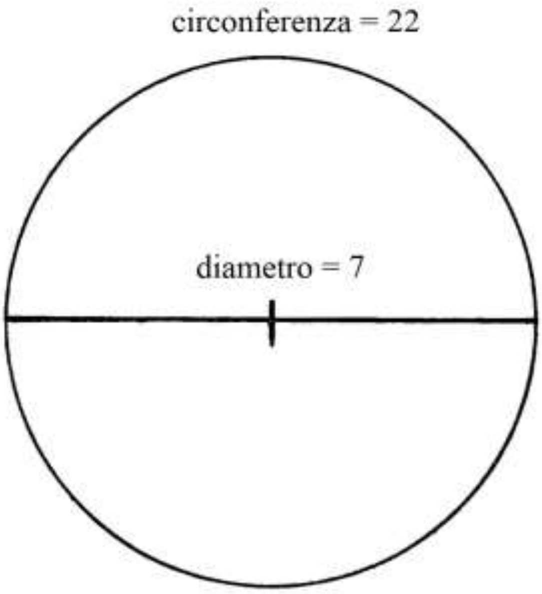
L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = AD * AB = \sqrt{160} * \sqrt{90} = \sqrt{(160 * 90)} = \sqrt{14400} = 120 \text{ braccia quadre.}$$

LE SUPERFICI CIRCOLARI
=====================

[1] Diametro di una circonferenza

Un cerchio ha circonferenza *c* lunga 22: il problema chiede la lunghezza del diametro.



Forestani cita la costante introdotta da Archimede per il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro, ciò che oggi è definito con il simbolo "π": per il geometra di Siracusa quel rapporto è approssimato a:

(3 + 1/7) = 22/7.

Forestani usa quell'approssimazione e calcola la lunghezza del diametro *d*:

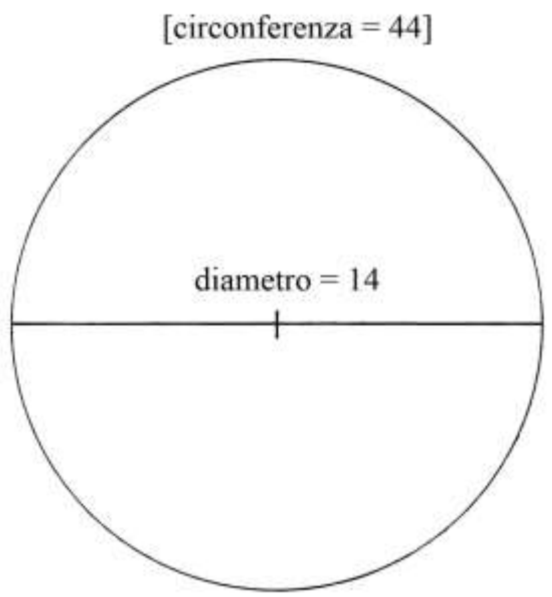
d = c/(3 + 1/7) = 22/(22/7) = 7.

[2] Circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha diametro *d* = 14. È chiesta la lunghezza della sua circonferenza, *c*.

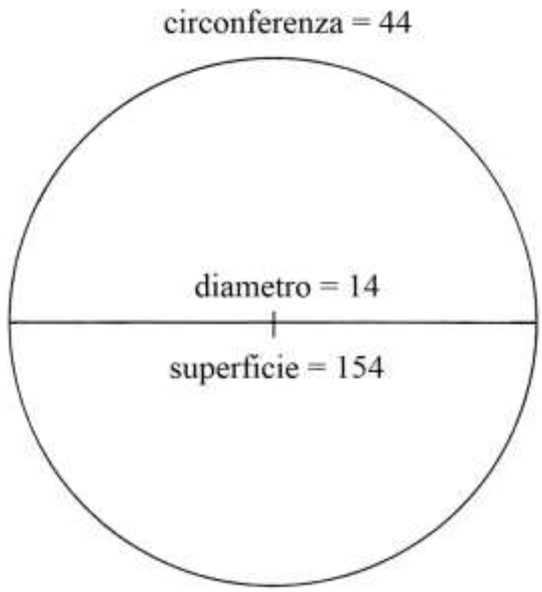
Essa è lunga:

c = d * (3 + 1/7) 0 14 * (3 + 1/7) 14 * 22/7 = 44.



[3] Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 14 (è lo stesso cerchio del precedente problema) e deve essere calcolata la sua area.



Sempre dalla soluzione del precedente problema conosciamo la lunghezza della circonferenza, che è 44.

Forestani calcola l'area proponendo ben *sei* differenti metodi, tutti equivalenti.

S e l'area del cerchio, *c* la sua circonferenza e *d* il diametro.

1. Moltiplicare metà della lunghezza del diametro per metà di quella della circonferenza:
   S = d/2 * c/2 = (14/2) * (44/2) = 7 * 22 = 154, area del cerchio.
2. Il secondo metodo è:
   * dividere la lunghezza della circonferenza per (3 + 1/7): 44/(3 + 1/7) = 14;
   * dividere la lunghezza della circonferenza per 4: 44/4 = 11;
   * moltiplicare 14 per 11: 14 * 11 = 154, area del cerchio.

   Una formula riassume la procedura:

$S = c/(3 + 1/7) * c/4 = c/(22/7) * c/4 = 7 * c^2/88 = c^2 * 7/88.$

3. Il terzo metodo è:

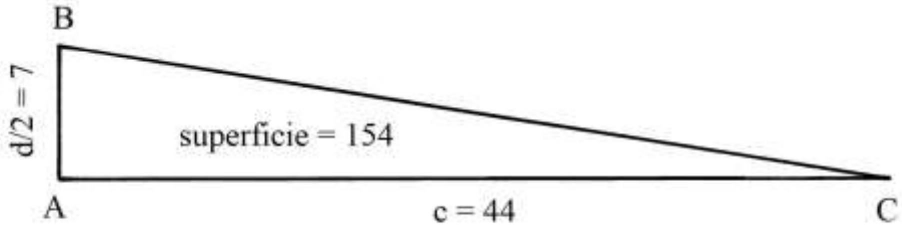
   $S = (d *c/2)/2 = (14 * 44/2)/2 = (14 *22)/2 = 14 * 11 = 154$, area del cerchio.
4. Il quarto metodo è:

   $S = (c * d)/4 = (44 * 14)/4 = 154$, area del cerchio.
5. Il quinto è:

   $S = c^2/(3 + 1/7) = 44^2/(22/7) = 44^2 * 7/22 = 22 * 7 = 154$, area del cerchio.
6. Infine, il sesto metodo è:

   $S = d^2 * 11/14 = 14^2 * 11/14 = 14 * 11 = 154$, area del cerchio.

Forestani fa notare che questo *sesto* metodo è quello più usato dai pratici. A suo avviso tutti i metodi deriverebbero dal *primo* che egli attribuisce a Archimede: il cerchio era assimilato a un triangolo rettangolo con i cateti lunghi come segue:

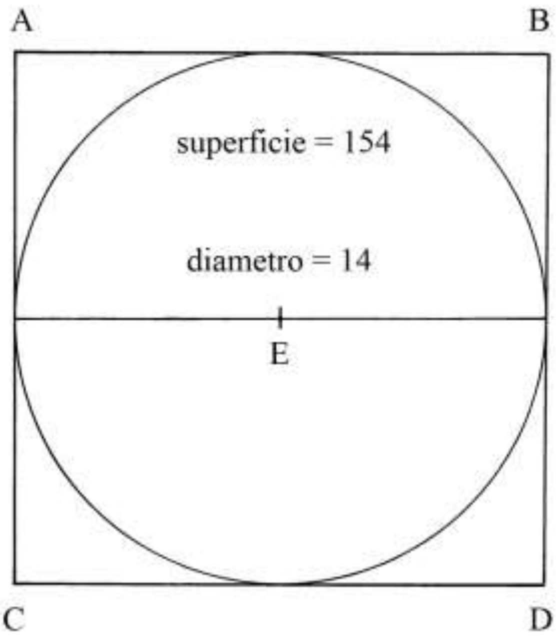


* AB = d/2 = raggio;
* AC = c.

L'area del triangolo ABC è:

$S_{ABC} = AB * (AC/2) = (14/2) *(44/2) = 7 * 22 = 154.$

Lo schema che segue presenta un cerchio di diametro 14 e centro in E, che è inscritto nel quadrato ABDC che ha lati lunghi 14.



L'area di ABDC è:

$S_{ABDC} = 14 * 14 = 196.$

L'area del cerchio è:

$S_{CERCHIO} = (14 * 14) * 11/14 = 14 * 11 = 154.$

Spieghiamo l'origine della costante 11/14.

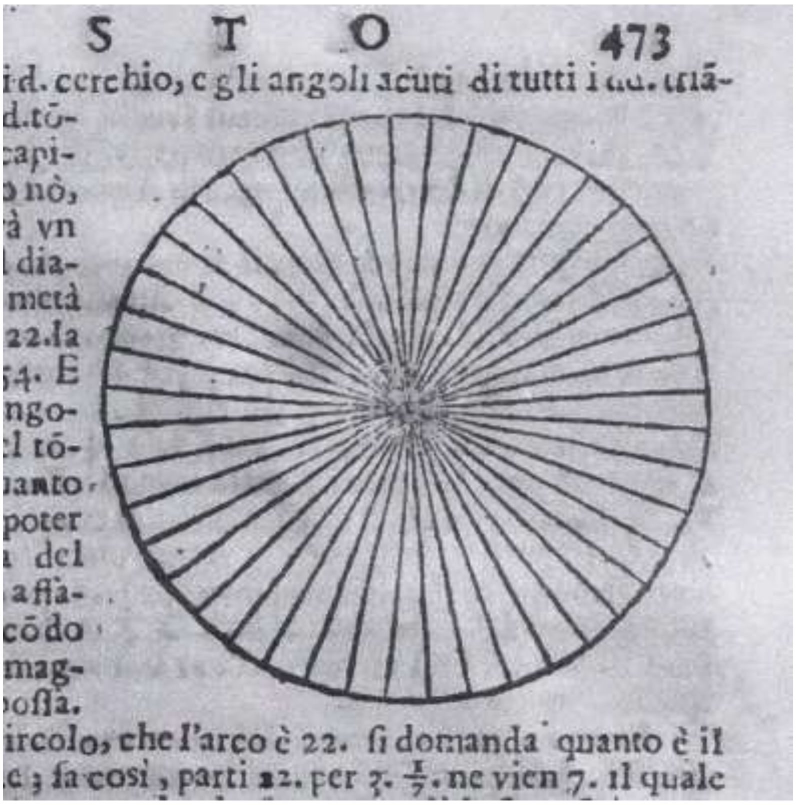
L’area di un cerchio di raggio *r* è:

$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2$.

La formula può essere trasformata:

$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * (d/2)^2 = (3 + 1/7) * d^2/4 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2$.

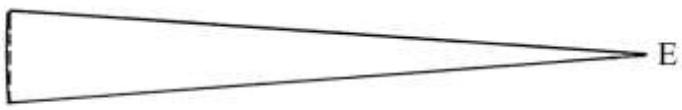
Forestani propone di dividere il cerchio in 44 settori uguali:



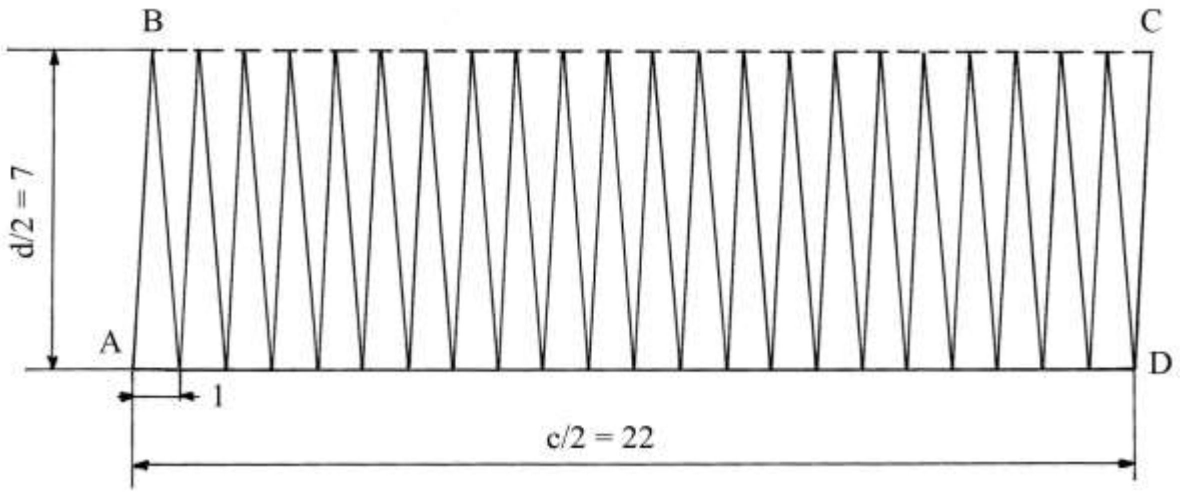
Tutti gli archi sono lunghi:

$c/44 = 44/44 = 1$.

I piccoli settori circolari recano alla base un piccolissimo segmento circolare la cui superficie è trascurabile, come spiega l’ingrandimento nella figura che segue:



Infine, Forestani suggerisce di considerare *metà* dei 44 settori nei quali è diviso il cerchio per accorparli per formare un parallelogramma lungo 22 (= 44/2) e largo 7, quanto il raggio del cerchio:

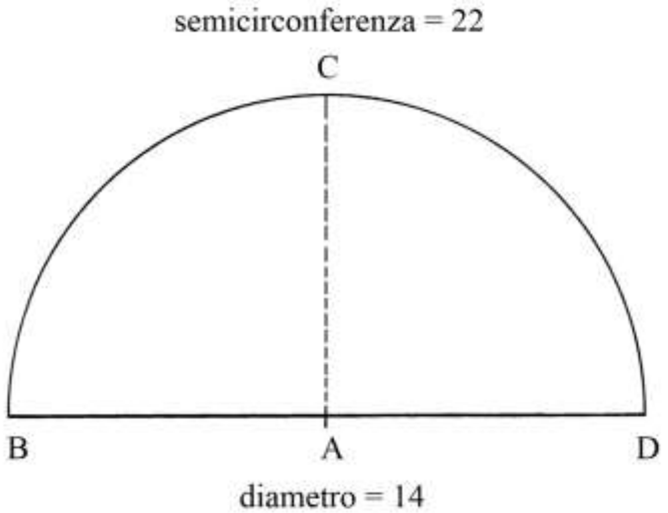


[4] + [5] Diametro di un semicerchio

Un semicerchio ha l'arco di circonferenza lungo 22 e il diametro BD è lungo 14.

Il problema chiede la superficie.

Sono proposte due diverse soluzioni, peraltro equivalenti:



* moltiplicare metà della lunghezza del diametro per metà della lunghezza dell'arco BCD:

  S = (BD/2) * (BCD/2) = (14/2) * (22/2) = 7 * 11 = 77;

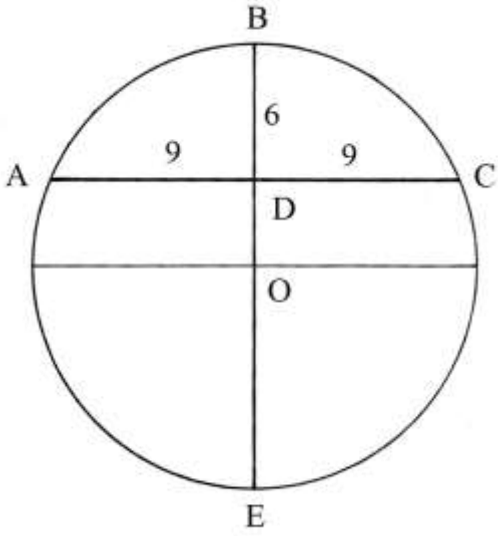
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa, il risultato per 11/14 e infine dividere per 2:

  S = (BD^2 * 11/14)/2 = (14^2 * 11/14)/2 = (14 * 11)/2 = 154/2 = 77.

[6] Segmento circolare

Una porzione di cerchio – un *segmento circolare* – ha la corda AC lunga 18 e la freccia BD ("*saetta*" nella terminologia usata da Forestani) lunga 6.

Il problema chiede la lunghezza del diametro del cerchio, BE.



Forestani applica il *teorema delle corde*, senza citarlo:

BD : AD = DC : DE.

Ma AD = DC per cui la proporzione diviene:

BD : AD = AD : DE e

DE = AD^2/BD = (9 * 9)/6 = 13,5.

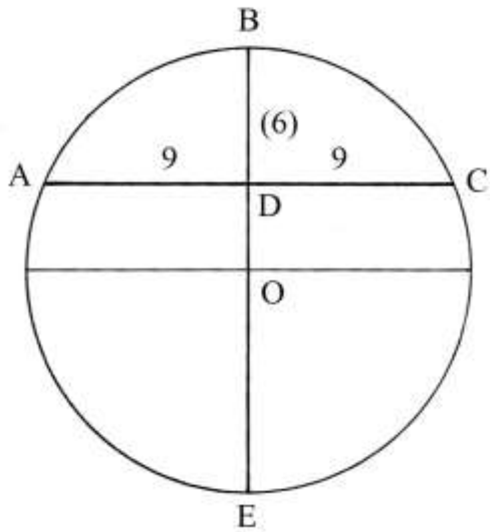
Il diametro BE è lungo:

BE = BD + DE = 6 + 13,5 = 19,5.

[7] <u>Un altro problema sui segmenti circolari</u>

Il problema è l'inverso del precedente.

ABC è un segmento circolare: la sua corda AC è lunga 18.



Il segmento circolare è ritagliato da un cerchio che ha diametro BE lungo 19,5.

Il problema chiede la lunghezza di della freccia BD.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 19,5/2 = 9,75;
* moltiplicare per sé stesso: 9,75 * 9,75 = 95,0625;

* moltiplicare per sé stessa la metà della lunghezza della corda AC:
  (AC/2) * (AC/2) = 9 * 9 = 81;
* sottrarre dal quadrato della metà della lunghezza del diametro:
  95,0625 – 81 = 14,0625;
* estrarre la radice quadrata: √14,0625 = 3,75;
* sottrarre dalla lunghezza della metà del diametro: 9,75 – 3,75 = 6, lunghezza della freccia BD.

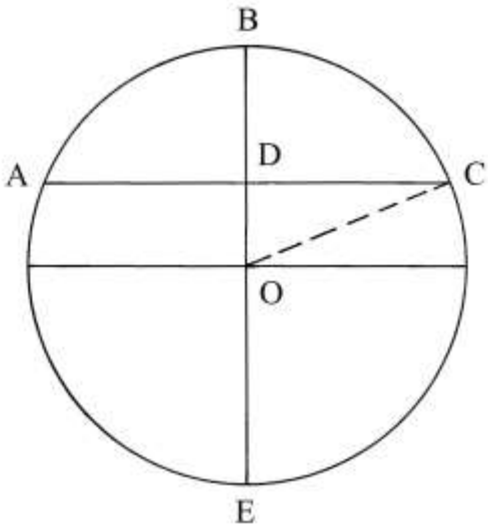
- APPROFONDIMENTO -

La procedura appena descritta applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OCD:

$OD^2 = OC^2 – DC^2 = (19,5/2)^2 – (AC/2)^2 = 9,75^2 – 9^2 = 14,0625$

$OD = \sqrt{14,0625} = 3,75$

$BD = BO – OD = 19,5/2 – 3,75 = 9,75 – 3,75 = 6.$



- -

[8] Un altro problema sui segmenti circolari

Un segmento circolare è più grande di mezzo cerchio: le dimensioni della figura rimandano ai due precedenti problemi.

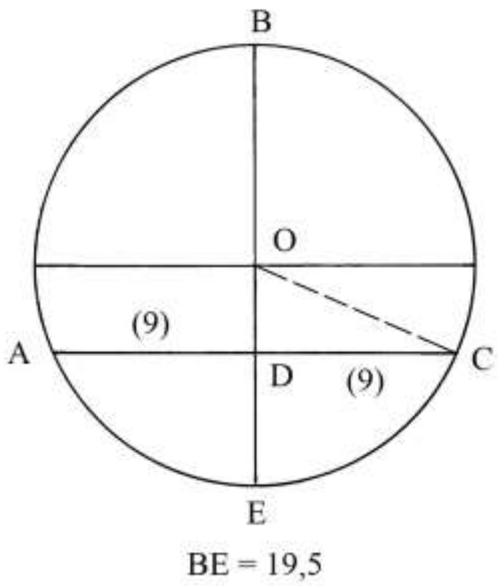
Il diametro BE è lungo 19,5 e la freccia BD è 13,5.

Il problema chiede la lunghezza della corda AC.

La soluzione contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro BE: 19,5/2 = 9,75;
* sottrarre dalla lunghezza della freccia BD: 13,5 – 9,75 = 3,75;
* moltiplicare per sé stesso: 3,75 * 3,75 = 14,0625;
* moltiplicare la metà della lunghezza di BE per sé stessa: 9,75 * 9,75 = 95,0625;
* sottrarre 14,0625: 95,0625 – 14,0625 = 81;
* estrarre la radice quadrata: √81 = 9;
* moltiplicare per 2: 9 * 2 = 18, lunghezza della corda AC.

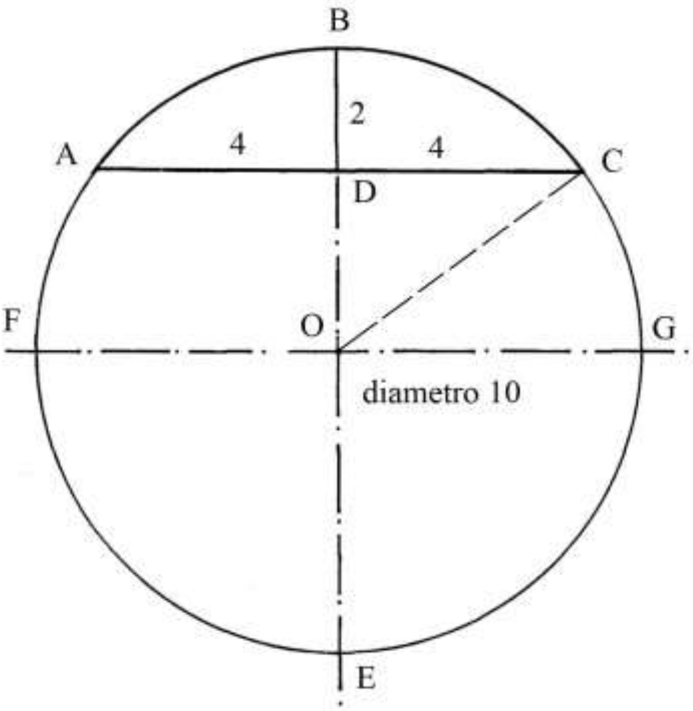
È chiaro che questo problema è legato al precedente [6]: il cerchio ha subito una rotazione di mezzo giro, in senso orario oppure antiorario, intorno al suo centro O.



La procedura usata da Forestani ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ODC: le lunghezze del cateto OD e dell'ipotenusa sono note e viene ricavata quella del cateto DC, che è metà della corda AC.

[9] <u>Un altro segmento circolare</u>

Il segmento circolare ABC è parte di un cerchio che ha diametro 10.
La freccia ("*saetta*") BD è lunga 2.
Il problema chiede la lunghezza della corda AC.



La procedura proposta è la seguente:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: FG/2 = 10/2 = 5;
* moltiplicare per sé stesso: 5 * 5 = 25;
* sottrarre la lunghezza della freccia da metà della lunghezza del diametro: 5 – 2 = 3;
* moltiplicare per sé stesso: 3 * 3 = 9;
* sottrarre dal quadrato della metà del diametro: 25 – 9 = 16;
* estrarre la radice quadrata: √16 = 4;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8, lunghezza della corda AC.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura è riassunta nella formula che segue:

* $c = 2 * \sqrt{(d/2)^2 - (d/2 - f)^2}$ dove:
* d = diametro FG;
* f = freccia BD;
* c = corda AC.

Semplifichiamo la precedente formula sostituendo "d/2" con "r", raggio del cerchio:

$$c = 2 * \sqrt{r^2 - (r - f)^2}.$$

ODC è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dell'ipotenusa OC = r) e del cateto OD:

$$OD = OB - DB = (r - f).$$

La lunghezza del cateto DC è:

$$DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - (r - f)^2 \quad \text{e}$$
$$DC = \sqrt{r^2 - (r - f)^2}.$$

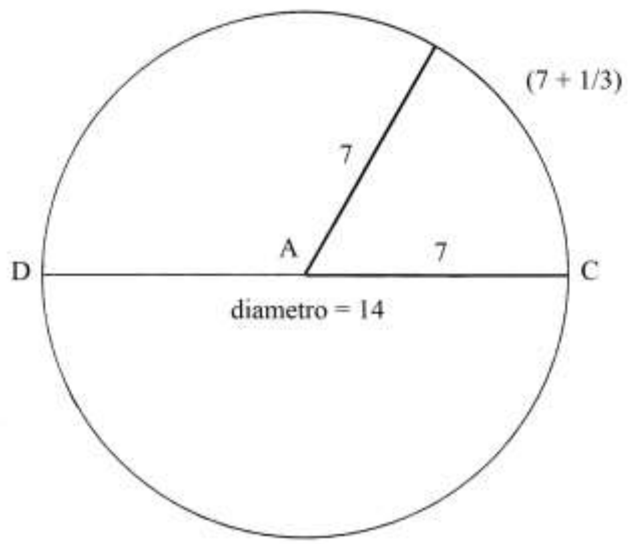
La lunghezza della corda AC è:

$AC = 2 * DC = 2 * \sqrt{r^2 - (r - f)^2}$, che è la formula che riassume la procedura utilizzata da Forestani.

- -

[10] <u>Area di un settore circolare</u>

Un settore circolare è ritagliato da un cerchio che ha diametro CD lungo 14 braccia.



L'arco che delimita il settore, *a* = BC, è lungo (7 + 1/3) braccia.

Il problema chiede l'area del settore circolare.

La soluzione che Forestani propone richiama la formula usata per calcolare l'area di un cerchio:

$S_{\text{CERCHIO}} = d/2 * c/2$, con *d* e *c* rispettivamente lunghezze del diametro e della circonferenza.

Per analogia, l'Autore calcola l'area del settore circolare con la formula che segue:

$S_{\text{SETTORE}} = (r * a)/2 = 7 * (7 + 1/3)/2 = (25 + 2/3)$ braccia quadre.

- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza dell'intera circonferenza della quale è parte l'arco CG è:

$c = 2 * \pi * r = \pi * d = 22/7 * 14 = 44$ braccia.

Con una semplice proporzione ricaviamo l'ampiezza dell'angolo BAC:

BAC : 360° = BC : c

BAC : 360° = (7 + 1/3) : 44

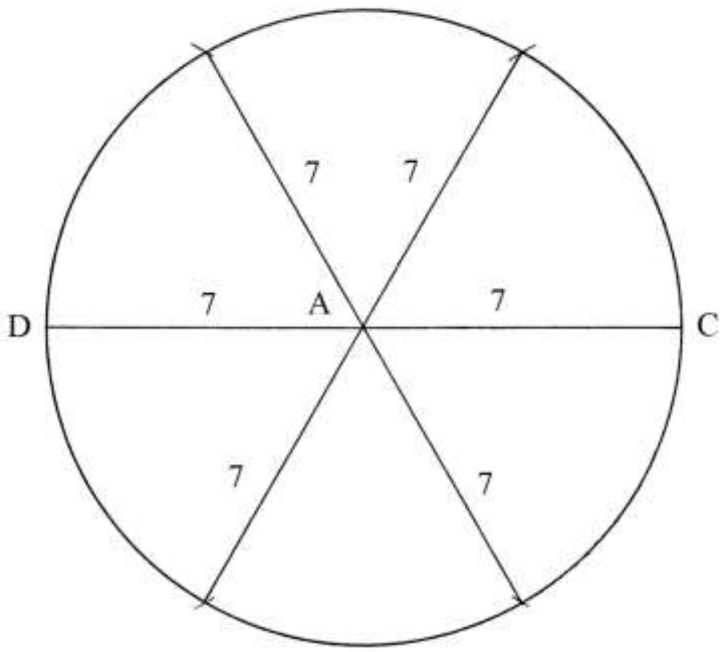
BAC = 360° * (7 + 1/3)/44 = 60°.

L'angolo BAC è ampio esattamente *un sesto* di un angolo giro.

- -

[11] Cerchio diviso in sei settori

Un cerchio è diviso in *sei* settori di uguali dimensioni.



Il problema richiama il cerchio del caso precedente.

Il diametro è lungo 14 e la circonferenza è 44. L'area del cerchio è 154.

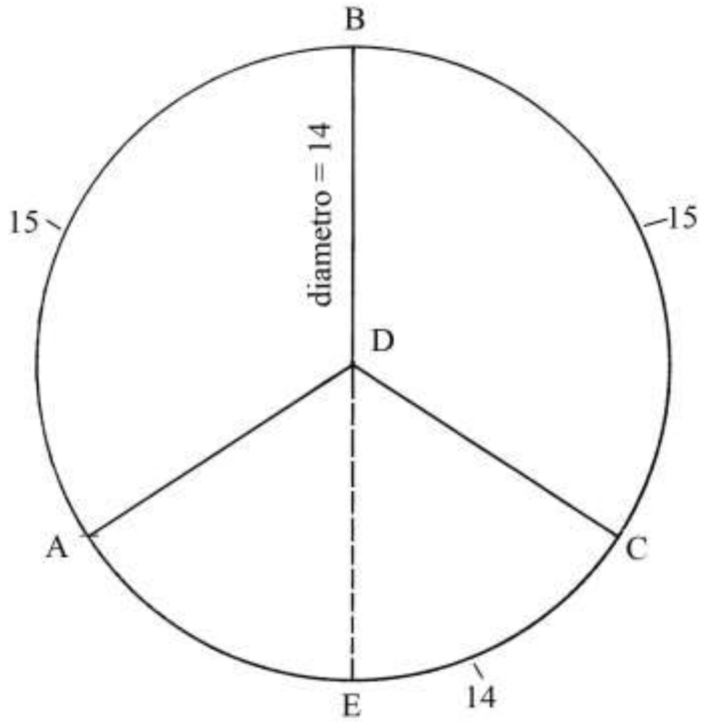
Ciascun settore circolare ha area che è data da:

$S_{\text{SETTORE}} = S_{\text{CERCHIO}}/6 = 154/6 = (25 + 2/3)$.

Questo ultimo dato (25 + 2/3) conferma l'ipotesi presentata nel precedente *APPROFONDIMENTO* riguardo all'ampiezza dell'angolo BAC.

[12] Area di tre settori

Un cerchio ha diametro lungo 14 ed è diviso in tre settori circolari: gli archi AB e BC sono lunghi 15 e deve essere ricavata la lunghezza del terzo arco, AEC.



Dai precedenti problemi [10] e [11] sappiamo che la lunghezza della circonferenza è 44 e, quindi, la lunghezza di dell'arco AC è:

AC = c – AB – BC = 44 – 15 – 15 = 14.

L'area del settore ADC è:

S_{ADC} = (AC/2) * DA = (14/2) * 7 = 49.

L'area dell'insieme degli altri due settori, (ADB + BDC) è:

$S_{(ADB + BDC)}$ = [(AB + BC)/2] * DA = [(15 + 15)/2] * 7 = 15 * 7 = 105.

- APPROFONDIMENTO -

L'arco ADC sottende un angolo ADC° che è ampio:

ADC° : 360° = 14 : c

ADC° : 360° = 14 : 44 e

ADC° = (360 * 14)/44 ≈ 114,55°.

Gli angoli ADE e EDC hanno uguale ampiezza:

ADE = EDC = ADC/2 ≈ 57,27°.

Un angolo giro vale 2 * π radianti:

360 ° = 2 * π rad.

Un *radiante* equivale a:

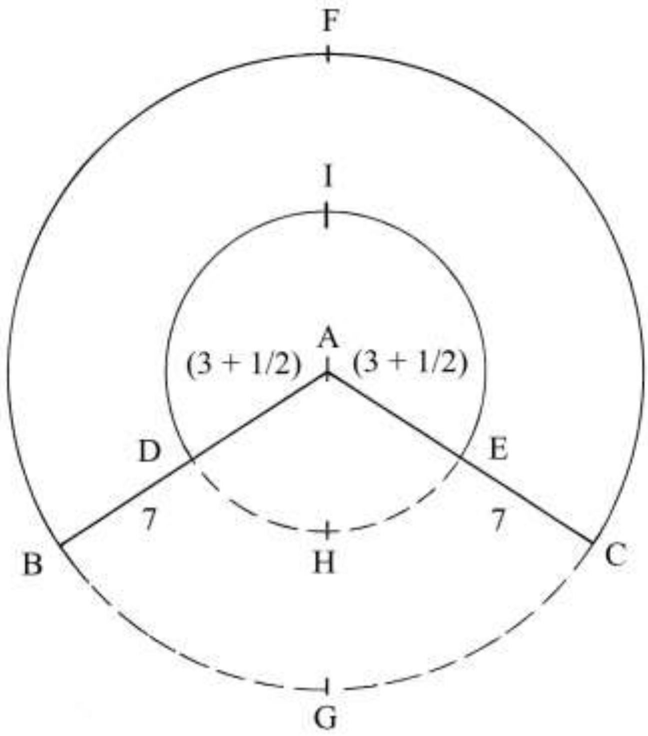
1 rad ≈ 57° 17' 45" ≈ 57,28°.

Vi è una curiosa vicinanza fra l'ampiezza degli angoli ADE e EDC e il valore del radiante espresso in gradi.

- -

[13] Area di un settore a forma di corona circolare

Forestani propone questo problema che gli sarebbe stato proposto da un abitante di Prato.



È chiesta l'area della figura.

Essa è ricavata da una *corona circolare* che ha raggio esterno 7 e raggio interno 3,5.

L'arco BFC è lungo 30 e il rimanente arco BGC è implicitamente lungo 14: la circonferenza esterna ha le stesse dimensioni di quelle considerate nei precedenti problemi [10], [11] e [12].

Il segmento circolare tagliato ACGB equivale al segmento circolare ADCE del precedente problema.

Per calcolare l'area di questa porzione di corona circolare, fissiamo le lunghezze coinvolte:

* l'arco BFC è lungo 30;
* il diametro FG è 14;
* il diametro IH è 7;
* l'arco DIE ha lunghezza ricavabile da una proporzione:

DIE : BFC = IH : FG

DIE = (BFC * IH)/FG = (30 * 7)/14 = 15.

L'area del settore circolare esterno BFCA è:

S_{BFCA} = (BFC/2) * FG/2 = (30/2) * (14/2) = 15 * 7 = 105.

L'area del settore circolare interno DIEA è:

S_{DIEA} = (DIE/2) * (IH/2) = (15/2) * (7/2) = (7 + ½) * (3 + ½) = (26 + ¼).

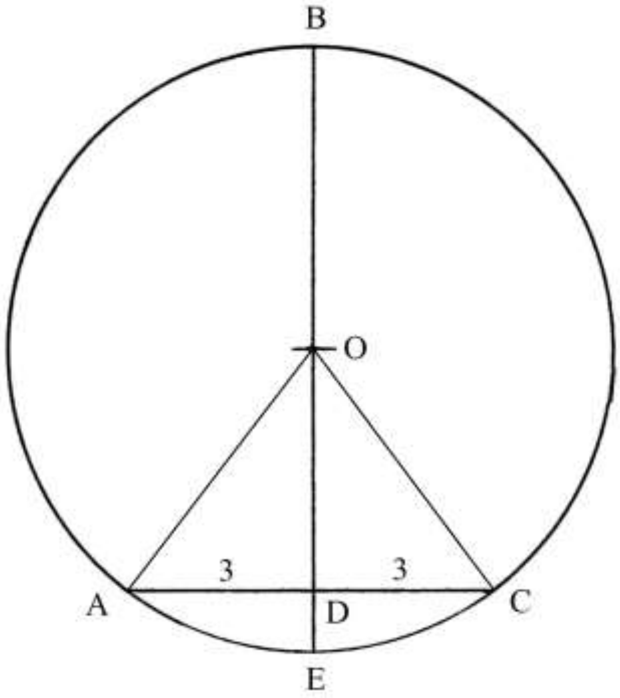
L'area S del settore di corona circolare definito dai archi concentrici di centro A è:

S = S_{BFCA} – S_{DIEA} = 105 – (26 + ¼) = (78 + ¾).

[14] Area di un segmento circolare

Una porzione di cerchio è maggiore della sua metà. La corda AC è lunga 6 e la freccia BD è 9. Infine, l'arco ABC è lungo 25.

Il problema chiede la superficie del segmento circolare ABCD.



Occorre ricavare la lunghezza del diametro del cerchio dal quale è stato ritagliato il segmento circolare. La procedura usata da Forestani è:

* dividere per 2 la lunghezza della corda AC: 6/2 = 3;
* moltiplicare per sé stesso: 3 * 3 = 9;
* dividere per la lunghezza della freccia BD: 9/9 = 1, lunghezza di DE;
* aggiungere alla lunghezza di BD: 1 + 9 = 10, lunghezza del diametro BE.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura può essere riassunta nella formula che segue:

* *k* è la corda AC;
* *f* è la freccia BD;
* *d* è il diametro BE.

$$d = [(k/2)^2/f] + f.$$

Applicando il *teorema delle corde* si ha:

AD : BD = DE : DC

AD : BD = DE : AD

3 : 9 = DE : 3

DE = (3 * 3)/9 = 1.

La lunghezza di BE è:

BE = BD + DE = 9 + 1 = 10 = *d*.

- -

L'area del settore circolare ABCO è calcolata da Forestani nel modo già utilizzato nella soluzione di precedenti problemi:

$$S_{ABCO} = (ABC/2) * (BE/2) = (25/2) * (10/2) = 12{,}5 * 5 = 62{,}5.$$

Farnetani procede poi a un'ulteriore serie di passi che servono a calcolare l'area del triangolo isoscele AOC:

* sottrarre la lunghezza di BO da quella di BD: BD – BO = OD = 9 – 5 = 4;
* moltiplicare per metà della lunghezza della corda AC:

OD * (AC/2) = 4 * (6/2) = 4 * 3 = 12, area del triangolo isoscele AOC.

L'area del segmento circolare ABCD è:

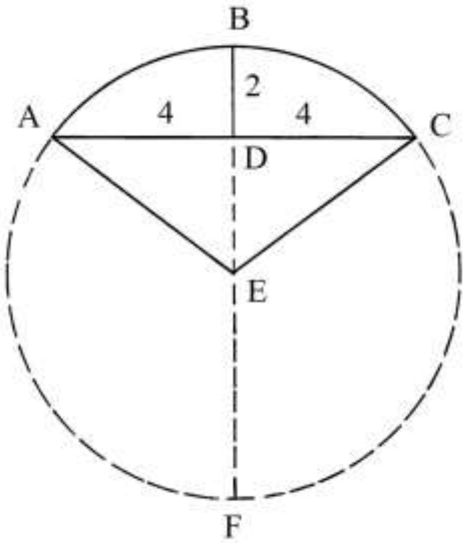
$S_{ABCD} = S_{ABCO} + S_{AOC} = 62{,}5 + 12 = 74{,}5$.

Infine, l'area dell'intero cerchio è:

$S_{CERCHIO} = 11/14 * BE^2 = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7)$.

[15] Area di un segmento circolare

Un segmento circolare è una porzione di un cerchio minore della sua metà.



La corda AC è lunga 8, la freccia BD è 2 e l'arco ABC è lungo (9 + ½).

Il problema chiede l'area del segmento circolare.

Occorre ricavare il diametro del cerchio di cui fa parte il segmento circolare:

* dividere per 2 la lunghezza della corda AC: $AC/2 = 8/2 = 4$;
* moltiplicare per sé stesso: $4 * 4 = 16$;
* dividere per la lunghezza della freccia BD: $16/BD = 16/2 = 8$;
* sommare alla lunghezza della freccia: $8 + BD = 8 + 2 = 10$, lunghezza del diametro del cerchio, BF.

L'area del settore circolare ABCE è:

$S_{ABCE} = (ABC/2) * (BF/2) = [(9 + ½)/2] * 10/2 = (23 + ¾)$.

Dall' area di ABCE deve essere sottratta quella del triangolo isoscele ACE:

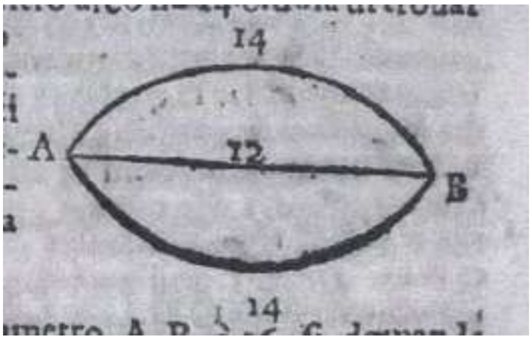
$S_{ACE} = AC * DE/2 = AC/2 * DE = (8/2) * (BE – BD) = 4 * (5 – 2) = 4 * 3 =$
$= 12$.

L'area del segmento circolare ABCD è:

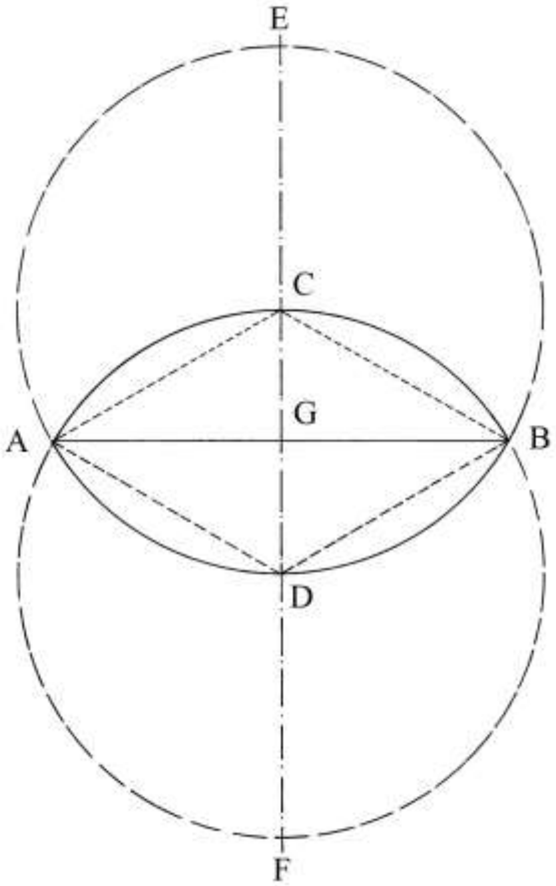
$S_{ABCD} = S_{ABCE} – S_{ACE} = (23 + ¾) – 12 = (11 + ¾)$.

