sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: abacisti famiglia Calandri, aree figure piane, triangolo 13-14-15, la costante 7/88 e il suo reciproco 88/7, segmento circolare, teorema delle corde, pavimentazioni, braccio da panno, braccio da terra, staioro a corda, panoro, pugnoro, volumi solidi semplici, scavi, staio per grano, barile, misura botti, problemi sulle torri, poligoni inscritti e circoscritti, cerchi inscritti e circoscritti

La Famiglia Calandri

Elisabetta Ulivi ha dedicato notevoli studi agli abacisti fiorentini, fra i quali quelli appartenenti alla famiglia Calandri e a Maestro Benedetto.

Calandro Calandri (1419 – 1468 o 1469) fu un importante abacista: il nonno materno fu il Maestro Luca (1356 – 1433-1437), altro importante matematico.

Dopo la sua morte, il lavoro di Calandro fu continuato dal primogenito Pier Maria (1457-1508) al quale si unì l'altro figlio, Filippo Maria (1468-1518).

Fra gli allievi di Calandro fu uno dei maggiori abacisti fiorentini, Benedetto di Antonio, conosciuto come Maestro Benedetto da Firenze (1429 – 1479).

A Maestro Benedetto sono stati attribuiti alcuni trattati fra i quali quello contenuto nel *Codice Acquisti e doni 154* della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze: è il *Tractato d'abbacho* e il testo è stato pubblicato da Gino Arrighi nel 1974 che lo ha ritenuto opera di Pier Maria Calandri. Il testo sarebbe stato composto intorno al 1459, ciò che proverebbe l'erronea attribuzione a Calandri. A giustificazione dell'errore vi è sicuramente la familiarità fra i componenti della famiglia Calandri e lo stesso Maestro Benedetto.

Il codice L.IV.21 della Biblioteca Comunale di Siena, risalente al 1463, contiene una *Praticha d'arismetica* anche questa attribuita a Maestro Benedetto.

Alcuni studiosi assegnano a Maestro Benedetto anche la paternità di due codici *anonimi* conservati nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:

* il Palatino 573 che reca il titolo *Praticha d'arismetricha*;
* Il *Trattato di pratiche di geometria*, scritto in toscano, e risalente a circa il 1464. È conservato con la denominazione di *manoscritto Palatino 577* nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Alcuni studiosi, fra i quali Ettore Picutti e Elisabetta Ulivi, lo attribuiscono a Maestro Benedetto da Firenze (1429-1479).

Questi due ultimi trattati sarebbero stati compilati nel periodo 1460-1465.

Filippo Calandri è l'autore del trattato "Aritmetica", compilato per uno dei figli di Lorenzo il Magnifico (Giuliano de' Medici, 1479-1516), poi pubblicato a Firenze da Lorenzo Morgiani e Johann Petri, nel 1491: alla data di pubblicazione del suo testo Calandri aveva 23 anni.

L'originale è conservato nel Codice 2669 della Biblioteca Riccardiana di Firenze: è un codice membranaceo in scrittura umanistica corsiva elaborato alla fine del XV secolo: contiene 122 carte che misurano 11,6 x 17 centimetri e reca il titolo *Trattato di aritmetica*.

I soli testi dei problemi contenuti nel codice sono stati pubblicati da Gino Arrighi nel volume citato in bibliografia.

L'edizione a stampa del 1491 non è l'esatta riproduzione del codice riccardiano: molti problemi sono comuni ai due testi, anche se talvolta i dati differiscono.

Ecco come è descritto il codice 2669 sul sito della Biblioteca Riccardiana:

Il codice contiene un trattato di aritmetica e geometria attribuito a Filippo Calandri, preceduto dalle tavole pitagoriche per la moltiplicazione di numeri semplici e composti. Costituisce la "redazione manoscritta" dell'incunabolo stampato a Firenze nel 1491 e dedicato a Giuliano de' Medici, figlio di Lorenzo il Magnifico e futuro duca di Nemours (1479-1516). Presenta un ricchissimo apparato decorativo, che si dispiega in ogni carta del codice, conferendogli l?aspetto di un libro di lusso più che d'uso pratico. Le tavole pitagoriche sono inserite in ricche cornici ornate da motivi classici, figure mitologiche e numerosi stemmi, emblemi e imprese della famiglia Medici. Il trattato è accompagnato da illustrazioni marginali che raffigurano gli esercizi e i problemi legati alla pratica della mercanzia descritti nel testo, con un chiaro intento didattico-esplicativo. Anche in ciascuna di queste vignette, costituite da disegni parzialmente colorati a tempera, compare lo stemma dei Medici, spesso appeso all'emblema mediceo del broncone. In una delle miniature si trova la scritta "Carlus rex", forse un omaggio al re di Francia Carlo VIII (1483-1498), oppure un'allusione a Carlo Magno, di cui l'avo Averardo dei Medici sarebbe stato comandante; mentre, in altre due carte compare lo stemma dei Dell'Antella. La decorazione e figurazione miniata sono state attribuite da alcuni studiosi alla bottega di Giovanni Boccardo, detto Boccardino il Vecchio. Gli ultimi studi (Ciardi Dupré, 2003) propongono l'individuazione di due distinti miniatori: il primo, autore della maggior parte delle vignette e dell'apparato decorativo del trattato, legato alla cultura artistica fiorentina degli anni 1460-80 e influenzato dai modelli di Francesco di Antonio del Chierico e della sua scuola; il secondo, a cui si devono le tavole pitagoriche e numerosi interventi nelle illustrazioni marginali, cronologicamente più tardo, vicino allo stile di Gherardo di Giovanni e Pedro Berruguete. Ciò ha indotto ad ipotizzare che il nucleo iniziale del codice riccardiano fosse costituito dal trattato, realizzato negli anni settanta, che poi fu, alla fine del XV secolo, arricchito dalle tavole pitagoriche e da altri interventi figurativi e decorativi.

Alcuni dei problemi proposti da Pier Maria Calandri nel suo testo geometrico al quale è dedicato questo articolo sono ripresi dal *Tractato d'abbacho* di Maestro Benedetto. Il fatto era abbastanza comune nei testi degli abacisti del basso Medioevo e del primo Rinascimento: la fantasia umana è pur sempre limitata. Un fenomeno del genere accade anche ai nostri tempi: gli esercizi contenuti nei libri di testo di matematica per le scuole secondarie sono tutti originali? Parte di essi è "ispirata" da esempi ripresi da testi concorrenti: sembra che fra i libri più adottati vi siano quelli con il più ampio ventaglio di esercizi.

IL TRATTATO DI ARITMETICA PUBBLICATO NEL 1491

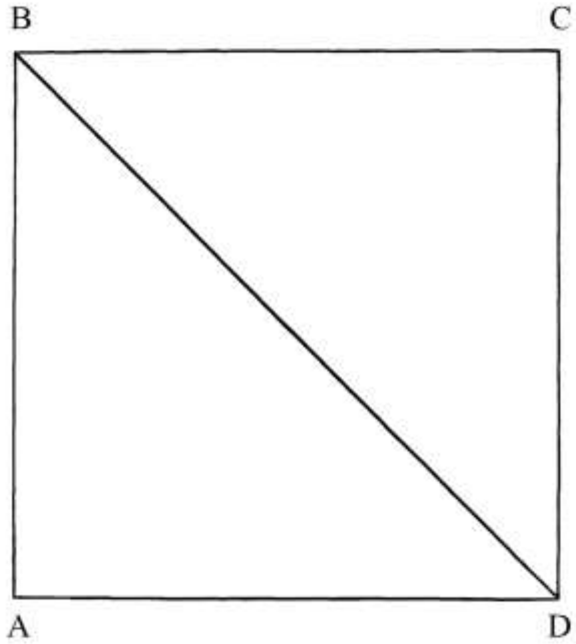
In questa prima parte sono presentati i problemi di natura geometrica contenuti nella parte finale del volume stampato nel 1491.

Note

* Calandri usa espressioni come "3 ½" per 3,5, senza scrivere alcun simbolo infisso come è "+": qui si è sempre scritto "3 + ½" oppure "3,5".
Calandri non usa la *virgola decimale*, come è richiesto da "3,5".
* Per semplificare la scrittura, il simbolo di frazione è reso con la barra "/", anziché con la barra orizzontale.
* L'Autore usa per π il valore approssimato che lui indica con l'espressione "3 1/7": in questo articolo è quasi sempre usata l'equivalente frazione "22/7".
* La maggior parte delle figure è stata ridisegnata.
* Ai punti significativi delle figure sono state apposte le lettere (maiuscole), assenti nel testo a stampa.
* Alcuni argomenti sono ampliati con appositi riquadri graficamente evidenziati e contrassegnati con la dicitura APPROFONDIMENTO.

Area di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 12 braccia. Sono chieste la lunghezza di una diagonale e l'area del poligono.



La soluzione del problema della lunghezza di una diagonale è un'applicazione del cosiddetto teorema di Pitagora:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$ e

$BD = \sqrt{288}$ [= $12 * \sqrt{2}$] braccia.

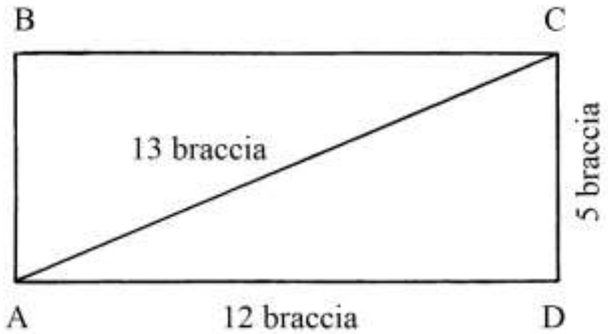
L'area S è:

$S = AD^2 = 12^2 = 144$ braccia^2.

Diagonale di un rettangolo

Un rettangolo è lungo 12 braccia e largo 5.

Il problema chiede la lunghezza di una diagonale e l'area.



La diagonale AC è lunga:

$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ e

$AC = \sqrt{169} = 13$ braccia.

La diagonale AC divide il rettangolo ABCD in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ACD e ABC. Le lunghezze dei lati dei due triangoli – 5, 12 e 13 – formano una terna pitagorica primitiva, la seconda dopo quella 3-4-5.

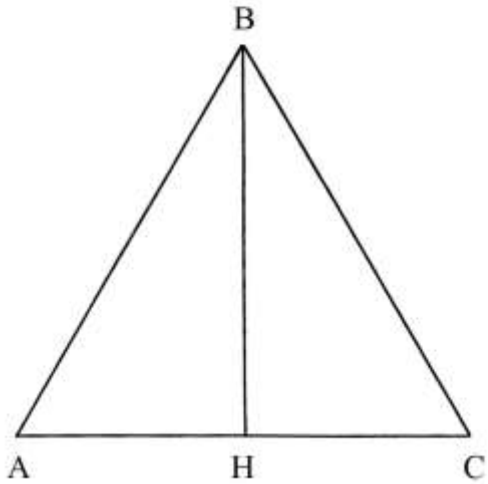
L'area del rettangolo è:

$$S_{ABCD} = AD * AB = 12 * 5 = 60 \text{ braccia}^2.$$

Triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.

Sono chieste la lunghezza dell'altezza BH e l'area del triangolo.



L'altezza BH è lunga:

$$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = ¾ * AB^2 = ¾ * 10^2 = 75 \quad \text{e}$$

$$BH = \sqrt{75} \text{ braccia}.$$

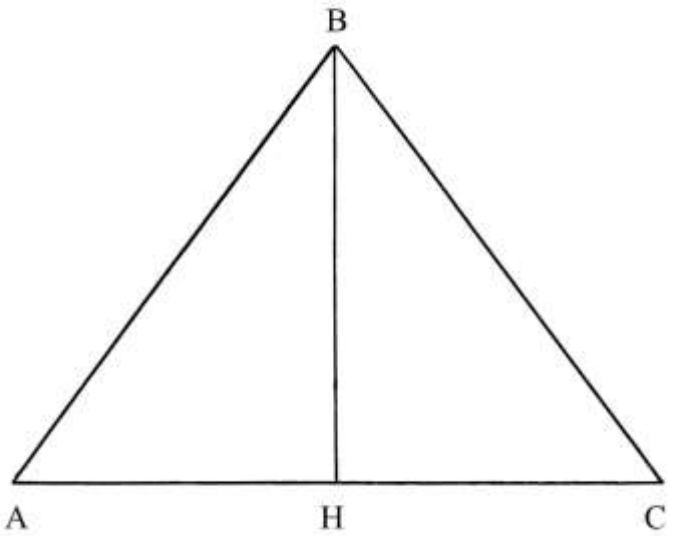
L'area S del triangolo è:

$$S = BH * AH = \sqrt{75} * 10/2 = \sqrt{75} * 5 = (43 + 13/43) \text{ braccia}^2.$$

Triangolo isoscele

Un triangolo isoscele ha u lati obliqui lunghi 20 braccia e il lato di base 24 braccia.

Il problema chiede la lunghezza dell'altezza BH e l'area del triangolo.



L'altezza BH è lunga:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 20^2 – (24/2)^2 = 20^2 – 12^2 = 400 – 144 = 256$ e

$BH = \sqrt{256} = 16$ braccia.

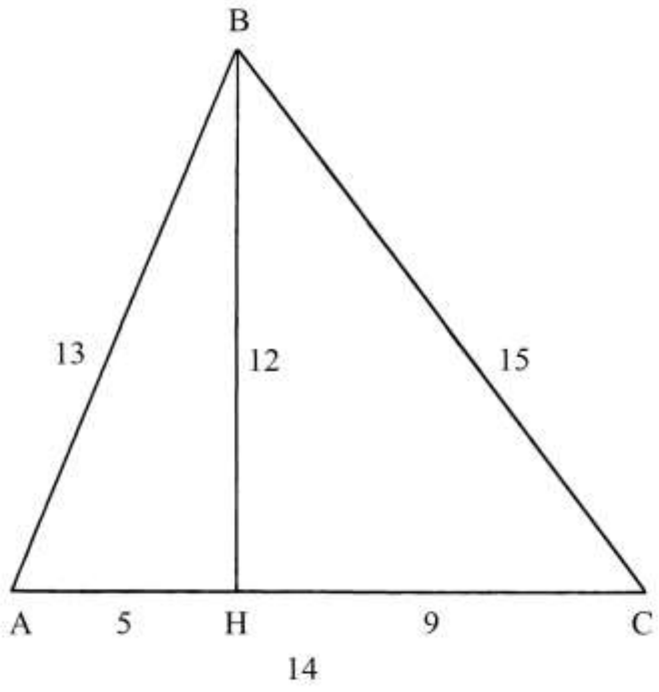
L'area S del triangolo è:

$S = BH * AH = 16 * 12 = 192$ braccia^2.

<u>Triangolo 13-14-15</u>

Il problema presenta il classico triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15 che è stato studiato da numerosi geometri (almeno a partire da Erone di Alessandria, I secolo d.C.) e da numerosi abacisti italiani.