[16] Area di un "*ovato*"

Due segmenti che sembrano circolari e aventi lo stesso raggio sono uniti lungo la comune corda AB formano una figura chiusa che Forestani chiama "*ovato*". Lo schema che segue è riprodotto da p. 477 del trattato.



AB è lunga 12 e gli archi ACB e ADB sono lunghi 14:



Forestani richiama genericamente delle regole usate in precedenza senza fornire alcuna ulteriore informazione e indica in 27 l'area di ciascuna porzione ("*segmento circolare*") per cui l'area dell'intera figura curva sarebbe di 54.

- APPROFONDIMENTO -

Avanziamo un'ipotesi: la figura è una *mandorla*, una superficie curvilinea delimitata da due archi di circonferenza di raggio uguale a CD: i centri dei due archi giacciono sull'altro arco, come spiega lo schema qui sopra.

A e B sono gli estremi della corda lunga 12.

ACBD è la figura curva che è delimitata dagli archi ACB e ADB.

Nello schema sono disegnate in parte tratteggiate le due circonferenze di centro C e D.

Nell'ovato sono inscritti due triangoli equilateri di uguali dimensioni, ACD e CBD, che hanno lati lunghi quanto i raggi CD e DC.

La corda AB è formata dalle due altezze dei triangoli equilateri ACD e CBD:

AG + GB = AB = 12 e

AG = GB = 12/2 = 6.

Conoscendo l'altezza di un triangolo equilatero siamo in grado di ricavare la lunghezza dei suoi lati:

AG = CD * (√3)/2 e

CD = AG * 2/√3 = 6 * 2/√3 = 12/√3 = (12 * √3)/3 = 4 * √3.

ACBD è un *settore circolare* che è ritagliato nel cerchio di centro D e ha area che è un terzo di quella del cerchio al quale appartiene:

$S_{CERCHIO\ D} = \pi * r^2 = 22/7 * DC^2 = 22/7 * (4 * \sqrt{3})^2 = 22/7 * 16 * 3 = (150 + 6/7)$.

L'area di ACBD è:

$S_{ACBD} = 1/3 * S_{CERCHIO\ D} = 1/3 * (150 + 6/7) = (50 + 2/7)$.

L'area del segmento circolare ACBG è data da:

$S_{ACBG} = S_{ACBD} – S_{ABD}$.

ABD è un triangolo isoscele che ha base AB lunga 12 e altezza GD che è metà del raggio CD:

GD = CD/2 = (4 * √3)/2 = (2 * √3).

$S_{ABD} = AB * GD/2 = 12 * (2 * \sqrt{3})/2 = 12 * \sqrt{3} \approx 20{,}78$.

L'area di ACBG è:

$S_{ACBG} = S_{ACBD} – S_{ABD} = (50 + 2/7) –20{,}78 = 29{,}50$.

Per l'area di ACBG Forestani dà il risultato di 27.

L'area dell'intero ovato qui calcolata è:

$S_{ACBD} = 2 * S_{ACBG} = 2 * 29{,}50 = 50$.

Per Forestani l'area dell'ovato è 54.

Anche l'arco ACB è lungo *un terzo* della circonferenza di centro D:

ACB = 1/3 * (2 * π * DC) = 1/3 * 2 * 22/7 * (4 * √3) = 176/21 * √3 ≈

≈ 14,51.

Forestani indica per ACB una lunghezza di 14.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'area di un segmento circolare è oggi calcolata con una formula:

S = [r * (a – c) + c * f]/2.

* *r* è il raggio DB (= CD) = 4 * √3;
* *a* è la lunghezza dell'arco ACB che è 14,51;
* *c* è la corda AB, lunga 12;
* *f* è la freccia CG, lunga metà del raggio: *f* = 2 * √3.

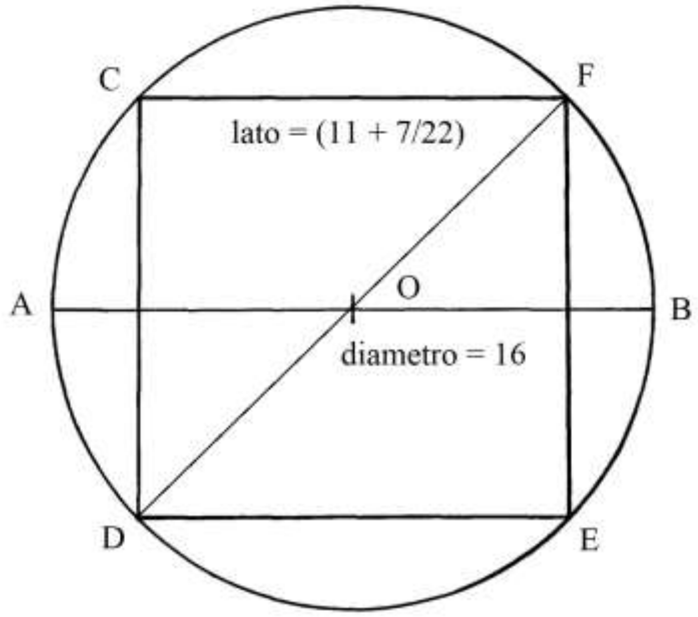
S = [4 * √3 * (14,51 – 12) + (12 * 2 * √3)]/2 ≈ 29,47, valore che si avvicina a quello calcolato sopra e pari a 29,50 per ACBG.

- -

[17] <u>Quadrato inscritto in un cerchio</u>

Un cerchio ha diametro AB lungo 16 e vi deve essere inscritto il più grande quadrato.

Il problema chiede la lunghezza del suo lato.



La lunghezza dei lati è così calcolata

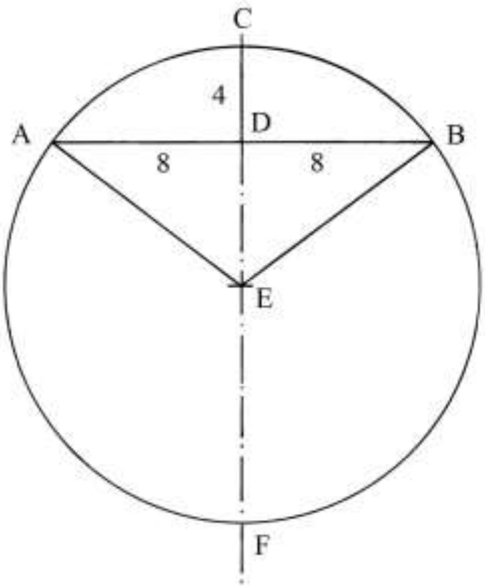
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $16 * 16 = 256$;
* dividere per 2: $256/2 = 128$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{128} = (11 + 7/22)$, lunghezza dei lati di CDEF.

DF è un diametro del cerchio e una diagonale del quadrato inscritto.
La lunghezza di DF è:

$DF^2 = DC^2 + CF^2 = 2 * CF^2$ e
$CF^2 = DF^2/2 = 16^2/2 = 256/2 = 128$ e
$CF = \sqrt{128} = (11 + 7/22)$.

[18] Area di un segmento circolare

ACBD è un segmento circolare ritagliato da un cerchio di centro E.



La corda AB è lunga 16 e la freccia CD è 4.

Il problema chiede l'area del segmento circolare.

La lunghezza della freccia DF è ricavata applicando il *teorema delle corde*, non citato:

AD : CD = DF : DB

DF = AD * DB/CD

DF = AD^2/CD = 8^2/4 = 64/4 = 16.

Il diametro CF è lungo:

CF = CD + DF = 4 + 16 = 20.

La lunghezza CC della circonferenza è:

CC = 22/7 * CF = 22/7 * 20 = (62 + 6/7).

La lunghezza dell'arco ACB è ricavata con la seguente procedura:

* dividere per 2 la lunghezza della corda AB: 16/2 = 8;
* sommare con la lunghezza della freccia: 8 + 4 = 12;
* dividere per 2: 12/2 = 6;
* dividere per il diametro CF: 6/20 = 3/10;
* moltiplicare per la lunghezza della circonferenza: 3/10 * (62 + 6/7) = (18 + 6/7), lunghezza dell'arco ACB.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

* *a* è la lunghezza dell'arco ACB;
* *c* è la corda AB;
* *f* è la freccia CD;
* *d* è il diametro CF;
* *CC* è la lunghezza della circonferenza:

a = {[(c/2 + f)/2]/d} * CC.

L'area del settore circolare ACBE è:

S_{ACBE} = (ACB/2) * (CF/2) = [(18 + 6/7)/2] * (20/2) = (9 + 3/7) * 10 = (94 + 2/7).

L'area del triangolo ABE è:

S_{ABE} = AB * DE/2 = 16 * 6/2 = 48.

Infine, l'area del segmento circolare ACBD è ricavata sottraendo l'area di ABE da quella del settore circolare ACBE:

$S_{ACBD} = S_{ACBE} – S_{ABE}$ = (94 + 2/7) – 48 = (46 + 2/7).

- APPROFONDIMENTO -

Consideriamo il triangolo rettangolo EDB nello schema qui sotto che riproduce la precedente figura.

L'angolo α = CEB (= CEA) ha *seno* che è:

sen α = DB/BE = 8/10 = 0,8.

L'angolo α è ampio ≈ 53°.

L'angolo AEB è ampio:

AEB = 2 * α ≈ 106°.

Dai dati sopra calcolati sappiamo che la circonferenza CC è lunga:

CC = (62 + 6/7).

La lunghezza dell'arco ACB è ricavabile con una proporzione:

ACB : CC = 2 * α : 360

ACB : (62 + 6/7) = 106 : 360 da cui:

ACB = (62 + 6/7) * 106/360 ≈ 18,5.

L'area del settore circolare ACBE è:

S_{ACBE} = (ACB/2) * (CF/2) = 18,51/2 * 10 = 92,55.

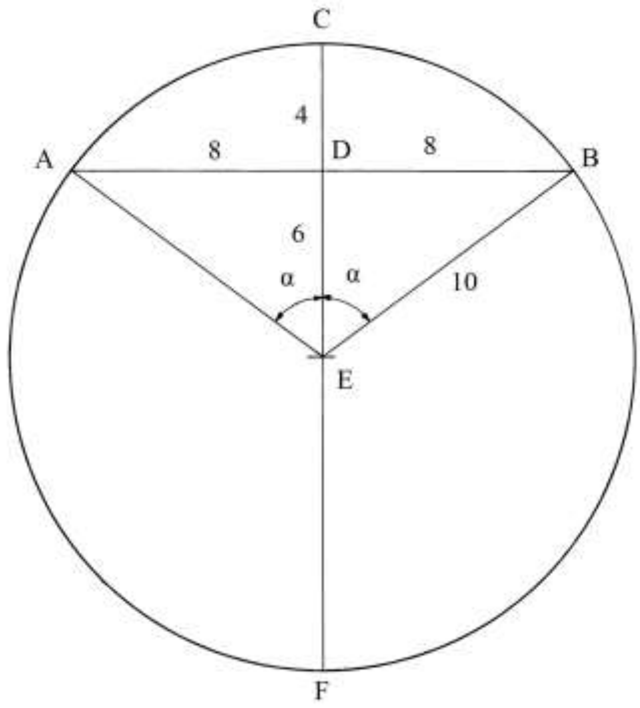
L'area del triangolo isoscele ABE è:

S_{ABE} = DE * AB/2 = 6 * 8 = 48.

L’area del segmento circolare ACBD è:

$S_{ACBD} = S_{ACBE} – S_{ABE} = 92,55 – 48 = 44,55.$

I risultati ottenuti con l’ausilio della trigonometria elementare si discostano poco da quelli ottenuti da Forestani.



- -

[19] Regole per il calcolo dell’area di un segmento circolare

Il paragrafo è dedicato alla dimostrazione delle regole utilizzate per la soluzione del precedente problema.

In un cerchio di centro O e raggio 10 – come nel caso del precedente problema – è inscritto il rettangolo ACGI che la lunghezza AC pari a 16 e la larghezza AI uguale a 12.

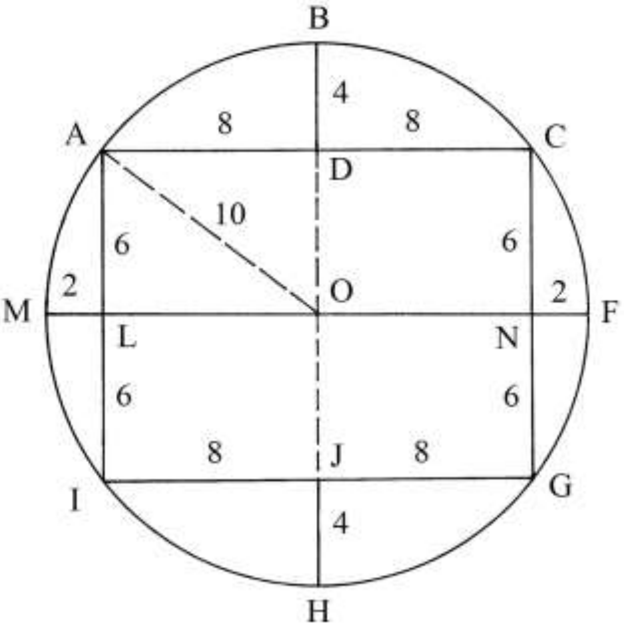
La lunghezza di AC è uguale a quella della corda AB del precedente problema. Anche la freccia BD ha lunghezza di 4, uguale a quella CD del precedente problema.

Il rettangolo ACGI è stato costruito sulla corda AC.

AOL è un triangolo rettangolo e OA è la sua ipotenusa che è pure un raggio del cerchio; vale la relazione:

$$OA^2 = OL^2 + LA^2$$
$$10^2 = 8^2 + 6^2$$
$$100 = 64 + 36.$$

Le lunghezze dei lati del triangolo AOL formano la terna derivata 6-8-10 che proiene dalla terna primitiva 3-4-5.



Le frecce BD e HJ hanno uguale lunghezza:

* BD = OB – OD = 10 – 6 = 4;
* HJ = OH – OJ = 10 – 6 = 4.

Anche le frecce ML e FN hanno uguale lunghezza:

* ML = MO – LO = 10 – 8 = 2;
* FN = FO – NO = 10 – 8 = 2.

Dalla soluzione del precedente problema conosciamo l'area del segmento circolare ABCD: è (46 + 2/7).

Anche l'area del segmento circolare IHGJ è (46 + 2/7).

Senza fornire alcun calcolo, Forestani indica l'area totale dei due segmenti circolari AMIL e CFGN in (29 + 5/7).

- APPROFONDIMENTO -

Calcoliamo l'area del segmento circolare AMIL.

Ricordiamo che la lunghezza CC della circonferenza di centro O e raggio OA è (62 + 6/7).

La lunghezza dell'arco AMI è ricavata con i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza della corda AI: 12/2 = 6 = AL = LI;
* sommare con la lunghezza della freccia ML: AL + ML = 6 + 2 = 8;
* dividere per 2: 8/2 = 4;
* dividere per il diametro MF: 4/20 = 2/10 = 1/5;
* moltiplicare per la lunghezza della circonferenza: 1/5 * (62 + 6/7) = (12 + 4/7), lunghezza dell'arco AMI.

L'area del settore circolare IMAO è:

S_{IMAO} = (AMI/2) * (MF/2) = (12 + 4/7)/2 + (20/2) = (6 + 2/7) * 10 = (62 + 6/7).

L'area del triangolo isoscele AOI è:

S_{AOI} = OL * AI/2 = 8 * 12/2 = 48.

L'area del segmento circolare AMIL è:

A_{AMIL} = S_{IMAO} – S_{AOI} = (62 + 6/7) – 48 = (14 + 6/7).

L'area dei due segmenti circolari AMIL e CFGN è:

S_{AMIL} + S_{CFGN} = 2 * S_{AMIL} = 2 * (14 + 6/7) = (29 + 5/7): il dato fornito da Forestani è confermato.

- -

L’area dei quattro segmenti circolari è:

$S_{4\ SEGMENTI} = 2 * S_{ABCD} + 2 * S_{AMIL} = 2 * (46 + 2/7) + (29 + 5/7) =$
$= (92 + 4/7) + (29 + 5/7) = (122 + 2/7).$

L’area del rettangolo ACGI è:

$S_{ACGI} = AC * AI = 16 * 12 = 192.$

L’area dell’intero cerchio è:

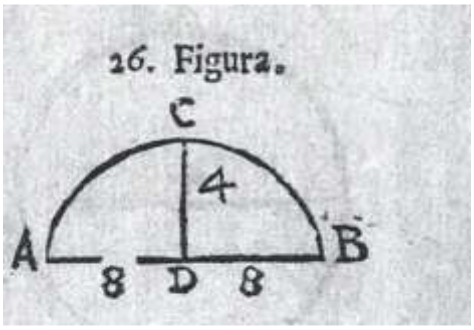
$S_{CERCHIO} = S_{4\ SEGMENTI} + S_{ACGI} = (122 + 2/7) + 192 = (314 + 2/7).$

Verifichiamo l’ultimo risultato, l’area del cerchio è:

$S_{CERCHIO} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 20^2 = 11/14 * 400 = (314 + 2/7).$

[20] Aree di segmenti circolari

Lorenzo Forestani critica la soluzione del problema precedente proposta da Francesco Feliciano de Scolari (Lazise 1470 – Verona 1542), matematico e agrimensore, autore di testi matematici pubblicati più volte. Dall’edizione del suo trattato ripubblicato a Venezia con il titolo che qui è semplificato in “Scala Grimaldelli” (presso Giacomo Hertz, 1669), è da p. 222 riprodotta la figura che segue:



Le dimensioni della figura studiata da Feliciano sono uguali a quelle dei precedenti problemi [18] e [19] di Forestani.

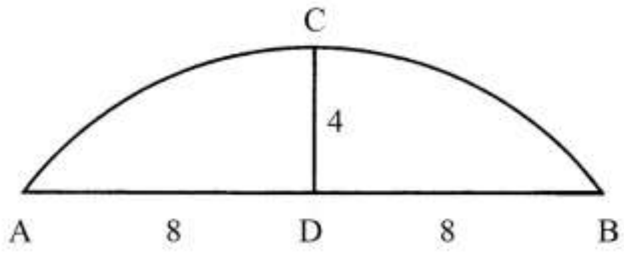
Feliciano critica la soluzione proposta da uno sconosciuto Pietro Ganassone (o Ganasone) che è citato da Feliciano:

* moltiplicare la lunghezza della freccia CD (“la linea cadente”) per metà della lunghezza della corda AB: $CD * (AB/2) = 4 * (16/2) = 4 * 8 = 32;$
* moltiplicare la lunghezza della freccia per sé stessa: $CD * CD = 4 * 4 = 16;$
* moltiplicare l’ultimo quadrato per 11: $16 * 11 = 176;$
* dividere per 14: $176/14 = (12 + 4/7);$
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(12 + 4/7)};$
* sommare con il primo prodotto: $32 + \sqrt{(12 + 4/7)}$, area del segmento circolare ACBD.

Una variante di questa procedura sostituisce il *primo passo* con il seguente:

* moltiplicare la lunghezza della corda AB per metà della lunghezza della freccia CD: $AB * (CD/2) = 16 * (4/2) = 16 * 2 = 32.$
Il risultato non cambia.

A sua volta, Feliciano propone una sua procedura che comprende i seguenti passi:

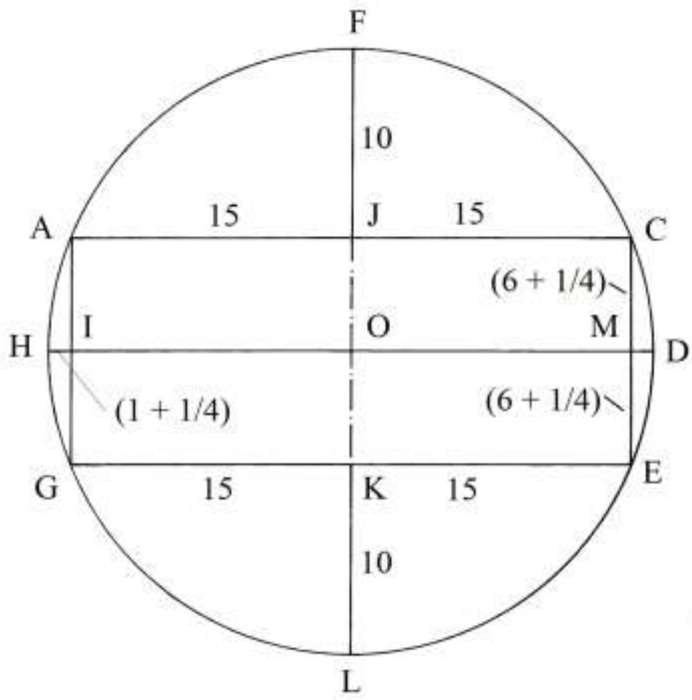


* moltiplicare la lunghezza della freccia CD per metà di quella della corda AB:
CD * (AB/2) = 4 * (16/2) = 4 * 8 = 32;
* moltiplicare la lunghezza della freccia per sé stessa: CD * CD = 4 * 4 = 16;
* moltiplicare per 11: 16 * 11 = 176;
* dividere per 14: 176/14 = (12 + 4/7);
* estrarre la radice quadrata: √(12 + 4/7) ≈ 3,54, arrotondato a (3 + ½);
* sommare con il primo prodotto: (3 + ½) + 32 = (35 + ½), area del segmento circolare ACBD.

I risultati ottenuti dal Ganassone e dal Feliciano sono entrambi errati per difetto: nel precedente paragrafo [18] Forestani ha correttamente calcolato in (46 + 2/3) l'area del segmento circolare AVBD che ha le stesse dimensioni.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Forestani considera poi il caso di un segmento circolare che ha la corda AC lunga 30 e la freccia FJ lunga 10.



Con il teorema delle corde calcoliamo la lunghezza della freccia JL:
AJ : FJ = JL : JC, ma AJ = JC, per cui si ha:
AJ : FJ = JL : AJ
JL = AJ^2/FJ = 152/10 = 22,5.

Il diametro FL è lungo:

FL = FJ + JL = 10 + 22,5 = 32,5.

La corda GE è lunga quanto quella AC e la la freccia LK è lunga quanto la FJ.

Il segmento IM è lungo quanto AC e GE e cioè 30. Ne consegue che le frecce HI e DM sono lunghe:

HI = DM = (HD – IM)/2 = (32,5 – 30)/2 = 2,5/2 = (1 + ¼).

Le corde AG e CE hanno uguale lunghezza:

AG = CE = JK = FL – FJ – KL = 32,5 – 10 – 10 = 12,5 e

AI = IG = CM = ME = 12,5/2 = (6 + ¼).

La circonferenza CC del cerchio è lunga:

CC = 22/7 * HD = 22/7 * 32,5 = (102 + 1/7).

A questo punto, Forestani procede a calcolare la lunghezza dell'arco AHG *secondo la regola di Feliciano*:

* dividere per 2 la lunghezza della corda AG: 12,5/2 = (6 + ¼);
* sommare con la lunghezza della freccia HI: (6 + ¼) + (1 + ¼) = (7 + ½);
* dividere per 2: (7 + ½)/2 = (3 + ¾);
* dividere per il diametro FL: (3 + ¾)/32,5 = 3/26;
* moltiplicare per la lunghezza della circonferenza:

3/26 * CC = 3/26 * (102 + 1/7) = (11 + 11/14), lunghezza dell'arco AHG.

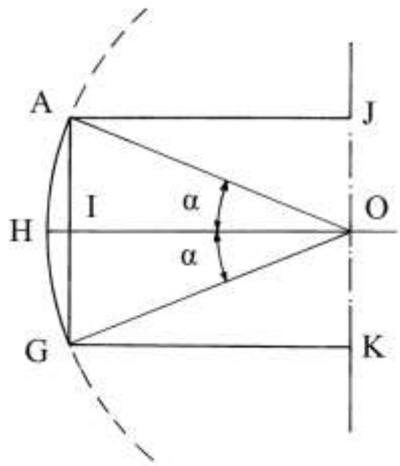
L'applicazione della regola di Feliciano porta a una conseguenza assurda: la freccia AIG sarebbe più lunga dell'arco AHG che essa sottende:

12,5 > (11 + 11/14)!

- APPROFONDIMENTO -

Utilizziamo di nuovo la trigonometria elementare.

Lo schema che segue è una parziale riproduzione del precedente.



Consideriamo i triangoli rettangoli AIO e GIO: essi hanno uguali dimensioni e anche gli angoli AOI e GOI hanno uguale ampiezza, indicata con *α*.

I cateti AI e GI sono entrambi lunghi (6 + ¼) e il cateto OI è lungo 15.

Le ipotenuse OA e OG sono due raggi del cerchio e sono lunghe:

OA = OG = 32,5/2 = 16,25.

Nel triangolo AIO, il seno dell'angolo AOI è dato da:

sen AOI = AI/AO = 6,25/16,25 = 5/13 ≈ 0,3846.

L'angolo AOI = α è ampio:

α ≈ 22,62°.

L'angolo AOG è ampio:

AOG = 2 * α = 2 * 22,62° = 45,24°.

Ricordiamo che la circonferenza CC di questo cerchio è lunga:

$CC = (102 + 1/7)$.

La lunghezza dell'arco AHG è ricavato dalla seguente proporzione:

$AHG : CC = 45{,}24 : 360 = 2 * \alpha : 360$

$AHG = (CC * 45{,}24)/360 = [(102 + 1/7) * 45{,}24]/360 \approx 12{,}84$.

L'arco AHG è correttamente *più lungo* della corda AIG:

$12{,}84 > 12{,}5$.

L'area dell'intero cerchio è:

$S_{CERCHIO} = 11/14 * HD^2 = 11/14 * 32{,}5^2 = (829 + 51/56)$.

L'area del settore circolare AOGH è:

$S_{AOGH} = (AHG/2) * OH = (12{,}84/2) * 16{,}5 = 104{,}325$.

L'area del triangolo isoscele AOG è:

$S_{AOG} = (OI * AG/2) = (15 * 12{,}5)/2 = 93{,}75$.

L'area del segmento circolare AHGI è:

$S_{AHGI} = S_{AOGH} – S_{AOG} = 104{,}325 – 93{,}75 = 10{,}575$.

L'area del settore circolare AOGH può essere ricavata anche con una proporzione:

$S_{AOGH} : S_{CERCHIO} = 2 * \alpha : 360$.

L'area di un cerchio è:

$S_{CERCHIO} = \pi * r^2 = [(2 * \pi * r)/2] * r = CC/2 * r$, con *r* raggio.

L'area di un settore circolare lungo *a* è data da:

$S_{SETTORE} = a * r/2$.

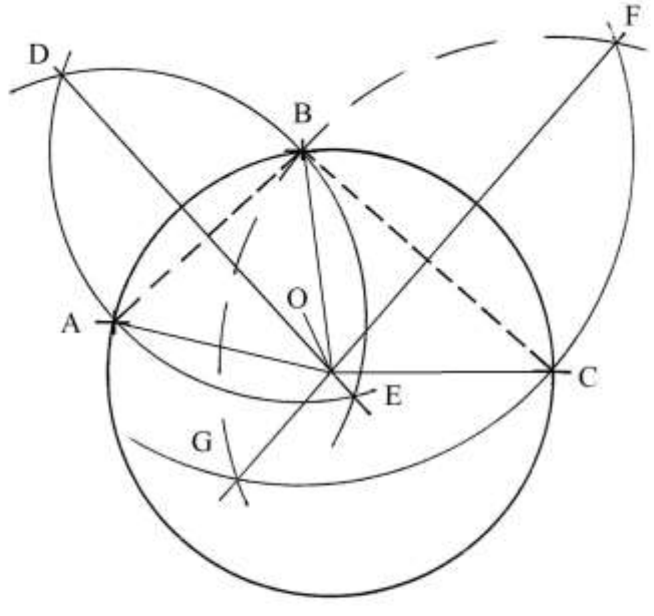
La proporzione fra l'area di un settore circolare e quella del cerchio dal quale esso è ritagliato è:

$S_{SETTORE} : S_{CERCHIO} = a * r/2 : CC/2 * r = a * r/2 : CC * r/2 = a : CC = 2 * \alpha : 360$.

- -

[21] Circonferenza passante per tre punti non allineati

A, B e C sono tre punti non allineati: deve essere disegnata una circonferenza passante per tutti e tre.



Collegare A con B e B con C.

Fare centro in A e in B e con raggio AB tracciare due archi di circonferenza che si incontrano nei punti D e E.

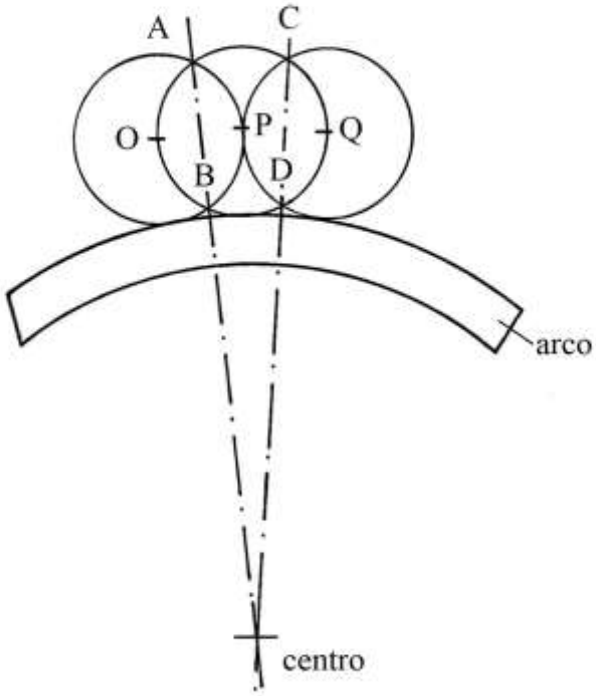
Poi fare centro in B e in C e con raggio BC disegnare due archi che si intersecano in F e in G.

Tracciare le rette passanti per D e E e per F e G: esse si incrociano nel punto O, centro della circonferenza ricercata.

Collegare O con A, B e C e disegnare la circonferenza di centro O e raggio OA = OB = OC.

[22] <u>Centro di un arco</u>

Un arco di circonferenza fa parte di un ponte o di una porta.



Deve essere individuato il suo centro.

Sull'arco esterno disegnare tre circonferenze ad esso tangenti e di uguale raggio: i loro centri sono O, P e Q. Il punto P giace sulla circonferenza di centro O e il suo centro Q è posizionato sulla circonferenza di centro Q.

Le tre circonferenze si intersecano nelle coppie di punti A-B e C-D: per le due coppie tracciare due linee che si incontrano nel *centro* dell'arco.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

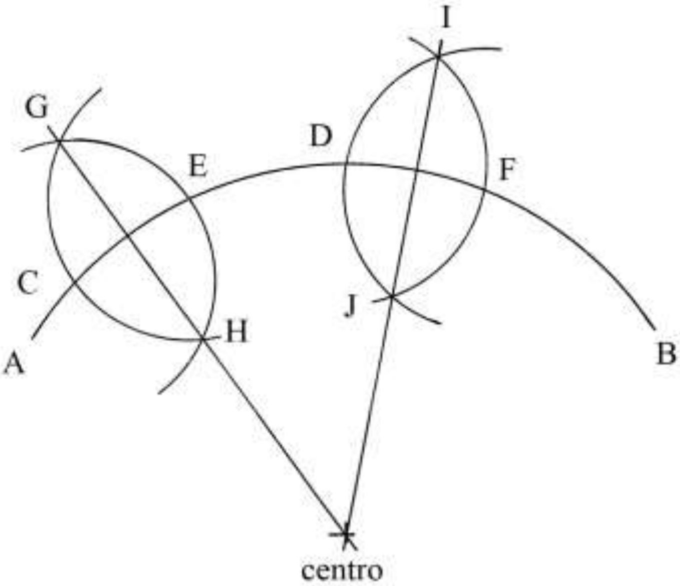
Lo schema che segue mostra una variante della precedente costruzione.

È dato l'arco di circonferenza AB di cui deve essere ritrovato il centro.

Fissare i punti qualsiasi C e D e con raggio a piacere disegnare due archi che stabiliscono i punti E e F.

Fare centro in E e in F con raggio CE = DF e tracciare altri due archi che incontrano i primi due nei punti G-H e I-J.

Per G e H e per I e Jdisegnare due linere che si incontrano nel *centro* dell'arco A-B.

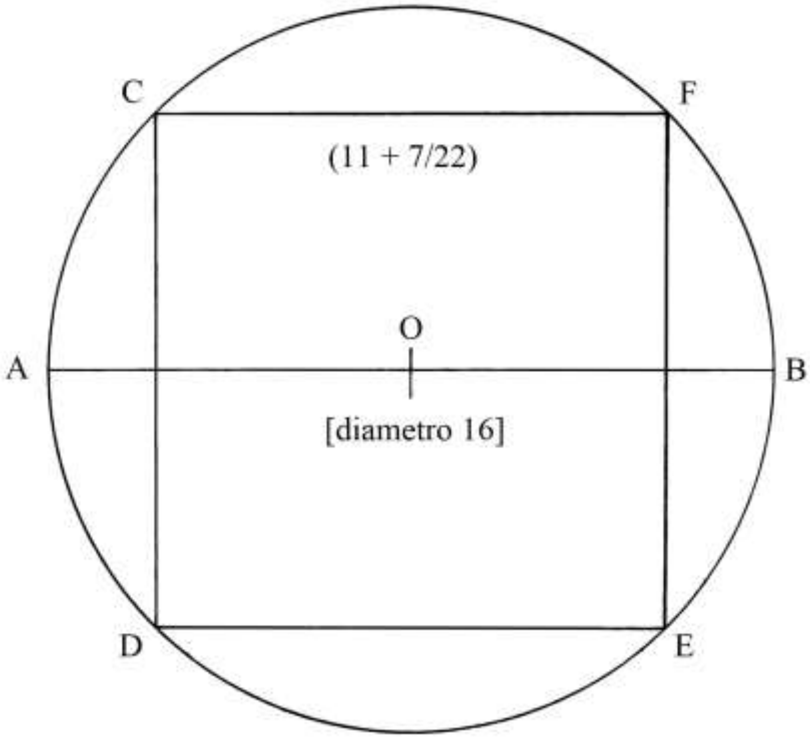


[23] <u>Quadrato inscritto in un cerchio</u>

In un cerchio è inscritto il quadrato CDEF che ha lati lunghi

(11 + 7/22) = √128.

Il problema domanda la lunghezza del diametro del cerchio, AB.

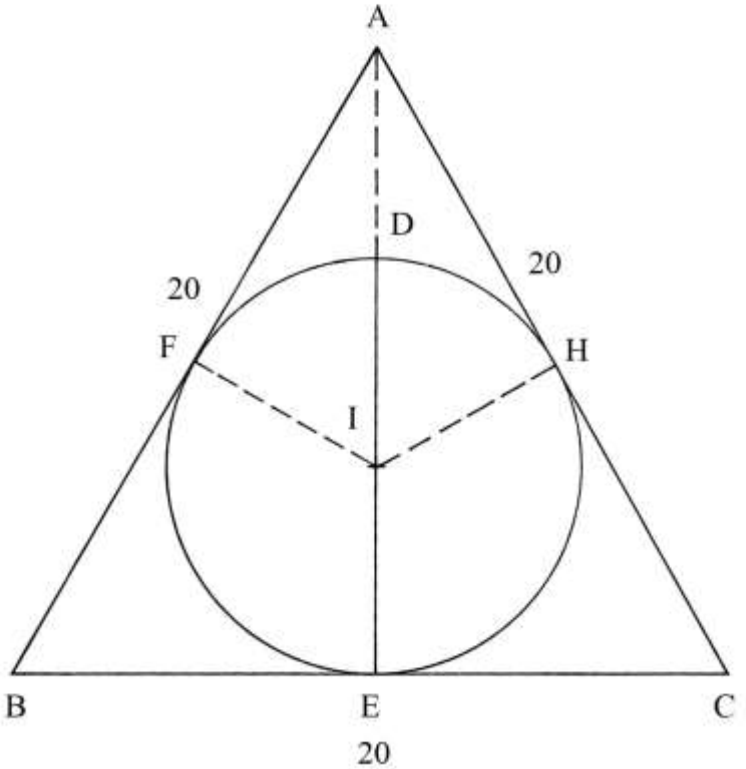


La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato per sé stessa:
  (11 +7/22) * (11 + 7/22) = √128 * √128 = 128;
* moltiplicare per 2: 128 * 2 = 256;
* estrarre la radice quadrata: √256 = 16, lunghezza del diametro AB.

[24] Cerchio inscritto in un triangolo equilatero

Il triangolo equilatero ABC ha lati lunghi 20 e vi deve essere inscritto il più grande cerchio.



La soluzione è ottenuta con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* moltiplicare per 13/30: 400 * 13/30 = (173 + 1/3);
* sommare le lunghezze dei tre lati del triangolo:
  AB + BC + CA = 20 + 20 + 20 = 60 [perimetro];
* dividere per 2: 60/2 = 30 [semiperimetro];
* dividere (173 + 1/3) per 30: (173 + 1/3)/30 = (5 + 7/9);
* moltiplicare per 2: (5 + 7/9) * 2 = (11 + 5/9), diametro del cerchio inscritto, DE.

La procedura usata da Forestani può essere riassunta in una formula:

* *d* è il diametro del cerchio inscritto, DE;
* *ℓ* è la lunghezza di un lato del triangolo;
* *p = 3 * ℓ* è il perimetro del triangolo:
  $d = [(\ell^2 * 13/30)/(p/2)] * 2$.

- APPROFONDIMENTO -

Il punto I è il centro del cerchio inscritto: esso è determinato dall’incontro delle *bisettrici* dei tre angoli interni.

L’espressione (ℓ^2 * 13/30) è l’area del triangolo equilatero calcolata con la formula approssimata proposta da Erone di Alessandria.

Conoscendo l’area del triangolo e il suo semiperimetro è facile ricavare la lunghezza del raggio *r* del cerchio inscritto:

$r = S_{ABC}/(p/2) = (13/30) * \ell^2/30$.

Il diametro *d* è lungo il doppio di *r*:

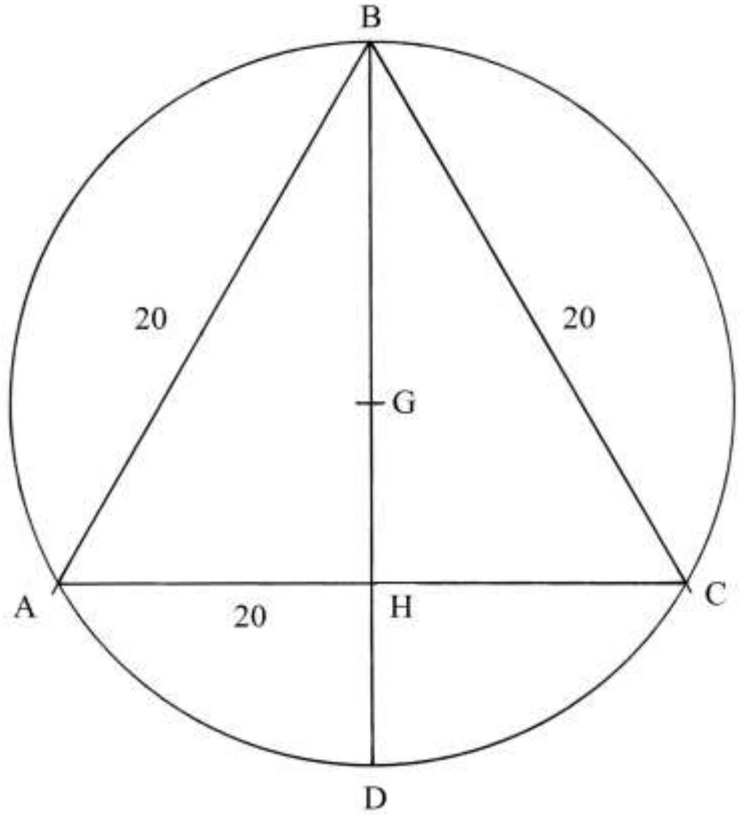
$d = 2 * r = 13/30 * \ell^2)/15$.

Un’altra soluzione del problema è data da una considerazione: il raggio IE è lungo *un terzo* dell’altezza AE.

AE ha lunghezza che è data da:
AE = (√3)/2 * AB.
Il diametro DE è lungo 2/3 dell'altezza AE:
DE = 2/3 * (√3)/2 * AB = (√3)/3 * 20 = 11,547 = (11 + 5/9).
- -

[25] <u>Cerchio circoscritto a un triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 20, come quelli del precedente problema.
Deve essere inscritto in un cerchio del quale va calcolato il diametro.



Il punto G è il *circocentro*, il centro del cerchio circoscritto: esso è determinato dall'intersezione degli assi dei tre lati del triangolo. L'asse di un lato è la perpendicolare che passa per il suo punto medio: nello schema, BHD è un diametro del cerchio ed è l'asse del lato AC.

Forestani usa la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza di un lato del triangolo per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* dividere per 3: 400/3 = (133 + 1/3);
* sommare con 400: (133 + 1/3) + 400 = (533 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(533 + 1/3) ≈ (23 + 19), diametro del cerchio, BD nella figura.