Questo speciale triangolo possiede un'importante proprietà: le lunghezze dei lati e di un'altezza e l'area sono espresse da *numeri interi*.



Il problema presentato da Calandri chiede l'altezza e l'area.

Il lato orizzontale AC è lungo 14 braccia: la sua posizione facilita le soluzioni perché, come vedremo, l'altezza ad esso relativa, BH, ha lunghezza espressa da un numero intero.

Di seguito è fornita una descrizione più analitica della soluzione rispetto a quella assai stringata del testo di Filippo Calandri.

Calcolare i quadrati delle lunghezze dei tre lati:

* $AB^2 = 13^2 = 169$;
* $AC^2 = 14^2 = 196$;
* $BC^2 = 15^2 = 225$.

Sommare i quadrati delle lunghezze di AB e di BC:

$AB^2 + AC^2 = 196 + 169 = 365$.

Sottrarre il quadrato della lunghezza di BC:

$(AB^2 + AC^2) – BC^2 = 365 – 225 = 140$.

Dividere per il doppio della lunghezza di AC:

$140/(2 * AC) = 140/(2 * 14) = 140/28 = 5$ braccia, lunghezza di AH.

La lunghezza di HC è:

$HC = AC – AH = 14 – 5 = 9$ braccia.

I passi di questa procedura sono riassunti nella formula che segue:

$AH = [(AB^2 + AC^2) – BC^2]/(2 * AC)$.

La lunghezza dell'altezza BH è data da:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144$ e

$BH = \sqrt{144} = 12$ braccia.

L'area S del triangolo è:

$S = AC * BH/2 = 14 * 12/2 = 84$ braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione del calcolo delle lunghezze di AH, HC e BH può essere ricavata per via algebrica.

AH è la lunghezza incognita "x":

$AH = x$ quindi

$HC = AC – AH = (14 – x)$.

BH è un cateto comune ai due triangoli rettangoli ABH e BHC. La lunghezza di BH è data da due distinte uguaglianze:

* $BH^2 = AB^2 – AH^2 = 13^2 – x^2 = 169 – x^2$;
* $BH^2 = BC^2 – HC^2 = 15^2 – (14 – x)^2 = 225 – 196 – 28 * x – x^2 = 29 + 28 * x – x^2$.

Uguagliando le due espressioni che esprimono BH^2 si ha:

$169 – x^2 = 29 + 28 * x – x^2$

$169 – 29 = 28 * x$

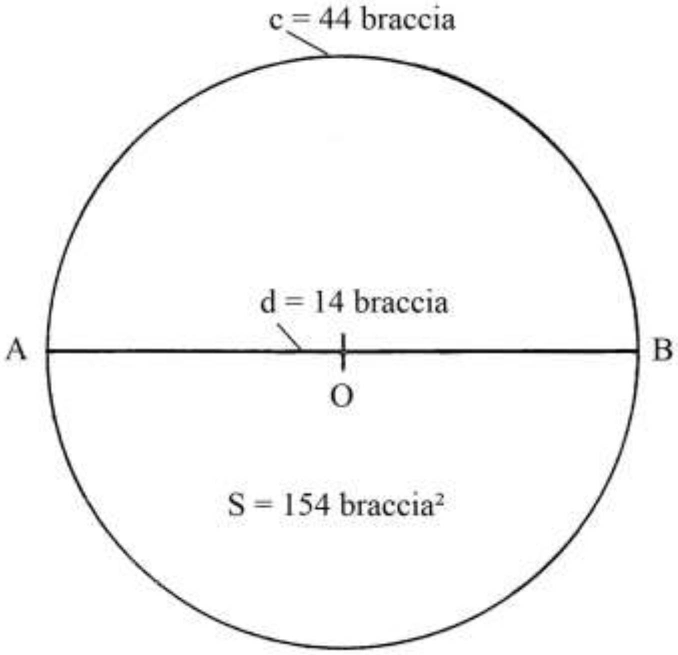
$140 = 28 * x$

$x = 140/28 = 5$ braccia = AH.

- -

Un cerchio

Un cerchio ha diametro *d* lungo 14 braccia.



Il problema chiede la lunghezza della circonferenza, *c*, e l'area del cerchio, *S*.

Per il valore di π l'Autore utilizza il valore approssimato di (3 + 1/7) [=22/7] che risale a Archimede: Calandri lo scrive "3 1/7" senza alcun simbolo infisso per indicare l'addizione.

La circonferenza *c* misura:

$$c = d * (3 + 1/7) = 14 * (3 + 1/7) = 44 \text{ braccia.}$$

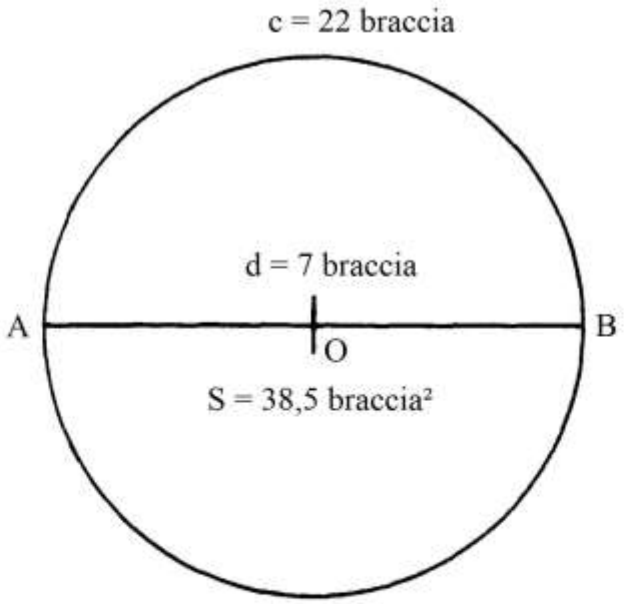
La superficie *S* è:

$$S = (d/2)^2 * (3 + 1/7) = (14/2)^2 * 22/7 = 49 * 22/7 = 154 \text{ braccia}^2.$$

Un secondo cerchio

Un cerchio ha la circonferenza *c* lunga 22 braccia.

Devono essere calcolati la lunghezza del diametro e l'area.



Il diametro *d* è dato da:

$d = c/(3 + 1/7) = 22/(3 + 1/7) = 7$ braccia.

L'area del cerchio è calcolata come segue:

$S = 7/88 * c^2 = 7/88 * 22^2 = 7/88 * 484 = 38{,}5$ braccia^2 [Calandri scrive "38 ½"].

Filippo Calandri ha usato la costante 7/88.

\- APPROFONDIMENTO -

La costante 7/88 e il suo reciproco 88/7

Come il fratello Pier Maria Calandri, anche Filippo Calandri impiega la costante 7/88.

La lunghezza *c* della circonferenza è data da:

$c = 2 * \pi * r$, dove *r* è il raggio.

La formula può essere scritta come:

$c = 2 * (22/7) * r = 44/7 * r$.

La formula inversa è:

$r = (7/44) * c$.

Conoscendo soltanto la lunghezza della circonferenza, *c*, l'area di un cerchio può essere scritta nella forma che segue:

$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 \approx 22/7 * [(7/44) * c]^2 \approx 22/7 * 7^2/(44^2) * c^2 \approx$

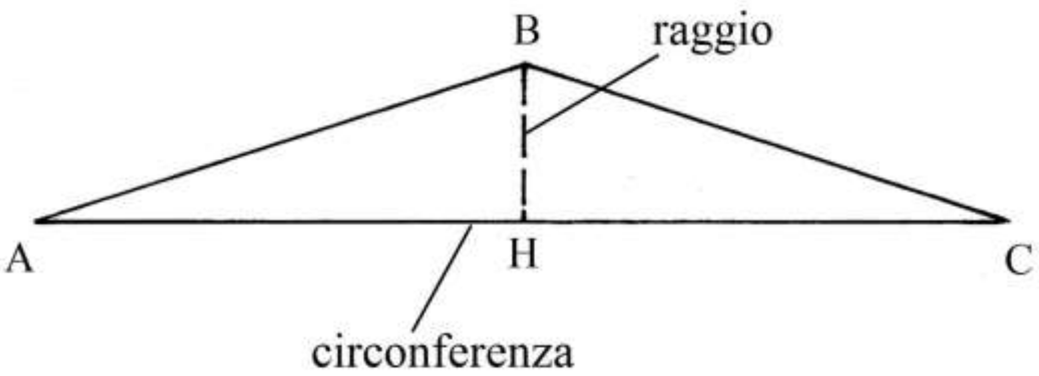
$\approx (22 * 7(/(44 * 44) * c^2 \approx [7/(2 * 44)] * c^2 = 7/88 * c^2$.

Da questa formula ricaviamo:

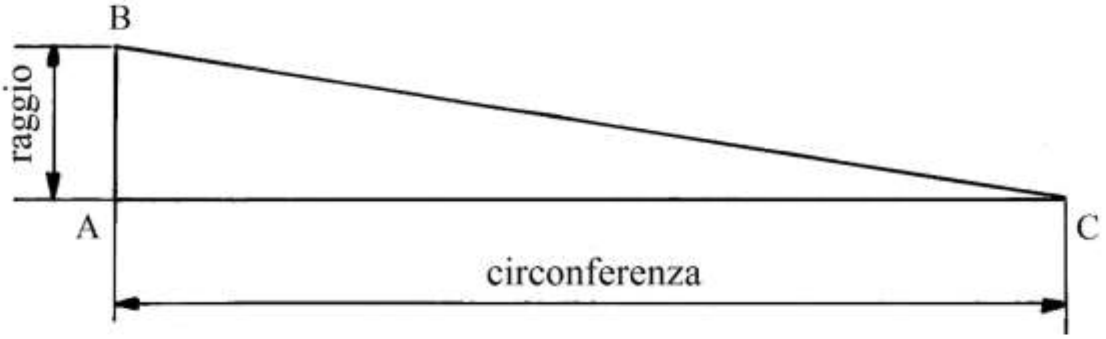
$c^2 = 88/7 * S_{\text{CERCHIO}}$.

Approfondiamo l'origine della costante 88/7, che può essere definita con l'espressione *moltiplicatore della superficie*.

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza *c* e altezza CH lunga quanto il raggio *r*:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza *c* e il raggio *r*:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

$S_{ABC} = (AC * BH)/2 = (\text{circonferenza} * \text{raggio})/2$.

Nel secondo caso:

$S_{ABC} = (AB * AC)/2 = (\text{raggio} * \text{circonferenza})/2$.

Ma:

$\text{circonferenza} \approx \text{diametro} * 22/7 \approx 2 * \text{raggio} * 22/7 \approx 44/7 * \text{raggio}$.

Da cui:

$\text{raggio} \approx \text{circonferenza} * 7/44$.

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha:

$S_{CERCHIO} = (\text{circonferenza})^2 *1/2 * 7/44 \approx (\text{circonferenza})^2 * 7/88$.

Da questa ultima formula si ricava la lunghezza della circonferenza che è data da:

$\text{circonferenza} \approx \sqrt{}(S_{CERCHIO} * 88/7)$.

La frazione 88/7 vale può essere scritta anche come

$88/7 = (12 + 4/7)$: questa costante è il *moltiplicatore della superficie,* noto a diversi abacisti toscani: Paolo Gherardi, Paolo dell'Abbaco e Orbetano da Montepulciano. Questa frazione corrisponde al rapporto fra il quadrato della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

$\text{circonferenza}^2 = S_{CERCHIO} * 88/7$.

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio r è data da:

$S \text{ cerchio} = \pi * r^2$, mentre la circonferenza è lunga: $\text{circonferenza} = 2 * \pi * r$.

Ne consegue che:

$(\text{circonferenza})^2/(S_{CERCHIO}) = (4 * \pi^2 * \text{raggio}^2)/(\pi * \text{raggio}^2) = 4 * \pi$.

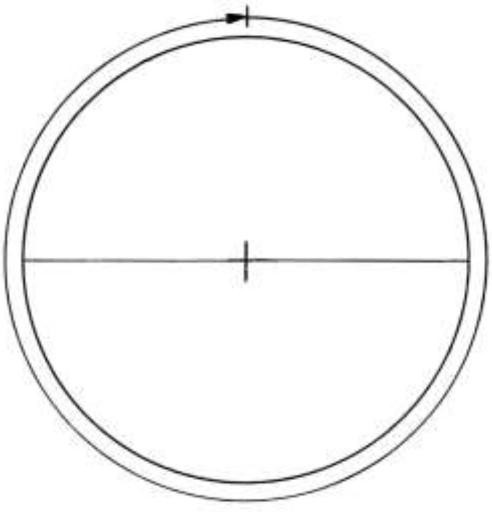
Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

$4 * (22/7) = 88/7 = (12 + 4/7)$.

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di $4*\pi$.

Nel Medioevo per i calcoli era più facile usare la frazione 88/7 invece dell'equivalente *numero misto* (12 + 4/7).

Questo insieme di costanti approssimate – 22/7, 11/14, 88/7 e 7/88 – erano molto utili per i diversi calcoli riguardanti il cerchio e la circonferenza. Un esempio era quello del calcolo del diametro di una colonna della quale era possibile misurare soltanto la circonferenza:

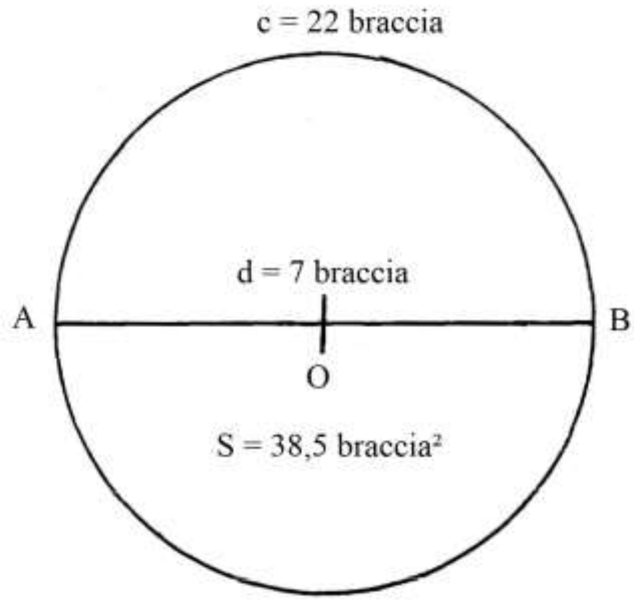


$$d = c/(22/7) = 7 * c/22 .$$

- -

Area di un cerchio

Il cerchio che ha fatto l'oggetto del precedente problema è qui utilizzato per calcolarne l'area in un modo differente.



La circonferenza è lunga 22 braccia e il diametro è lungo 7.
L'area di un cerchio è data dalla formula che segue:

$S = \pi * r^2 = \pi * r * r$.

Per π usiamo l'approssimazione (3 + 1/7). La formula diviene:

$S = [(3 + 1/7) * r] * r$.