- APPROFONDIMENTO -

L'altezza BH è lunga ¾ del diametro BD e all'inverso si ha:
BD = 4/3 * BH.
L'altezza BH è lunga:
$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = ¾ * AB^2 = ¾ * 400 = 300$ e

BH = √300.

Ne consegue:

BD = 4/3 * √300 = √(16 * 300/9) = √(4800/9) = √(533 + 1/3) ≈ (23 + 1/9).

- -

[26] <u>Cerchio circoscritto a un triangolo equilatero</u>

Un cerchio ha diametro lungo (23 + 1/9) e vi è inscritto un triangolo equilatero. Il problema chiede la lunghezza dei lati del triangolo.

Il problema è chiaramente legato al precedente [25].

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

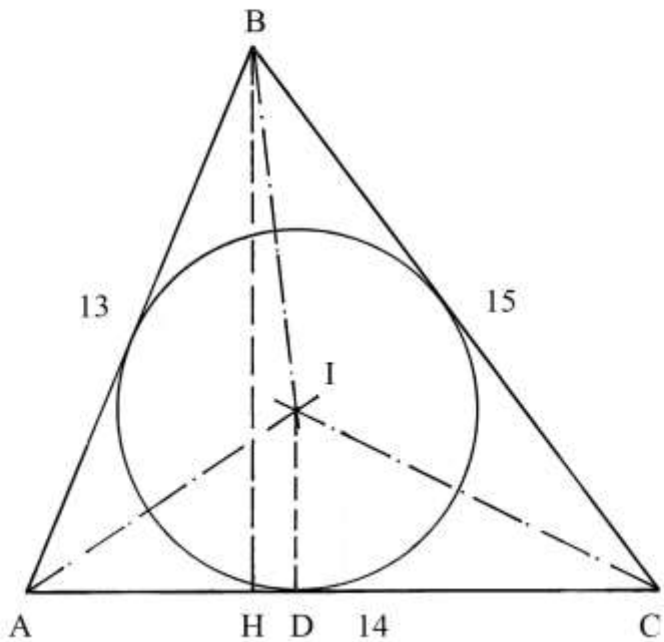
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: (23 + 1/9) * (23 + 1/9) = (533 + 1/3);
* dividere per 4: (533 + 1/3)/4 = (133 + 1/3);
* sottrarre dal quadrato del diametro: (533 + 1/3) – (133 + 1/3) = 400;
* estrarre la radice quadrata: √400 = 20, lunghezza dei lati del triangolo equilatero inscritto.

Forestani propone una seconda procedura risolutiva:

* dato che l'altezza di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio è lunga i ¾ della lunghezza del diametro del cerchio circoscritto, moltiplicare il diametro per ¾: (23 + 1/9) * ¾ = (17 + 1/3);
* moltiplicare per sé stessa: (17 + 1/3) * (17 + 1/3) = 300;
* dividere per 3: 300/3 = 100;
* sommare con 300: 100 + 300 = 400;
* estrarre la radice quadrata: √400 = 20, lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

[27] <u>Cerchio inscritto in un triangolo scaleno 13-14-15</u>

ABC è un triangolo scaleno con i lati lunghi secondo la nota terna 13-14-15.



AB è lungo 13, AC è 14 e BC è 15.

BH è l'altezza relativa alla base AC.

Nel triangolo deve essere inscritto il più grande cerchio.

Costruire le bisettrici dei tre angoli interni: esse si intersecano nell'incentro I, che è il centro del cerchio inscritto.

Da I abbassare la perpendicolare ID alla base AC: ID è il raggio del cerchio inscritto.

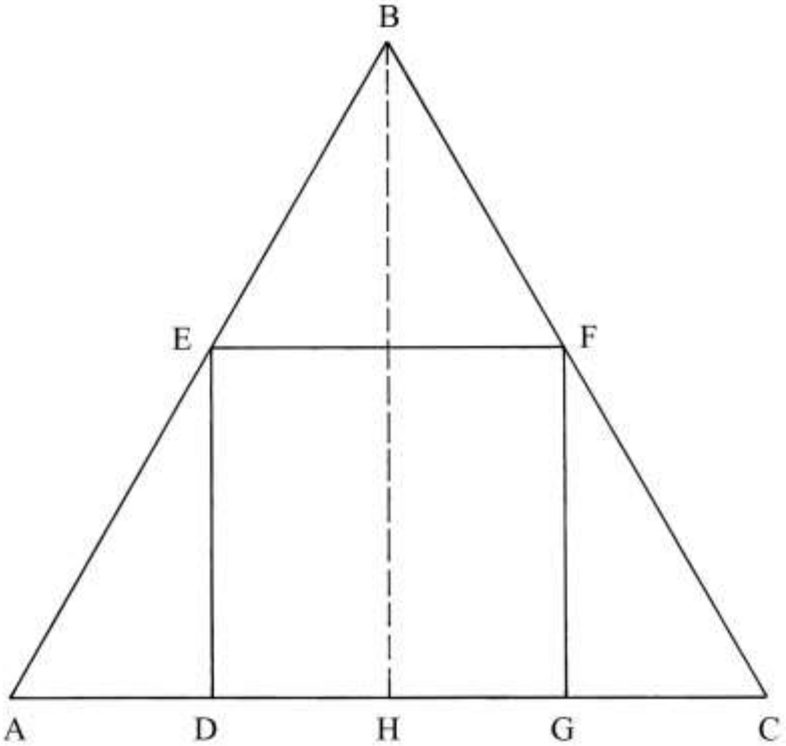
Forestani richiama un dato già calcolato in precedenza: l'area di ABC è 84.

La soluzione impiegata per ricavare la lunghezza del diametro del cerchio inscritto contiene i seguenti passi:

* calcolare il perimetro del triangolo: AB + BC + AC = 13 + 15 + 14 = 42;
* dividere per 2: 42/2 = 21 [semiperimetro];
* dividere l'area per il semiperimetro: 84/21 = 4, lunghezza del raggio ID;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8, diametro del cerchio inscritto.

[28] <u>Quadrato inscritto in un triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 20. Il problema domanda la lunghezza dei lati del più grande quadrato che può essere inscritto nel triangolo.

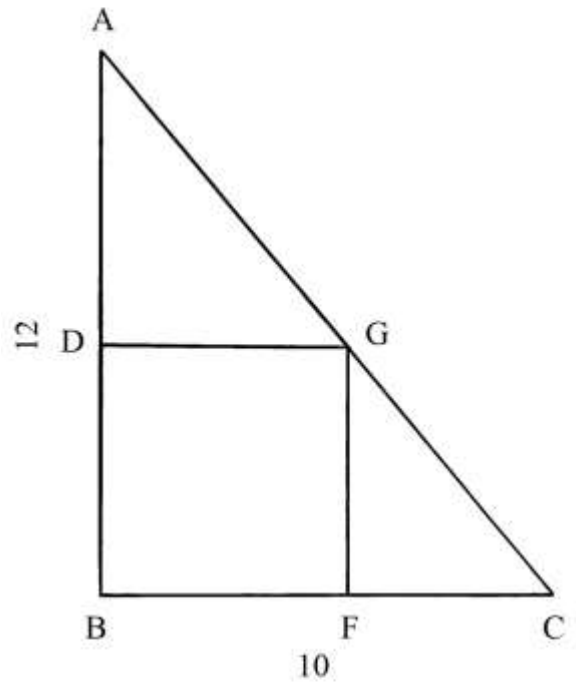


La procedura usata da Forestani contiene i seguenti passi:

* calcolare il perimetro del triangolo: AB + BC + AC = 20 + 20 + 20 = 60;
* moltiplicare per sé stesso: 60 * 60 = 3600;
* dividere per 3: 3600/3 = 1200;
* sommare con 3600: 1200 + 3600 = 4800;
* estrarre la radice quadrata: √4800 = (69 + 13/46);
* sottrarre il perimetro del triangolo: (69 + 13/46) – 60 = (9 + 13/46), lunghezza dei lati del quadrato inscritto DEFG.

[29] Quadrato inscritto in un triangolo rettangolo

ABC è un triangolo rettangolo scaleno: il cateto AB è lungo 12 e quello BC è 10.



Nel triangolo deve essere inscritto il più grande quadrato possibile.

L'ipotenusa AC è lunga:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 10^2 = 144 + 100 = 244$ e

$AC = \sqrt{244} \approx 15,62$.

La lunghezza dei lati del quadrato BDGF è calcolata con i seguenti passi:

* moltiplicare fra loro le lunghezze dei due cateti: AB * BC = 12 * 10 = 120;
* sommare le lunghezze dei due cateti: AB + BC = 12 + 10 = 22;
* dividere (AB * BC) per (AB + BC): 120/22 = (5 + 5/11), lunghezza dei lati del quadrato BDGF.

L'area del quadrato BDGF è:

$S_{BDGF} = BF^2 = (5 + 5/11)^2 = (29 + 91/121)$.

------------------------- APPROFONDIMENTO -------------------------

Forestani propone di calcolare le aree dei triangoli ADG e GFC per poi aggiungerle a quella del quadrato BDGF per riottenere l'area di ABC, ma non presenta alcun calcolo.

Procediamo a farlo qui di seguito. I triangoli ADG e GFC sono simili al triangolo ABC. Nel caso di ADG si ha:

AD : AB = DG : BC da cui

AD = (AB * DG)/BC = {[12 * (5 + 5/11)]/10}.

L'area di ADG è:

$S_{ADG} = AD * DG/2 = \{[12 * (5 + 5/11)]/10\} * (5 + 5/11)/2 = 12/20 * (5 + 5/11)^2 =$
$= 3/5 * (29 + 91/121)$.

Per il triangolo GFC si ha:

GF : AB = FC : BC da cui

FC = (GF * BC)/AB = (5 + 5/11) * 10/12.

L'area di GFC è:

$S_{GFC} = GF * FC/2 = DG * FC/2 = (5 + 5/11) * (5 + 5/11) * 10/12)/2 =$
$= (29 + 91/121) * 10/24 = 5/12 * (29 + 91/121)$.

L'area di ABC è data da:

$S_{ABC} = S_{BDGF} + S_{ADG} + S_{GFC}$ = (29 + 91/121) + 3/5 * (29 + 91/121) +
+ 5/12 * (29 + 91/121) = (29 + 91/121) * (1 + 3/5 + 5/12) =
= (29 + 91/121) * (60 + 36 + 25)/60 = (29 + 91/121) * 121/60 =
= (3509 + 91)/121 * 121/60 = 3600/121 * 121/60 = 60.

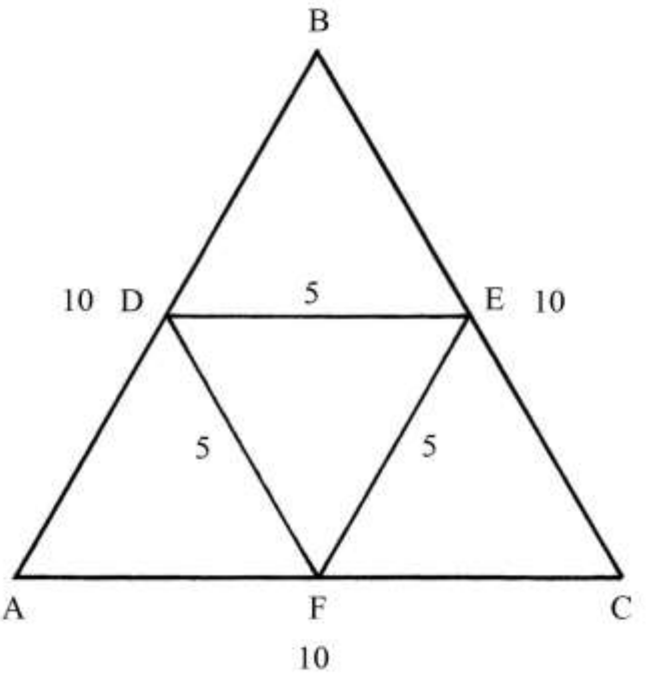
L'area di ABC è:

S_{ABC} = AB * BC/2 = 12 * 10/2 = 60.

- -

[30] Triangolo equilatero inscritto in un altro triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero con lati lunghi 10.



Deve essere inscritto un triangolo equilatero capovolto.

Il triangolo richiesto ha lati lunghi la metà di quelli di ABC.

Fissare i punti medi dei tre lati: sono D, E e F.

Collegare D con E e con F e E con F.

ABC è diviso in quattro triangoli equilateri di uguali dimensioni, con lati lunghi la metà di quelli di ABC e cioè 5.

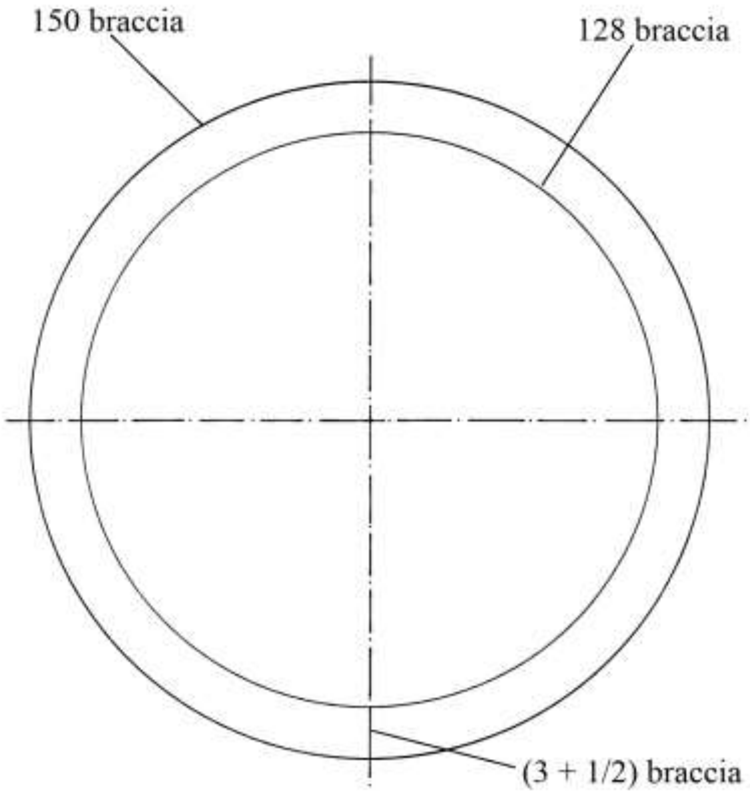
DEF è il più grande triangolo equilatero inscritto in ABC; esso ha area uguale a *un quarto* di quella di ABC:

$S_{DEF} = S_{ABC}/4$.

[31] Circonferenza interna del Campanile di Pisa

La *Torre Pendente* di Pisa ha circonferenza esterna lunga 150 braccia. Lo spessore del muro è (3 + ½) braccia.

Il problema chiede la lunghezza della circonferenza interna.



La soluzione prevede i seguenti passi:

*	moltiplicare per 2 lo spessore del muro:	$(3 + ½) * 2 = 7$;
*	moltiplicare per $(3 + 1/7)$:	$7 * (3 + 1/7) = 22$;
*	sottrarre dalla lunghezza della circonferenza esterna: lunghezza della circonferenza interna.	150 – 22 = 128 braccia,

La circonferenza *c* di un cerchio di raggio *r* è lunga:
$c = 2 * \pi * r = 2 * 22/7 * r = r * 44/7$. Da questa formula si ricava la lunghezza del raggio *r*:
$r = c/(44/7) = c * 7/44$.
Il raggio esterno della Torre di Pisa, *R*, è lungo:
$R = 7 * 150/44 = (23 + 19/22)$.
Il raggio interno, *r*, è:
$r = 7 * 128/44 = (20 + 4/11)$.
La differenza fra i due raggi è lo spessore del muro del Campanile:
$R – r = (23 + 19/22) – (20 + 4/11) = 3 + (19/22 – 8/22) = (3 + 11/22) = (3 + ½)$.

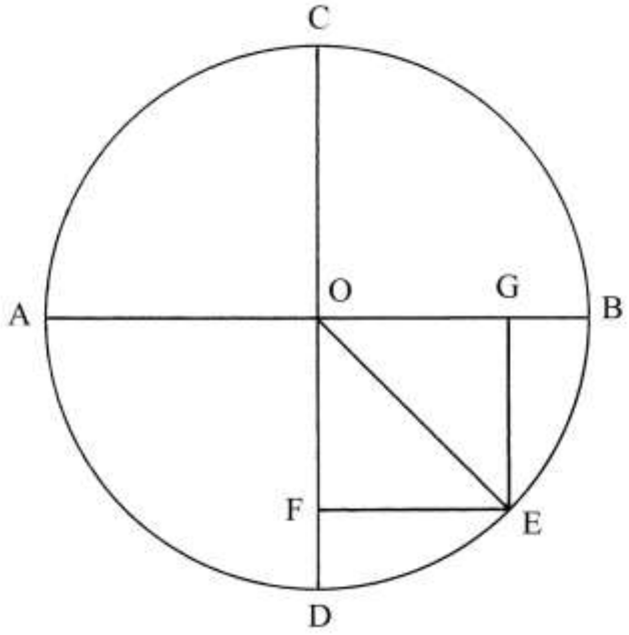
[32] <u>Quadrato inscritto in un quarto di cerchio</u>

Un cerchio ha diametro lungo 8.

Due diametri fra loro perpendicolari, AB e CD, lo dividono in quattro settori circolari di uguali dimensioni.

Il problema domanda la lunghezza dei lati del quadrato inscritto in unsettore circolare.

La lunghezza della diagonale del più grande quadrato inscrivibile in un settore è un raggio del cerchio, come OE, che è lungo 4.



Il raggio OE è la bisettrice dell'angolo DOB: EOB e DOE hanno uguale ampiezza che è 45°.

La lunghezza dei lati del quadrato OGEF è così ricavata:

* moltiplicare la lunghezza di OE per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* dividere per 2: $16/2 = 8$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{8}$, lunghezza dei lati del quadrato OGEF.

L'area dell'intero cerchio è:

$S_{CERCHIO} = \pi * r^2 = 22/7 * 4^2 = (50 + 2/7)$.

L'area del settore circolare OBD è:

$S_{OBD} = S_{SERCHIO}/4 = (50 + 2/7)/4 = (12 + 4/7)$.

Infine, l'area del quadrato OGEF è:

$S_{OGEF} = OG^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$.

[33] <u>Due cerchi inscritti in un quadrato</u>

Un quadrato con lati di lunghezza incognita ha inscritti due cerchi di uguali dimensioni e fra loro tangenti.

Due loro diametri sono segmenti adiacenti e posizionati sulla diagonale BD del quadrato; essi sono entrambi lunghi 4:

$IQ = QJ = 4$.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del quadrato.

OE e OF sono due raggi del cerchio di centro O e sono perpendicolari fra loro e ai lati AB e BC del quadrato.

Anche i raggi PG e PH sono perpendicolari a due lati del quadrato.

La diagonale BD è lunga:

$BD = BO + OQ + QP + PD$.

BO e PQ sono le diagonali di due quadrati che hanno lati lunghi 2, quanto i raggi dei due quadrati:

$BO = OE * \sqrt{2} = 2 * \sqrt{2}$.

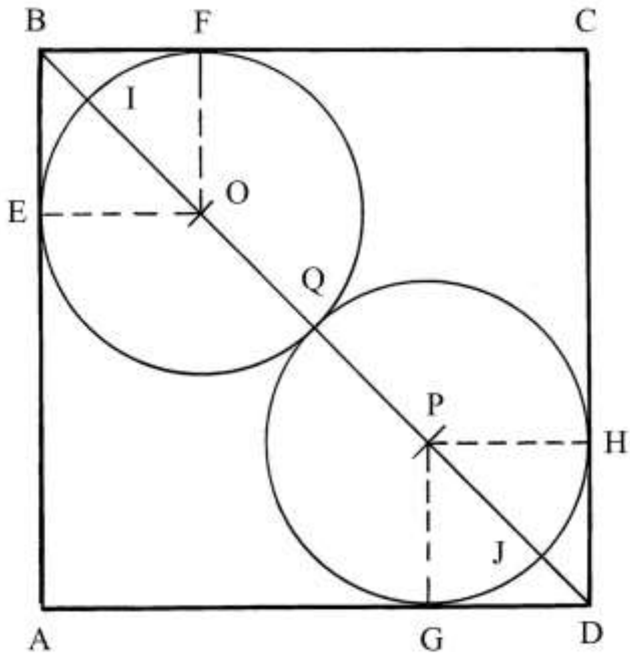
Anche PD è lungo $(2 * \sqrt{2})$.

La lunghezza di BD è:

$BD = 2 * \sqrt{2} + 2 + 2 + 2 * \sqrt{2} = 4 * \sqrt{2} + 4 = 4 * (\sqrt{2} + 1)$.

La lunghezza di AB è data da:

$$AB = BD/\sqrt{2} = [4 * (\sqrt{2} + 1)]/\sqrt{2} = \sqrt{2} * 4 * (\sqrt{2} + 1)/2 = 2 * (\sqrt{2} + 2).$$



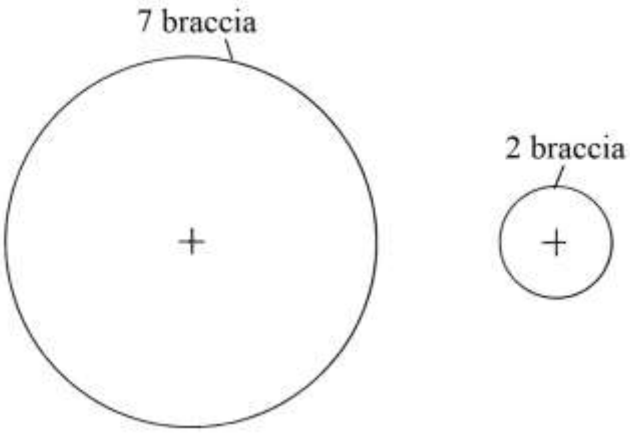
La soluzione proposta da Forestani è diversa e si limita a ricavare la lunghezza della diagonale BD:

* moltiplicare la lunghezza del diametro di uno dei cerchi per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* moltiplicare per 2: $16 * 2 = 32$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{32}$;
* sommare con la lunghezza del diametro di un cerchio: $(4 + \sqrt{32})$, lunghezza della diagonale BD.

Il risultato ottenuto da Forestani $(4 + \sqrt{32})$ è equivalente a quello proposto sopra: $(4 + \sqrt{32}) = 4 * (\sqrt{2} + 1)$.

[34] Rapporto fra due cerchi

Sono dati due cerchi: il primo ha circonferenza lunga 7 braccia e il secondo 2 braccia. Il problema domanda quante volte il cerchio più piccolo entra nel più grande.



La procedura risolutiva è la seguente:

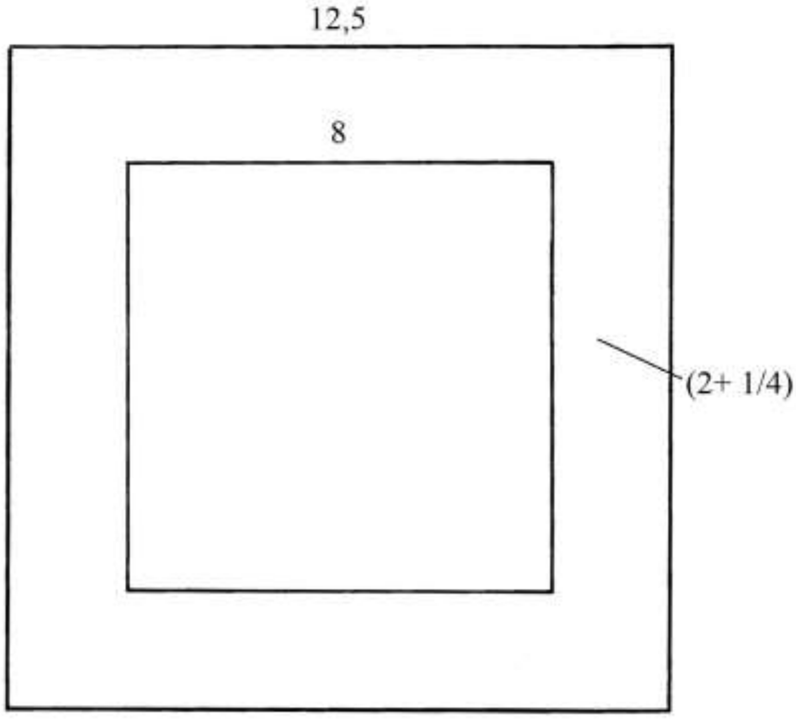
* dividere la circonferenza del cerchio più grande per quella del più piccolo: 7/2 = (3 + ½);
* moltiplicare per sé stesso: (3 + ½) * (3 + ½) = (12 + ¼), numero di volte che il cerchio più piccolo entra nel più grande.

Una seconda soluzione è:
* moltiplicare la lunghezza della circonferenza del cerchio più grande per sé stessa: 7 * 7 = 49;
* moltiplicare la lunghezza della circonferenza del cerchio più piccolo per sé stessa: 2 * 2 = 4;
* dividere 49 per 4: 49/4 = (12 + ¼) numero delle volte che il cerchio più piccolo entra in quello grande.

[35] <u>Torre di forma quadrata</u>

Una torre ha base quadrata. Il muro esterno ha perimetro lungo 50 braccia; il muro è spesso (2 + ¼) braccia.

Il problema chiede la lunghezza del perimetro interno.

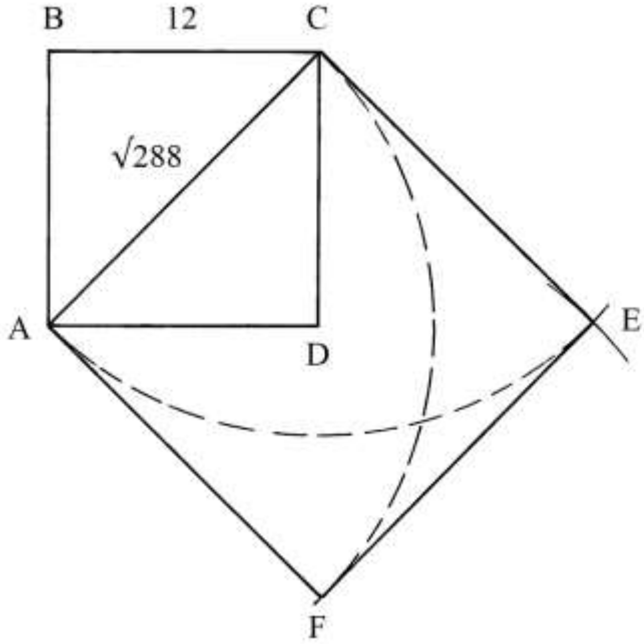


dimensioni in *braccia*

I lati del quadrato esterno sono lunghi:
perimetro/4 = 50/4 = (12 + ½) braccia.
Raddoppiare lo spessore del muro:
(2 + 1/4) * 2 = (4 + ½).
Sottrarre il doppio spessore dalla lunghezza di un lato del quadrato esterno:
(12 + ½) – (4 + ½) = 8 braccia, lunghezza de dei lati del quadrato interno.
Il perimetro del quadrato interno è:
8 * 4 = 32 braccia.

[36] Quadrato doppio di un altro

ABCD è un quadrato e deve essere ricavato un secondo quadrato con area doppia: i lati del primo sono lunghi 12.



Disegnare la diagonale AC e su di essa costruire il quadrato ACEF.

L'area di ABCD è:

$S_{ABCD} = 12 * 12 = 144$.

La lunghezza di AC è:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$ e

$AC = \sqrt{288}$.

L'area di ACEF è data da:

$S_{ACEF} = AC^2 = (\sqrt{288})^2 = 288$.

L'area di ACEF è il doppio di quella di ABCD.

[37] Cerchio doppio di un altro

Un cerchio ha diametro AB lungo 6. Deve essere costruito un secondo cerchio con area doppia.

Inscrivere il cerchio di diametro AB in un quadrato con lati lunghi quanto lo stesso AB: è CDEF.

Tracciare la diagonale CE. Fare centro in O e con raggio OE disegnare una seconda circonferenza concentrica alla prima.

Il diametro CE è lungo:

$CE^2 = CF^2 + FE^2 = AB^2 + AB^2 = 2 * AB^2 = 2 * 6^2 = 72$ e

$CE = \sqrt{72}$.

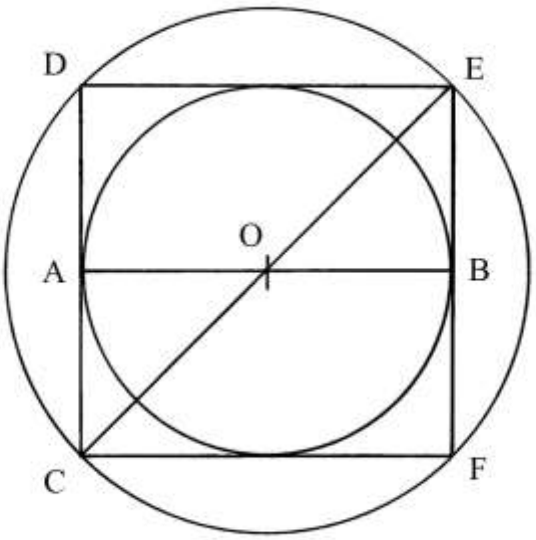
L'area del cerchio di diametro AB è:

$S_{AB} = 11/14 * AB^2 = 11/14 * 6^2 = (28 + 2/7)$.

L'area del cerchio esterno è:

$S_{CE} = 11/14 * CE^2 = 11/14 * (\sqrt{72})^2 = 11/14 * 72 = (56 + 2/7)$.

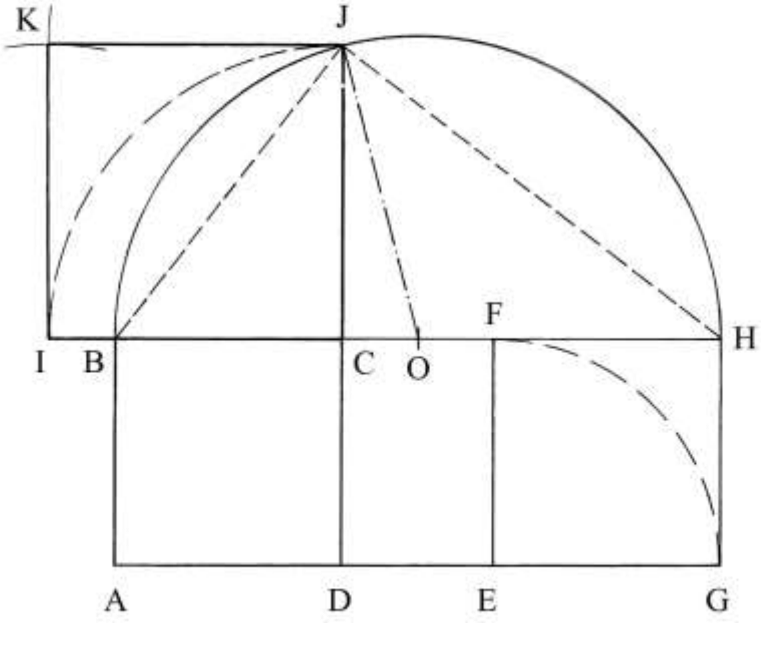
L'area del cerchio esterno è il *doppio* di quella del cerchio interno.



Nota: la costruzione è presente anche nel trattato del matematico e ingegnere militare senese Pietro Cataneo (circa 1510-1573), “Le pratiche delle due prime matematiche”.

[38] <u>Quadrato uguale ai 7/4 di un altro</u>

ABCD è un quadrato e deve essere unito a un rettangolo che ha area uguale ai suoi ¾. I due quadrilateri devono formare un nuovo quadrato di area uguale a 7/4 di quella di ABCD.



Nota: il problema è contenuto nel primo de “I Sette libri dell’Architettura” di Sebastiano Serlio (circa 1475-1554).

Il rettangolo CDEF ha area uguale a ¾ di quella di ABCD: è alto CD, quanto i lati del quadrato, ed è largo CF che è lungo i ¾ di CD (e di AB).

Prolungare BF verso sinistra e verso destra, AE verso destra e DC verso l’alto.

Fare centro in E e con raggio EF tracciare l'arco FG e da G elevare la perpendicolare a AG: è GH.

Fissare il punto medio di BH: è O.

Fare centro in O e con raggio OB = OH disegnare una semicirconferenza da H a I.

La semicirconferenza taglia in J il prolungamento di DC: CJ è la lunghezza del lato del quadrato ICJK che ha area uguale alla somma di quelle del quadrato ABCD e del rettangolo CDEF:

$S_{ICJK} = S_{ABCD} + S_{CDEF} = AB^2 + ¾ * AB^2 = 7/4 * AB^2 = CJ^2$.

La lunghezza di CJ è:

$CJ = \sqrt{(7/4 * AB^2)} = \sqrt{7} * AB/2$.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione è data dall'applicazione del 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli.

L'altezza JC ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle delle proiezioni dei cateti BJ e JH sull'ipotenusa BH:

BC : JC = JC : CH.

La lunghezza di CH è:

CH = CF + FH= ¾ * AB + AB = 7/4 * AB.

Sostituendo, si ha:

AB : JC = JC : 7/4 * AB   e

$JC^2 = 7/4 * AB^2$ e

$JC = \sqrt{(7/4 * AB^2)} = 7/4 * AB$.

- -

[39] <u>Quadrato uguale ai 7/4 di un altro</u>

Il problema è ancora quello descritto nel precedente paragrafo.

In questa occasione Forestani fornisce una soluzione aritmetica.

I lati del quadrato ABCD sono lunghi 16 e la sua area è:

$S_{ABCD} = 16 * 16 = 256$.

Il rettangolo CDEF ha area che è ¾ di quella di ABCD:

$S_{CDEF} = ¾ * S_{ABCD} = ¾ * 256 = 192$.

La larghezza di CF è data da:

$CF = S_{CDEF}/CD = 192/16 = 12$.

La lunghezza del diametro BH è:

BH = BC + CF + FH = 16 + 12 + 16 = 44.

OB e OH sono due raggi della semicirconferenza:

OB = OH = BH/2 = 44/2 = 22.

Il punto O è medio fra C e F:

OC = OF = CF/2 = 12/2 = 6.

JCO è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze del cateto CO e dell'ipotenusa JO; la lunghezza del cateto JC è data da:

$JC^2 = OJ^2 – OC^2 = OH^2 – OC^2 = 22^2 – 6^2 = 484 – 36 = 448$ e

$JC = \sqrt{448} = (21 + 1/6)$.

L'area del quadrato ICJK è:

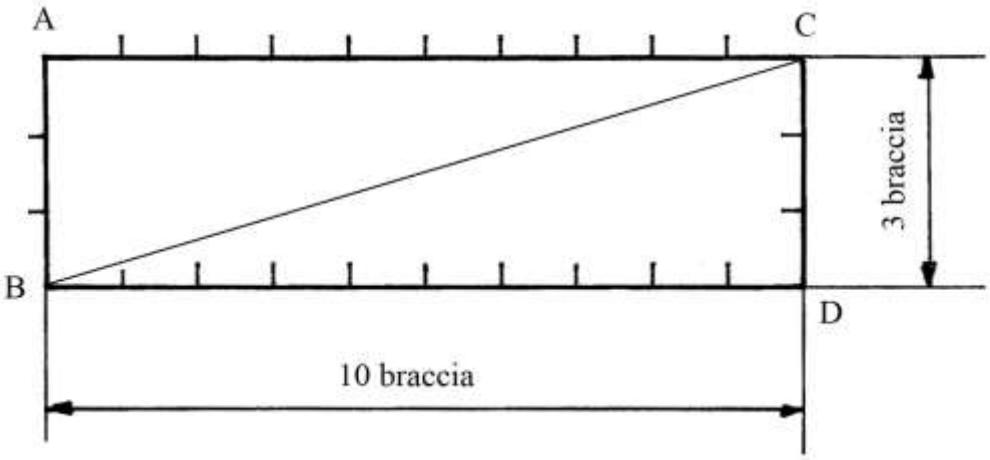
$S_{ICJK} = JC^2 = (\sqrt{448})^2 = 448$.

Per conferma si ha:

$S_{ICJK} = S_{ABCD} + S_{CDEF} = 256 + 192 = 448$.

[40] <u>Porta ricavata da una tavola di legno</u>

Una tavola è lunga 10 braccia ed è larga 3: con essa deve essere realizzata una porta larga 4 braccia e formata da due soli pezzi ricavati con un unico taglio. Il problema chiede l'altezza della porta.

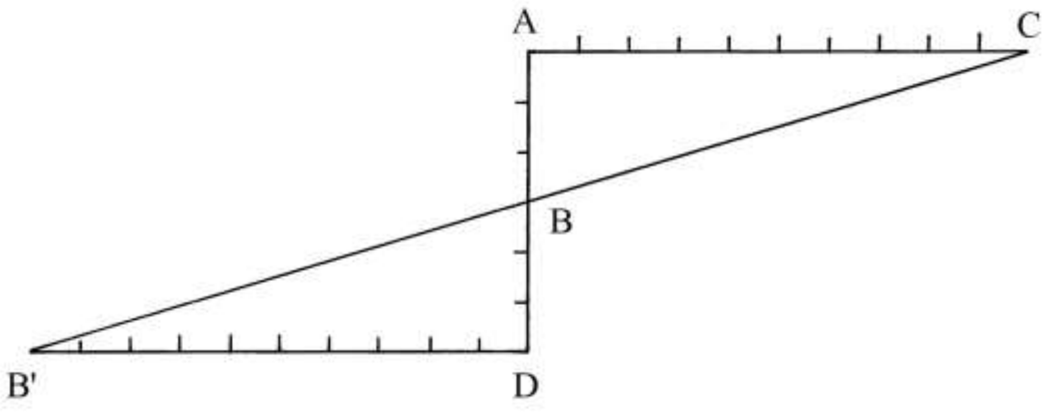


Forestani cita il già ricordato Sebastiano Serlio quale primo Autore del problema e poi cita le critiche al riguardo mosse da Pietro Cataneo alla soluzione di Serlio.

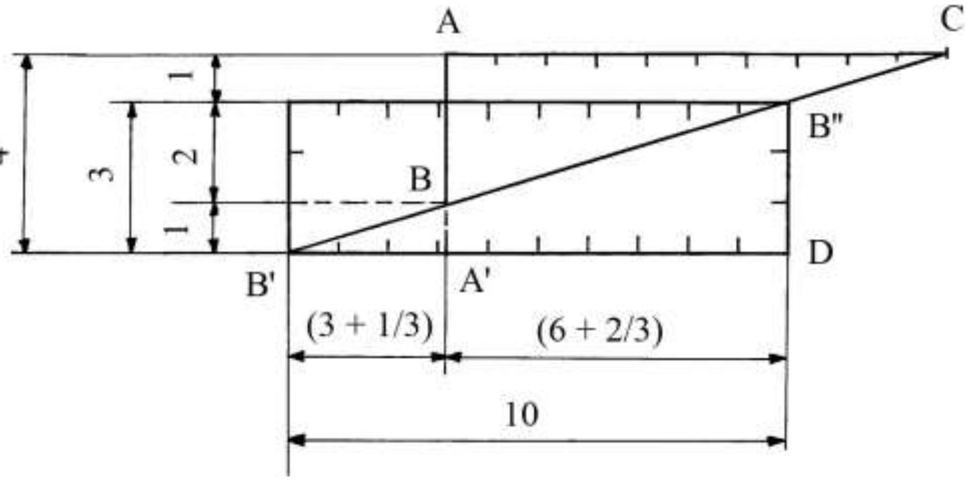
Quest'ultimo Autore si proponeva di ricavare la porta da una tavola alta 7 braccia e larga 4 dividendola lungo una diagonale del rettangolo e facendo in parte scorrere le due metà lungo la stessa diagonale: sia Cataneo che Forestani criticano la soluzione di Serlio.

La tavola è divisa in due parti uguali lungo la diagonale BC: ABC e BCD sono due triangoli rettangoli di uguali dimensioni.

I due triangoli sono fatti scorrere fino a allineare i due cateti verticali:



Il triangolo ABC viene fatto scorrere verso destra, lungo BB', fino a ottenere una larghezza di 4 braccia:



Occorre ora calcolare la lunghezza del segmento A’D utile per l’altezza della porta da costruire.

B’BA’ è un triangolo rettangolo, simile a quello B’B’’D:

B’A’ : B’D = BA’ : B’’D

B’A’ = (B’D * BA’)/B’’D = (10 * 1)/3 = 10/3 = (3 + 1/3) braccia.

La lunghezza di A’D è:

A’D = B’D – B’A’ = 10 – (3 + 1/3) = (6 + 2/3) braccia.

La porta non può essere alta 7 braccia, ma soltanto (6 + 2/3).

La costruzione non è possibile e sono fondate le critiche di Cataneo e di Forestani alla soluzione proposta da Serlio.

[41] Divisione di un cerchio in tre parti uguali

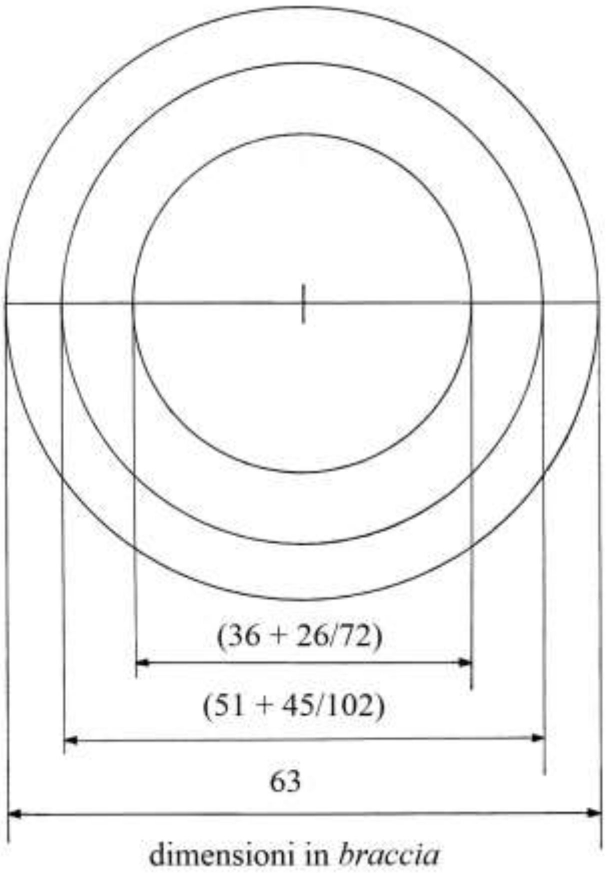
Un terreno ha forma circolare con diametro lungo 63 braccia.