L'espressione [(3 + 1/7) * r] rappresenta la lunghezza di *metà della circonferenza, c*, infatti:

$c = 2 * \pi * r = 2 * [(3 + 1/7) * r]$.

Il raggio *r* è lungo metà del diametro *d*:

$r = d/2$.

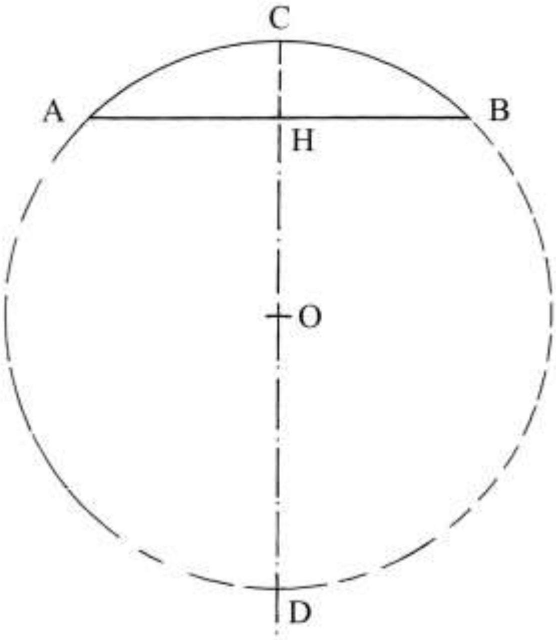
La formula dell'area diviene:

$S = c/2 * d/2$: questa è la formula che Calandri ha usato quale metodo alternativo per il calcolo dell'area del cerchio:

$S = (22/2) * (7/2) = 11 * 3,5 = (33 + 5,5) = 38,5$ braccia^2.

Un segmento circolare

Da una ruota di diametro incognito è stato tagliato un segmento circolare che ha corda AB lunga 40 braccia e freccia CH ("saetta") di 8 braccia.



Il problema chiede il diametro della ruota, CD in figura.

La soluzione è ottenuta applicando il *teorema delle corde* che Calandri applica ma non cita espressamente:

AH : CH = HD : HB
40/2 : 8 = HD : 40/2
20 : 8 = HD : 20
HD = 20 * 20/8 = 50 braccia.

Il diametro CD è lungo:

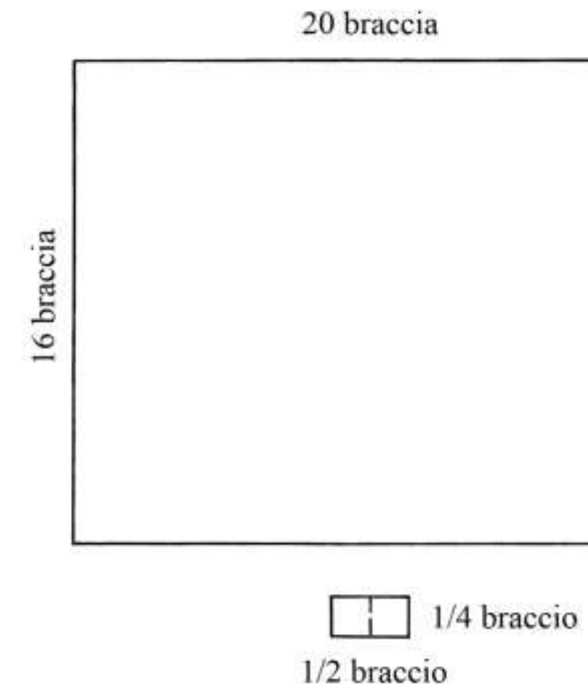
CD = CH + HD = 8 + 50 = 58 braccia.

<u>Pavimentazione di una sala</u>

Una sala è lunga 20 braccia ed è larga 16.

Il suo deve essere ricoperto con mattoni rettangolari lunghi ½ braccio e larghi ¼ di braccio.

Il problema chiede il numero di mattoni occorrenti per ricoprire il pavimento.



I mattoni hanno la forma di un doppio quadrato, un *bislungo*.

Nello schema, il mattone è disegnato in scala ingrandita.

L'Autore calcola l'area del pavimento della sala e poi quella della faccia superiore di un singolo mattone:

* $S_{SALA} = 20 * 16 = 320$ braccia^2;
* $S_{MATTONE} = ½ * ¼ = 1/8$ braccia^2.

Il numero *N* dei mattoni occorrenti è dato dal rapporto fra l'area del pavimento e quella faccia di un mattone:

$N = S_{SALA}/S_{MATTONE} = 320/(1/8) = 320 * 8 = 2560$ mattoni occorrenti.

Le dimensioni di un mattone sono sottomultipli esatti di quelle del pavimento: la copertura è completa.

<u>Misura di un terreno</u>

Un terreno è lungo 150 braccia da terra ed è largo 138.

È opportuno ricordare che i terreni erano misurati in braccia da terra (e loro multipli): il braccio da panno era impiegato per tutti gli altri usi.

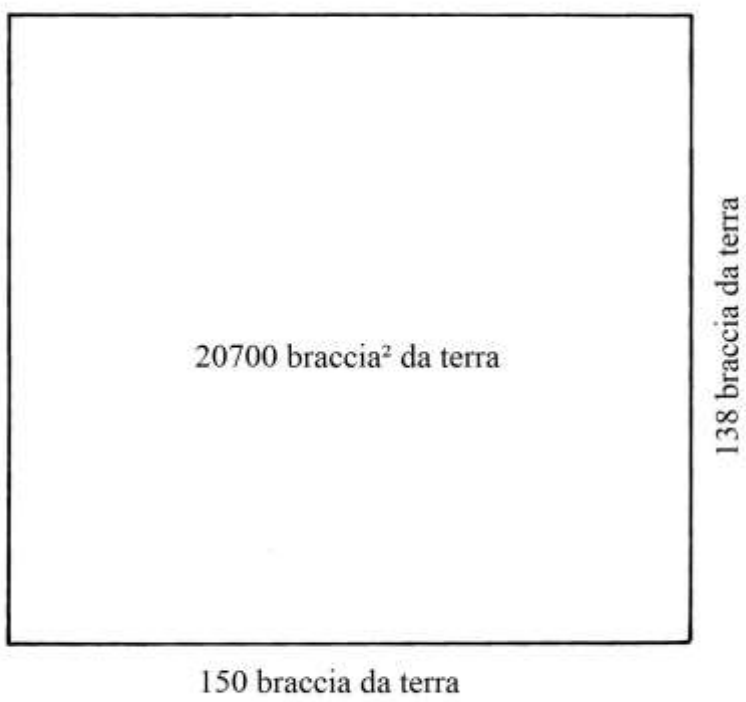
Il problema chiede quante *staiora a corda* misura.

Lo staioro a corda possedeva i seguenti sottomultipli in base 12:

* 1 staioro a corda = 12 panora;
* 1 panoro = 12 pugnora;
* 1 pugnoro = 12 braccia^2 da terra.

Ne discendevano alcune relazioni:

* 1 staioro a corda = 12^3 braccia quadre da terra = 1728 braccia^2 da terra;
* 1 panoro = 12^2 braccia quadre da terra = 144 braccia quadre da terra.



L’area del terreno, rettangolare, è:

$$S = 150 * 138 = 20700 \text{ braccia}^2 \text{ da terra.}$$

Procediamo a convertire l’area nei multipli del braccio quadro da terra:

* 20700/1728 = 11 staiora + 1692 braccia^2 da terra;
* 1692/144 = 11 panora + 108 braccia^2 da terra;
* 108/12 = 9 pugnora.