Il proprietario desidera dividerlo in tre pari circolari e di uguale superficie.

La soluzione contiene i seguenti passi:

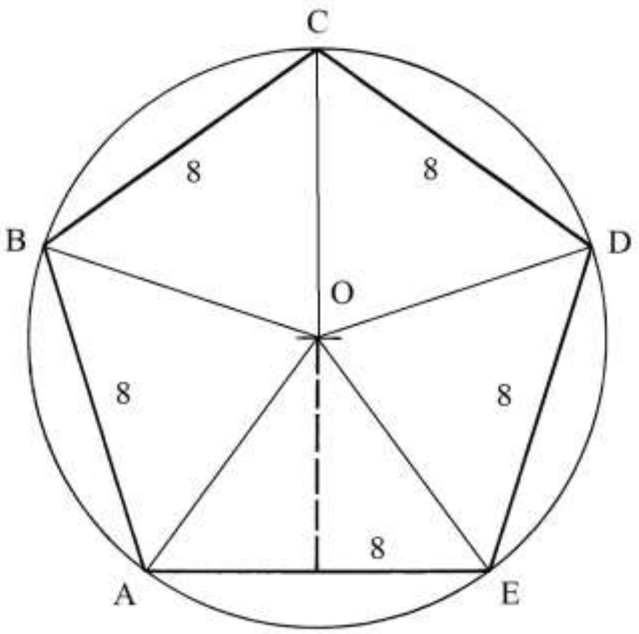
* moltiplicare la lunghezza del diametro AB per sé stessa: 63 * 63 = 3969;
* moltiplicare per 2/3: 3969 * 2/3 = 2646;
* estrarre la radice quadrata: √2646 = (51 + 45/102) braccia, lunghezza del diametro CD;
* dividere il quadrato della lunghezza di AB per 3: 3969/3 = 1323;
* estrarre la radice quadrata: √1323 = (36 + 26/72) braccia, lunghezza del diametro EF.

Un problema simile era contenuto in alcuni trattati medievali e rinascimentali di abaco: un esempio era quello di una ruota circolare di una mola da dividere in più parti uguali fra diversi artigiani.



[42] Pentagono regolare inscritto

Un pentagono regolare è inscritto in un cerchio: i suoi lati sono lunghi 8 braccia.



Forestani propone due diverse soluzioni per calcolare l'area del pentagono ma, data la cattiva qualità dei caratteri della stampa del testo di Forestani, si possono solo avanzare delle ipotesi.

La prima soluzione sarebbe la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare per (1 + 2117/2939): 64 * (1 + 2117/2939) = (110 + 1/10), braccia quadre, area del pentagono.

L'Autore non fornisce alcuna informazione sull'origine della costante (1 + 2117/2939) tranne che essa deriverebbe dalla "teoria".

La seconda soluzione sarebbe:

* misurare la lunghezza di OH: essa è riportata da Forestani essere (5 + ½) braccia;
* calcolare il perimetro *p* del pentagono: p = 5 * 8 = 40;
* moltiplicare per la lunghezza di OH: 40 * (5 + ½) = 220;
* dividere per 2: 220/2 = 110 braccia quadre, area del pentagono.

- APPROFONDIMENTO -

Erone di Alessandria (I secolo d.C.) propose due formule approssimate per calcolare l'area S di un pentagono regolare conoscendo la lunghezza ℓ dei suoi lati:

* $S = 12/7 * \ell^2$ e
* $S = 5/3 * \ell^2$.

I coefficienti 12/7 e 5/3 valgono:

* 12/7 ≈ 1,71428
* 5/3 ≈ 1,(66), che è un numero periodico.

La frazione 2117/2939 vale 0,72031 che sommato a 1 dà:

(1 + 2117/2939) = (1 + 0,72031) = 1,72031, valore che si avvicina ai 12/7 di Erone.

Esiste una relazione fra le formule di Erone e la costante usata da Forestani nella prima soluzione?

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda soluzione richiede la misura o il calcolo della lunghezza di OH: questo segmento è oggi noto come *apotema*.

L'apotema è il raggio del cerchio inscritto nel pentagono.

Nello schema qui sopra sono disegnati cinque raggi che collegano il centro O con i vertici del pentagono. Essi dividono il poligono in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni.

OH è un'altezza del triangolo AOE relativa alla base AE.

L'area del triangolo AOE è:

S_{AOE} = OH * AE/2 = (5 + ½) * 8/2 = 22 braccia quadre.

L'area del pentagono è:

S_{ABCDE} = 5 * S AOE = 5 * 22 = 110 braccia quadre.

Oggi, la lunghezza dell'apotema di un pentagono regolare è calcolata, con notevole approssimazione, moltiplicando la lunghezza del lato per la costante 0,688:

OH = 0,688 * AE = 0,688 * 8 = 5,504 braccia, valore che si avvicina a quello misurato da Farnetani.

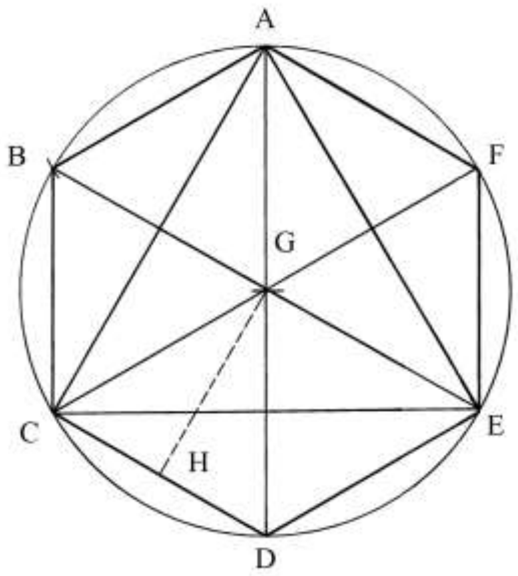
- -

[43] Area di un esagono regolare

ABCDEF è un esagono regolare ("equilatero" secondo Forestani), con lati lunghi 6.

Il problema chiede l'area del poligono.

I diametri AD, BE e CF dividono l'esagono in sei triangoli equilateri con lati lunghi 6. I tre diametri sono lunghi 12.



GH è un'altezza del triangolo CGD: la sua lunghezza è legata a quella dei lati perché il suo quadrato è uguale a ¾ della lunghezza di un lato:

$GH^2 = ¾ * CD^2 = ¾ * 6^2 = ¾ * 36 = 27$ e

$GH = \sqrt{27}$.

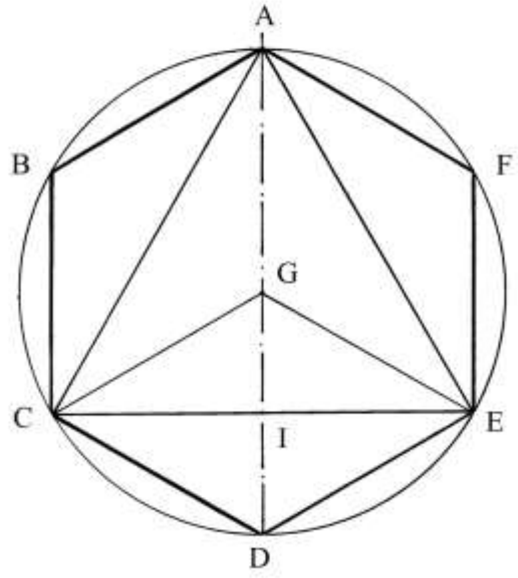
L'area del triangolo CGD è:

$S_{CGD} = (CD * GH)/2 = (6 * \sqrt{27})/2 = 3 * \sqrt{27} = \sqrt{(9 * 27)} = \sqrt{243}$.

L'area dell'intero esagono è:

$S_{ABCDEF} = 6 * S_{CGD} = 6 * \sqrt{243} = \sqrt{(36 * 243)} = \sqrt{8748}$.

Forestani propone poi una seconda soluzione:



ACE è un triangolo equilatero: i suoi lati dividono l'esagono ritagliando tre triangoli isosceli di uguali dimensioni che sono ABC, AFE e CDE.

ABCG, AFEG e CDEG sono tre rombi i cui lati hanno lunghezza uguale a quella del raggio del cerchio.

La somma delle aree dei triangoli ABC, AFE e CDE è uguale a quella del triangolo ACE.

L'area di ACE è data da:

$S_{ACE} = AI * CE/2$.

L'altezza AI è lunga ¾ del diametro AD:

$AI = ¾ * AD = ¾ * 12 = 9$.

La base CE ha lunghezza che è:

$CE^2 = 4/3 * AI^2 = 4/3 * 9^2 = 108$ e

$CD = \sqrt{108}$.

L'area di ACE è:

$S_{ACE} = (9 * \sqrt{108})/2 = \sqrt{2187}$.

L'area dell'intero esagono è il doppio di quella di ACE:

$S_{ABCDEF} = 2 * S_{ACE} = 2 * \sqrt{2187} = \sqrt{(4 * 2187)} = \sqrt{8748} \approx 93,53$.

Infine, Forestani propone una terza soluzione:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
* moltiplicare per (2 + 3/5): $36 * (2 + 3/5) = 93,6$ area dell'esagono.

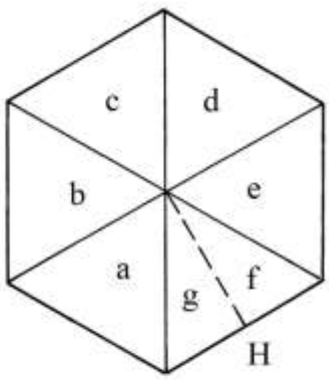
La costante (2 + 3/5) può essere scritta come:

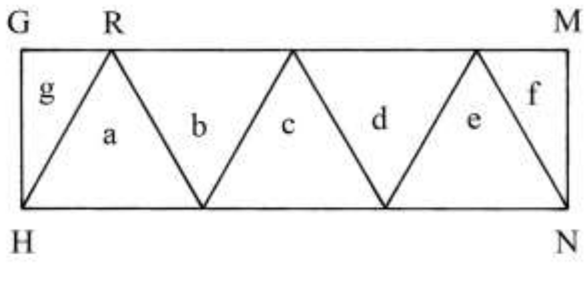
$(2 + 3/5) = 13/5 = 2,6$: essa fu proposta da Erone di Alessandria per calcolare l'area di un esagono con una buona approssimazione.

Farnetani non cita Erone ma è evidente che aveva una qualche conoscenza dell'opera del matematico e ingegnere di Alessandria.

[44] Area di un esagono regolare

Forestani propone un altro metodo per calcolare l'area di un esagono regolare di cui al precedente problema.





L'esagono è diviso nei suoi sei triangoli equilateri ed è tracciata l'altezza di uno di essi, GH.

I triangoli sono contrassegnati con lettere minuscolo da "*a*" a "*f* e *g*".

A destra sono disegnate due linee parallele a distanza uguale alla lunghezza dell'altezza GH.

I segmenti GM e HN sono lunghi *tre* volte la lunghezza dei lati dell'esagono e cioè quanto il suo semiperimetro:

$GM = HN = 3 * DE$.

Da G riportare verso destra la lunghezza di DH:

GR = DH.

Da R riportare per *due* volte la lunghezza di un lato dell'esagono.
Da H riportare per *tre* volte la lunghezza di un lato dell'esagono.
Collegare i punti fra GM e HN, come fatto in figura.
Nello schema di destra sono riprodotti tutti i triangoli nei quali è scomposto l'esagono.
L'area del rettangolo GMNH è:

$S_{GMNH} = GH * HN$.

Dai precedenti calcoli sappiamo che l'altezza GH è lunga:

$GH = \sqrt{27} = 3 * \sqrt{3} \approx (5 + 1/5)$.

HN è lungo:

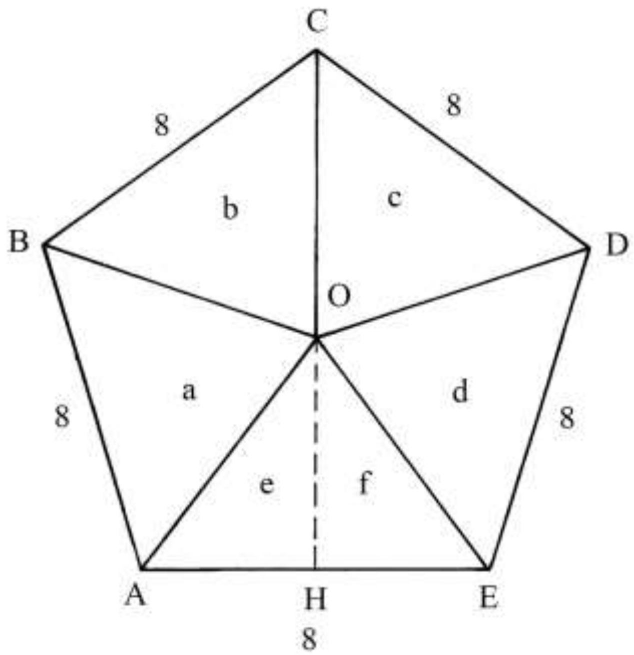
$HN = DE * 3 = (6 * 3) = 18$.

Ne consegue:

$S_{GMNH} = (5 + 1/5) * 18 = (93 + 3/5)$ che è l'area dell'esagono.

[45] <u>Trasformazione di un pentagono regolare in un rettangolo</u>

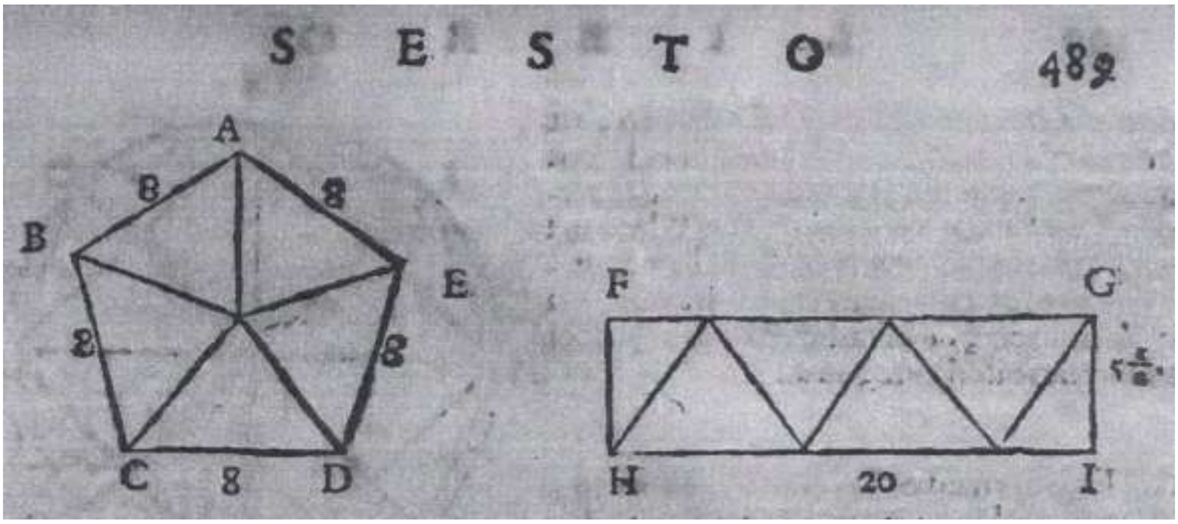
ABCDE è un pentagono regolare che è diviso in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni. I suoi lati sono lunghi 8.



OH è un'altezza del triangolo AOE che divide in due parti uguali: i triangoli rettangoli AOH e HOE.

Il pentagono deve essere sviluppato come è già stato fatto per l'esagono regolare nella soluzione del precedente problema [42].

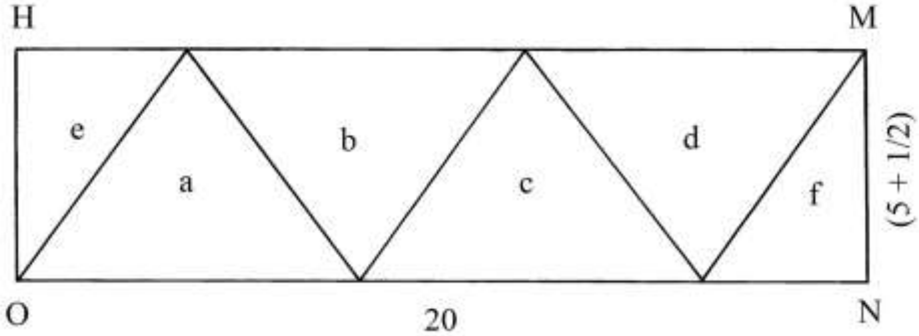
Nello schema originale, a p. 489, Forestani attribuisce a OH la lunghezza di "5 + ½", come nel caso dell'esagono del precente problema:



Costruire il rettangolo OHMN che ha larghezza uguale all’altezza OH della penultima figura.

La lunghezza di HM e di ON è data da:

$HM = AE * 5/2 = 8 * 5/2 = 20.$



L’area di OHMN è:

$S_{OHMN} = OH * HM = (5 + ½) * 20 = 110.$

L’area del pentagono è:

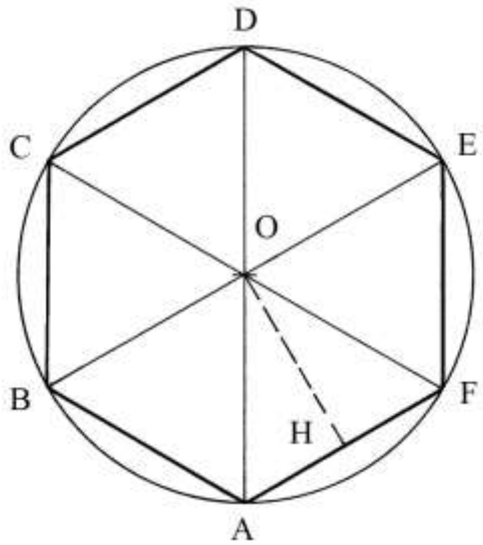
$S_{ABCDE} = (OH * 5 * AE)/2 = (5 + ½) * 5 * 8/2 = (5 + ½) * 20 = 110.$

Il rettangolo OHMN ha la stessa superficie del pentagono ABCDE.

Nota: nel testo originale che descrive questo problema non è indicata alcuna unità di misura.

[46] Lunghezza dei lati di un esagono regolare

Un esagono regolare ha area di 100. Il problema domanda la lunghezza dei suoi lati.



La procedura usata da Forestani è:

* dividere l'area per 6: 100/6 = (16 + 2/3), area di uno dei triangoli equilateri che compongono l'esagono;
* moltiplicare per sé stessa:: (16 + 2/3) * (16 + 2/3) = (277 + 7/9);
* moltiplicare per (5 + 1/3): (277 + 7/9) * (5 + 1/3) = (1481 + 1/27);
* estrarre la radice quadrata: √(1481 + 1/27), lunghezza dei lati dell'esagono.

- APPROFONDIMENTO -

La radice quadrata di (1481 + 1/27) vale 38,48: non è possibile che un esagono di area 100 possieda lati così lunghi.

Consideriamo il triangolo equilatero AOF: i suoi lati sono lunghi quanto quelli dell'esagono e quanto il raggio del cerchio circoscritto.

L'area del triangolo equilatero AOF è data da:

$S_{AOF} = OH * AF/2 = [(\sqrt{3})/2 * AF] * AF/2 = (\sqrt{3})/4 * AF^2$.

Forestani ha ricavato l'area di un triangolo equilatero, e quindi anche quella di AOF:

$S_{AOF} = (16 + 2/3)$.

$(\sqrt{3})/4 * AF^2 = (16 + 2/3)$

$AF^2 = (16 + 2/3) * 4/\sqrt{3} \approx 38,49$ e

$AF = \sqrt{(38,49)} \approx 6,2$.

Forestani ha calcolato il *quadrato* della lunghezza dei lati dell'esagono.

- -

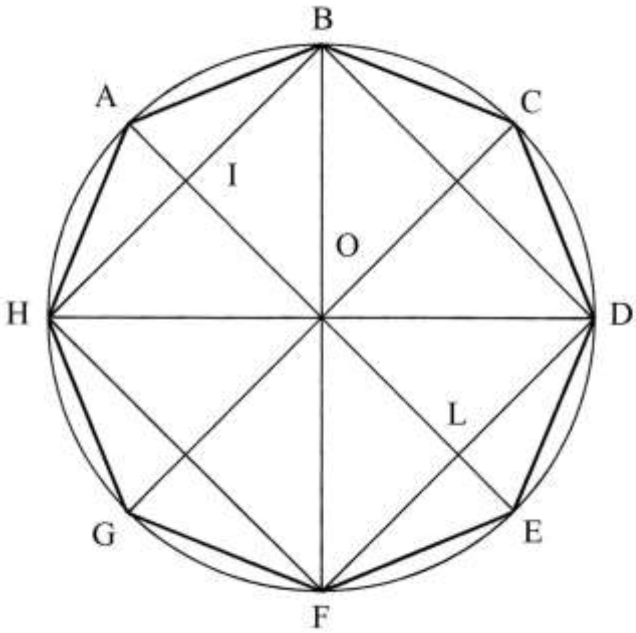
[47] Superficie di un ottagono regolare

Il calcolo della superficie di un ottagono regolare inscritto in un cerchio di diametro 7 richiede diversi passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 7 * 7 = 49;
* dividere per 2: 49/2 = (24 + ½);
* estrarre la radice quadrata: √(24 + ½), lunghezza dei lati del più grande quadrato inscritto, che è HBDF.

Il punto medio di HB è I e la sua posizione è fissata dall'intersezione del diametro AE con il lato HB. Lo stesso accade al punto L, medio di FD.

I lati del quadrato HBDF delimitano quattro triangoli isosceli di uguali dimensioni: BAH, BCD, DEF e FGH.



L'altezza AI è lunga quanto quella EL.

L'area dei quattro triangoli isosceli è ottenuta come segue:

$S_{4TRIANGOLI} = (2 * AI) * HB$.

L'area di un solo triangolo isoscele è:

$S_{BAH} = (HB * AI)/2$ e moltiplicando per 4 si ha:

$4 * S_{BAH} = (HB * AI/2) * 4 = 2 * AI * HB$.

La lunghezza di AI è:

$AI + EL = AE - IL = 7 - \sqrt{(24 + ½)}$ e

$AI = EL = [7 - \sqrt{(24 + ½)}]/2$.

Con una serie di passi, qui non riportati, Forestani calcola la superficie dell'ottagono:

$S_{OTTAGONO} = \sqrt{(1200 + ½)}$.

L'Autore propone poi una seconda soluzione più rapida:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro: 7 * 7 = 49;
* moltiplicare per la lunghezza del lato del quadrato:

$49 * \sqrt{(24 + ½)} = \sqrt{(1200 + ½)}$, area dell'ottagono.

- APPROFONDIMENTO -

L'ultimo passaggio della seconda soluzione proposta da Forestani contiene un errore:

$49 * \sqrt{(24 + ½)}$ non fa $\sqrt{(1200 + ½)}$ ma:

$\sqrt{2401} * (24 + ½)$.

L'Autore ha moltiplicato per il quadrato della lunghezza del diametro, 49, e non per la lunghezza del diametro che è 7.

La soluzione corretta è:

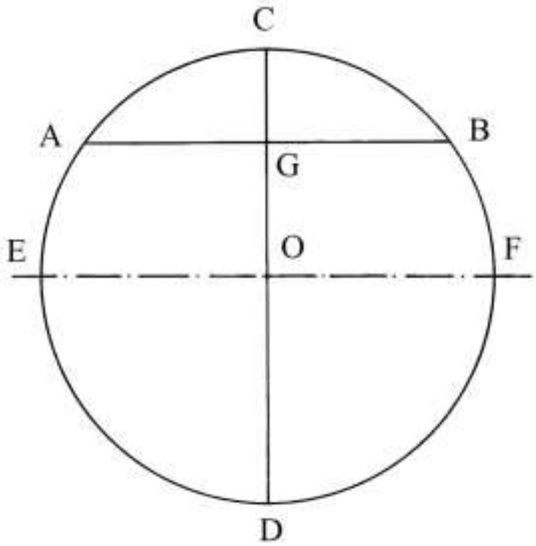
$S_{OTTAGONO} = d * \sqrt{(24 + ½)} = 7 * \sqrt{(24 + ½)} = \sqrt{[49 * (24 + ½)]} = \sqrt{(1200 + ½)} \approx$
$\approx 34,65$.

- -

[48] Divisione di un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 10 braccia. La corda AB lo divide in due segmenti circolari: la freccia CG è lunga 2 braccia e quella GD è 8 braccia.

Il problema chiede la lunghezza della corda AB.



Per il teorema delle corde si ha:

AG : CG = GD : GB.

Ma AG = GB per cui la proporzione diviene:

$AG^2 = CG * GD = 2 * 8 = 16$e

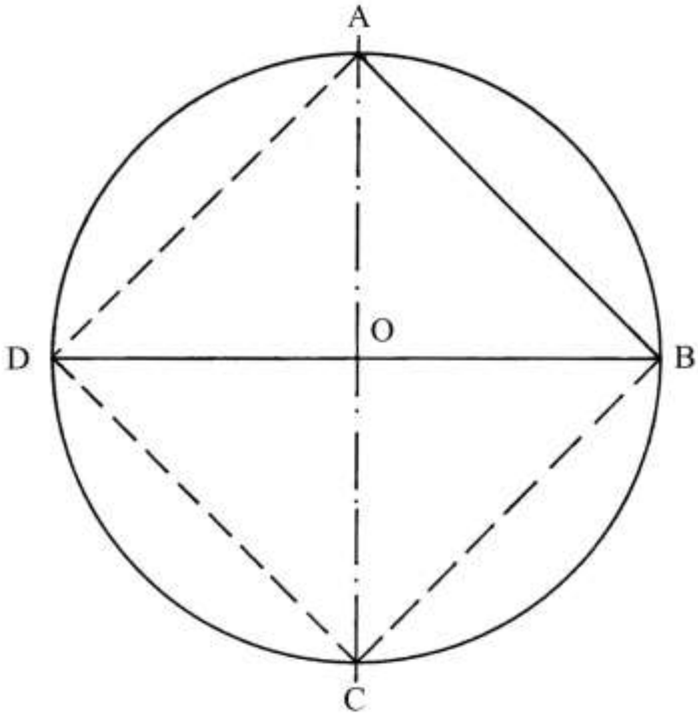
$AG = \sqrt{16} = 4$ braccia.

La corda AB è lunga:

AB = 2 * AG = 2 * 4 = 8 braccia.

[49] Taglio di un segmento circolare

Un cerchio ha diametro *d* lungo 7. Con una corda deve essere asportare una parte che sottenda *un quarto* della lunghezza della circonferenza.



Il problema domanda la superficie che viene tagliata.

In un cerchio di diametro 7 è possibile inscrivere un quadrato con lati lunghi √(24 + 1/2), come è stato calcolato nella soluzione del precedente problema [47].

Il quadrato ABCD ha tre lati disegnati tratteggiati: AD, DC e CB.

La superficie da asportare è il segmento circolare delimitato dall'arco AB e dalla corda AB.

L'area del quadrato ABCD è:

$S_{ABCD} = [\sqrt{(24 + 1/2)}]^2 = (24 + 1/2)$.

L'area del cerchio è:

$S_{CERCHIO} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 7^2 = (38 + ½)$.

I quattro segmenti circolari che separano il cerchio dal quadrato hanno area:

$S_{4SEGMENTI} = S_{CERCHIO} – S_{ABCD} = (38 + ½) – (24 + ½) = 14$.

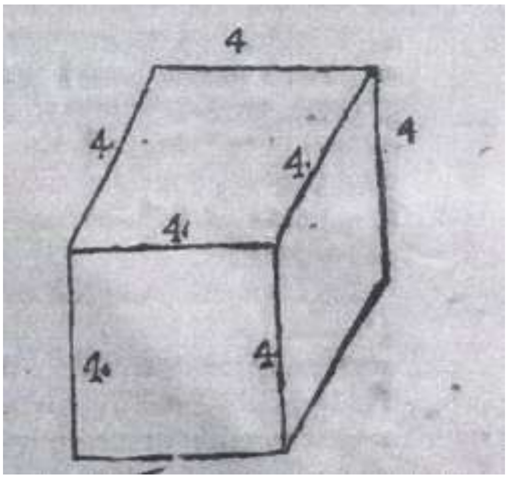
L'area del segmento circolare AB è:

$S_{AB} = S_{4SEGMENTI}/4 = 14/4 = (3 + ½)$.

I CORPI SOLIDI
=============

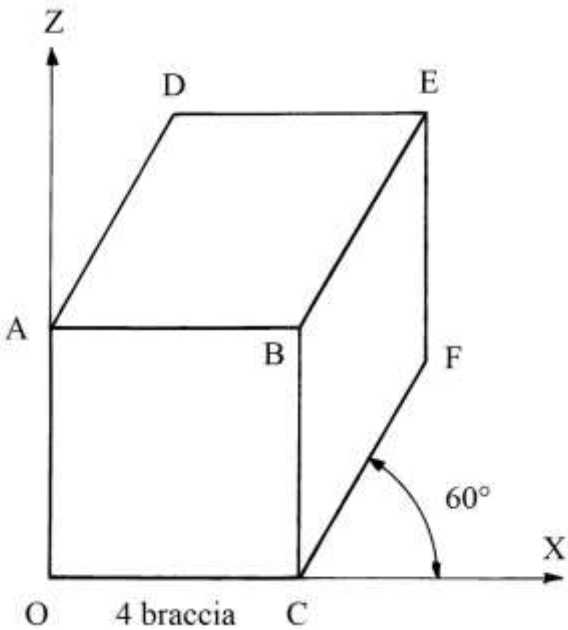
[1] Volume di un cubo

Una pietra quadrata ha la forma di un cubo, perché è fatta a forma di dado: i suoi spigoli sono lunghi 4 braccia.



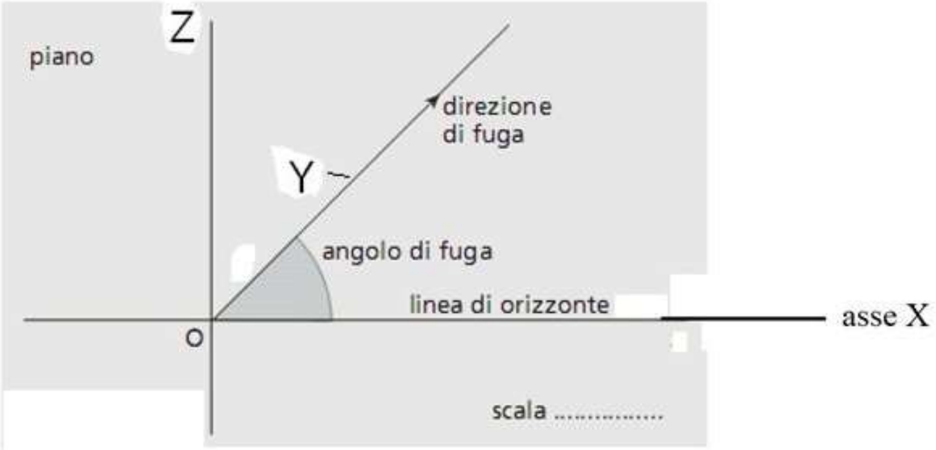
Il problema chiede il volume espresso in *braccia cube*: è forse la prima volta che in un trattato rinascimentale di area toscana viene usata questa espressione invece di quella più comune di *braccia quadre corporee* per indicare l'unità di misura dei volumi.

Lo schema originale è disegnato in *assonometria cavaliera isometrica*, con angolo di fuga di 60°:



- APPROFONDIMENTO -

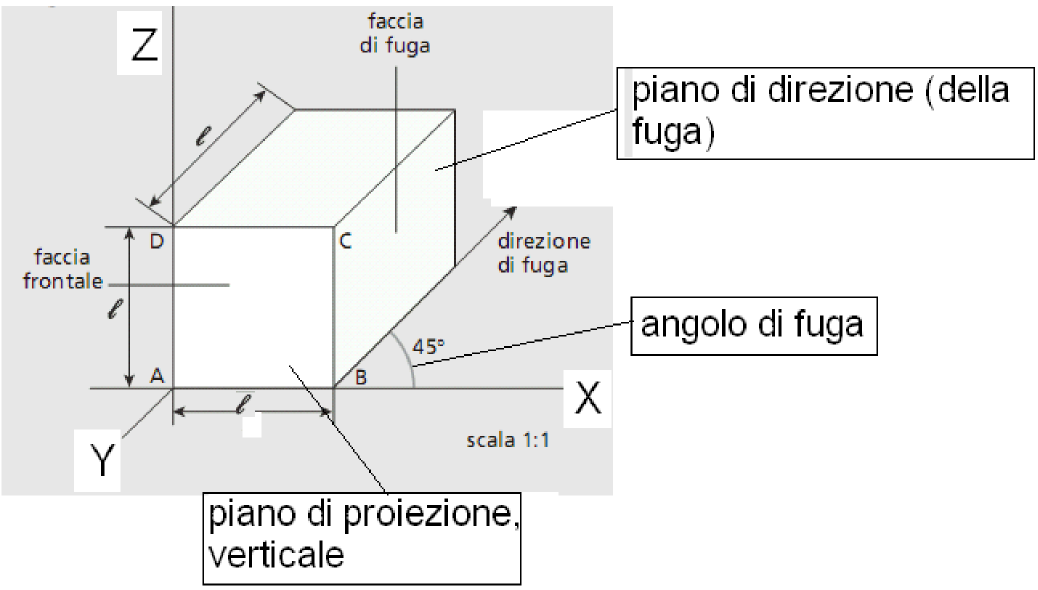
Gli elementi che definiscono una qualsiasi assonometria sono i seguenti:



* un *piano di proiezione* che è rappresentato dal foglio di carta sul quale si disegna (o dallo schermo di un monitor);
* una *scala di proporzione*: 1:1 1:2 1:5, ecc.;
* una *direzione di fuga*: è un asse, Y in figura, che forma un dato angolo con la *linea di orizzonte* rappresentata dall'asse X. In questo caso l'angolo di fuga è uguale a 45°;
* un *rapporto di fuga*, RF, è espresso da un numero uguale o inferiore a 1: esso si riferisce al rapporto fra le lunghezze misurate lungo l'asse Y e quelle reali:

rapporto di fuga = RF = lunghezza disegnata/lunghezza reale .

La figura che segue presenta l'assonometria cavaliera *isometrica* di un cubo: è così chiamata perché le dimensioni degli spigoli sono identiche lungo tutti e tre gli assi. Gli elementi che caratterizzano questo tipo sono:



- Il piano di proiezione è, normalmente *verticale*, e la faccia frontale ABCD è poggiata su di esso.
- La scala è 1:1.

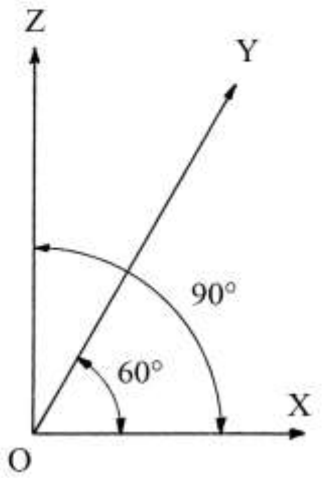
- La direzione di fuga forma un angolo di 45° con l'asse X. L'angolo di fuga è, in questo caso, 45°.
- Il rapporto di fuga vale 1, perché tutti gli spigoli – compresi quelli disegnati parallelamente all'asse di fuga – hanno lunghezza uguale a quella reale (fatti salvi i rapporti di scala).

- -

Il rapporto di fuga nello schema di Forestani è 1:

RF = CF/OC = 4/4 = 1.

Il cubo è disegnato utilizzando tre assi che nella realtà sono fra loro perpendicolari e che nello schema sono fra loro inclinati come la figura che segue:



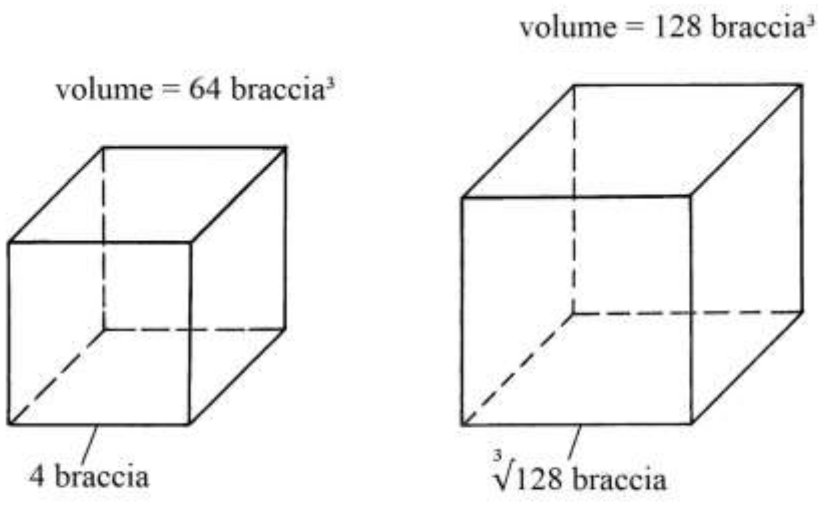
Infine, il volume V del cubo è:

$V_{CUBO} = 4 * 4 * 4 = 64$ braccia cubiche.

[2] Cubo doppio di un altro

Un cubo ha spigoli lunghi 4 braccia e il suo volume è 64 braccia cubiche:

V = 4 * 4 * 4 = 64.



Un secondo cubo ha volume doppio del primo:

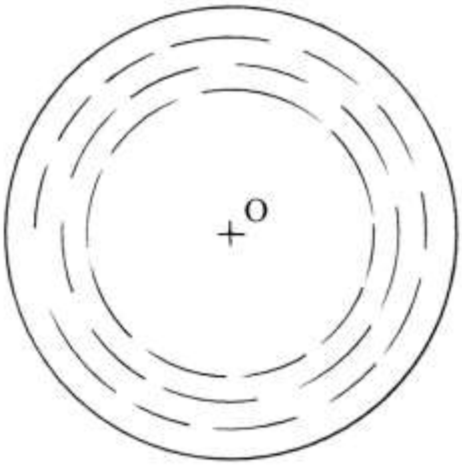
V = 64 * 2 = 128 braccia cubiche.

Il problema chiede la lunghezza ℓ degli spigoli del secondo cubo:

$$\ell = \sqrt[3]{128} \approx 5{,}04.$$

[3] Superficie e volume di una sfera

Una palla, una sfera, ha diametro *d* lungo 7 braccia. Sono chiesti la sua superficie e il suo volume.



La circonferenza *c* del cerchio massimo della sfera è lunga:

c = 22/7 * d = 22/7 * 7 = 22 braccia.

La superficie S della sfera è calcolata da Forestani come segue:

S = c * d = 22 * 7 = 154 braccia quadre.

Oggi la superficie S di una sfera è calcolata con la formula:

S = 4 * π * r^2, con *r* raggio.

L'ultima formula può essere trasformata:

S = (2 * π * r) * (2 * r) = c * d, che è la formula usata da Forestani.

Il cerchio massimo ha area che è data da:

$S_{CERCHIO}$ = 11/14 * d^2 = 11/14 * 7^2 = (38 + ½) braccia quadre.

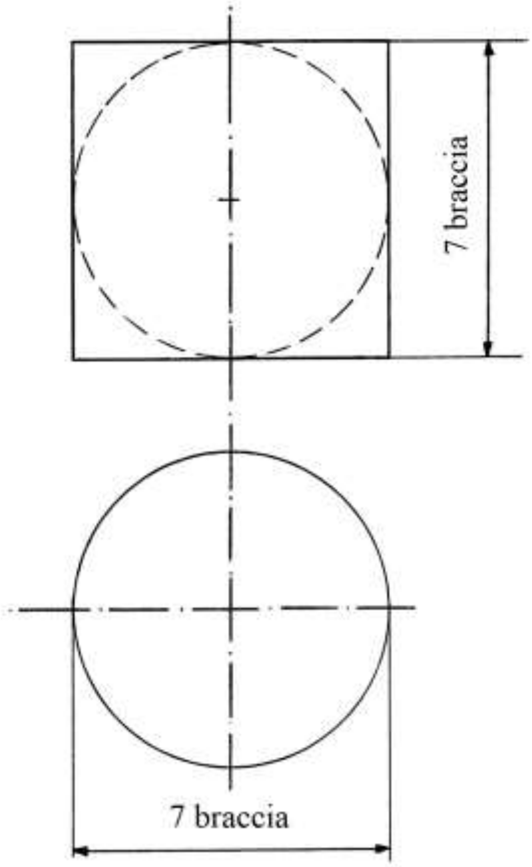
Moltiplicando per 4 l'area del cerchio massimo si ha:

4 * $S_{CERCHIO}$ = 4 * (38 + ½) = 154 braccia quadre, che è la superficie della sfera, ricavata in precedenza.

Il volume V della sfera è calcolato con alvuni metodi, equivalenti:

* V = 1/3 * S * d/2 = 1/3 * 154 * 7/2 = (179 + 2/3) *braccia quadre corporee* [Forestani ritorna alla vecchia denominazione delle *braccia cubiche*];
* V = S * d/6 = 154 * 7/6 = (179 + 2/3);
* V = S/3 * d72 = (154/3) * (7/2) = (179 + 2/3);
* V = $S_{CERCHIO}$ * d * 2/3 = (38 + ½) * 7 * 2/3 = (179 + 2/3).

Forestani cita Archimede e propone un confronto fra la sfera e un cilindro che ha diametro delle basi e altezza uguali al diametro della sfera:



L’area della base del cilindro è:

$S_{\text{BASE}} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 7^2 = (38 + ½)$ braccia quadre.

Il volume del cilindro di altezza *h* = 7 è:

$V_{\text{CILINDRO}} = S_{\text{BASE}} * h = (38 + ½) * 7 = (269 + ½)$ braccia cubiche.

Fra il colume del cilindro e quello della sfera in esso inscritta esiste una proporzione *sesquialtera* o rapporto 3 : 2:

$V_{\text{CILINDRO}} : V_{\text{SFERA}} = (269 + ½) : (179 + 2/3) = 3 : 2.$

Infine, Forestani cita un metodo usato dai “pratici” per calcolare il volume di una sfera con diametro *d* lungo 7:

$V_{\text{SFERA}} = d^3 * 11/21 = 7^3 * 11/21 = (179 + 2/3).$

L’origine di questa formula, peraltro corretta, è:

$V = 4 * \pi * r^3/3 = 4 * 22/7 * (d/2)^3 = 88/21 * d^3/8 = 11/21 * d^3.$

Nella formula, *r* è il raggio: r = d/2.

[4] <u>Diametro di una sfera</u>

Una sfera ha superficie di 616 braccia quadre: si desidera ricavare la lunghezza del suo diametro.

La procedura è molto semplice:

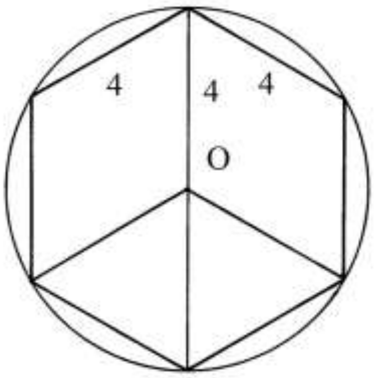
* dividere 616 per (3 + 1/7 = 22/7): 616/(3 + 1/7) = 196;
* estrarre la radice quadrata: √196 = 14 braccia, diametro della sfera.

Forestani ha applicato la formula inversa dell’area di una sfera:

$S = \pi * d^2 = (3 + 1/7) * d^2$ da cui
$d^2 = S/(3 + 1/7)$ e $d = \sqrt{[S/(3 + 1/7)]}$.

[5] <u>Cubo inscritto in una sfera</u>

Un cubo ha spigoli lunghi 4 ed è inscritto in una sfera.
Il problema chiede il diametro della sfera.



Forestani risolve affermando che il quadrato della lunghezza del diametro *d* della sfera sta al quadrato della lunghezza dello spigolo ℓ del cubo come 3:1 e quindi procede come segue:

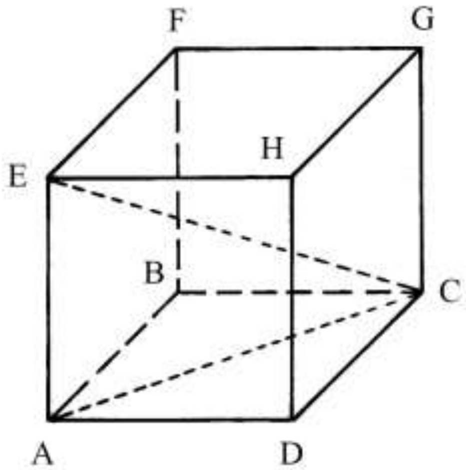
$d^2 = 3 * \ell^2 = 3 * 4^2 = 48$ e
$d = \sqrt{48}$.

- APPROFONDIMENTO -

Gli *vertici* del cubo giacciono sulla superficie della sfera.

Le diagonali del cubo sono diametri della sfera.

La diagonale di un cubo unisce due vertici opposti e non appartenenti alla stessa faccia. Un cubo possiede *quattro* diagonali tutte di uguale lunghezza.



AC è una diagonale di una faccia del cubo e la sua lunghezza è data da:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$ e
$AC = \sqrt{32} = 4 * \sqrt{2}$.

AEC è un triangolo rettangolo che ha cateti:

* $AE = 4$;
* $AC = 4 * \sqrt{2}$.

EC è l'ipotenusa del triangolo AEC e la sua lunghezza è data da:

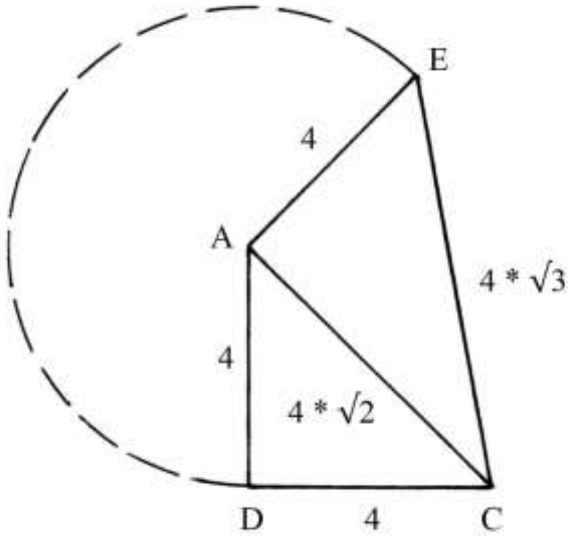
$EC^2 = AE^2 + AC^2 = 4^2 + (4 * \sqrt{2})^2 = 16 + 32 = 48$ e

$EC = \sqrt{48} = 4 * \sqrt{3}$.

EC è una delle quattro diagonali del cubo ed è anche un diametro della sfera.

Forestani ha calcolato correttamente la sua lunghezza.

La lunghezza della diagonale EC può essere ricavata con una semplice costruzione geometrica:



ADC è un triangolo rettangolo isoscele con lati lunghi 4.

L'ipotenusa AC è lunga $4 * \sqrt{2}$.

Dal punto A tracciare la perpendicolare a AC e poi fare centro in A e con raggio AD disegnare un arco da D fino a incontrare in E la perpendicolare.

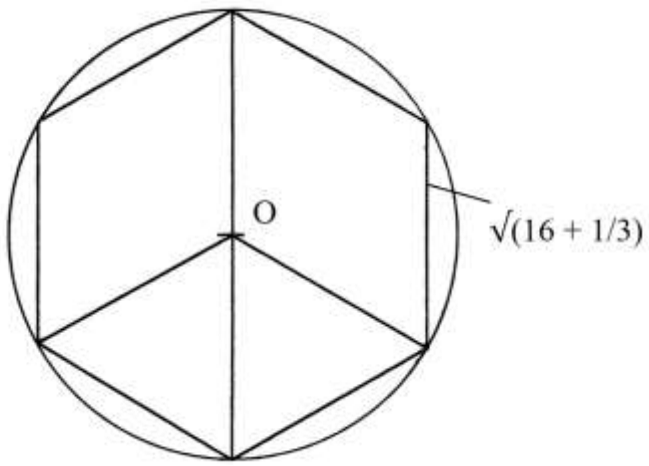
EC è una diagonale del cubo e un diametro della sfera: la sua lunghezza è $4 * \sqrt{3}$.

- -

[6] <u>Cubo inscritto in una sfera</u>

Una sfera ha diuametro lungo 6. Vi è inscritto un cubo: il problema è l'opposto di quello considerato nel precedente paragrafo.

Deve essere ricavata la lunghezza dello spigolo del cubo, ℓ.



Dato che il quadrato della lunghezza del diametro *d* della sfera è il triplo di quella del quadrato dello spigolo ℓ del cubo, si ha la seguente relazione:

$d^2 = 3 * \ell^2$

$7^2 = 3 * \ell^2$

$\ell^2 = 7^2/3 = 49/3 = (16 + 1/3)$ e

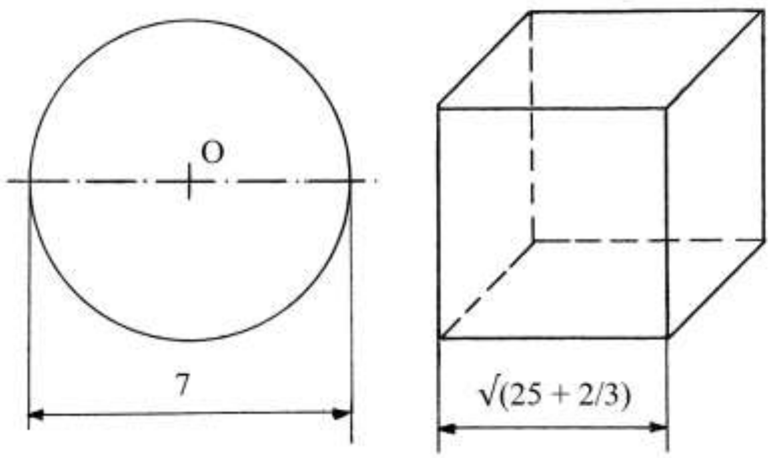
$\ell = \sqrt{(16 + 1/3)}$.

[7] Cubo con superficie uguale a quella di una sfera

Una sfera ha diametro *d* lungo 7.

La sua superficie è data da:

$S = 4 * \pi * r^2 = 4 * 22/7 * (d/2)^2 = 88/7 * (7/2)^2 = 88/7 * 49/4 = 154.$



Anche la superficie totale del cubo è 154 e ciascuna faccia ha area:

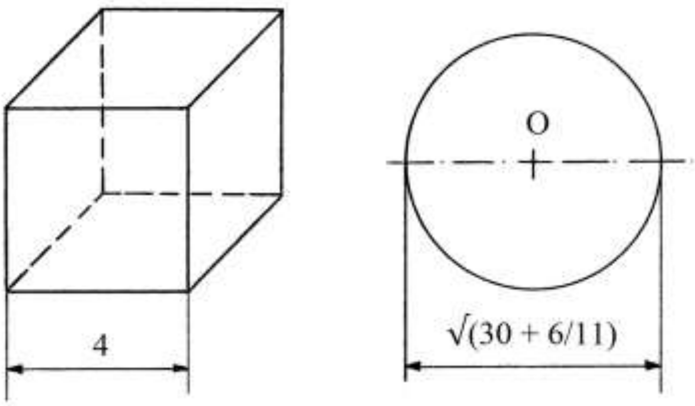
$S_{FACCIA} = S/6 = 154/6 = (25 + 2/3)$.

La lunghezza dello spigolo ℓ del cubo è data da:

$\ell = \sqrt{S_{FACCIA}} = \sqrt{(25 + 2/3)}$.

[8] Cubo e sfera di uguali superfici

Un cubo ha spigoli *s* lunghi 4. Una sfera ha la stessa superficie di quella del cubo: il problema chiede il suo diametro *d*.



La superficie di una faccia del cubo è:

$S = 4 * 4 = 16$ e quella dell'intero cubo è:

$S_{CUBO} = 6 * S = 6 * 16 = 96$.

La formula della superficie della sfera è:

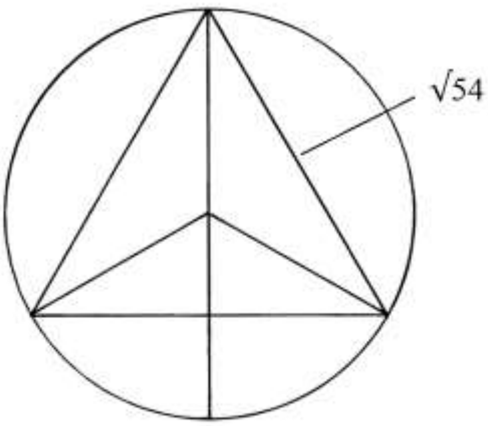
$S_{SFERA} = 4 * \pi * r^2 = 4 * 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2$, da cui:

$d^2 = S_{SFERA} * 7/22 = S_{CUBO} * 7/22 = 96 * 7/22 = (30 + 6/11)$ e

$d = \sqrt{(30 + 6/11)}$.

[9] Tetraedro inscritto in una sfera

Una sfera ha diametro *d* lungo 9: in essa è inscritta una "*piramide equilatera*" recante quattro facce uguali e triangolari: il solido è oggi noto come *tetraedro* e le sue facce sono triangoli equilateri.



La lunghezza ℓ del lato dei triangoli equilateri che formano le quattro facce del tetraedro inscritto è legata a quella del diametro *d* della sfera:

$\ell = \sqrt{(2/3)} * d = \sqrt{(2/3)} * 9 = \sqrt{(2 * 81/3)} = \sqrt{54}$.

Forestani procede con i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro della sfera per sé stesso: $9 * 9 = 81$;
* moltiplicare per 2/3: $81 * 2/3 = 54$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{54}$, lunghezza dei lati della facce del tetraedro.

[10] Volume di una piramide

Una piramide ha base a forma di triangolo equilatero con lati lunghi 2 braccia. Essa è ata 12 braccia.

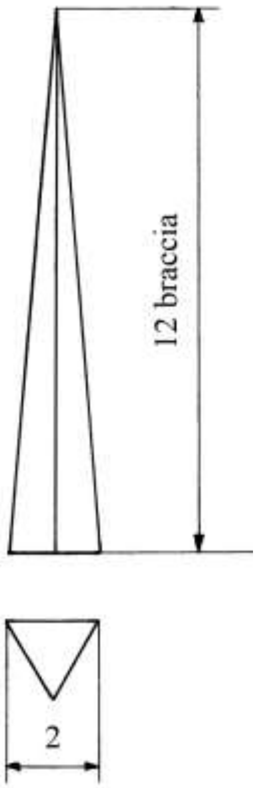
È chiesto il suo volume.

L'area della base triangolare è:

$S_{BASE} = (\sqrt{3})/4 * lato^2 = (\sqrt{3})/4 * 2^2 = \sqrt{3}$.

Il volume V della piramide è:

$V = S_{BASE} * altezza/3 = \sqrt{3} * 12/3 = 4 * \sqrt{3} = \sqrt{(16 * 3)} = \sqrt{48}$.

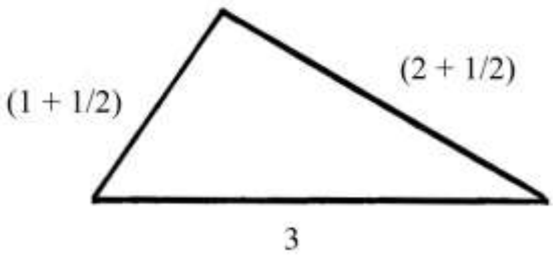


[11] Volume di una piramide

Una piramide ha la base a forma di triangolo scaleno i cui lati sono lunghi

3, (2 + ½) e (1 + ½).

L'altezza *h* del solido è 12.



Forestani fissa in (3 + 1/7) l'area del triangolo scaleno che è la base.

Il perimetro del triangolo, *2*p*, è*:*

$2 * p = 3 + (2 + ½) + (1 + ½) = 7$;

il semiperimetro *p* è 7/2 = 3,5.

L'area *S* calcolata con la formula di Erone è:

$$S = \sqrt{[3,5 * (3,5 - 3) * (3,5 - 2,5) * (3,5 - 1,5)]} = \sqrt{(3,5 * 0,5 * 1 * 2)} =$$
$$= \sqrt{3,5}.$$

Il volume V della piramide è dato da:

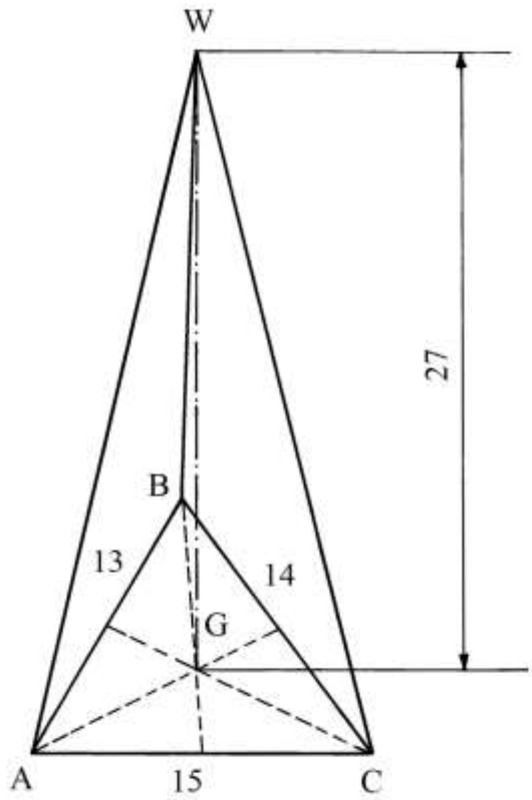
$$V = S * h/3 = \sqrt{3,5} * 12/3 = 4 * \sqrt{3,5} = \sqrt{(16 * 3,5)} = \sqrt{56}.$$

[12] Altezza di una piramide

Una piramide ha come base un triangolo con lati lunghi 13, 14 e 15.

Il volume della piramide è 756.

Il problema chiede l'altezza del solido.



In una piramide retta, l'altezza *h* è misurata dal vertice W al punto G, baricentro della base triangolare che è determinato dall'intersezione delle tre *mediane*.

L'area S della base è stata calcolata nella soluzione di precedenti problemi e vale 84.

Il volume V della piramide è dato da:

$$V = S * h/3.$$

L'altezza *h* è ricavata dalla formula inversa:

$$h = 3 * V/S = 3 * 756/84 = 2268/84 = 27.$$

[13] Volume di una piramide a base quadrata

Una piramide retta ha base a forma di quadrato con lati lunghi 4 braccia.

L'altezza *h* del solido è di 40 braccia.

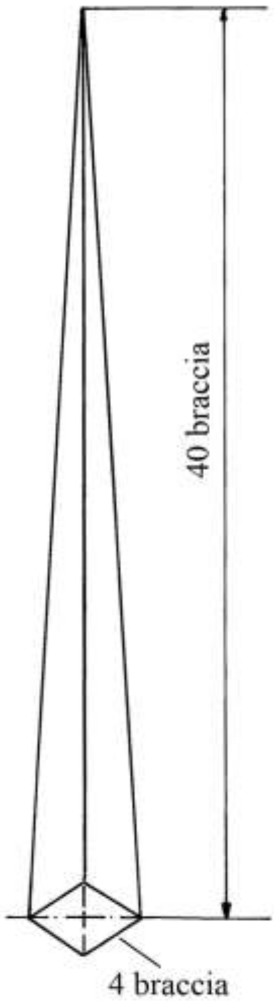
È chiesto il volume della piramide.

La base ha area S:

$$S = 4 * 4 = 16 \text{ braccia quadre.}$$

Il volume V è dato da:

$$V = S * h/3 = 16 * 40/3 = 640/3 = (213 + 1/3) \text{ braccia cubiche.}$$



[14] <u>Volume di un cono</u>

Un cono (che Forestani chiama *piramide tonda*) ha la base circolare con diametro lungo 10 braccia e l'apotema del cono, WA, è lungo 13 braccia.

Occorre ricavare la lunghezza dell'altezza WH.

L'apotema WB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo WHB e WH è un cateto:

$$WH^2 = WB^2 - HB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \quad \text{e}$$

$$WH = \sqrt{144} = 12 \text{ braccia.}$$

Il triangolo rettangolo WHB ha lati con lunghezze che formano la seconda terna primitiva:

5 – 12 – 13.

L'area S della base circolare è:

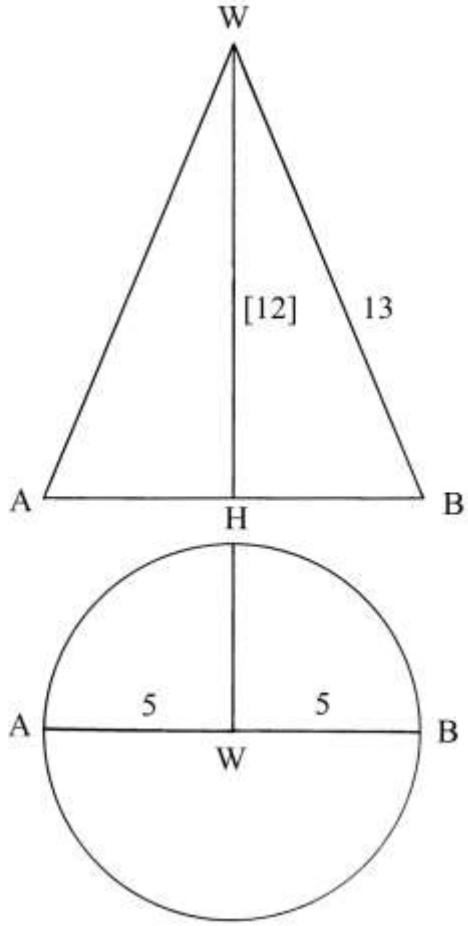
$$S = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7) \text{ braccia quadre.}$$

Il volume V è:

$$V = S * (WH)/3 = (78 + 4/7) * 12/3 = (314 + 2/7) \text{ braccia cubiche.}$$

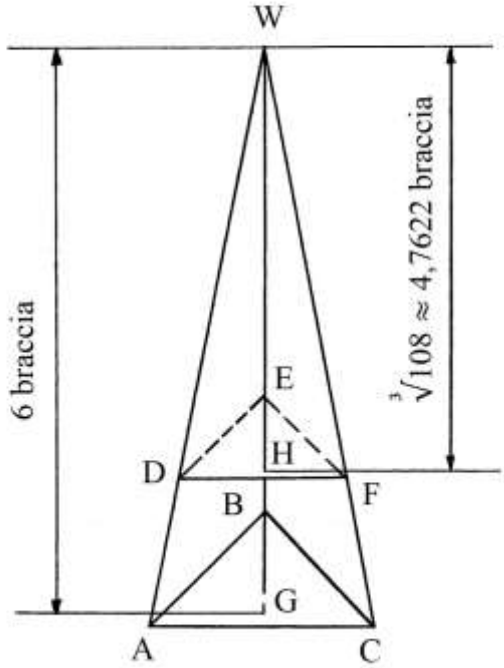
Forestani suggerisce di calcolare il volume con una soluzione equivalente:

V (WH/3) * S = (12/3) * (78 + 4/7) = 4 * (78 + 4/7) = (314 + 2/7) braccia cubiche.



[15] <u>Piramide divisa a metà</u>

Una piramide con una base qualsiasi è alta 6 braccia.



Deve essere divisa in due parti aventi uguali volumi, con un piano parallelo alla base.
Elevare al cubo all'altezza WG:

$WG^3 = 6^3 = 216$.

Dividere per 2: $216/2 = 108$.
Estrarre la radice cubica:

$\sqrt[3]{108} \approx 4{,}7622$ braccia, lunghezza di WH.

Il piano passante per D, E e F divide la piramide di altezza WG in due volidi che hanno uguali volumi:

* la piramide di pase DEF e altezza WH;
* il tronco di piramide ADEFCB.

[16] Area laterale e area totale di un cono

Il problema chiede di calcolare la superficie laterale del cono del precedente problema [14].
La superficie laterale è da data:

$S_{LATERALE} = \pi * r * a$ con *r* raggio della base e *a* apotema.

$S_{LATERALE} = 22/7 * 5 * 13 = (204 + 2/7)$ braccia quadre.
Forestani usa un metodo diverso, ma equivalente: nella formula precedente l'espressione "$\pi * r$" è uguale alla lunghezza della semicirconferenza:
$\pi * r = 22/7 * 5 = (15 + 5/7)$.
La superficie laterale è:
$S_{LATERALE} = (\pi * r) * a = (15 + 5/7) * 13 = (204 + 2/7)$.
L'area della base è:
$S_{BASE} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7)$ braccia quadre.
La superficie totale del cono è:
$S_{TOTALE} = S_{LATERALE} + S_{BASE} = (204 + 2/7) + (78 + 4/7) = (282 + 6/7)$.

[17] Volume di un tronco di piramide

Una piramide retta ha base esdagonale ed è sezionata con un piano parallelo alla base stessa.

I lati dell'esagono di base sono lunghi 6 braccia.

La base superiore del tronco di piramide ha sempre forma esagonale e i suoi lati sono lunghi 3 braccia.

L'altezza dell'intera piramide, WG, è 15 braccia.

Il problema chiede i volumi dei due solidi risultanti: la piramide asportata WIJKLMN e il tronco di piramide rimanente ABCDEFIJKLMN.

AGF è un triangolo equilatero e la sua area è:

$S_{AGF} = GZ * AF/2$.

L'altezza GZ ha lunghezza che è data da:

$GZ = (\sqrt{3})/2 * AF = (\sqrt{3})/2 * 6 = 3 * \sqrt{3}$ braccia.

L'area del triangolo AGF è:

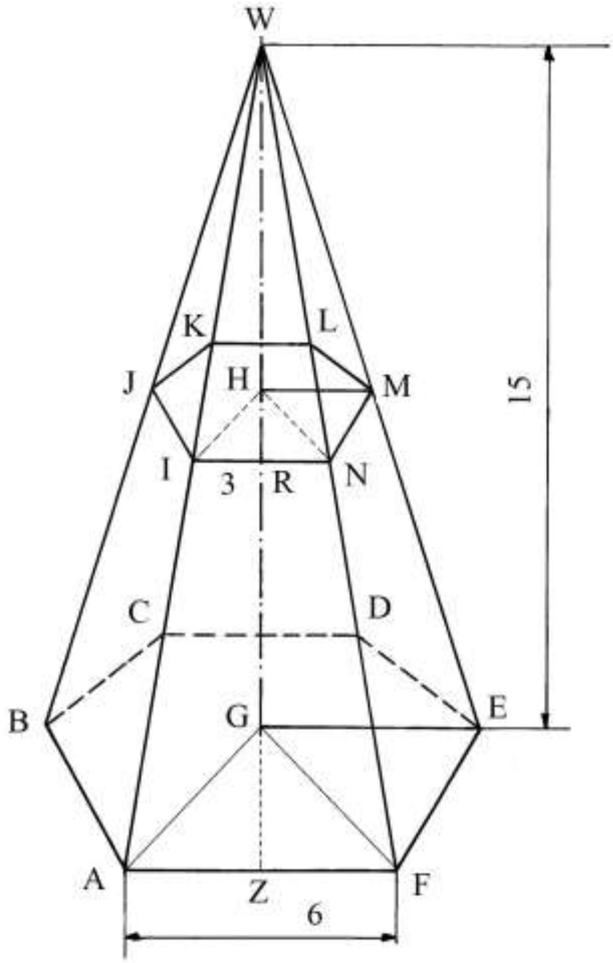
$S_{AGF} = GZ * AF/2 = (3 * \sqrt{3}) * 6/2 = 9 * \sqrt{3}$.

L'area dell'esagono ABCDEF è:

$S_{ABCDEF} = 6 * S_{AGF} = 6 * (9 * \sqrt{3}) = 54 * \sqrt{3}$ braccia quadre.

Il volume della piramide originaria è:

$V = S_{ABCDEF} * WG/3 = (54 * \sqrt{3}) * 15/3 = 467{,}65$, che Forestani arrotonda a 468 braccia cubiche.



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nota: applicando la nota formula approssimata di Erone di Alessandria per il calcolo dell'area dell'esagono si ha:

$S_{ABCDEF} = AF^2 * (13/5) = (6 * 6) * (13/5) = (93 + 3/5)$.

Il coefficiente 13/5 è proposto da Erone per il calcolo dell'area dell'esagono regolare.

Il volume della piramide originaria è:

$V = S_{ABCDEF} * WG/3 = (93 + 3/5) * 15/3 = 468$ braccia cubiche.

Ecco spiegato il risultato arrotondato proposto da Forestani per il volume della piramide originaria.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'altezza WH della piramide tagliata è ricavata da una proporzione:

WH : IN = WG : AF

WH = (IN * WG)/AF = (3 * 15)/6 = 45/6 = (7 + ½) braccia.

L'area dell'esagono IJKLMN è calcolata da Forestani come segue:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato: 3 * 3 = 9;
* moltiplicare per (2 + 3/5): 9 * (2 + 3/5) = (23 + 2/5) braccia quadre, area di IJKLMN.

La costante (2 + 3/5) può essere scritta in modo diverso:

(2 + 3/5) = 13/5, ed è la costante proposta da Erone di Alessandria.

Il volume della piramide tagliata è:

$V_{TAGLIATA} = S_{IJKLMN} * WH/3 = (23 + 2/5) * (7 + ½)/3 = (58 + ½)$ braccia cubiche.

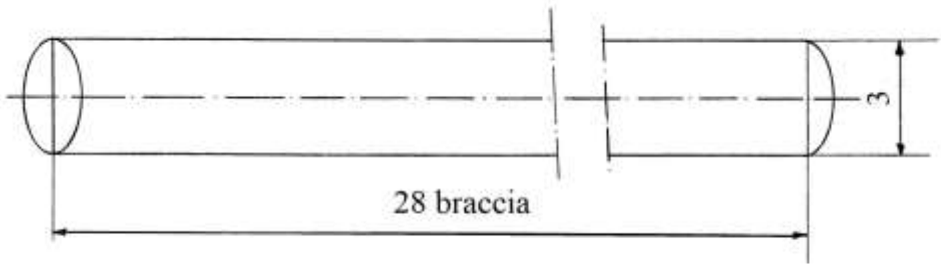
Il volume del tronco di piramide che ha altezza HG è:

$V_{TRONCO} = V – V_{TAGLIATA} = 468 – (58 + ½) = (409 + ½)$ braccia cubiche.

[18] Volume di una colonna di pietra

Una colonna circolare di pietra è alta 28 braccia e ha diametro di 3 braccia.

Sono chiesti il volume e il peso.



La base ha superficie S:

$S = 11/14 * 3^2 = 99/14 = (7 + 1/14)$ braccia quadre.

Il volume V della colonna è:

V = S * altezza = (7 + 1/14) * 28 = 198 braccia cubiche.

Un braccio cubico di pietra pesa 1600 libbre per cui il peso P della colonna è:

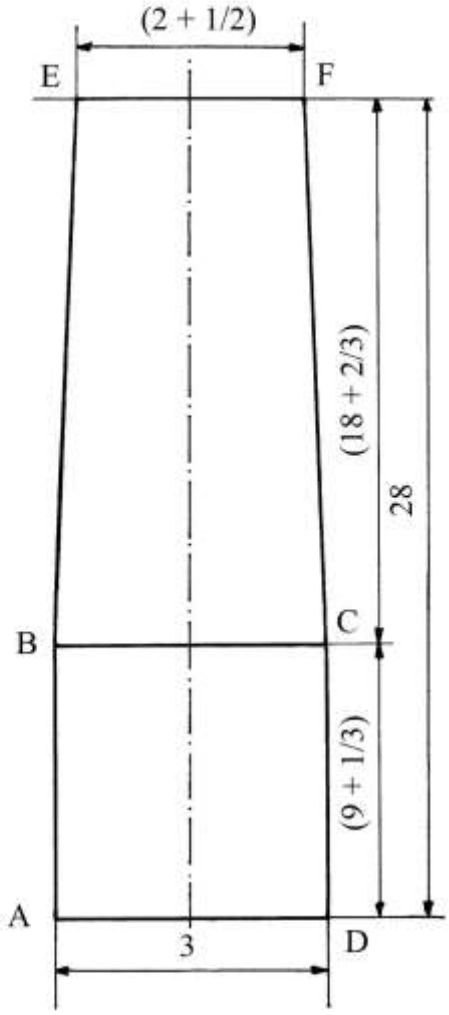
P = V * 1600 = 198 * 1600 = 316800 libbre.

[19] Volume di una colonna rastremata

Una colonna è alta 28 braccia. Essa è divisa in due parti: quella inferiore è alta un terzo del totale e cioè 28/3 (= 9 + 1/3) braccia ed ha forma cilindrica con diametro di 3 braccia.

La parte superiore è a forma di tronco di cono, è alta i 2/3 di 28 braccia (= 18 + 2/3): il cerchio superiore ha diametro lungo 2,5 braccia.

Secondo Farnetani la colonna rispetta le regole dell'architetto romano Vitruvio.
Il problema chiede il volume dell'intera colonna.
Lo schema che segue, *fuori scala* per ragioni di spazio, mostra lo schema della colonna:



L'area della base inferiore è:

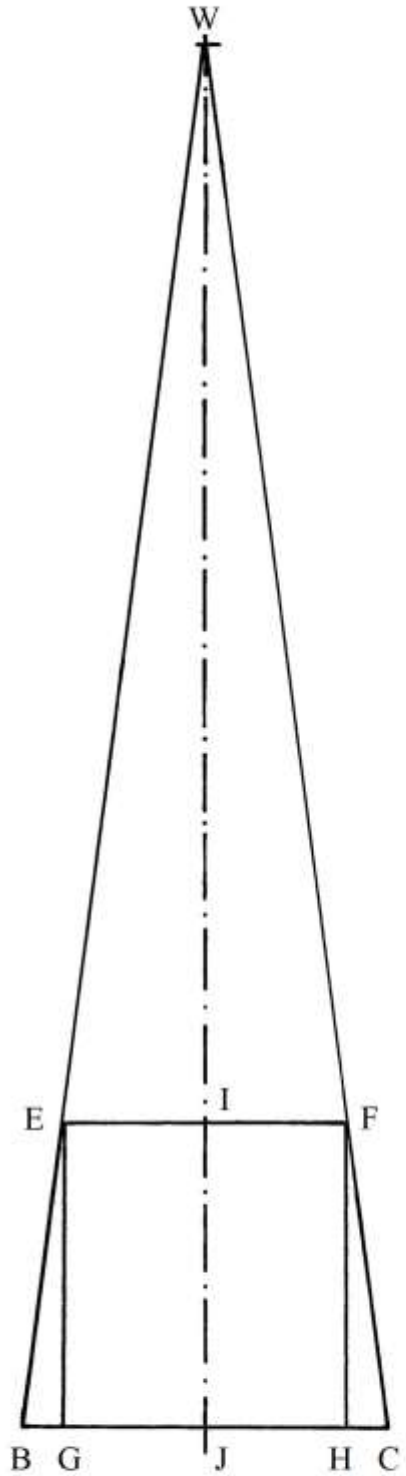
$S_{AD} = 11/14 * 3^2 = 99/14 = (7 + 1/14)$ braccia quadre.

Il volume della parte inferiore è:

$V_{CILINDRO} = S * 28/3 = (7 + 1/14) * (9 + 1/3) = 66$ braccia cubiche.

Forestani ricorre poi a una complessa soluzione per ricavare il volume del tronco di cono BEFC.

Esso deriva da un cono di altezza ignota, sezionato con un piano passante per i punti E e F e perpendicolare all'altezza della colonna. Il cono originario è ricostruito prolungando verso l'alto i due apotemi BE e CF che si incontrano nel vertice W; il tronco di cono BEFC è ottenuto tagliando il cono con il piano passante per E, I e F.   BEG è un triangolo rettangolo che è simile al triangolo rettangolo BWJ e al triangolo rettangolo EWI.



BG è lungo:

$BG = HC = (BC – EF)/2 = (3 – 2,5)/2 = 0,5/2 = 0,25$ braccia.

EG è lungo quanto IJ e cioè (18 + 2/3) braccia.

Vale la proporzione:

$BG : EG = BJ : WJ$ da cui

$WJ = (EG * BJ)/BG = [(18 + 2/3) * 3/2]/0,25 = 112$ braccia.

Il volume dell'intero cono originario è:

$V_{WJ} = S_{BC} * WJ/3 = (11/14 * 3^2) * 112/3 = 99/14 * 112/3 = 264$ braccia cubiche.

L'altezza del cono tagliato, WI, è:

$$WI = WJ - IJ = 112 - (18 + 2/3) = (93 + 1/3) \text{ braccia.}$$

Il volume del cono tagliato è:

$$V_{WI} = S_{EF} * WI/3 = (11/14 * 2{,}5^2) * (93 + 1/3)/3 = (4 + 51/56) * (93 + 1/3)/3 =$$
$$= (152 + 7/9) \text{ braccia cubiche.}$$

Il volume del tronco di cono BEFC è:

$$V_{BEFC} = V_{WJ} - V_{WI} = 264 - (152 + 7/9) = (112 + 2/9) \text{ braccia cubiche.}$$

Il volume dell'intera colonna è:

$$V_{COLONNA} = V_{CILINDRO} + V_{BEFC} = 66 + (111 + 2/9) = (177 + 2/9) \text{ braccia cubiche.}$$

- APPROFONDIMENTO -

La complessa procedura usata da Forestani ha senza dubbio un notevole valore didattico, ma oggi è sostituita da una semplice formula che permette un rapido calcolo del volume di un tronco di cono.

La formula è la seguente:

$$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + r^2 + R * r).$$

* *h* è l'altezza del tronco di cono: IJ = (18 + 2/3);
* *R* è il raggio della base maggiore: R = 3/2 = 1,5;
* *r* è il raggio della base minore: r = 2,5/2 = 1,25.

Il volume del tronco di cono BEFC è:

$$V_{BEFC} = 1/3 * 22/7 * (18 + 2/3) * (1{,}5^2 + 1{,}25^2 + 1{,}5 * 1{,}25) =$$
$$= 22/7 * (18 + 2/3) * 5{,}6875 = (111 + 2/9) \text{ braccia cubiche.}$$

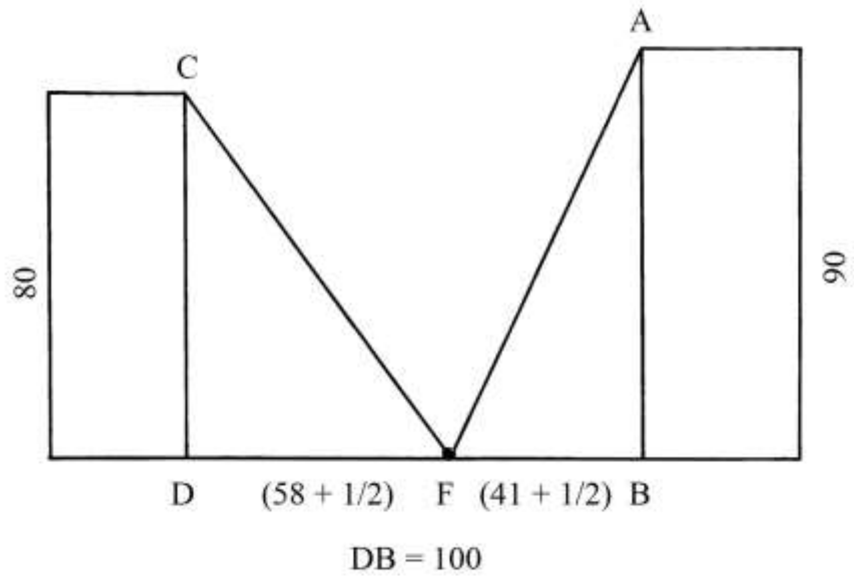
Il risultato è uguale a quello ottenuto da Forestani con la sua procedura.

- -

[20] <u>Due torri e una fonte</u>

In una pianura sono costruite due torri: una è alta 90 braccia e l'altra è 80.

Le due torri sono distanziate di 100 braccia.



Nel terreno fra le due torri vi è una fonte, F.

Due colombi si muovono contemporaneamente dalle cime delle due torri e giungono insieme alla fonte.

Il problema chiede la distanza fra le torri e la fonte.

I percorsi che compiono i due volatili sono uguali perché essi partono contemporaneamrente e giungono nello stesso istante alla fonte.

CDF e ABF sono due triangoli rettangoli le cui ipotenuse CF e AF hanno lunghezze uguali.

La procedura usatada Forestani per risolvere il problema contiene i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stessa la lunfgezza di CD: $80 * 80 = 6400$;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AB: $90 * 90 = 8100$;
* sottrarre 6400 da 8100: $8100 - 6400 = 1700$;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di DB: $100 * 100 = 10000$;
* sommare con 1700: $10000 + 1700 = 11700$;
* dividere per il doppio della lunghezza di DB: $11700/(100 * 2) = (58 + ½)$ braccia, lunghezza di DF;
* sottrarre da 100: $100 - (58 + ½) = (41 + ½)$ braccia, lunghezza di FB.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$$DF = [(AB^2 - CD^2) + DB^2]/(2 * DB).$$

La lunghezza dell'ipotenusa CF è:

$$CF^2 = CD^2 + DF^2 = 80^2 + (58 + ½)^2 = (9822,5) \quad e$$

$$CF = \sqrt{(9822,5)} \text{ braccia} = AF.$$

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione può essere ottenuta anche con l'aiuto dell'algebra elementare: la lunghezza di DF è l'incognita "x" e quella di FB è:

$$FB = DB - DF = (100 - x).$$

Il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa CF è:

$$CF^2 = CD^2 + DF^2 = 80 + x^2.$$

Il quadrato dell'ipotenusa AF è:

$$AF^2 = AB^2 + FB^2 = 90^2 + (100 - x)^2.$$

Dato che le due ipotenuse hanno uguali lunghezze, sono uguali anche i loro quadrati:

$$CF^2 = AF^2$$

$$80 + x^2 = 90^2 + (100 - x)^2$$

$$6400 + x^2 = 8100 + 10000 - 200 * x + x^2$$

$$200 * x = 11700$$

$$x = 11700/200 = (58 + ½) \text{ braccia}.$$

- -

[22] Unione di tre sfere di cera

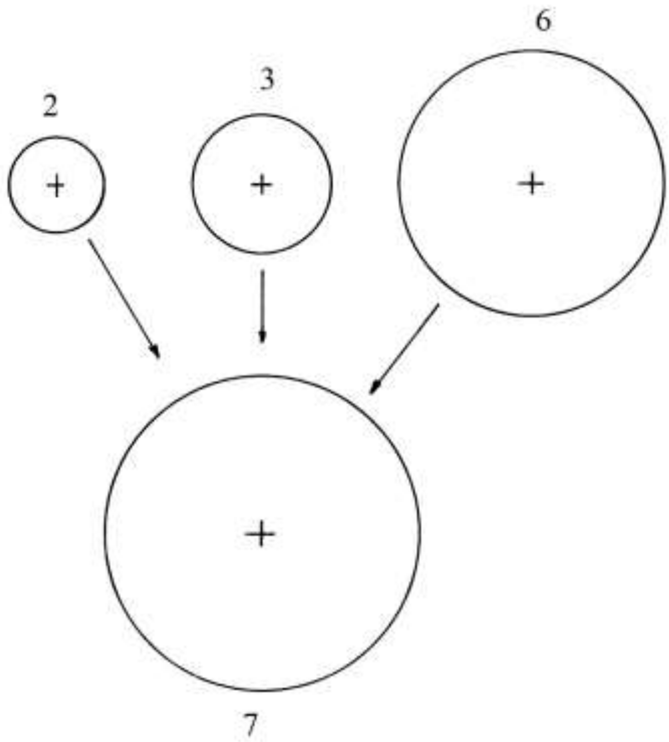
Tre sfere di cera hanno circonferenze lunghe 2, 3 e 6 braccia.