Il terreno ha area uguale a:

20700 braccia^2 da terra = 11 staiora a corda + 11 panora + 9 pugnora.

\- APPROFONDIMENTO -

Il Trattato geometrico di Pietro Maria Calandri

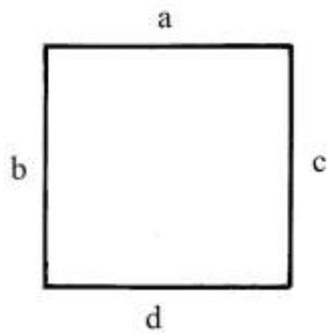
Pietro [o Pier] Maria Calandri, fratello maggiore di Filippo Calandri, scrisse un piccolo trattato geometrico dal titolo “*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*” che fu pubblicato da Giovan Vettorio Soderini (1526 – 1596) nel suo volume di agricoltura: esso è contenuto nelle pagine 291-346 del volume pubblicato nel 1902 e citato in bibliografia. A parte il titolo, il testo geometrico è scritto in italiano.

Il lavoro di Calandri riveste una notevole importanza per la fissazione delle unità di misura fiorentine e per la loro datazione, perché è uno dei pochissimi testi sull’argomento. Esso inizia con un’affermazione:

“*Dividesi la geometria in due parti, delle quali l’una è detta teorica e l’altra pratica; ma la teorica lascieremo al presente a’ filosofanti, e della pratica al numero congiunta, quanto a quello che alla notizia del misurare la terra fa di bisogno, diremo…*”.

Le pagine iniziali del trattato di Calandri, dalla 292 alla 294, sono riservate alla descrizione del sistema metrologico in uso a Firenze a cavallo del 1500: la fonte è una delle principali e pochissime fra quelle che abbiamo a disposizione sull'argomento. Di seguito sono riprodotti alcuni stralci da quelle pagine:

"…Riducesi ogni terreno a staiora o vero parti di staioro, secondo la quantità del terreno che si misura. Questo nome staioro in due modi s'intende: l'uno è detto staioro a corda, o vero a misura; l'altro è detto staioro a seme. Staioro a seme è detto quello che tanto spazio di terreno comprende, che in esso uno staio di grano si sementi. Staioro a corda o vero a misura è quello che in esso la terza parte d'uno staio di grano si semina in circa. In circa dissi, perchè intra i terreni nel gittare il seme fa qualche cosa differenzia, secondo la qualità della terra peggiore o migliore, di piano o montuosa, in modo che uno staio di grano in piano tre staiora sementa a copia, et in poggio tre e mezzo. Lo staioro a corda immaginariamente è diviso in dodici parti, et ogni parte si chiama panoro: il panoro similmente si divide in dodici parti, ed ogni parte si chiama pugnoro: il pugnoro ancora si divide in dodici parti, et ogni parte si chiama braccio quadro. Il detto braccio non ha divisione, se non in quella parte che facesse divisione di esso braccio, come è a dire mezzo braccio, un terzo di braccio e due quinti di braccio e simili parti o parte: il che, perchè è cosa minima, si lascia, e solamente delle staiora panori e pugnori e braccia quadre intere si tiene conto. Il braccio quadro è tanto spazio di terra, quanto da uno braccio di lunghezza et uno di larghezza è compreso; cioè per braccio quadro s'intende una superficie piana che per ogni verso sia un braccio, come verbigrazia la superficie, la quale pongo essere per ogni verso un braccio. E tutto quello spazio da detta superficie compreso dico essere braccio quadro o vero superficiale che è quel medesimo. E quando diciamo: questo campo è cinquanta o cento braccia, intendiamo quadre, cioè che in quel campo sia cinquanta o cento volte la sopraddetta superficie quadrata *a. b. c. d.*



"Furono anticamente trovate due braccia, cioè di due ragioni, con le quali attualmente tutte le cose si misurano: l'uno si chiama braccio da terra, e l'altro braccio universale. Braccio universale è detto quello co 'l quale panni, drappi et universalmente ogni cosa si misura; braccio di terra è quello co 'l quale la terra solamente si misura, non alcuna altra cosa; e perchè egli è un poco di minor quantità che il braccio universale, però s'è per pruova veduto che uno staioro a corda è 1728 braccia quadre di braccia da terra; e di quelle universali braccia di panno è 1600 braccia quadre, cioè 1728 braccia quadre da terra sono 1600 braccia quadre da panno; e questo secondo il comune uso; ma, secondo la verità, 1728 braccia da terra quadre sono 1540 braccia quadre in circa da panno. E però al vendere e comprare terreni è vantaggio con qual braccio si misuri; imperciocchè, comprando uno staioro di terra misurato co 'l braccio da panno che sarà 1600 braccia, sono più giusta misura o vero più braccia quadre che 1728 da terra. Ma qualche volta il detto braccio universale s'usa per aver più comodità di quello che del braccio da terra. Ma il modo del misurare e del fare il conto è un medesimo e con l'uno e con l'altro braccio che si sia misurato: solo questa differenza si piglia, che per ogni 1600 braccia quadre da panno si piglia un staioro a corda, e di quelle altre da terra per ogni 1728 braccia quadre s'ha a pigliare uno staioro a corda.

"Adunque il numero delle braccia quadre, quando sono da panno, si parte per 1600, e quando sono da terra si parte per 1728; e quello ne viene sono staiora e parti di staiora, come meglio al luogo conveniente sarà manifesto, ponendo esempii con l'una e con l'altra misura. Compone il misuratore co 'l detto braccio una misura che contiene seti di quelle braccia, la quale chiama canna; e con questo instrumento piglia la misura della lunghezza e larghezza, la quale auta, si riduce a braccia quadre e staiora, come in quello che seguirà sarà manifesto. Quello che s'è detto e quello che si dirà è secondo il modo et uso fiorentino: questo dico, perchè le misure sono varianti secondo l'uso e costume dei paesi maggiori o minori…".

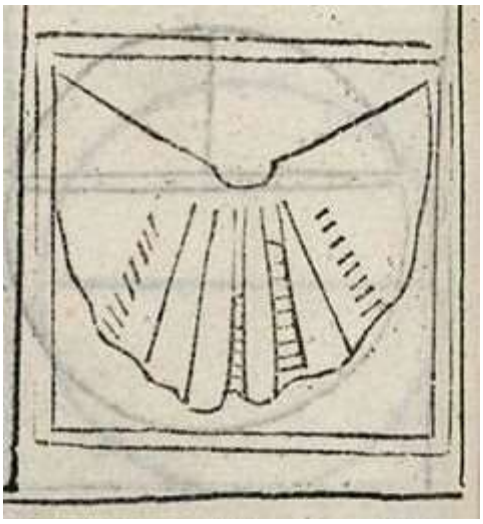
Ulteriori informazioni sulle unità di misura toscane sono reperibili nel mio articolo "Unitamisuratoscane.pdf" citato in bibliografia e disponibile sul sito www.geometriapratica.it.

- -

<u>Un mantello</u>

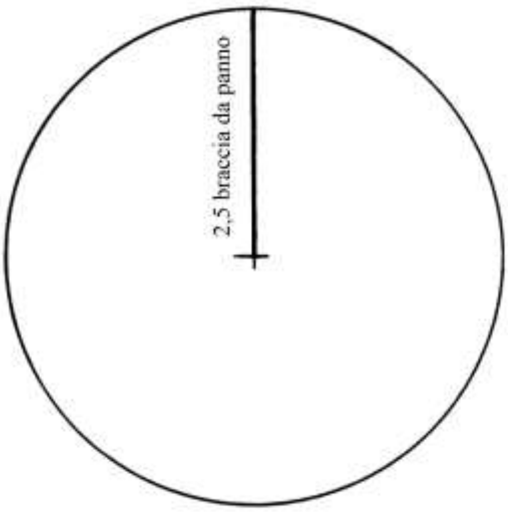
Un mantello è stato tagliato da un panno. Esso ha forma circolare e il suo raggio è lungo 2,5 braccia.

La descrizione del problema non è molto chiara, come spiega la figura originale:



Vi è il dubbio che, nella parte superiore, si possa verificare un certo spreco di tessuto.

Deve essere calcolata l'area in braccia quadre da panno.



Il diametro *d* è 5 braccia. La superficie è calcolata usando la costante “11/14” che è il rapporto approssimato fra l’area di un cerchio e quello del quadrato ad esso circoscritto, che ha lati lunghi quanto il diametro del primo:

$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 5^2 = (19 + 9/14) \text{ braccia}^2 \text{ da panno.}$$

- APPROFONDIMENTO -

L’area di un quadrato che ha lati lunghi *d* è:

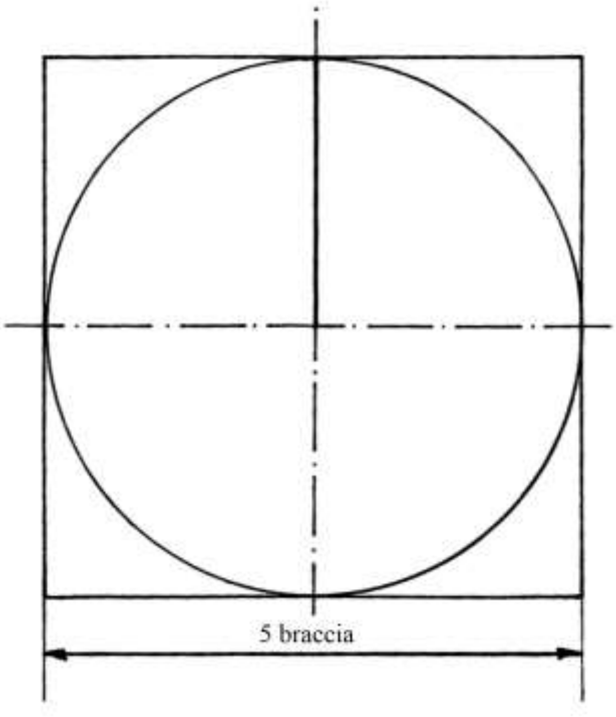
$$S_{\text{QUADRATO}} = d^2.$$

L’area del cerchio inscritto, con diametro *d* è data da:

$$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * (d/2)2 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2.$$

Il rapporto fra l’area del cerchio inscritto e quella del quadrato circoscritto è:

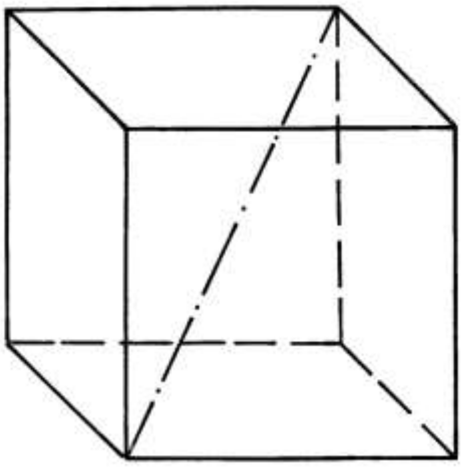
$S_{\text{CERCHIO}}/S_{\text{QUADRATO}} = (11/14 * d^2)/(d^2) = 11/14$, che è la costante usata da Filippo Calandri nella soluzione di questo problema.



- -

Volume di un cubo

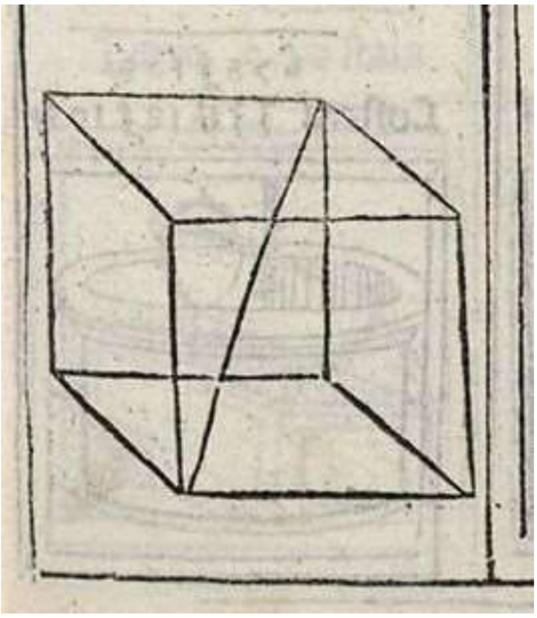
Una pietra ha la forma di un cubo: i suoi spigoli sono lunghi 8 braccia.



Il problema chiede il suo volume V:

$$V = 8 * 8 * 8 = 8^3 = 512 \text{ braccia}^3.$$

Nel trattato a stampa, alla carta 89, è disegnato a “*fil di ferro*” un cubo:



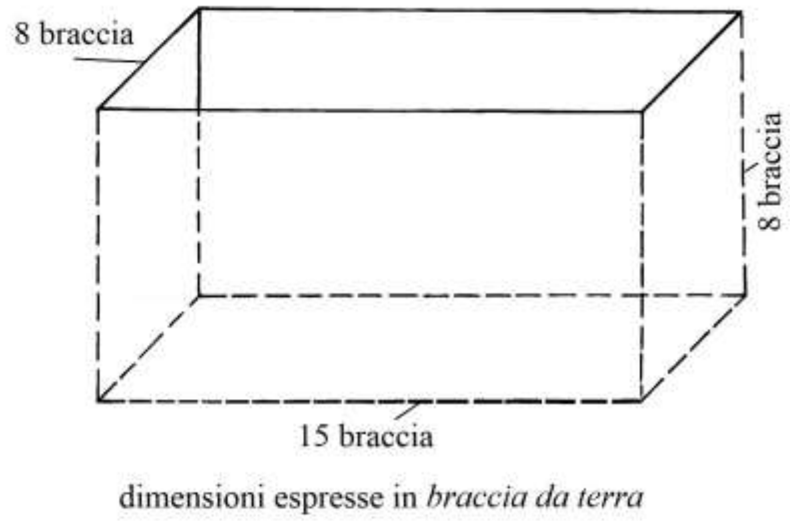
Vi è pure disegnata una diagonale del cubo.
Il solido è rappresentato in assonometria quasi cavaliera.

Scavo di un pozzo

Un maestro muratore ha scavato una fossa profonda 8 braccia da terra, lunga 15 e larga 8.
Per poterlo pagare deve essere calcolato il volume dello scavo.
Il volume è:

$$V = 8 * 15 * 8 = 960 \text{ braccia}^3 \text{ da terra.}$$

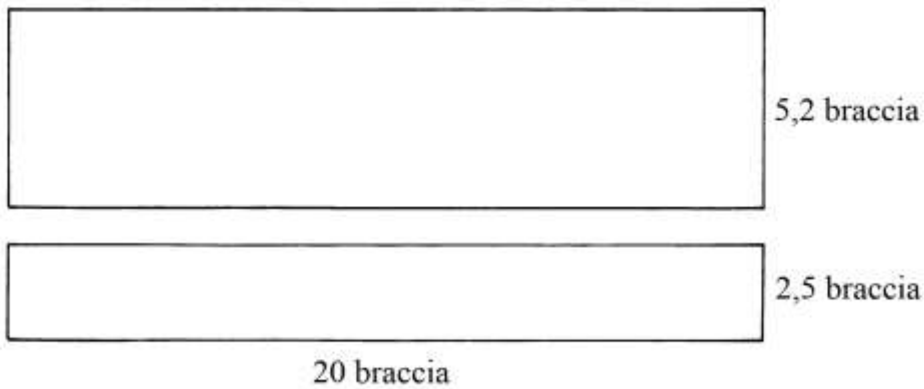
La fossa ha la forma di un prisma a base quadrata.