Le tre sfere devono essere unite per formarne una sola.

Il problema chiede la lunghezza della circonferenza della sfera risultante.

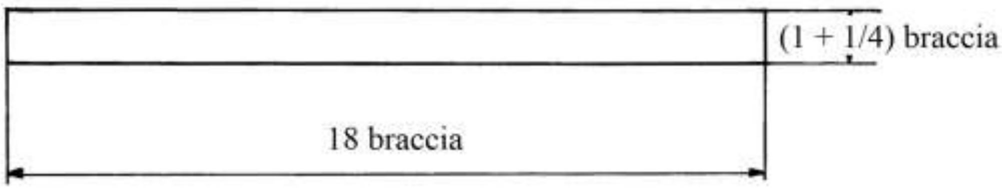
La soluzione è:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza della circonferenza della prima sfera: $2 * 2 = 4$;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza della circonferenza della seconda sfera: $3 * 3 = 9$;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza della circonferenza della terza sfera: $6 * 6 = 36$;
* sommare i tre prodotti: $4 + 9 + 36 = 49$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{49} = 7$ braccia, lunghezza della circonferenza della sfera risultante dall'unione delle prime tre.



[22] <u>Misura di un muro</u>

Un muro è lungo 18 braccia, alto 6 e spesso (1 + ¼) braccia.
Il problema chiede la sua misura espressa in *canne*.
Un canna è lunga 4 braccia e una canna quadra equivale a 16 braccia quadre.



Un muro lungo 4 braccia, alto 4 e spesso 1 braccio ha volume uguale a:

4 * 4 * 1 = 16 braccia quadre corporee [e cioè braccia cubiche].

Il muro di questo problema ha volume V:

$V = 18 * 6 * (1 + ¼) = 135$ braccia cubiche che equivalgono a:

$V = 135/16 = 8$ canne [cubiche] + 7 braccia cubiche.

Il costo del nuro è pagato in *lire* per canna.

[23] Costruzione di un muro

Un muratore ha l'incarico di costruire un muro lungo 20 braccia, alto 16 e spesso 1 braccio.
Il manufatto è pagato 8 lire la canna.
Il muratore realizza il muro con spessore di ¾ di braccio invece che di 1 braccio.
Il muro progettato avrebbe avuto volume V:

$V = 20 * 16 * 1 = 320$ braccia cubiche.

Il muro effettivamente costruito ha volume:

$V_{MURO} = 20 * 16 * ¾ = 240$ braccia cubiche.

Il volume del muro costruito espresso in canne è:

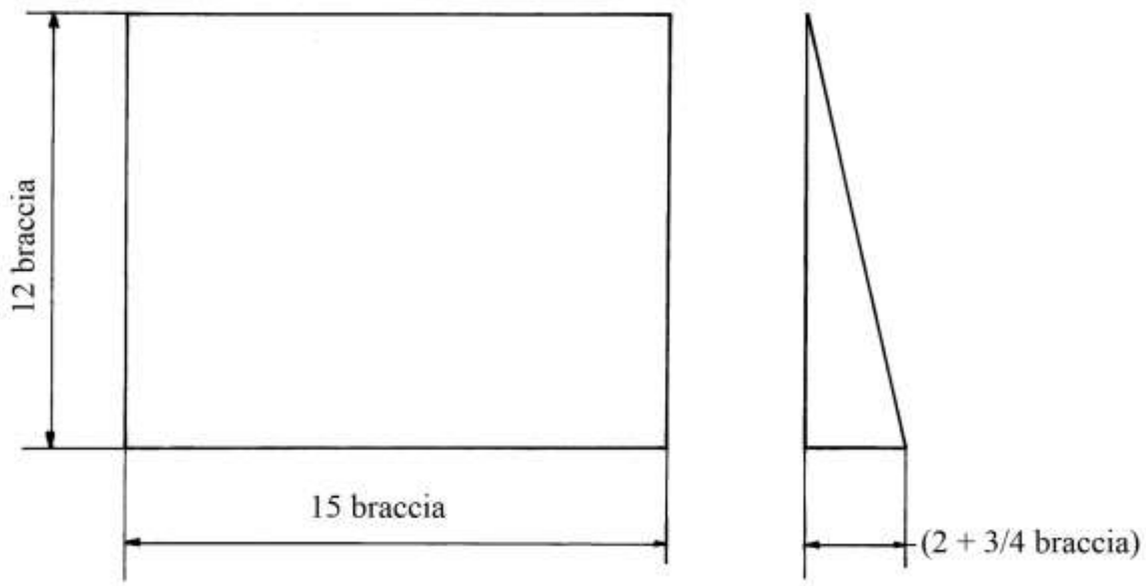
$V_{CANNE} = V_{MURO}/16 = 240/16 = 15$ canne cubiche.

Il costo finale è:

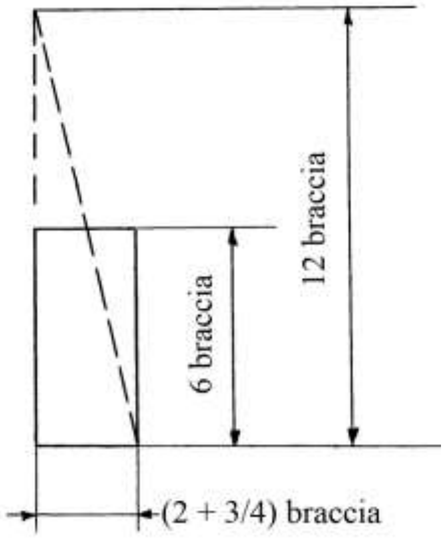
$C = V_{CANNE} * 8 = 15 * 8 = 120$ lire.

[24] Muro a scarpa

Un muro a scarpa è lungo 15 braccia, alto 12 e alla base è spesso (2 + ¾) braccia.



Il profilo del muro a scarpa è un triangolo rettangolo.
Il muro è equivalente a un prisma che la stessa base e altezza uguale a metà e cioè 6 braccia:



Il problema chiede il volume V del muro:

$$V = 15 * (2 + \frac{3}{4}) * 6 = (247 + \frac{1}{2}) \text{ braccia cubiche.}$$

[25] Volume di un muro con scaloni

Un muro è lungo L = 40 braccia ed è alto h = 36.

Lo schema che segue è volutamente *fuori scala* ed è una vista di profilo.

Dalla base fino all'altezza di 12 braccia è spesso (1 + ½) braccia: è A.

Dall'altezza di 12 braccia a quella di 24 lo spessore si riduce a 1 braccio: è il tratto indicato con B.

La parte terminale, dai 24 braccia verso l'alto, ha spessore di ¾ braccia ed è contrassegnata con C.

Il problema chiede il volume del muro in canne cubiche.

Il volume della regione A è:

$$V_A = (1 + \frac{1}{2}) * L * 12 = (1 + \frac{1}{2}) * 40 * 12 = 720 \text{ braccia cubiche.}$$

Il volume della regione B è:

$$V_B = 1 * L * 12 = 1 * 40 * 12 = 480 \text{ braccia cubiche.}$$

Infine, il volume della regione C è:

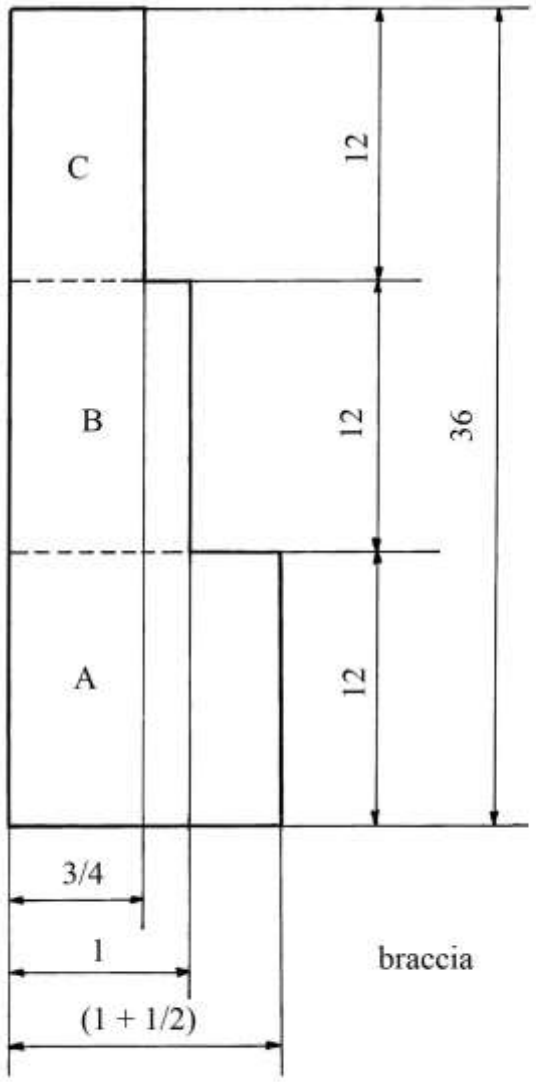
$$V_C = \frac{3}{4} * L * 12 = \frac{3}{4} * 40 * 12 = 360 \text{ braccia cubiche.}$$

Il volume totale del muro è:

$$V = V_A + V_B + V_C = 720 + 480 + 360 = 1560 \text{ braccia cubiche.}$$

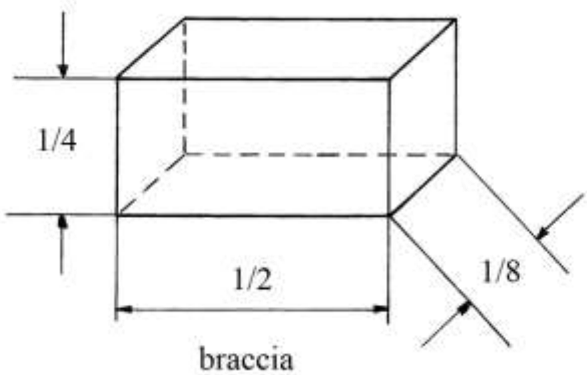
In canne cubiche, il volume è:

$$V = 1560/16 = (97 \text{ canne cubiche} + 8 \text{ braccia cubiche}).$$



[26] Mattoni occorrenti per costruire un muro

Un muro è lungo 16 braccia, alto (9 + ½) e con spessore di ¾ di braccio.
Deve essere costruito con mattoni lunghi 1/2, larghi ¼ e spessi 1/8 di braccio.



È richiesto il numero dei mattoni occorrenti.
Il volume V del muro è:

$V_{MURO} = 16 * (9 + ½) * ¾ = 114$ braccia cubiche.

Il volume di un mattone è:

$V_{MATTONE} = ½ * ¼ * 1/8 = 1/64$ braccia cubiche.

Il numero N dei mattoni occorrenti è:

$N = V_{MURO} / V_{MATTONE} = 114/(1/64) = 114 * 64 = 7296$.

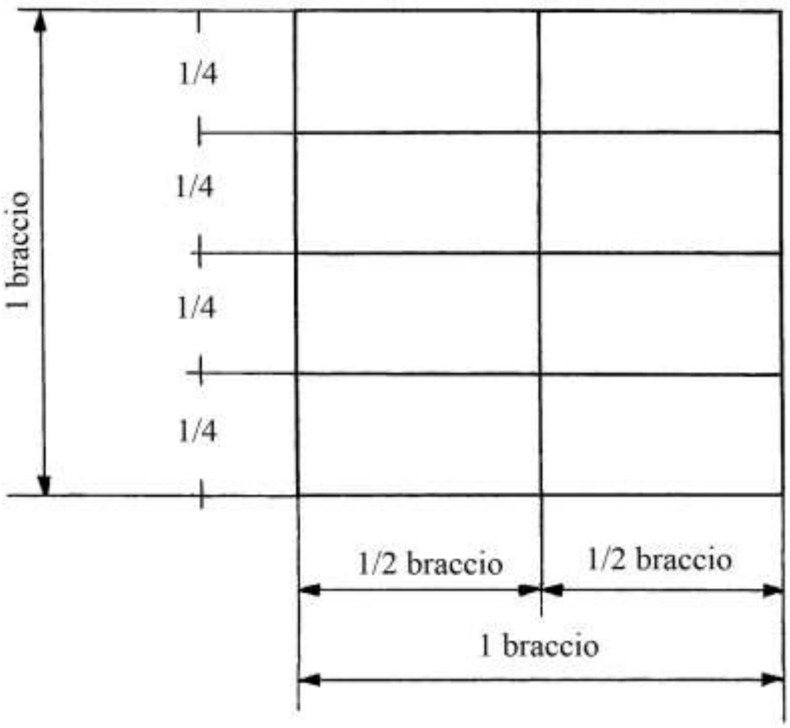
[27] Pavimentazione di una sala

Una sala ha il pavimento lungo 20 braccia e largo 18.

Deve essere ricoperta con mattoni. Forestani afferma che i mattoni, le pianelle e le mezzane hanno uguali uguali dimensioni: con 8 di essi di copre una superficie di 1 braccio quadro.

Come mostrato nella soluzione del precedente problema [26], i mattoni hanno dimensioni hanno dimensioni ¼ * ½ braccia e spessore uguale a 1/8 di braccio. Per la pavimentazione occorre considerare le due dimensioni maggiori: lunghezza e larghezza e cioè ½ e ¼ di braccio.

Con 8 mattoni si copre un quadrato con lati lunghi 1 braccio e della superficie di 1 braccio quadro:



Il pavimento ha area:

$S = 20 * 18 = 360$ braccia quadre.

Il numero N dei mattoni occorrenti è:

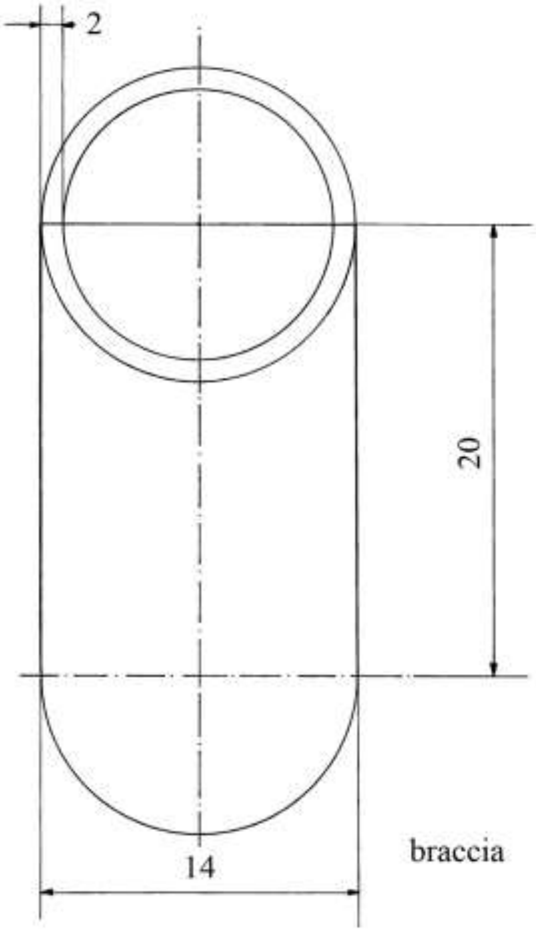
$N = S * 8 = 360 * 8 = 2880$.

[28] Volume della muraglia di un torrione

Un torrione ha forma circolare e ha diametro interno *d* lungo 10 braccia e spessore *s* del muro uguale a 2 braccia.

L'edificio è alto 20 braccia.
Deve essere calcolato il volume della muratura.
Il diametro esterno *D* è lungo:

$D = d + s + s = 10 + 2 + 2 = 14$ braccia.



Il volume lordo dell'edificio è:

$V_{LORDO} = (11/14 * 14^2) * 20 = 154 * 20 = 3080$ braccia cubiche.

L'espressione $(11/14 * 14^2)$ è l'area della sezione trasversale di diametro 14 braccia.
Il volume del vuoto è:

$V_{VUOTO} = (11/14 * 10^2) * 20 = (11/14 * 100) * 20 = (1571 + 3/7)$ braccia cubiche.

Il volume netto della muratura è:

$V_{MURATURA} = V_{LORDO} – V_{VUOTO} = 3080 – (1571 + 3/7) = (1508 + 4/7)$ braccia cubiche.

[29] <u>Volume dell'acqua contenuta in un pozzo</u>

Un pozzo ha diametro interno lungo 6 braccia. Il livello dell'acqua è alto 14 braccia.
È domandato il volume dell'acqua espresso in *barili*: 1 braccio cubico vale 5 barili.
La sezione trasversale del pozzo ha area S:

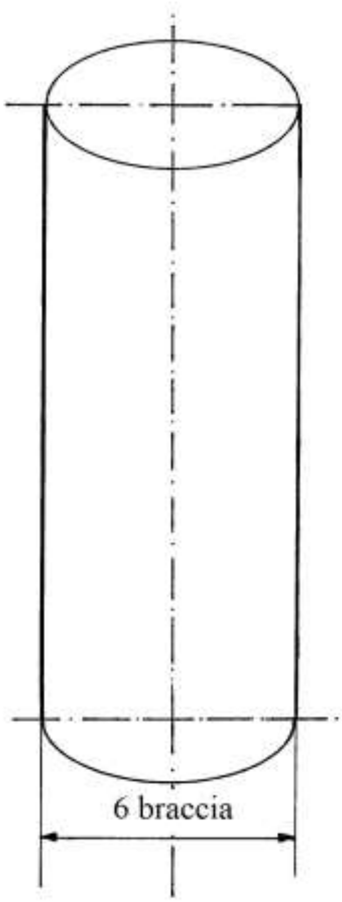
$S = 11/14 * 6^2 = (28 + 2/7)$ braccia quadre.

Il volume V dell'acqua è:

$V = S * 14 = (28 + 2/7) * 14 = 396$ braccia cubiche.

Il volume espresso in barili è:

$V_{\text{BARILI}} = 396 * 5 = 1980$ barili.



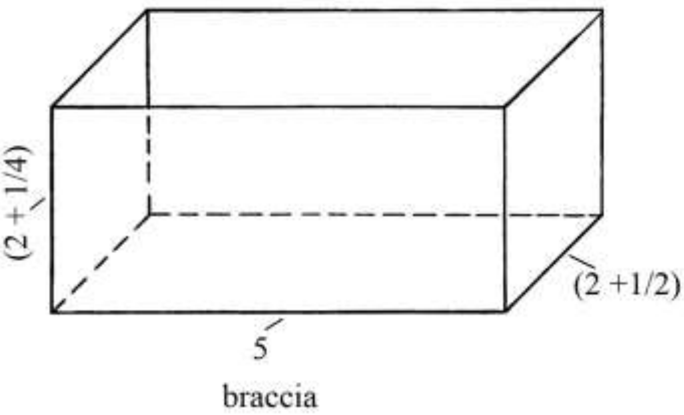
Forestani accenna poi all'uso di Siena: il volume dell'acqua vi era misurato in *staia* con 1 braccio cubico equivalente a 11 staia:

$V_{\text{SIENA}} = 1980 * 11 = 21780$ staia.

[30] Volume del grano contenuto in una cassa

Una cassa ha la forma di un parallelepipedo: è lunga 5 braccia, larta (2 + ½) e alta (2 + ¼) braccia.

Essa contiene grano.



Il problema chiede il volume del grano che vi può essere custodito, espresso in braccia cubiche e in staia.

L’area della base è:

$S_{BASE} = 5 * (2 + ½) = (12 + ½)$ braccia quadre.

Il volume V è:

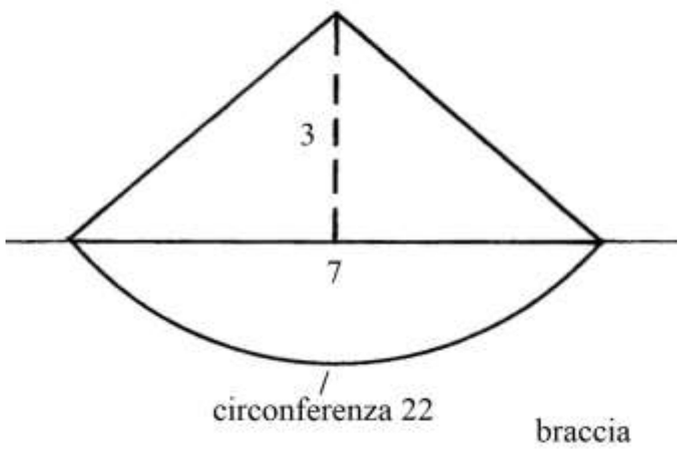
$V = S_{BASE} * (2 + ¼) = (12 + ½) * (2 + ¼) = (28 + 1/8)$ braccia cubiche.

Un braccio cubico equivale a 9 staia per cui il volume è:

$V_{STAIA} = V * 9 = (28 + 1/8) * 9 = (253 + 1/8)$ staia.

[31] Volume di un monte di grano

Al centro di una sala è stato realizzato un monte di grano a forma di cono. Il diametro della base curcolare è 7 braccia e il cono è alto 3 braccia.



L’area S della base è:

$S = 11/14 * 7^2 = (38 + ½)$ braccia quadre.

Il volume V del cono è:

$V = S * altezza/3 = (38 + ½) * 3/3 = (38 + ½)$ braccia cubiche.

Dato che 1 braccia cubico equivale a 9 staia, il volume del grano è:

$V_{STAIA} = V * 9 = (38 + ½) * 9 = (346 + ½)$ staia.

[32] Volume di un monte di grano

Il problema è una variante della soluzione del precedente.

È data la lunghezza della circonferenza *c* della base, che è 22 braccia.

L'area S è calcolata da Forestani come segue:

$$S = c /(12 + 4/7) = 22^2 /(12 + 4/7) = 484/(12 + 4/7) = (38 + ½) \text{ braccia quadre.}$$

Il volume del grano in staia è:

$$V_{\text{STAIA}} = (S * \text{altezza}/3) * 9 = \{[(38 + ½) * 3]/3\} * 9 = (346 + ½) \text{ staia.}$$

I risultati dell'area della base e del volume del grano in staia sono uguali a quelli calcolati nella soluzione del problema [30].

- APPROFONDIMENTO -

Nella formula per il calcolo dell'area *S* della base del cono a partire dalla conoscenza della lunghezza *c* della circonferenza, Forestani ha usato al denominatore la costante (12 + 4/7).

Essa può essere trasformata:

$$(12 + 4/7) = (84 + 4)/7 = 88/7.$$

Vediamone l'origine.

L'area di un cerchio è data da:

$$S = \pi * r^2 = (\pi * r) * r = c/2 * r.$$

La lunghezza della circonferenza è:

$c = 2 * \pi * r$, da cui è possibile ricavare la lunghezza del raggio *r*:

$$r = c/(2 * \pi).$$

Con π approssimato a "22/7" si ha:

$$r = c/(2 * 22/7) = 7 * c/44.$$

Sostituendo nella formula dell'area S si ha:

$$S = c/2 * r = (c/2) * (7 * c/44) = c^2 * 7/88.$$

Ma il reciproco 88/7 può essere scritto in altro modo:

$$88/7 = (12 + 4/7).$$

Ecco spiegata l'origine della costante (12 + 4/7) usata da Forestani.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

I problemi del calcolo del volume dei monti di grano non sono originali di Forestani. L'esempio del monte dei problemi [31] e [32] è ripreso con gli stessi dati dal trattato geometrico "*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*" di Pier Maria Calandri (1457 – 1508).

Fra gli altri Autori che hanno proposto problemi sui volumi dei monti di grano sono l'Anonimo Fiorentino, autore del "*Trattato di geometria pratica*" conservato nel Codice L.IV.18 della Biblioteca Comunale di Siena, Filippo Calandri (1468 – 1518), Pietro Cataneo (circa 1510 – 1573) e Giovanni Sfortunati (1485 - ?).

- -

[33] Volume di un monte di grano appoggiato a un muro

Un monte di grano è adagiato a un muro ed ha la forma di un semicono: il diametro della base che ha la forma di un semicerchio è 7 braccia e il solido è alto 3 braccia.

Il problema è presente, con dimensioni differenti, nel trattato "Le pratiche delle due prime matematiche" di Pietro Cataneo.

Forestani si limita a ad accennare la soluzione del problema ma non fornisce alcun dato.

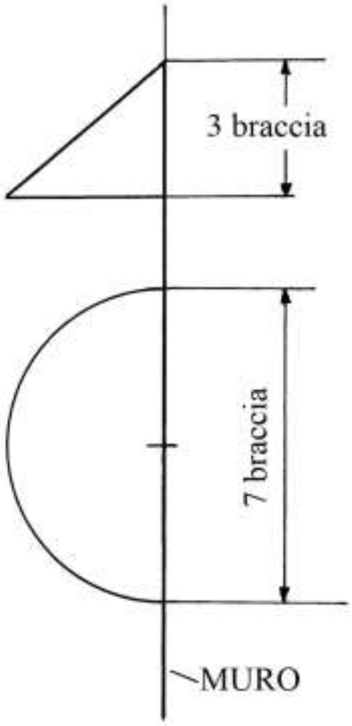
L'area S della base è:

$S = \pi * r^2/2 = 22/7 * (7/2)^2 = 22/7 * (49/4)/2 = 19{,}25$ braccia quadre.

Il volume V è:

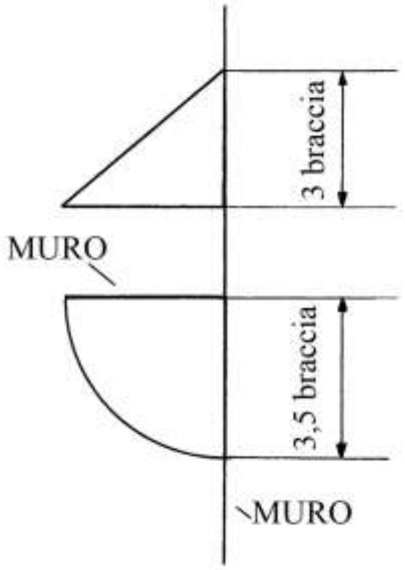
$V = S * altezza/3 = (19{,}25 * 3)/3 = 19{,}25$ braccia cubiche.

Lo schema che segue è una doppia proiezione del monte:



[34] Monte di grano in un angolo

Un monte di grano è stato creato in un canto formato da due muri ad angolo retto.



La base ha la forma di *un quarto di cerchio* con raggio (3 + ½) braccia e il monte è alto 3 braccia.

È chiesto il volume del grano in staia.

Il solido formato da questo monte di grano è la metà esatta del monte di grano del precedente problema.

La base ha area S che è:

$S = \pi * r^2/4 = 22/7 * (3 + ½)^2/4 = 22/7 * (49/4)/4 = 9,625$ braccia quadre.

Il volume V del monte di grano è:

$V = S * altezza/3 = (9,625 * 3)/3 = 9,625$ braccia cubiche.

In staia è:

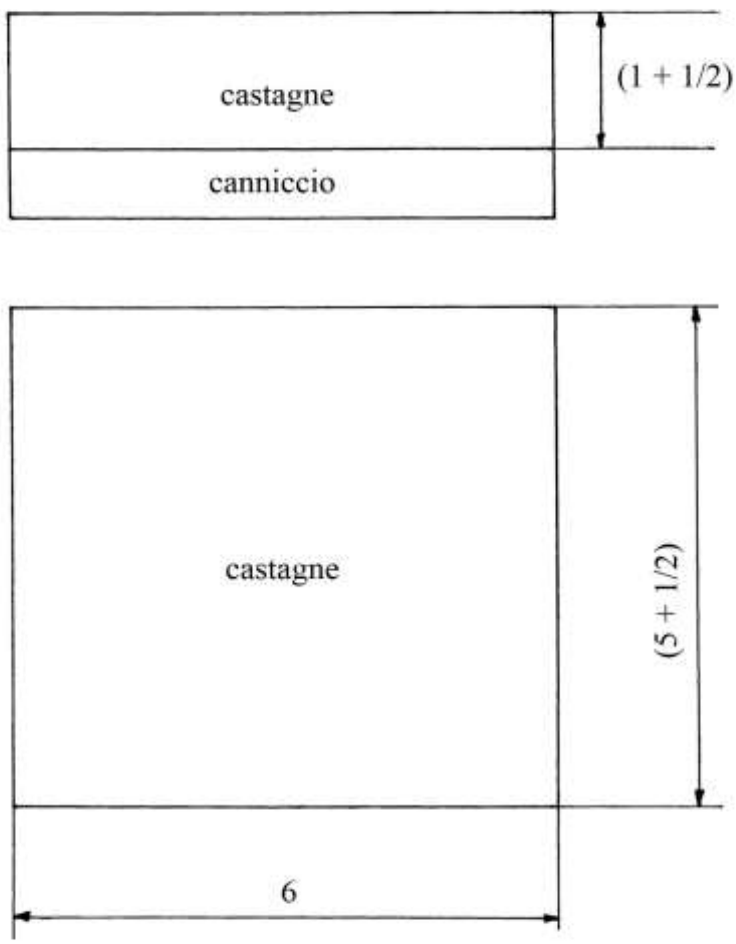
$V_{STAIA} = V * 9 = 9,625 * 9 = 86,625 = (86 + 5/8)$ staia.

Nota: con dati leggermente diversi, anche questo problema è ripreso dal citato trattato di Pietro Cataneo.

[35] Canniccio per seccare le castagne

Un canniccio per seccare le castagne è lungo 6 braccia ed è largo (5 + ½). Lo strato delle castagne è spesso (1 + ½) braccia.

È chiesto il volume delle castagne espresso in *staia*.



lunghezze in *braccia*

Il volume V delle castagne è:

$V = 6 * (5 + ½) * (1 + ½) = (49 + ½)$ braccia cubiche.

In staia, il volume è:

$V_{STAIA} = (49 + ½) * 9 = (445 + ½)$ staia.

Forestani aggiunge alcune considerazioni: secondo i coltivatori, ogni 3 staia di castagne fresche è ottenuto 1 staio di castagne bianche, pulite e seccate, quindi il volume si ridurrebbe a:

$V_{SECCHE} = V_{STAIA}/3 = (445 + ½)/3 = (148 + ½)$ staia.

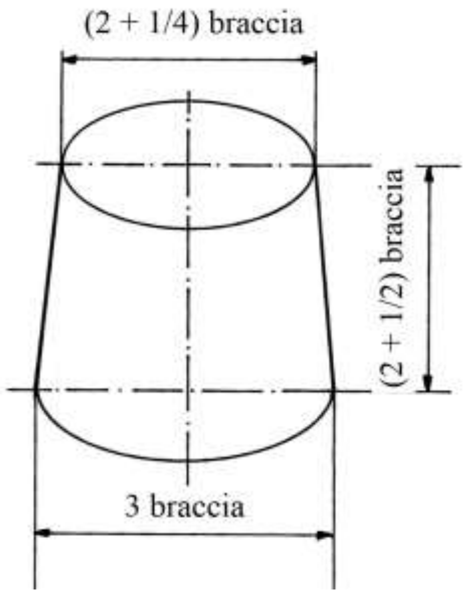
Dato che le castagne sono deposte sul canniccio gradualmente nel tempo dopo che sono raccolte nei boschi, ogni (2 + ½) staia di frutti freschi si ricava 1 staio di frutta seccata per cui la resa effettiva è più alta di (148 + ½) staia:

$V_{SECCHE} = V_{STAIA}/(2 + ½) = (445 + ½)/(2 + ½) = (178 + 1/5)$ staia di castagne seccate.

[36] Volume di un tino

Un tino ha la forma di un tronco di cono. Alla base ha diametro 3 braccia e alla bocca è (2 + ¼) ed è alto (2 + ½) braccia.

Il problema chiede il suo volume.



Dato che contiene uve pigiate, deve essere poi calcolato il volume del vino che può essere ottenuto, espresso in barili: il vino ha resa uguale a 2/3 del volume delle uve.

Il tronco di cono deriva da un cono sezionato all'altezza di (2 + ½) braccia rispetto alla base.

L'altezza WH del cono originario è ricavata con una proporzione.

I triangoli ABE e AWH sono rettangoli e simili:

AE : BE = AH : WH.

AE è lungo:

AE = GD = (AD – BC)/2 = [3 – (2 + ¼)]/2 = 3/8 braccia.

La proporzione è:

3/8 : (2 + ½) = 3/2 : WH   da cui:

WH = [(2 + ½) * 3/2]/(3/8) = 10 braccia.

Il cono di altezza WH ha volume che è:

$V_{WH} = S_{AD} * WH/3 = ((11/14 * 3^2) * 10/3 = 11/14 * 9 * 10/3 = (23 + 4/7)$ braccia cubiche.

Il cono asportato, di altezza WF, ha volume:

$V_{WF} = S_{BC} * WF/3$.

L'altezza WF è:

WF = WH – FH = 10 – (2 + ½) = (7 + ½).

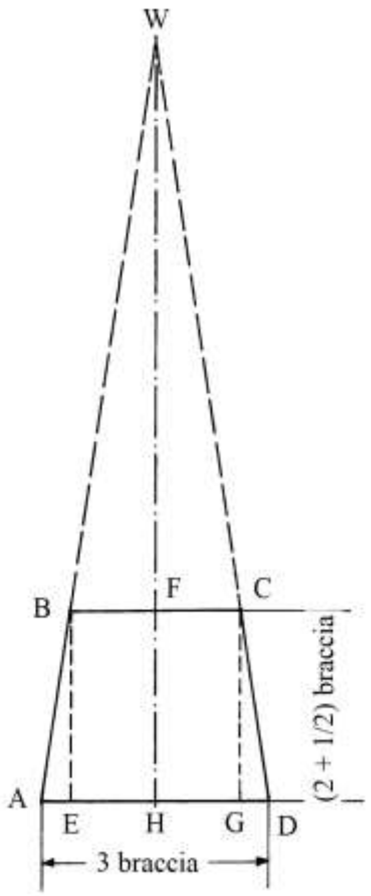
$V_{WF} = [11/14 * (2 + ¼)^2] * (7 + ½)/3 = (9 + 423/448)$ braccia cubiche.

Il volume del tronco di cono è:

$V_{ABCD} = V_{WH} – V_{WF} = (23 + 4/7) – (9 + 423/448) = (13 + 261/448)$ braccia cubiche.

Dato che 1 braccio cubico equivale a 5 barili, il volume del tronco di cono espresso in barili è:

$V_{ABCD} = (13 + 261/448) * 5 = (67 + 409/448)$ barili.



Come già ricordato sopra, la resa in vino è stimata da Forestani in 2/3 del volume delle uve e il vino ricavato è:

$V_{VINO} = 2/3 * V_{ABCD} = 2/3 * (67 + 409/448) = (45 + 185/672)$ barili di vino.

Il restante 1/3 sono le vinacce.

Nota: alcuni dati calcolati da Forestani non sembrano esatti: si tratta di differenze poco significative, come nel caso del volume in barili del tronco di cono V_{ABCD} e del volume del vino V_{VINO}.

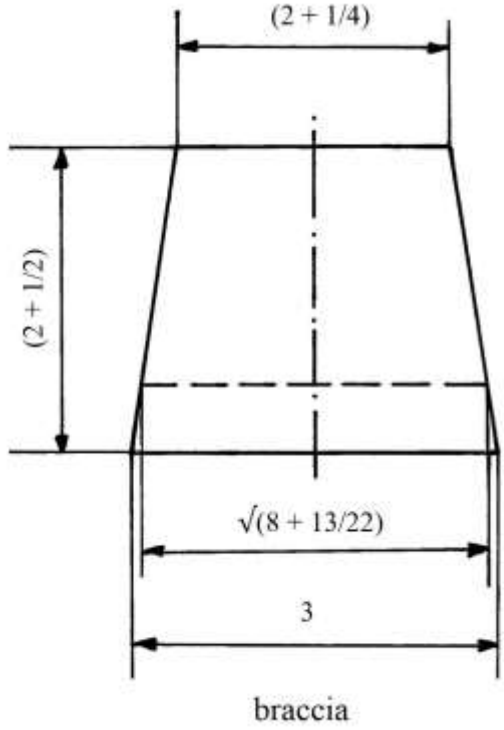
[37] Volume di un tino

Forestani propone un altro metodo per calcolare il volume del tino considerato nel precedente problema.

Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del fondo per sé stessa: $3 * 3 = 9$;
* moltiplicare il diametro della bocca per sé stessa: $(2 + ¼) * (2 + ¼) = (5 + 1/16)$;
* moltiplicare i due precedenti prodotti: $9 * (5 + 1/16) = (45 + 9/16)$;

* estrarre la radice quadrata: √(45 + 9/16) = (6 + ¾), superficie della sezione intermedia del tronco di cono;
* moltiplicare per 14/11: (6 + ¾) * 14/11 = (8 + 13/22);
* estrarre la radice quadrata: √(8 + 13/22) braccia, diametro della sezione intermedia [che Forestani chiama *mezzana*];



* sommare (6 + ¾) con (5 + 1/16) e con 9: (6 + ¾) + (5 + 1/16) +) =
  = (20 + 13/16);
* moltiplicare per l’altezza del tino e dividere per 3:
  (20 + 13/16) * (2 + ½)/3 = (17 + 11/32);
* moltiplicare per 11/14: (17 + 11/32) * 11/14 = (13 + 281/448) braccia cubiche, volume del tronco di cono;
* moltiplicare per 5: (13 + 281/448) * 5 = (68 + 61/448) barili, volume del tino.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Forestani propone poi un altro metodo semplificato e approssimativo ma accettabile per calcolare il volume del tino. Ecco i passi del metodo:
* sommare i diametri del fondo e della bocca: 3 + (2 + ¼) = (5 + ¼);
* dividere per 2: (5 + ¼)/2 = (2 + 5/8);
* moltiplicare per sé stesso: (2 + 5/8) * (2 + 5/8) = (6 + 57/64);
* moltplicare per 11/14: (6 + 57/64) * 11/14 = (5 + 53/128);
* moltiplicare per l’altezza del tino: (5 + 53/128) * (2 + ½) = (13 + 137/256) braccia cubiche, volume del tino;
* moltiplicare per 5: (13 + 137/256) * 5 = (67 + 173/256) barili, volume del tino.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Forestani conclude la descrizione del problema della misura dei tini e delle botti richiamando un uso praticato in diverse località: il braccio lineare era diviso in un certo numero di parti uguali: i *punti*.

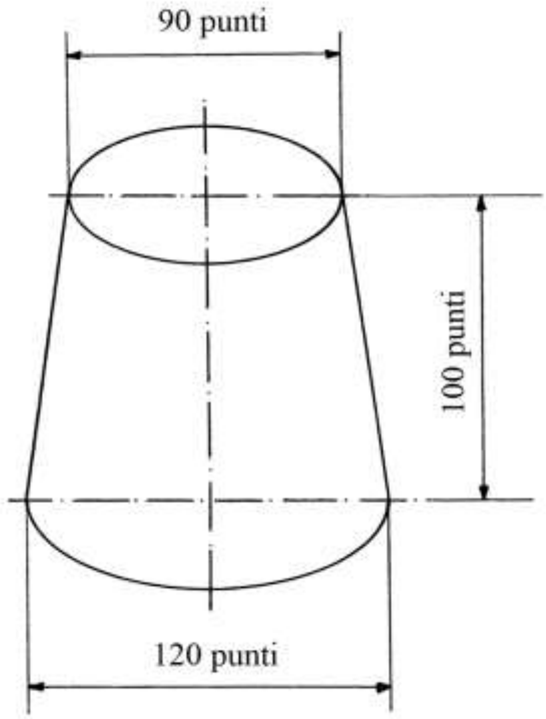
Un'asta graduata in punti serviva a misurare il livello del liquido nei recipienti.

In alcuni luoghi il braccio era diviso in 43, 45, 48 o 60 *punti*: Giovanni Sfortunati nel suo trattato "*Nuovo Lume*" afferma che il braccio senese era ripartito dai misuratori senesi in 24, 45, 48 o 60 parti uguali chiamate *ponti*.

Nel caso di Pescia, secondo Forestani il braccio era diviso in 43 punti. Lo strumento usato per misurare il livello del vino nei tini e nelle botti era chiamato, sempre a Pescia, *scandaglio*: era ovvio che su questo strumento erano incise delle tacche lunghe quanto i punti pari a 1/43 di braccio.

[38] Tino misurato in punti

Un tino ha la forma di un tronco di cono: il fondo ha diametro lungo 120 punti, la bocca 90 ed è alto 100.



Il problema chiede il volume del tino espresso in *barili*.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei diametri del fondo e della bocca: 120 + 90 = 210;
* dividere per 2: 210/2 = 105;
* moltiplicare per sé stesso: 105 * 105 = 11025;
* moltiplicare per l'altezza: 11025 * 100 = 1102500.

A questo punto Forestani introduce le equivalenze fra i punti e le unità di misura, probabilmente valide per il contado di Pescia; l'Autore non fa cenno a un dato di fatto: moltiplicando punti per punti si dovrebbero ottenere *punti quadri* (11025 sono punti quadri) e moltiplicando *punti quadri* per *punti lineari* l'unità di misura risultante dovrebbe essere *punti cubici* (1102500 sono punti cubici). Solo in questo modo si spiegano le equivalenze fra le unità usate a Pescia:

* 1000 punti [cubici] equivalgono a 1 fiasco;
* 1 fiasco = 2 boccali;
* 20 fiaschi = 1 barile.

I 1102500 punti [cubici] che rappresentano il volume del tino valgono:

1102500/1000 = (1102 + ½) fiaschi = (1102 + ½)/20 barili =
= 55 barili + (2 + ½) fiaschi.

- APPROFONDIMENTO -

L'equivalenza

1000 punti [cubici] = 1 fiasco

usata da Forestani non sembra esatta, ma soltanto un'approssimazione.
Un *punto* è lungo 1/43 di braccio [lineare].

1 braccio è lungo 43 punti e *un braccio cubico* vale:

1 braccio cubico = 43^3 punti [cubici] = 79507 punti [cubici].

1 braccio cubico vale:

1 braccio cubico = 5 barili = 100 fiaschi, dato che 1 barile è equivalente a 20 fiaschi.

Se un braccio cubico vale 79507 punti [cubici] che corrispondono a *100 fiaschi*, un fiasco equivale a:

1 fiasco = 1/100 * braccio cubico = 79507/100 = 795,07 punti [cubici] e non 1000 punti [cubici] come afferma Forestani.

Se 1 braccio cubico equivale a 100 fiaschi e ciascun fiasco ha volume uguale a 1000 punti [cubici] possiamo ricavare il valore del *punto p*:

1 braccio cubico = 100 fiaschi = 100 * 1000 = 100000 p^3.

Il valore di p è:

$$\sqrt[3]{100000} \approx 46{,}4158$$

Lo *scandaglio* usato per misurare il livello del vino non doveva avere tacche incise a distanza di 1/43 di braccio ma almeno di 1/46.

- -

[39] <u>Vasca piena di uve pigiate</u>

Una vasca, e cioè un canale murato, è pieno di uve pigiate.
Essa è lunga 4 braccia, larga (2 + ½) e alta 2.
Il problema chiede la quantità di vino espressa in barili, che può essere ricavata dalle uve.
La resa del vino è uguale ai 17/24 del volume delle uve: i rimanenti 7/24 sono le vinacce.
Il volume V della vsca è:

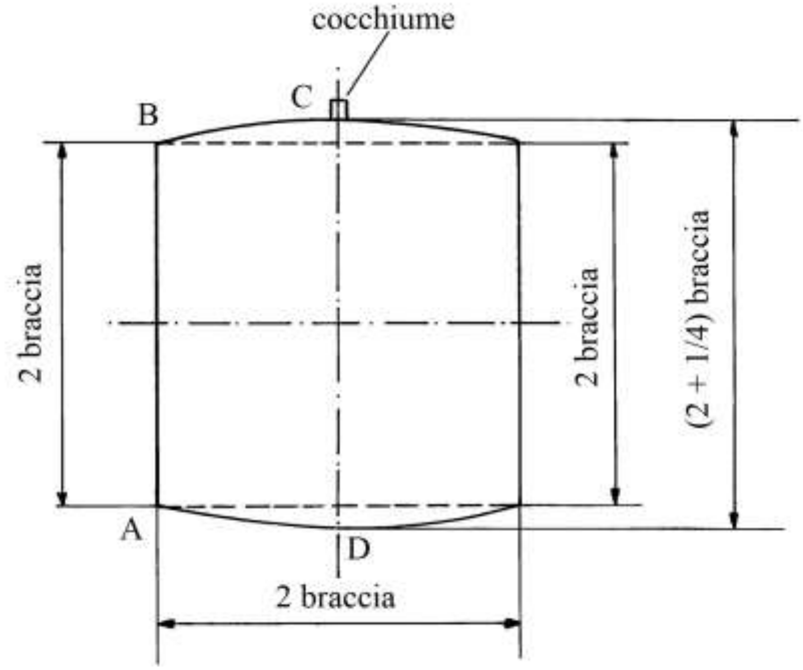
V = 4 * (2 + ½) * 2 = 20 braccia cubiche.

Il vino ha volume:

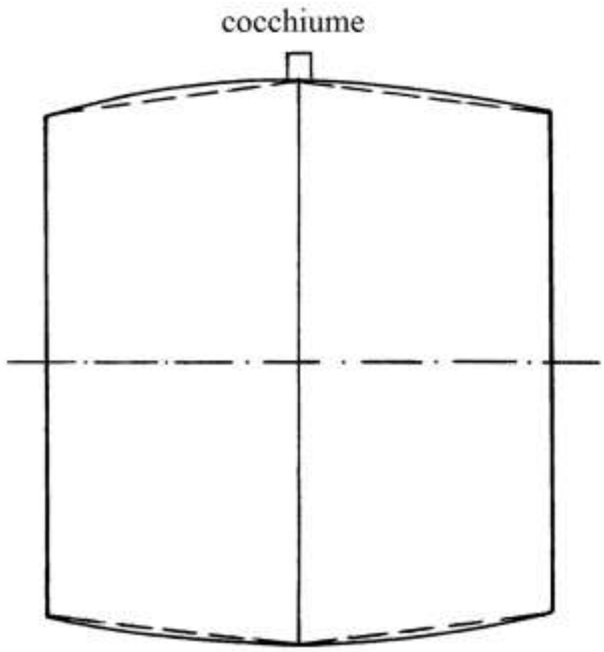
V_{VINO} = 17/24 * V = 17/24 * 20 = (14 + 1/6) braccia cubiche =
= (14 + 1/6) * 5 = (70 + 5/6) barili.

[40] <u>Volume del vino contenuto in una botte</u>

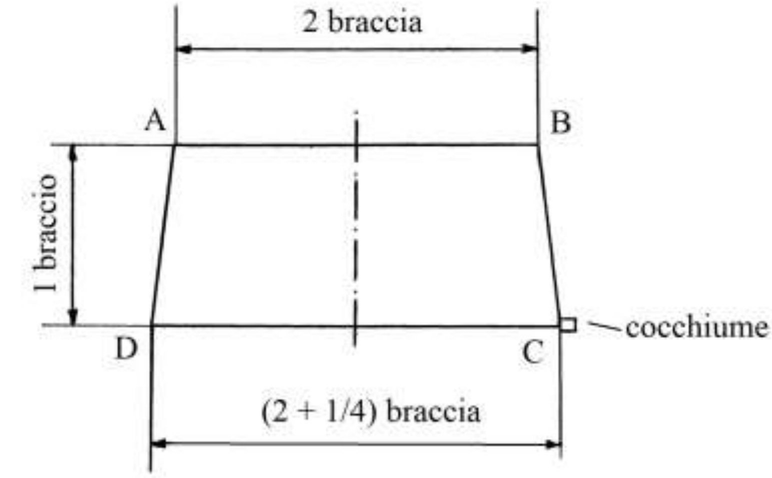
Una botte ha i due fondi di uguali dimensioni, con diametro di 2 braccia, al cocchiume il diametro è (2 + ¼) e la distanza fra i due fondi è 2 braccia.



Forestani assimila la la forma della botte a quella di due tronchi di cono di uguali dimensioni, uniti lungo le le loro basi maggiori: tutto ciò produce una leggera approssimazione per difetto dei calcoli relativi al volume della botte:

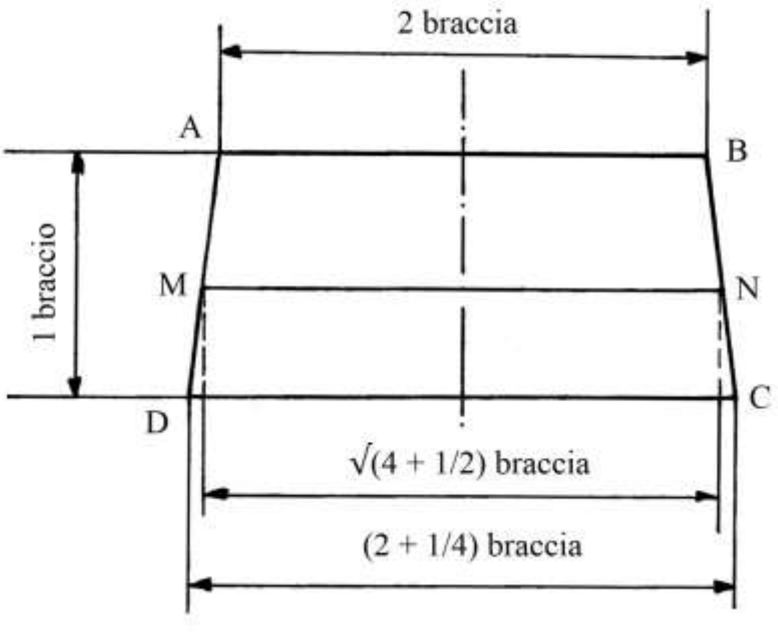


Consideriamo una delle due metà della botte, ora assimilita a un tronco di cono:



Occorre calcola la superficie mediana del tronco di cono, posizionata fra le due basi:

* moltiplicare per sé stesso il diametro al cocchiume (DC): (2 + ¼) * (2 + ¼) = (5 + 1/16);
* moltiplicare per sé stesso il diametro della testa (AB): 2 * 2 = 4;
* moltiplicare i due quadrati: (5 + 1/16) * 4 = (20 + ¼);
* estrarre la radice quadrata: √(20 + ¼) = (4 + ½), superficie della sezione mediana fra il cocchiume e il fondo [non si tratta di una superficie ma del *quadrato* della lunghezza del diametro MN della sezione mediana dello schema che segue:



];

* Forestani fa notare che moltiplicando il diametro di un fondo per quello cocchiume si ottiene lo stesso risultato:
  [B * DC = 2 * (2 + ¼) = (4 + ½) = MN^2];
* sommare i *tre quadrati* dei diametri DC, AB e MN:(5 + 1/16) + 4 + (4 + ½) =
  = (13 + 9/16);
* moltiplicare per *un terzo* dell'altezza del tronco di cono: (13 + 9/16) * 1/3 = (4 + 25/48);
* moltiplicare per 11/14: (4 + 25/48) * 11/14 = (3 + 53/96) braccia cubiche, volume di una metà della botte (il tronco di cono ABCD);
* moltiplicare per 2: (3 + 53/96) * 2 = (7 + 5/48) braccia cubiche, volume dell'intera botte;
* moltiplicare per 5: (7 + 5/48) * 5 = (35 + 25/48) barili = 35 barili + (10 + 5/12) fiaschi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda soluzione, secondo Forestani più comunemente usata, prevede i seguenti passi:

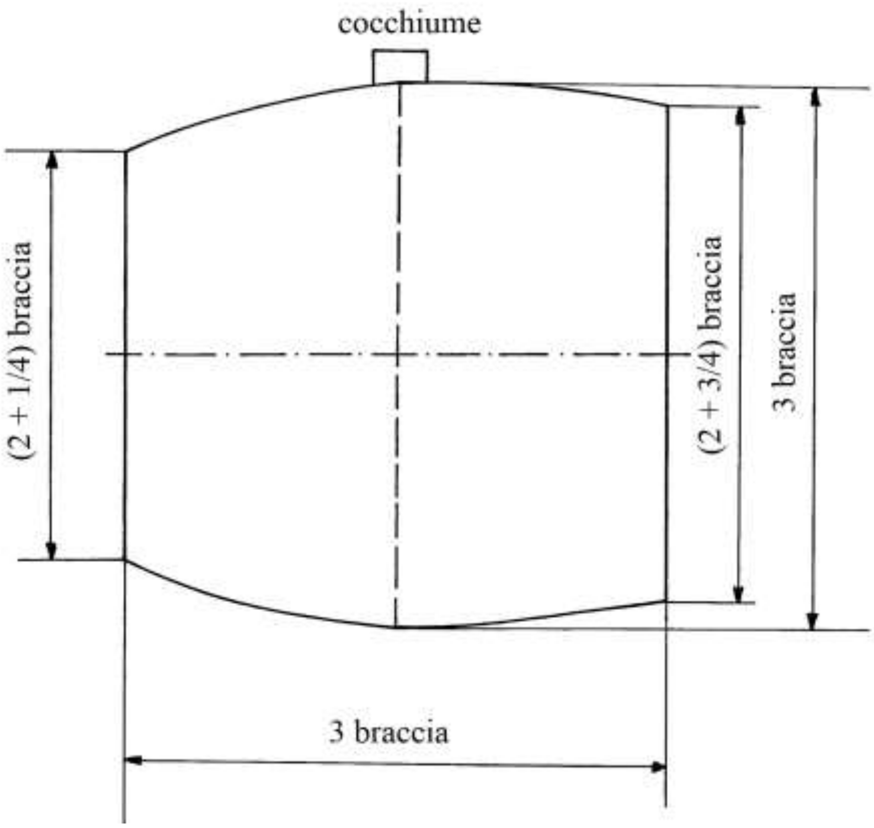
* sommare il diametro di un fondo con quello al cocchime:
  AB + DC = 2 + (2 + ¼) = (4 + ¼);
* dividere per 2: (4 + ¼)/2 = (2 + 1/8);
* moltiplicare per sé stesso: (2 + 1/8) * (2 + 1/8) = (4 + 33/64);
* moltiplicare per 11/14: (4 + 33/64) * 11/14 =(3 + 491/896);
* moltiplicare per la distanza fra i due fondi: (3 + 491/896) * 2 = (7 + 43/448) braccia cubiche, volume della botte;
* moltiplicare per 5: (7 + 43/448) * 5 = 35 barili + (9 + ½) fiaschi, volume della botte.

[41] <u>Volume in barili di una botte</u>

Una botte ha il diametro del fondo posteriore che è (2 + ¾) braccia, quello del fondo anteriore è (2 + ¼) e quello al cocchiume è 3 braccia.

La lunghezza della botte è 3 braccia.

Forestani cita e critica la soluzione proposta dal matematico fiorentino Francesco Galigai (1498 – 1573) nel *libro 9 proposizione 50* della sua "*Pratica d'arithmetica*". Le dimensioni della botte considerata da Galigai sono uguali a quelle della botte di Forestani.



Forestani cita poi un altro Autore fiorentino, Calandri, che indica prima come Filippo e poi come Francesco: si tratta di Filippo Maria Calandri (1468 – 1518), autore del *Trattato di aritmetica*" scritto per il figlio di Lorenzo de' Medici, Giuliano (1479 – 1516). Anche la soluzione di Calandri è criticata da Forestani.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione proposta da Galigai prevede i seguenti passi:

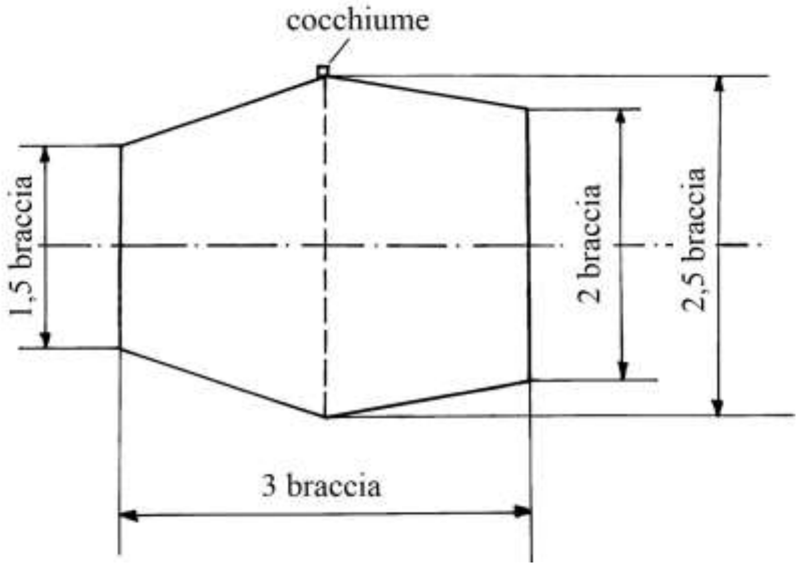
* sommare i tre diametri (dei due fondi e al cocchiume): (2 + ¾) + (2 + ¼) + 3 = 8;
* dividere per 3: 8/3 = (2 + 2/3);
* moltiplicare per sé stesso: (2 + 2/3) * (2 + 2/3) = (7 + 1/9);
* moltiplicare per 11/14: (7 + 1/9) * 11/14 = (5 + 37/63);
* moltiplicare per la lunghezza della botte: (5 + 37/63) * 3 = (16 + 16/21) braccia cubiche, volume della botte;
* moltiplicare per 5: (16 + 16/21) * 5 = (83 + 17/21) barili, volume della botte.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Filippo Calandri propose il seguente problema sulle botti.

Una botte ha il fondo posteriore con diametro 2 braccia, al cocchiume ha diametro di 2,5 e il fondo anteriore ha diametro lungo 1,5 braccia.

La lunghezza misurata fra i due fondi è di 3 braccia.



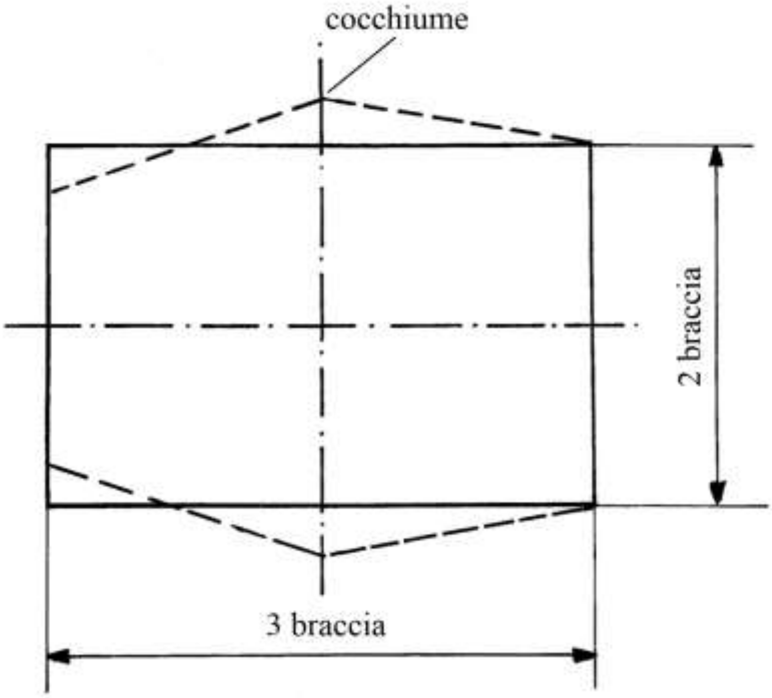
Per semplicità, qui sopra è disegnato un solido approssimato a due tronchi di cono uniti lungo il cerchio passante per il cocchiume, che risulta *equidistante* dai due fondi, anteriore e posteriore.

La botte è costruita con *doghe* di legno rigidamente connesse per mezzo di *cerchi* metallici. Nella parte superiore, nella zona di diametro maggiore (*entasi*) è praticato un foro su di un'unica doga: è il *cocchiume*, chiuso con un tappo di forma conica o tronco-conica, lo *zaffo*.

Il problema chiede il volume del vino contenuto nella botte ed espresso in *barili*.

Calandri semplifica la forma del solido in maniera sintetica e senza fornire spiegazioni: il doppio tronco di cono è assimilato a un cilindro con la stessa lunghezza, 3 braccia, e con diametro ottenuto dalla media aritmetica dei tre diametri, al fondo anteriore (1,5), al cocchiume (2) e al fondo posteriore (2,5):

(1,5 + 2 + 2,5)/3 = 6/3 = 2 braccia.



L’area S del cerchio del solido equivalente è:

$S = 11/14 * 2^2 = 44/14 = 22/7$ braccia^2.

Il volume V del cilindro equivalente è:

$V = S * \ell$, con ℓ lunghezza:

$V = 22/7 * 3 = 66/7 = (9 + 3/7)$ braccia^3.

Calandri conclude con la conversione da braccia^3 a barili:

$V = (9 + 3/7) * 5 = (47 + 1/7)$ barili.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel Codice 2669 della Biblioteca Riccardiana di Firenze è presentato un problema simile, con dimensioni leggermente aumentate: esso è descritto alle pagine 168-169 dell’edizione curata da Gino Arrighi (citata in bibliografia), qui riprodotte.

Egli è una botte che el diamitro del fondo dinanzj è 3 bracia et nel mezo è alta 3 bracia et 1/2 e 'l diamitro del fondo di drieto è 2 bracia et 1/2 et da l'uno fondo a l'autro è 3 bracia; vo' sapere quantj barili terrà, tenendo el bracio quadro 5 barili. Fa' così. Racogli insieme el diamitro de' dua fondj et del mezo, cioè 3 bracia et 3 et 1/2 et 2 et 1/2, fanno 9 bracia et questo partj per 3 per sapere quanto è raghuagliato el diamitro, che sono 3 bracia. Et queste 3 bracia dj diamitro vedj quante bracia quadre sono; perciò multiprica 3 bracia per se medesimo, fa 9

> bracia et di questo piglia li 11/14, che sono 7 et 1/14 et questo multiprica vie 3 bracia, che è da l'uno fondo a l'autro, fa 21 bracio et 3/14 e tanto fia quadra tutta la botte. Ora multiprica 21 bracio et 3/14 vie 5 barili, che tiene 1 bracio quadro, fa 106 barili et 1/14. E tanto tiene.

In questo caso Calandri spiega in dettaglio la soluzione usata per determinare il diametro medio, *d*, della botte:

$$d = (3 + 2{,}5 + 3{,}5)/3 = 9/3 = 3 \text{ braccia.}$$

La sezione trasversale ha area S che è:

$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 3^2 = 11/14 * 9 = 99/14 = (7 + 1/14) \text{ braccia}^2.$$

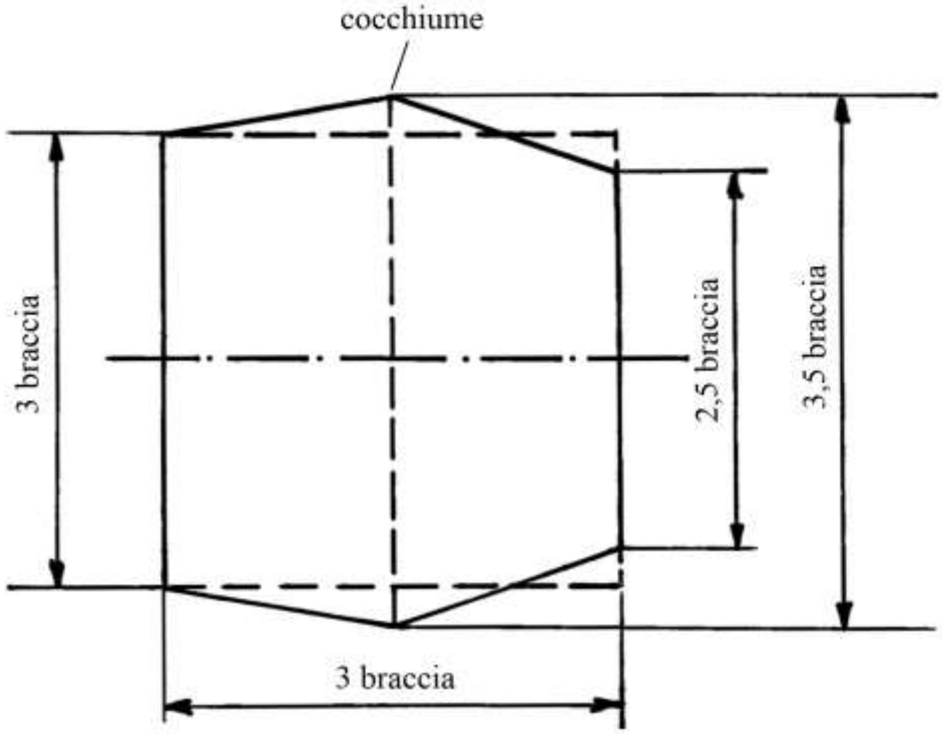
Il volume V della botte è:

$$V = S * \text{lunghezza} = (7 + 1/14) * 3 = (21 + 3/14) \text{ braccia}^3.$$

Il volume del vino contenuto nella botte, espresso in barili, è:

$$V = (21 + 3/14) * 5 = (106 + 1/14) \text{ barili.}$$

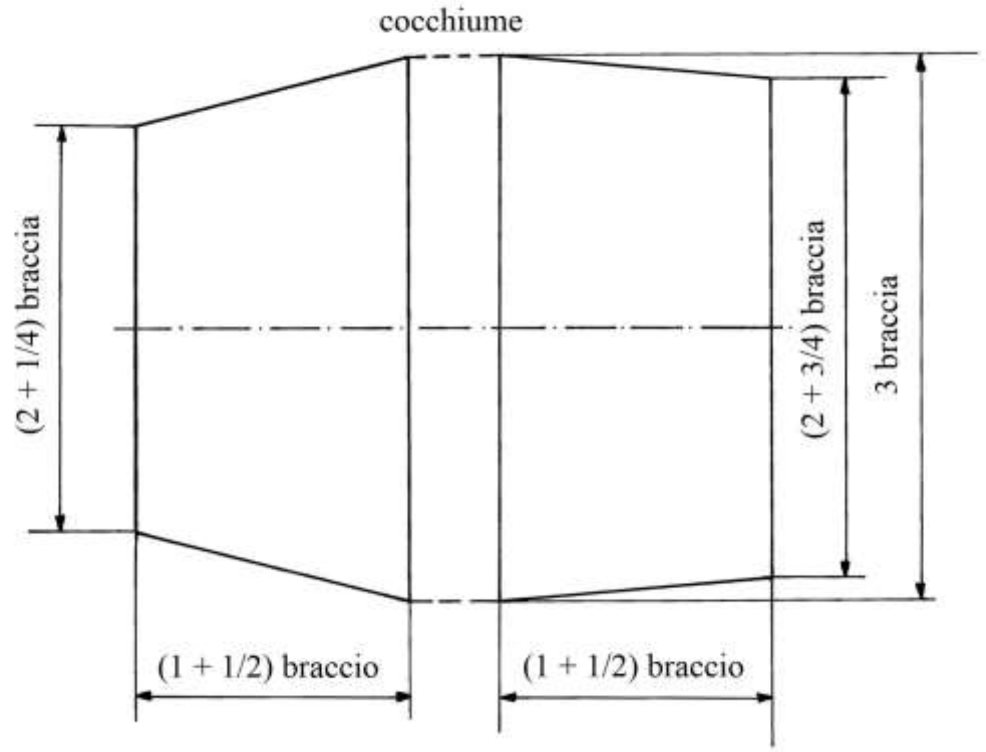
La figura che segue descrive la botte equivalente oggetto di questo problema:



- -

Nel caso della botte di Galigai, Forestani risolve proponendo di tagliarla, in modo immaginario, lungo il piano passante per il cocchiume al fine di ottenere due tronchi di cono (così approssima le due metà della botte).

Ecco il risultato dell'ipotetica sezione:



Poi Forestani applica il metodo che ha in precedenza usato e fornisce i seguenti risultati:
* il tronco di cono più piccolo (quello a sinistra) avrebbe volume di (40 barili + 12 fiaschi circa);
* il tronco di cono più grande (quello a destra) avrebbe volume uguale a (48 barili + 14 fiaschi circa).

La botte intera avrebbe quindi un volume di (89 barili + 6 fiaschi).

Galigai aveva calcolato il volume di quella stessa botte in (83 + 17/21), valore errato per difetto, secondo Forestani.

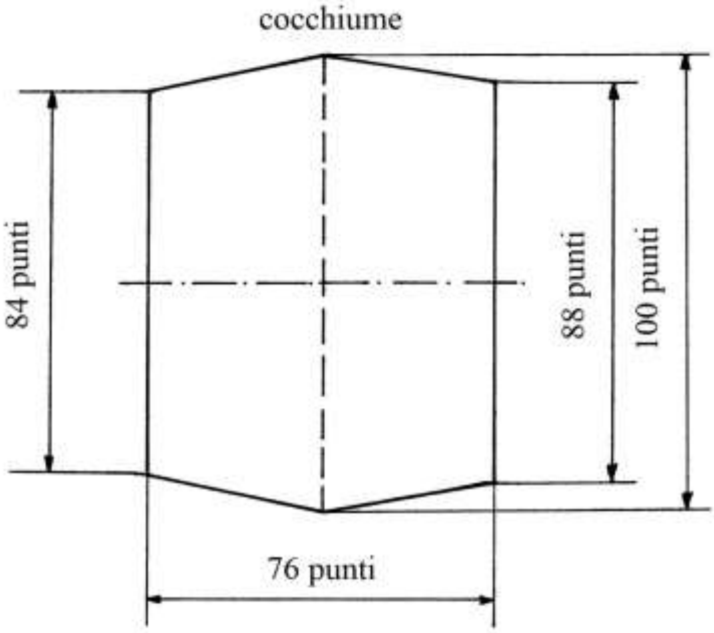
Riguardo alla botte considerata da Filippo Calandri che per questo Autore avrebbe avuto volume uguale a (47 + 1/7) barili, Forestani afferma che con il suo metodo di calcolo essa avrebbe volume uguale a 53 barili.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Forestani prende in considerazione la botte presentata all'inizio di questo paragrafo e studiata anche da Galigai e ne calcola il volume applicando il suo metodo e senza procedere a un'immaginaria divisione in due parti:
* sommare i diametri dei due fondi: (2 + ¼) + (2 + ¾) = 5;
* dividere per 2: 5/2 = (2 + ½);
* sommare con il diametro al cocchiume: (2 + ½) + 3 = (5 + ½);
* dividere per 2: (5 + ½)/2 = (2 + ¾);
* moltiplicare per sé stesso: (2 + ¾) * (2 + ¾) = (7 + 9/16);
* moltiplicare per 11/14: (7 + 9/16) * 11/14 = (5 + 211/224);
* moltiplicare per la lunghezza della botte: (5 + 211/224) * 3 = (17 + 185/224) braccia cubiche, volume della botte;
* moltiplicare per 5: (17 + 185/224) * 5 = 89 barili + (2 + ½) fiaschi.

[42] Volume di una botte

Una botte ha diametro del fondo anteriore lungo 84 *punti* e quello del fondo posteriore è 88; il diametro al cocchiume è 100 punti e la botte è lunga 76 punti.



La procedura impiegata da Forestani per calcolare il suo volume prevede i seguenti passi:

* sommaree i diametri dei due fondi: 84 + 88 = 172;
* dividere per 2: 172/2 = 86;
* sommare con il diametro al cocchiume: 86 + 100 = 186;
* dividere per 2: 186/2 = 93;
* moltiplicare per sé stesso: 93 * 93 = 8649;
* moltiplicare per la distanza fra i fondi: 8649 * 76 = 657324;
* dividere per 1000: 657324/1000 = 657 fiaschi;
* dividere per 20: 657/20 = (32 barili + 17 fiaschi), volume della botte.

[43] Svuotamento di una botte

Una botte contiene (8 + ½) barili di vino ed è dotata di una sola cannella.

In un’ora dalla cannelle fuoriesce 1 barile e dopo 2 ore esce un altro barile.; il terzo barile fuoriesce dopo altre 3 ore e il quarto barile dopo ulteriori 4 ore.

Il problema chiede quante ore occorrono per svuotare la botte.

La procedura proposta da Forestani prevede i seguenti passi:

* sommare il primo barile uscito con il volume totale del vino: 1 + (8 + ½) = (9 + ½);
* dividere il volume iniziale per 2: (8 + ½)/2 = (4 + ¼);
* moltiplicare l’ultimo quoziente per (9 + ½):

(4 + ¼) * (9 + ½) = (40 + 3/8) ore che occorrono per svuotare la botte.

[44] Due botti

Una botte contiene 40 barili ed è fatta con 40 doghe tutte uguali.

Una seconda botte ha volume di 24 barili: il problema chiede il numero delle doghe occorrenti per costruirla.

Le doghe delle due botti hanno uguali dimensioni.

La procedura usata da Forestani è:

* moltiplicare il numero delle doghe della prima botte per sé stesso: $40 * 40 = 1600$;
* moltiplicare per il volume della seconda botte: $1600 * 24 = 38400$;
* dividere per il volume della prima botte: $38400/40 = 960$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{960} \approx 31$ doghe, occorrenti per costruire la seconda botte.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata da Forestani può essere riassunta in una formula:

* V_1 è il volume della prima botte: $V_1 = 40$;
* V_2 è il volume della seconda botte: $V_2 = 24$;
* N_1 è il numero delle doghe della prima botte: $N_1 = 40$;
* N_2 è il numero delle doghe della seconda botte.

$$N_2 = \sqrt{[(N_1)^2 * V_2/V_1]}.$$

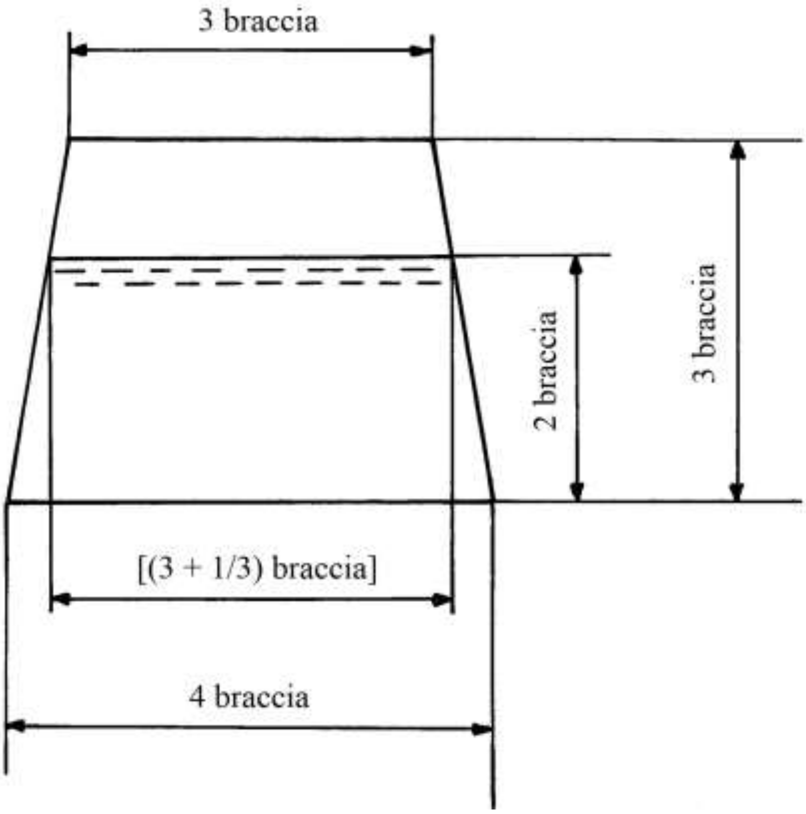
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nota: un problema simile è contenuto nel trattato "*Nuovo Lume*" di Giovanni Sfortunati: il matematico senese misurava i volumi delle botti in *staia* anziché in *barili*.

- -

[45] <u>Volume di vino in un tino</u>

Un tino ha fondo con diametro lungo 4 braccia e la bocca è 3.
Il recipiente ha la forma di un tronco di cono ed è alto 3 braccia.



Il livello del vino è 2 braccia. Il problema chiede il volume del vino misurato in barili.

La soluzione è:

* sottrarre il diametro della bocca da quello del fondo: 4 – 3 = 1;
* moltiplicare per l'altezza del vino: 1 * 2 = 2;
* dividere per il diametro della bocca: 2/3;
* sottrarre dal diametro del fondo: 4 – 2/3 = (3 + 1/3) braccia, diametro del tino al livello del vino.

Forestani applica poi le regole che ha impiegato in precedenza e calcola in [144 barili + (7 + ½) fiaschi] il volume dell'intero tino.

La parte piena di vino del tino ha volume di (105 barili + 12 fiaschi).

La differenza fra i due volumi misura il vuoto che è:

[144 barili + (7 + ½) fiaschi] – (105 barili + 12 fiaschi) = 38 barili + (15 + ½) fiaschi.

- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo i dati ottenuti da Forestani riguardo al volume del vino.

Per semplificare le cose applichiamo la formula per il calcolo del volume di un tronco di cono:

$$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + r^2 + R * r) = 1/3 * 22/7 * h * (R^2 + r^2 + R * r) =$$
$$= 22/21 * h * (R^2 + r^2 + R * r).$$

* h è l'altezza del vino: h = 2 braccia;
* R è il raggio della base del tino: R = 2 braccia;
* r è il raggio del cerchio formato dalla superficie libera del vino:

$$r = (3 + 1/3)/2 = (1 + 2/3) \text{ braccia.}$$

Il volume del vino V_{VINO} è:

$$V_{VINO} = 22/21 * 2 * [2^2 + (1 + 2/3)^2 + 2 * (1 + 2/3)] =$$

= 44/21 * [4 + (2 + 7/9) + (3 + 1/3)] = 44/21 * (10 + 1/9) = (21 + 5/27) braccia cubiche.

Il volume in barili è:
V_{VINO} = (21 + 5/27) * 5 = (105 + 25/27).
Il risultato è pressoché uguale a quello calcolato da Forestani.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

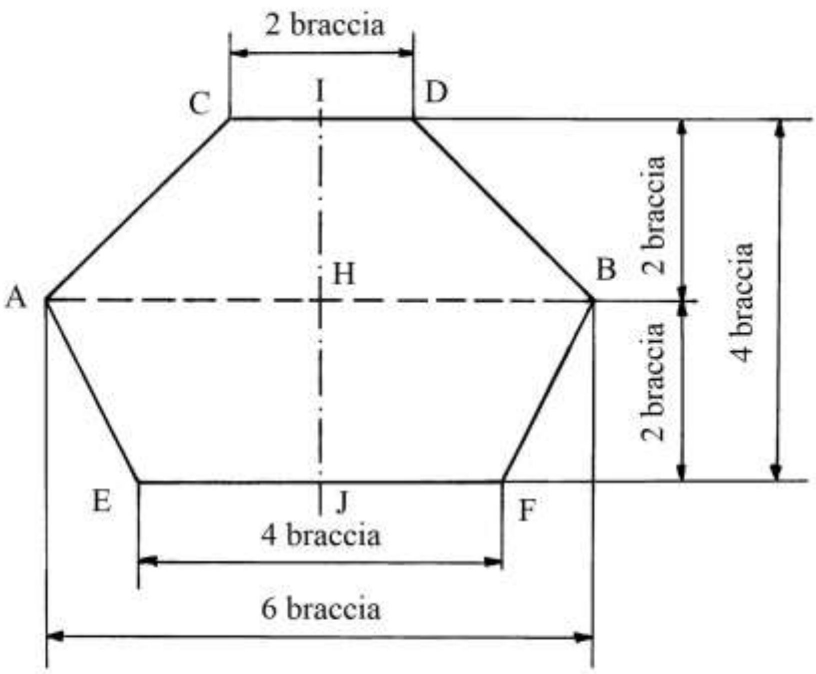
L'Autore conclude con una serie di consigli da seguire per misurare le dimensioni delle botti con l'ausilio di strumenti di *legno verde* e con un'asta – che in questa occasione chiama *passetto* e non più *scandaglio* – graduata in *punti* lunghi quanto stabiliscono gli usi dei vari luoghi.
- -

[46] Volume di una fossa da grano

Le fosse o buche per per conservare il grano avevano forma ricurva: più larghe nel fondo che al capo e più lunghe nel mezzo.

Una fossa ha al fondo diametro lungo 4 braccia, alla bocca 2 e al mezzo 6 braccia. La fossa è profonda 4 braccia.

È chiesto il volume della fossa espresso in *staia*.



La forma della fossa è assimilabile a quella di una botte.

Essa ha la forma di un doppio tronco di cono: i due solidi hanno in comune la base maggiore, indicata con AB.

Forestani non presenta alcun calcolo ma soltanto i dati finali:

* il tronco di cono più piccolo (quello superiore) ha volume di (245 + 1/7) staia;
* il tronco di cono più grande (quello inferiore) ha volume di (358 + 2/7) staia.

Il volume totale della fossa è (603 + 3/7) staia.

- APPROFONDIMENTO -

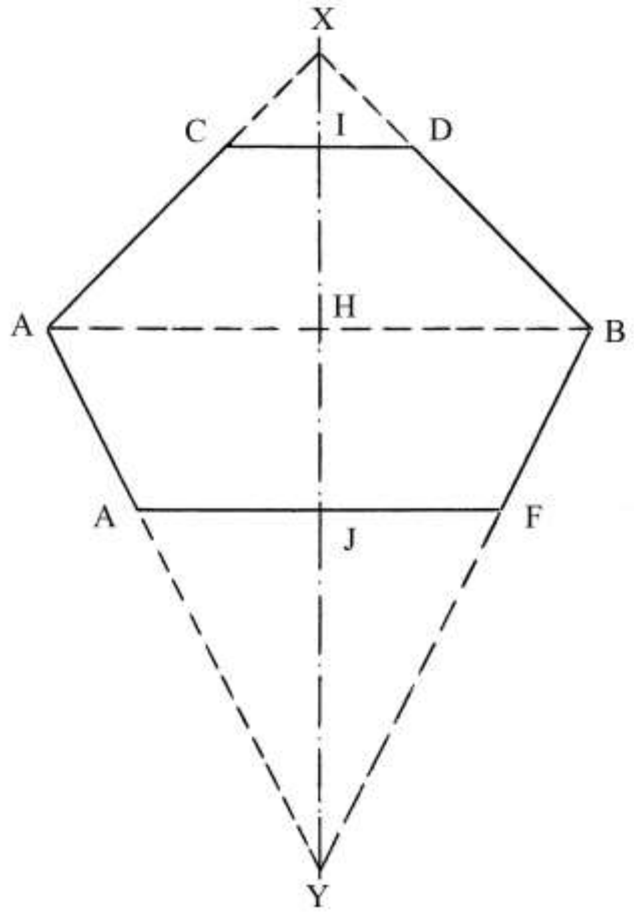
La soluzione sottostante ai risultati offerti da Forestani *probabilmente* è basata sulla ricostruzione dei due coni dai quali provengono i due tronchi di cono.

Il tronco di cono ACDB è ricavato da un cono che ha altezza XH e dal quale è tagliato il cono CXD.

Il secondo tronco di cono, ABFE, è ottenuto da un cono di altezza YH e dal quale è asportato il cono EYF.

Il volume di un tronco di cono, come quello ACDB, può essere ricavato calcolando quello dell'intero cono AXB e sottraendo quello del cono asportato CXD:

$$V_{ACDB} = V_{AXB} – V_{CXD}.$$



Verifichiamo i risultati proposti da Forestani e applichiamo la formula per il calcolo del volume di un tronco di cono.

$$V_{ACDB} = 1/3 * 22/7 * IH * (HA^2 + IC^2 + HA * IC) =$$
$$= 22/21 * 2 * (3^2 + 1^2 + 3 * 1) = 44/21 * (9 + 1 + 3) = 44/21 * 13 =$$
$$= (27 + 5/21) \text{ braccia cubiche} = (27 + 5/21) * 9 = (245 + 1/7) \text{ staia.}$$

Il risultato è uguale a quello di Forestani.

Per il tronco di cono ABFE, il suo volume è dato da:

$$V_{ABFE} = 1/3 * 22/7 * JH * (HA^2 + JE^2 + HA * JE) =$$
$$= 22/21 * 2 * (3^2 + 2^2 + 3 * 2) = 44/21 * (9 + 4 + 6) = 44/21 * 19 =$$
$$= (39 + 7/21) \text{ braccia cubiche} = (39 + 7/21) * 9 = (358 + 2/7) \text{ staia.}$$

Anche questo risultato coincide con quello calcolato da Forestani.

Il volume totale della fossa è:

$V_{FOSSA} = V_{ACDB} + V_{ABFE} = (245 + 1/7) + (358 + 2/7) = (603 + 3/7)$ staia, dato che è uguale a quello presentato dall'Autore.

- -

[47] Calcolo del volume delle fornaci da calcina

All'epoca in cui Forestani scriveva, in Toscana le fornaci da calcina erabo di forma circolare.

Il volume V di una fornace di diametro *d* e altezza *h* è dato da:

$V = (11/14 * d^2) * h$.

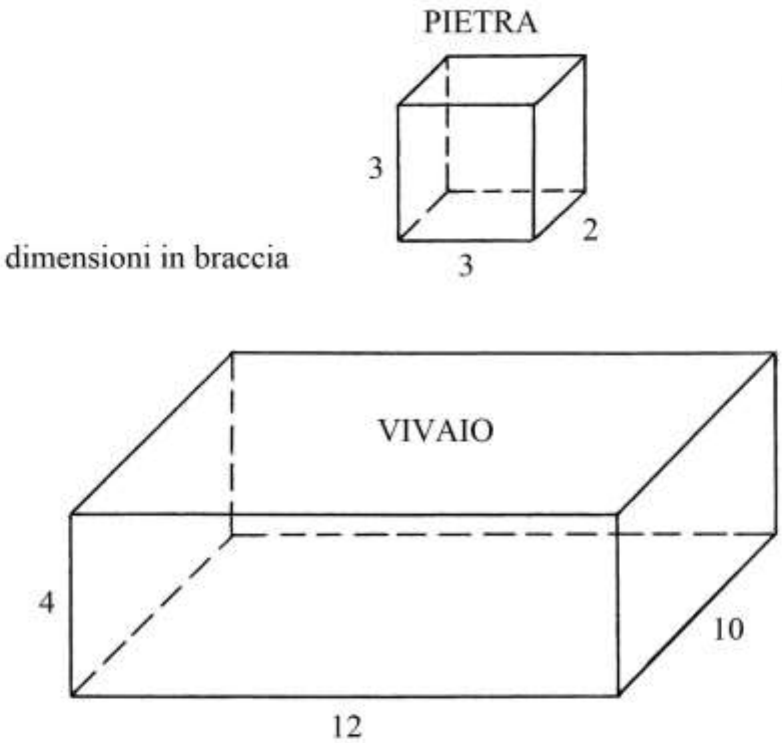
Se le dimensioni sono espresse in braccia, il volume è misurato in braccia cubiche.

A seconda della natura del materiale trattato nella fornace, il volume in staia è ricavato moltiplicando per 9 o per 10 quello espresso in braccia cubiche.

[48] Pietra caduta in un vivaio

Un vivaio è lungo 12 braccia, largo 10 e alto 4 ed è pieno di acqua.

Nel vivaio cade una pietra prismatica lunga 3 braccia, larga 3 e alta due braccia.



Il problema chiede il volume in barili dell'acqua che fuoriesce dal vivaio.

Il volume della pietra è:

$V_{PIETRA} = 3 * 3 * 2 = 18$ braccia cubiche $= 18 * 5 = 90$ barili.

Il volume dell'acqua che fuoriesce per la caduta della pietra è uguale al suo volume e cioè è:

18 braccia cubiche = 90 barili.

[49] Sfera caduta in un vivaio

Un vivaio è lungo 8 braccia, largo 6 e alto 6 braccia. Il livello dell'acqua è alto 4 braccia.

Nel vivaio cade una palla di pietra rotonda che ha diametro *d* = 3 braccia.

Il problema chiede la misura dell'innalzamento dell'acqua nel vivaio.

Il volume della sfera è calcolato con una formula già impiegata da Forestani:

$V_{SFERA} = d^3 * 11/21 = 3^3 * 11/21 = (14 + 1/7)$ braccia cubiche.

L'Autore calcola poi la superficie del pelo dell'acqua:

$S = 8 * 6 = 48$ braccia quadre.

Infine, divide il volume della sfera per la superficie del pelo dell'acqua:

$V_{SFERA}/S = (14 + 1/7)/48 = 33/112$ braccia, misura dell'innalzamento dell'acqua nel vivaio.

Nota: un problema simile era riportato nel "*Nuovo Lume*" di Giovanni Sfortunati, riprodotto nella scheda che segue.

- APPROFONDIMENTO -

PROPOSIZIONE 34

Pietra caduta in un vivaio

Un vivaio è lungo 12 braccia, è largo 10 e l'acqua contenuta è profonda $h = 8$ braccia.

Vi cade una palla sferica di pietra del diametro di 3 braccia.

Il problema domanda quanto si alza il livello dell'acqua.

Il volume della sfera è:

$V_{SFERA} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * 22/7 * (3/2)^3 = 88/21 * 27/8 = 11 * 9/7 =$

$= (14 + 1/7)$ braccia^3.

L'area della sezione orizzontale del vivaio è:

$S = 12 * 10 = 120$ braccia^2.

Il volume dell'acqua è:

$V_{ACQUA} = S * h = 120 * 8 = 960$ braccia^3.

Con la caduta della palla, il volume aumenta:

$V_{FINALE} = V_{ACQUA} + V_{SFERA} = 960 + (14 + 1/7) = (974 + 1/7)$ braccia^3.

Il nuovo livello dell'acqua, H, è dato da:

$H = V_{FINALE} /S = (974 + 1/7) = (8 + 33/280)$ braccia.

Il livello dell'acqua si è alzato di:

$H – h = (8 + 33/280) – 8 = 33/280$ braccia.

- -

[50] Unione di due sacchi

Due sacchi hanno uguale altezza: il primo ha volume di 4 staia e il secondo 9.

I due sacchi sono scuciti per poi essere uniti per formare un sacco della stessa altezza dei due originari.

È chiesto il volume in staia del nuovo sacco.

La soluzione contiene i seguenti passi:

* sommare i volumi dei due sacchi: $4 + 9 = 13$;
* moltiplicare i due volumi: $4 * 9 = 36$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$;
* moltiplicare per 2: $6 * 2 = 12$;
* sommare con 13: $12 + 13 = 25$ staia, volume del sacco risultante dall'unione.

La procedura può essere riassunta in una formula:
* V_1 è il volume del primo sacco: $V_1 = 4$;
* V_2 è il volume del secondo sacco: $V_2 = 9$;
* V_3 è il volume del sacco risultante dall'unione dei primi due.

$$V_3 = (V_1 + V_2) + 2 * \sqrt{(V_1 * V_2)}.$$

[51] <u>Divisione di un sacco</u>

Un sacco ha volume di 36 staia e deve essere scucito per formare *tre* sacchi di uguali dimensioni, conservando l'altezza originaria.

Il problema chiede il volume di ciascuno dei tre sacchi.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:
* moltiplicare per sé stesso il numero dei nuovi sacchi: 3 * 3 = 9;
* dividere 36 per 9: 36/9 = 4;
* moltiplicare 4 per il numero dei nuovi sacchi: 4 * 3 = 12 staia, volume di ciascuno dei tre nuovi sacchi.

[52] <u>Unione di quattro sacchi uguali</u>

Quattro sacchi di uguali volumi, pari a 3 staia ciascuno, devono essere ricomposti per formare un unico sacco del quale è chiesto il volume.

La soluzione è:
* moltiplicare il numero dei sacchi originari per sé stesso: 4 * 4 = 16;
* moltiplicare per il volume di un sacco: 16 * 3 = 48 staia, volume del sacco risultante dall'unione.

[53] <u>Sacco ottenuto dall'unione di quattro sacchi</u>

Quattro sacchi di uguale altezza hanno capacità di 2, 5, 4 e 10 staia. Essi devono essere scuciti e uniti per formare un nuovo sacco: è chiesto il volume del sacco risultante.

Forestani risolve il problema con la seguente procedura (che applica il metodo già impiegato nella soluzione del precedente problema [50]):
* sommare i volumi dei primi due sacchi: 2 + 5 = 7;
* moltiplicare i due volumi: 2 * 5 = 10;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{10} \approx (3 + 1/6)$;
* moltiplicare per 2: (3 + 1/6) * 2 = (6 + 1/3);
* sommare con 7: (6 + 1/3) + / = (13 + 1/3) staia, volume del sacco ottenuto dall'unione dei primi due;

* sommare i volumi del terzo e del quarto sacco: 4 + 10 = 14;
* moltiplicare i due volumi: 4 * 10 = 40;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{40} = (6 + 1/3)$;
* moltiplicare per 2: 2 * (6 + 1/3) = (12 + 2/3);
* sommare con 14: (12 + 2/3) + 14 = (26 + 2/3) staia, volume del sdacco risultante dall'unione del terzo e del quarto sacco;

La terza fase della procedura considera i due sacchi originati dalle unioni del primo e del secondo e del terzo e del quarto:

* sommare i volumi dei due sacchi risultanti: (13 + 1/3) + (26 + 2/3) = 40;
* moltiplicare i due volumi: (13 + 1/3) * (26 + 2/3) = (355 + 5/9);
* estrarre la radice quadrata: √(355 + 5/9) = 18,85;
* moltiplicare per 2: 18,85 * 2 = 37,70;
* sommare con 40: 37,70 + 40 = 77,70 staia, volume del sacco risultante dall'unione dei quattro sacchi iniziali.

Forestani fornisce un risultato simile (77 + 2/3) staia.

- APPROFONDIMENTO -

Forestani coglie l'occasione della descrizione di questo problema per criticare la soluzione di un problema con dati numerici simili, ma espressi invece che in *staia*, in una diversa unità di misura: i *rugi*.

La soluzione criticata da Forestani è proposta dal matematico e domenicano spagnolo Juan de Ortega (1480 – 1568) nel testo che fu tradotto anche in italiano e pubblicato a Roma con il titolo di "*Suma de arithmetica*".

Il problema 34 del capitolo "Geometria" chiede il volume di un sacco risultante dall'unione di quattro sacchi di uguale altezza e pieni di grano: i loro volumi sono 2, 5, 4 e 10, identici a quelli del problema di Forestani e elencati nel medesimo ordine.

La procedura proposta da de Ortega è la seguente:

* moltiplicare il volume del primo sacco per quello del secondo: 2 * 5 = 10;
* moltiplicare per il volume del terzo: 10 * 4 = 40;
* moltiplicare per il volume del quarto: 40 * 10 = 400;
* estrarre la radice quadrata: √400 = 20;
* moltiplicare per il numero dei sacchi da unire, 4: 20 * 4 = 80;
* sommare i volumi dei quattro sacchi: 2 + 5 + 4 + 10 = 21;
* sommare con 80: 21 + 80 = 101, volume del sacco risultante.

Il risultato proposto da de Ortega è approssimato per eccesso.

- -

[54] <u>Volume di un corpo irregolare</u>

Deve essere misurato il volume di un corpo irregolare, quali possono essere una pietra o una statua di marmo o di bronzo.

Inserirla in un vivavio e riempire d'acqua fino a coprire il corpo, in piedi oppure sdraiato.

Sulla parete segnare il livello dell'acqua.

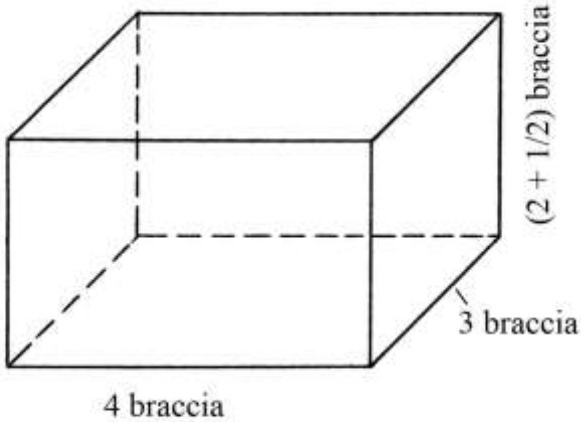
Togliere il corpo dal vivaio e segnare il nuovo livello raggiunto dall'aqua.

Il volume del solido è dato dal prodotto della lunghezza del vivaio per la sua larghezza e moltiplicando per l'abbassamento subito dal livello dell'acqua.

I volumi sono tutti misurati in braccia cubiche.

[55] <u>Peso dell'olio contenuto in una pila</u>

Una pila contiene *olio* [d'oliva, evidentemente] e ha la forma di un parallelepipedo lungo 4 braccia, largo 3 e alto (2 + ½).



Il problema chiede il peso in *libbre alla grossa da olio*.

Forestani descrive alcune unità di misura probabilmente usate a Pescia e in altre località della Valdinievole:

* 1 libbra grossa = 2 fiaschi di olio;
* 1 libbra grossa = 11 libbre (sottili) + 3 once sottili;
* 1 libbra sottile = 12 once;
* un braccio cubico di olio pesava 50 libbre grosse.

La base della pila ha area S che è:

S = 4 * 3 = 12 braccia quadre.

Il volume V della pila è:

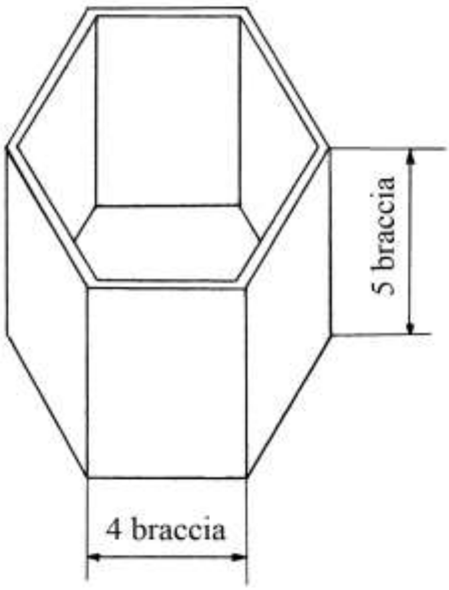
V = S * (2 + ½) = 12 * (2 + ½) = 30 braccia cubiche.

Il peso P dell'olio è:

P = V * 50 = 30 * 50 = 1500 libbre grosse.

[56] Vaso murato o pila per olio

Un vaso murato ha la forma di un esagono regolare con lati lunghi ℓ = 4 braccia ed è alto *h* = 5 braccia.



È chiesta la quantità di olio espressa in libbre che può contenere.

L’area della base è calcolata usando la costante proposta da Erone di Alessandria [(2 + 3/5) = 13/5]:

$S = \ell^2 * (2 + 3/5) = 4^2 + (13/5) = 16 * 13/5 = (41 + 3/5)$ braccia quadre.

Il volume V del vaso è:

$V = S * h = (41 + 3/5) * 5 = 208$ braccia cubiche.

Il peso P dell’olio è:

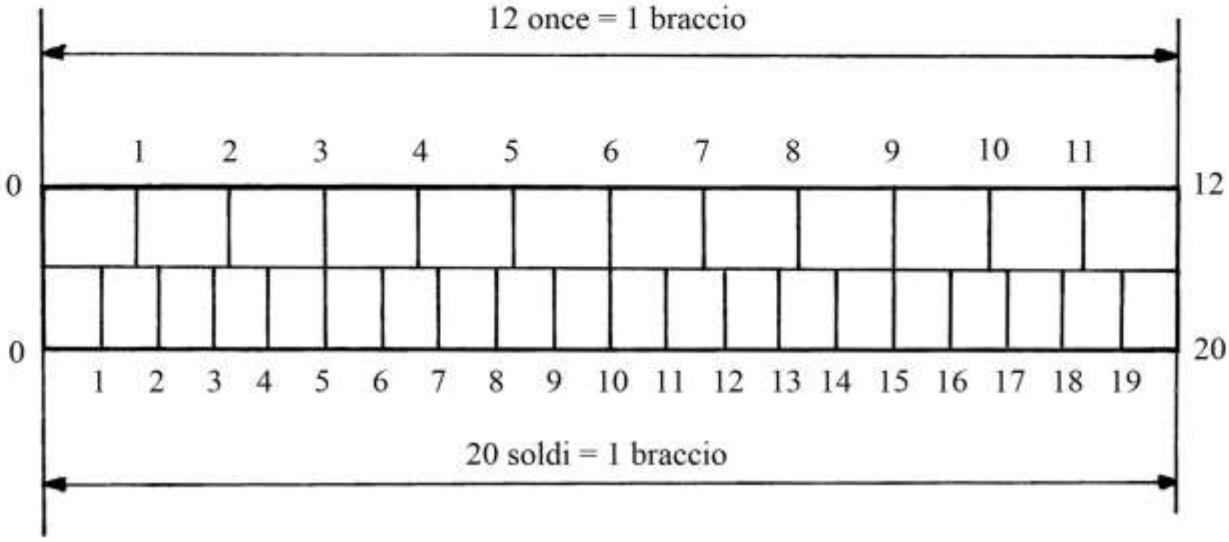
$P = V * 50 = 208 * 50 = 10400$ libbre grosse.

[57] Misurazione delle pile da olio

All’epoca in cui Forestani scriveva, in Toscana era usanza comune fabbricare certi vasi di forma quadrata ottenuti unendo *sei* tavole di pietra importate dalla riviera di Genova.

Questi vasi erano noti come *pile* o *pozzi per l’olio*: in essi era conservato l’olio e a volte anche il grano.

La misura di questi vasi poteva essere fatta a braccia, unità lineare divisibile in 12 once o in 20 soldi:



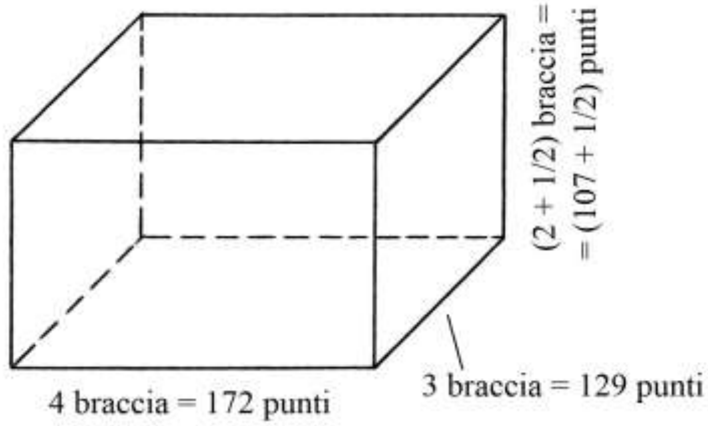
Il preciso calcolo del peso dell’olio costringeva ad operare con i *rotti*, i numeri frazionari. Per rimediare alle difficoltà, Forestani propose di misurare le dimensioni delle pile da olio usando il metodo dei *punti* già applicato alle botti e fissò alcune equivalenze:

1590 punti quadri [in realtà *cubici*] equivalevano a 1 libbra grossa di olio.

La pila considerata dal precedente problema [55] ha le dimensioni espresse in punti, convertite con l’equivalenza

1 braccio = 43 punti,

- lunghezza: 4 braccia = 4 * 43 = 172 punti;
- larghezza: 3 braccia = 3 * 43 = 129 punti;
- altezza: (2 + ½) braccia = (107 + ½) punti.



Il volume V in punti [*cubici*] è:

$V = 172 * 129 * (107 + ½) = 2.385.210$ punti [cubici].

Il peso P dell'olio in *libbre grosse* è:

$P = V/1590 = 2.385.210/1590 = (1500 + 7/53)$ libbre grosse, risultato pressoché uguale a quello calcolato nella soluzione del problema [55] utilizzando il braccio cubico quale unità di misura del volume dell'olio.

Infine, Forestani calcola con una proporzione il volume di grano espresso in stata che può contenere la pila:

50 libbre grosse da olio : 9 staia = 1509 : staia grano   da cui

staia grano = 9 * 1509/50 = (271 + 31/50) staia.

È utile ricordare che 1 braccio cubico contiene 50 libbre grosse di olio ed è equivalente a 9 staia.

Il problema può essere risolto anche calcolando il volume V della pila in braccia cubiche:

$V = 4 * 3 * (2 + ½) = 30$ braccia cubiche.

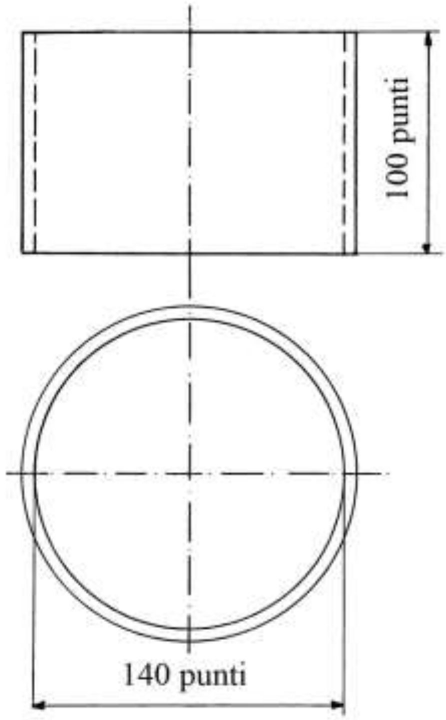
Un braccio cubico contiene 9 staia per cui il volume del grano è:

$V_{GRANO} = V * 9 = 30 * 9 = 270$ staia.

[58] Contenuto in olio di un vaso tondo

Un vaso cilindrico, come un pozzo, ha diametro *d* lungo 140 punti ed è alto *h* = 100 punti.

Il problema chiede quante libbre grosse di olio contiene.



Il testo di Forestani forse reca errori di calcolo o di stampa. Qui proponiamo una soluzione che utilizza i simboli della moderna aritmetica.

I calcoli sono effettuati in *punti*, ricordando che 1 braccio vale 43 punti lineari.

L'area S della sezione trasversale del vaso è:

$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 140^2 = 15400$ punti [quadri].

Il volume V del vaso è:

$V = S * h = 15400 * 100 = 1.540.000$ punti [cubici].

Occorre convertire i punti [cubici] in braccia cubiche:

1 braccio cubico = 43^3 punti [cubici] = 79507 punti [cubici].

Il volume in braccia cubiche è:

$V = 1.540.000/79507 \approx 19,37$ braccia cubiche.

Un braccio cubico equivale a 5 barili e il volume del vaso è:

$V_{BARILI} = V * 5 = 19,37 * 5 = 96,85$ barili, ad esempio di vino.

Forestani ricorre a una proporzione:

5 barili sono occupati da 50 libbre d'olio.

L'olio contenuto nel vaso pesa P:

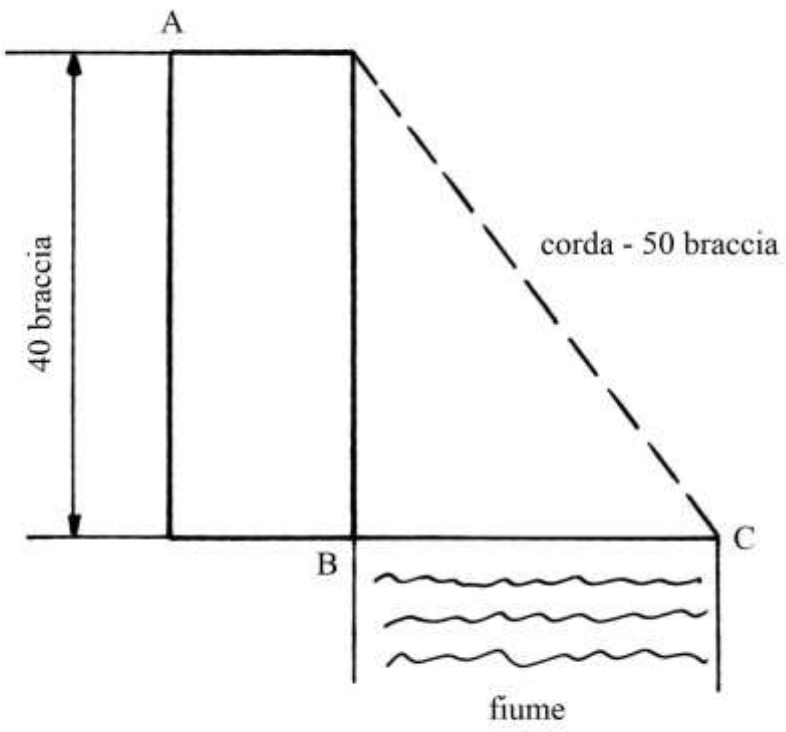
$P = V_{BARILI} * 50/5 = 96,85 * 50/5 = 968,5$ libbre grosse da olio.

Con la sua un po' oscura proceduta, Forestani fornisce risultati vicini a quelli sopra calcolati:

* $V_{BARILI} = 98$ barili di vino;
* $P_{OLIO} = 980$ libbre grosse di olio.

[59] Larghezza di un fiume

Una torre alta 40 braccia è costruitasulla riva di un fiume di cui è ignota la larghezza.



Alla cima della torre è legata una corda che raggiunge la riva opposta del fiume: la corda è lunga 50 braccia.

È chiesta la larghezza del fiume.

ABC è un triangolo rettangolo di cui BC è un cateto la cui lunghezza è incognita:

$BC^2 = AC^2 – AB^2 = 50^2 – 40^2 = 2500 – 1600 = 900$ e

$BC = \sqrt{900} = 30$ braccia.

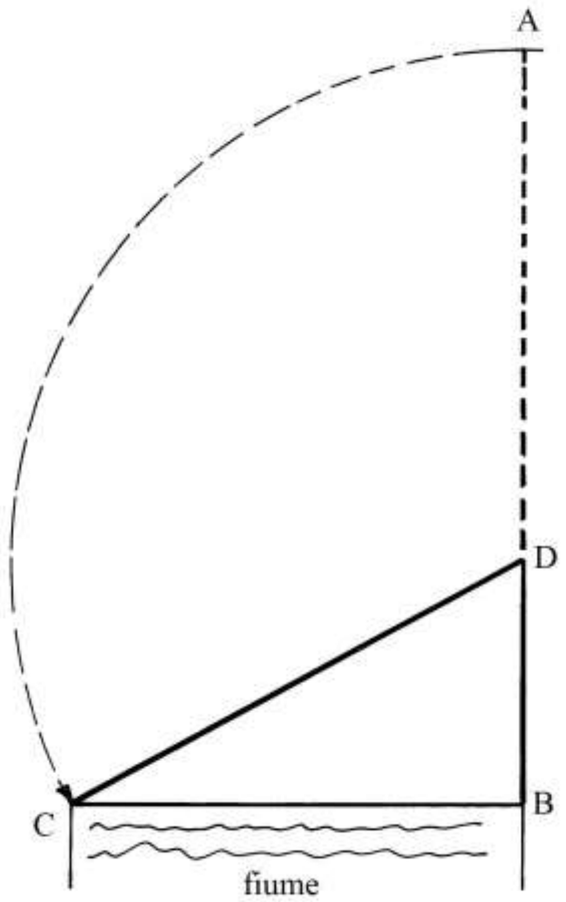
Le lunghezze dei lati di ABC formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 10.

[60] Attraversamento di un fiume largo 30 braccia

Un viandante vuole attraversare un fiume largo 30 braccia [*come nel caso del precedente problema*], ma nei paraggi non ci sono né ponti né barche.

Un vento rompe un albero alto 50 braccia che è piantato sulla riva del fiume: la cima dell’albero si adagia sull’altra riva del fiume e una parte del tronco rimane in piedi. Il viandante può attraversare il fiume.

Il problema chiede la lunghezza del tronco rotto e di quello rimasto in piedi.



La procedura proposta da Forestani contiene i seguenti passaggi:

* moltiplicare l'altezza dell'albero per sé stessa: 50 * 50 = 2500;
* moltiplicare la larghezza del fiume per sé stessa: 30 * 30 = 900;
* sommare i due quadrati: 2500 + 900 = 3400;
* moltiplicare per 2 l'altezza dell'albero: 50 * 2 = 100;
* dividere 3400 per 100: 3400/100 = 34 braccia, lunghezza della parte di tronco che si è rotta (AD = DC);
* sottrarre dalla lunghezza dell'albero: 50 – 34 = 16 braccia, lunghezza della parte di tronco rimasta in piedi (DB).

\- APPROFONDIMENTO -

Il problema è presente nel "*Nuovo Lume*" di Giovanni Sfortunati, con gli stessi dati.
Esso può essere risolto con l'aiuto dell'algebra elementare.
La lunghezza di DB è l'incognita: DB = x.
DC ha la stessa lunghezza di AD: DC = AD.
La lunghezza di AD è:

$$AD = AB - DB = 50 - x.$$

DC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CBD e la sua lunghezza è:

$$DC^2 = CB^2 + DB^2 = 30^2 + x^2 = 900 + x^2.$$

Dato Che DC e AD hanno uguali lunghezze, sono uguali anche i loro quadrati:

$$DC^2 = AD^2$$
$$900 + x^2 = (50 - x)^2$$
$$900 + x^2 = 2500 - 100 * x + x^2$$
$$100 * x = 2500 - 900$$

$100 * x = 1600$
$x = 1600/100 = 16$ braccia e
$AD = AB – DB = 50 – x = 50 – 16 = 34$ braccia.

- -

[61] Albero abbattuto

Un contadino taglia un albero alto 40 braccia: ad ogni colpo che dà, la cima dell'albero si piega verso terra di 1 braccio.

I colpi inferti fanno tracciare alla cima dell'albero un arco di circonferenza: quando giunge a terra la cima ha compiuto un quarto di circonferenza.

Un cerchio ha metà diametro lungo 40 braccia e cioè è il raggio dell'arco percorso dalla cima.

La circonferenza *c* con questo raggio è lunga:

$c = 22/7 * d = 22/7 * (40 * 2) = 22/7 * 80 = (251 + 3/7)$.

Dato che nella sua rotazione la cima compie un quarto di giro, la lunghezza dell'arco pari a un quarto è:

arco $= c/4 = (251 + 3/7)/4 = (62 + 6/7)$ braccia.

Dato che per ogni colpo inferto, la cima si muove di 1 braccio, per abbattare l'albero occorrono

$(62 + 6/7)/1 = (62 + 6/7)$ colpi.

[62] Colonna parziamente interrata

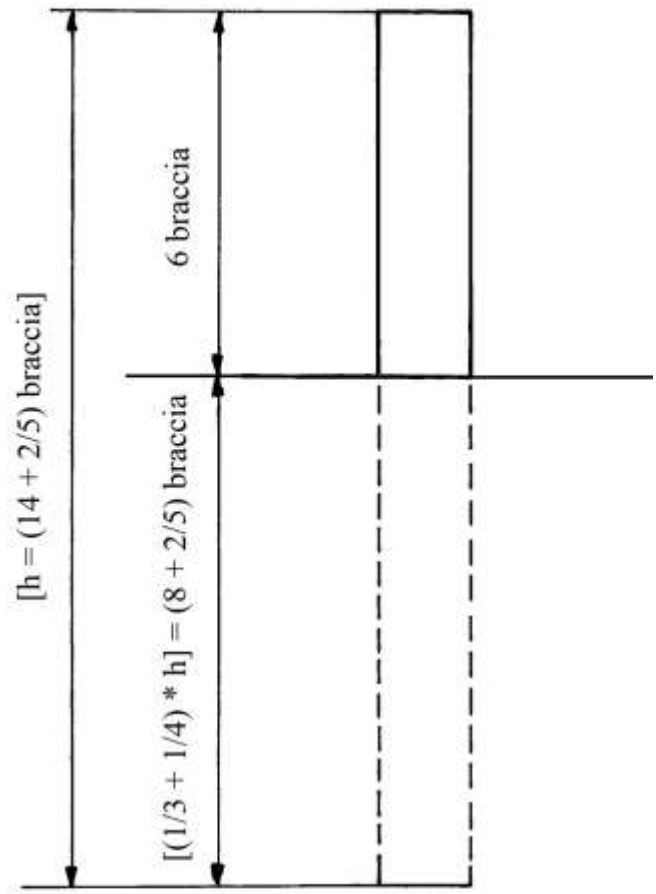
Una colonna è interrata per (1/3 + ¼) della sua lunghezza.

Fuori dal terreno emerge per 6 braccia.

Deve essere calcolata la sua lunghezza totale.

La procedura usata da Forestani contiene i seguenti passi:

* posto per ipotesi che la lunghezza della colonna sia 12 braccia, calcolare i suoi (1/3 + ¼): $(1/3 + 1/4) * 12 = 7/12 * 12 = 7$ braccia;
* sottrarre 7 dall'ipotetica lunghezza di 12: $12 – 7 = 5$;
* moltiplicare la lunghezza della parte emersa per 12: $6 * 12 = 72$;
* dividere per 5: $72/5 = (14 + 2/5)$ braccia, lunghezza della colonna.



- APPROFONDIMENTO -

La scelta del numero 12 fatta da Forestani sembra dovuta al denominatore della frazione risultante dalla somma di (1/3 + ¼):

(1/3 + ¼) = (4 + 3)/12 = 7/12.

La parte emersa è lunga 6 braccia: essa corrisponde a:

(1 – 7/12) * h, con *h* altezza dell'intera colonna.

(1 – 7/12) * h = 6

5/12 * h = 6

h = 12 * 6/5 = 72/5 = (14 + 2/5).

La parte interrata della colonna è alta:

h – 6 = (14 + 2/5) – 6 = (8 + 2/5) braccia.

Questa parte interrata ha lunghezza che può essere ricavata in altro modo:

h * (1/3 + 1/4) = (14 + 2/5) * 7/12 = 72/5 * 7/12 = 6 * 7/5 = 42/5 = (8 + 2/5) braccia.

- -

[63] <u>Fascio di bastoni</u>

Una corda lunga 3 braccia lega un fascio di 60 bastoni.

Il problama domanda il numero di bastoni legati da una corda lunga 6 braccia.

La soluzione è la seguente:

* moltiplicare 3 [braccia] per sé stesso: 3 * 3 = 9;
* moltiplicare 6 per sé stesso: 6 * 6 = 36;
* moltiplicare 36 per il numero dei bastoni 60: 36 * 60 = 2160;

* dividere per 9: 2160/9 = 240, numero dei bastoni legati da una corda lunga 6 braccia.

[64] Un altro fascio di bastoni

Il problema è l'inverso del precedente.

Una corda lunga 3 braccia raccoglie 60 bastoni: è chiesta la lunghezza della corda occorrente per legare 240 bastoni.

La soluzione è:

* moltiplicare 3 per sé stesso: 3 * 3 = 9;
* moltiplicare per 240: 9 * 240 = 2160;
* dividere per 60: 2160/60 = 36;
* estrarre la radice quadrata: √36 = 6 braccia, lunghezza della corda che lega 240 bastoni.

[65] Un mantello

Deve essere realizzato un mantello alto 2 braccia con del panno largo (1 + ½) braccia.

Il mantello steso su di un piano formerebbe un cerchio con diametro *d* uguale al doppio dell'altezza e cioè 2 * 2 = 4 braccia.

La superficie S del mantello aperto è:

S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 4^2 = 11/14 * 16 = (12 + 4/7) braccia quadre.

La lunghezza L del panno occorrente è data dalla divisione fra la superficie del mantello e la larghezza dello stesso panno:

L = S/(1 + ½) = (8 + 8/21) braccia.

[66] Un altro mantello

Un cliente chiede a un sarto quante braccia di panno largo (1 + 2/3) occorrono per cucire un mantello.

Il sarto risponde che occorrono 9 braccia di panno.

Il cliente trova soltanto un panno largo (1 + ½) braccia.

Il problema chiede la lunghezza del panno occorrente. La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare (1 + 2/3) per 9: (1 + 2/3) * 9 = 15;
* dividere per (1 + ½): 15/(1 + ½) = 10 braccia, lunghezza del panno largo (1 + ½) occorrente per cucire il mantello richiesto.

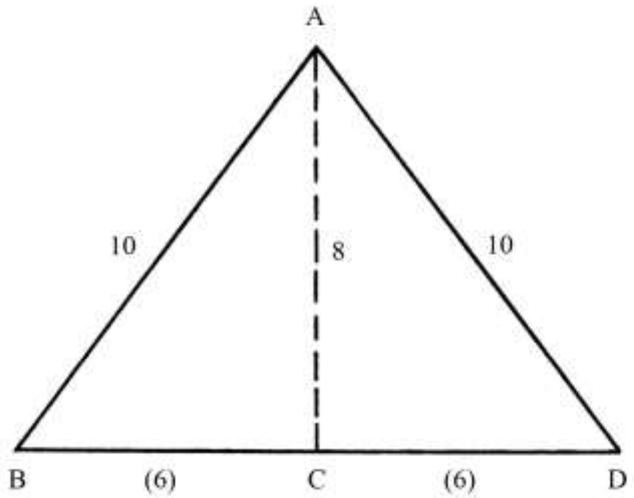
[67] Un padiglione da campo

Un padiglione da campo è sostenuto da un palo alto 8 braccia.

Quando è teso, il panno da cui è formato è lungo dalla cima aterra 10 braccia.

Il problema chiede la lunghezza del panno occorrente sapendo che esso viene ricavato da una pezza larga (1 + ½) braccia.

Quando il padigliano è teso, il panno che lo forma è la superficie laterale di un cono: AB e AD sono le lunghezze dell'*apotema*.



Occorre determinare il diametro della base BD:

$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ e

$CD = \sqrt{36} = 6$ braccia.

Il diametro della base, BD, è lungo:

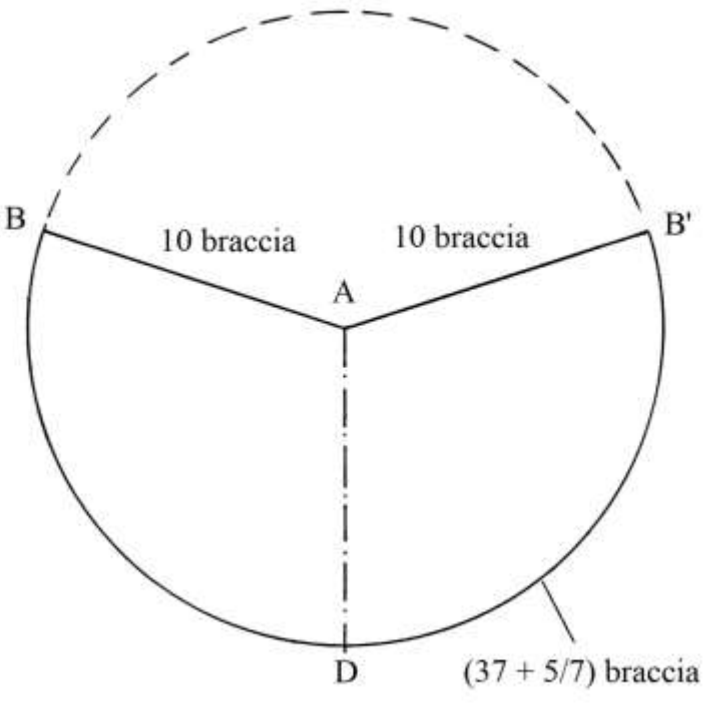
BD = 2 * CD = 2 * 6 = 12 braccia.

Nello schema compare di nuovo la terna 3-4-5: le lunghezze dei lati dei triangoli rettangoli ABC e ACD formano la terna derivata 6-8-10.

La circonferenza *c* della base è lunga:

c = BD * (3 + 1/7) = 23 * (3 + 1/7) = (37 + 5/7) braccia.

La lunghezza di *c* è quella dell'arco di circonferenza BDB' di centro A e raggio AD = 10 braccia:



L’ area S del padiglione è la superficie laterale di un cono:

$S = (\pi * r) * a.$

“$\pi * r$” è la lunghezza di metà della circonferenza, *c*.

L’area è:

$S = c/2 * a = [(37 + 5/7)/2] * 10 = (188 + 4/7)$ braccia quadre.

La lunghezza L del panno occorrente, largo (1 + ½) braccia è:

$L = S/(1 + ½) = (188 + 4/7)/(1 + ½) = (125 + 5/7)$ braccia.

Nota: il problema è presente, con le stesse dimensioni, nel trattato “*Nuovo Lume*” di Giovanni Sfortunati.

BIBLIOGRAFIA

1. Calandri Filippo, “Aritmetica”, Firenze, Lorenzo Morgiani e Johann Petri, 1491-1492, 104 carte.
2. Calandri Filippo, “Aritmetica”. Secondo la lezione del Codice 2669 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze, Firenze, Edizioni della Cassa di Risparmio di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, 1969, pp. XXXIV + 222.
3. De Ortega Juan, “Suma de arithmetica: geometria pratica utilissima: ordinate per Johane de Ortega spagnolo palentino”, trad. it., Roma, Etienne Guillery, 1515, 116 carte.
4. Forestani Lorenzo, “Pratica d’Arithmetica e Geometria”, Siena, Stamperia del Pubblico, 1682, pp. 574.
5. Galigai (o Ghaligai) Francesco, “Pratica d’arithmetica”, Firenze, Appresso i Giunti, 1562, pp. 114.
6. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
7. Ministero di Agricoltura, “Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836”, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. 767.
8. Peverone Gio.(van) Francesco, “Arithmetica e Geometria”, Lione, Gio. di Tornes, 1558 e 1581, pp. 134.
9. Sfortunati Giovanni, “Nuovo Lume”, Venezia, Francesco del Leno, 1561.
10. “Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze”, Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.
11. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.

INDICE