<u>Costruzione di un muro</u>

Deve essere costruito un muro lungo 20 braccia (da terra), con spessore 2,5 e altezza di 5,2 (5 + 1/5) braccia.

Il muro è realizzato con mattoni lunghi ½, larghi ¼ e spessi 1/8 di braccio.



Il volume del muro è:

$V_{MURO} = 20 * 2,5 * 5,2 = 260$ braccia^3 da terra.

Il volume di un mattone è:

$V_{MATTONE} = ½ * ¼ * 18 = 1/64$ braccia^3.

Il numero N di mattoni occorrenti è:

$N = V_{MURO}/ V_{MATTONE} = 260/(1/64) = 166640$ mattoni.

<u>Scavo di un pozzo</u>

Il problema chiede il costo di un pozzo circolare da scavare.

Il costo è proporzionale al volume di terra da asportare.

Il manufatto ha profondità *h* di 16 braccia e diametro *d* di 3.

L'area *S* della sezione trasversale è:

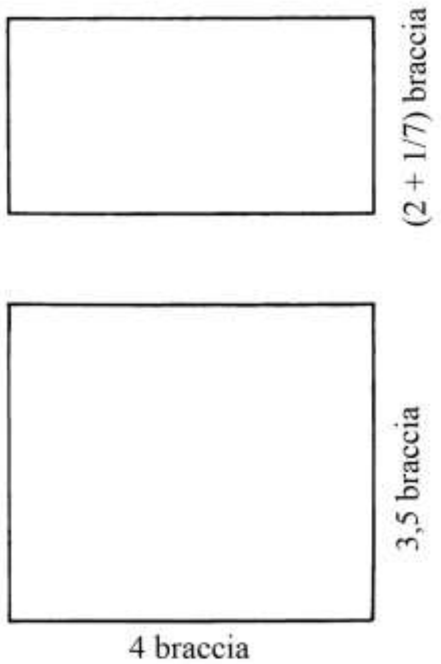
$S = 11/14 * (d/2)^2 = 11/14 * (3/2)^2 = 99/56$ braccia^2.

Il volume *V* è:

$V = h * S = 16 * 99/56 = 198/7 = (28 + 2/7)$ braccia^3.

Volume di una cassa

Una cassa è lunga 4 braccia, è larga 3,5 e profonda (2 + 1/7).
Il problema chiede quanto grano può contenere.



Il volume V è:

$V = 4 * 3{,}5 * (2 + 1/7) = 14 * 15/7 = 30$ braccia^3.

Calandri converte poi il volume in *staia*: a suo avviso, *1 braccio^3* equivale a *9 staia*, per cui la cassa contiene

30 * 9 = 270 staia di grano.

Questa stessa equivalenza era presente anche nel trattato di Pier Maria Calandri ("*Compendium de agrorum corporumque dimensione*").

\- APPROFONDIMENTO -

L'ingegnere militare e matematico senese Pietro Cataneo (1510 – 1569/1573) pubblicò nel 1567 a Venezia un testo: "*Le pratiche delle due prime matematiche*".

Riguardo allo *staio* egli afferma:

"…E prima è da sapere che in Siena, Fiorenza, e per la maggior parte di Toscana un braccio corporeo riquadrato tiene staia undeci di vino, e così stata 11 di grano e similmente staia undeci d'oglio, così delli altri biadumi e alimenti che si radono, ma di calcina di gesso e d'altre cose grosse o di poca valuta che si misurano a staia come s'è costumato anticamente, e così s'usa ancora, che di tali ne vada solo staia 10 per braccio quadro corporeo, lo staio si divide in quattro quarti, & il quarto si divide in quattro boccali, e staia 24 fanno un moggio…" (carta 81).

Il *braccio quadro corporeo* è un'espressione usata per indicare il *braccio cubico*.
Dal testo di Cataneo discendono due considerazioni:

a) Dalla data di pubblicazione del testo di Filippo Calandri (1491) a quello del trattato di Pietro Cataneo (1567) sono trascorsi 76 anni: in quel lasso di tempo, il braccio cubico usato in Toscana era passato da valere 9 staia a 11 staia.
b) Cataneo accenna a due diverse equivalenze del braccio cubico: 11 staia per i prodotti agricoli e 10 staia per quelli di origine non agricola.

- -

Capacità di un sacco

Un sacco ha diametro *d* di 2 braccia ed è alto 7: ha la forma di un cilindro.
Il problema chiede il volume di grano che può contenere.
La sezione circolare ha area S:

$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 2^2 = 44/14 = 22/7 = (3 + 1/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume V è:

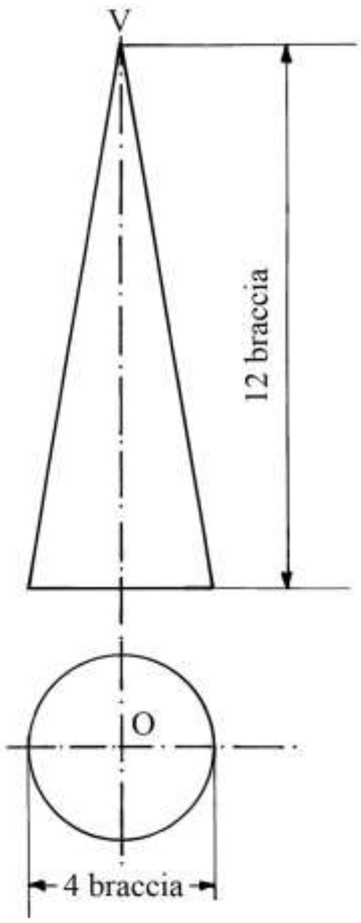
$$V = S + \text{altezza} = (3 + 1/7) * 7 = 22 \text{ braccia}^3.$$

Il contenuto di grano G misurato in staia è:

$$G = V * 9 = 22 * 9 = 198 \text{ staia}.$$

Volume di un cono

Un cono ha base con diametro *d* lungo 4 braccia ed ha altezza *h* di 12.
Il problema chiede il suo volume.



L’area S della base è:

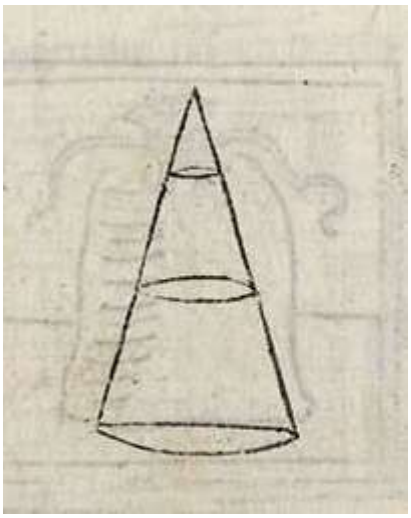
$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 4^2 = 88/7 = (12 + 4/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume V è:

$$V = (S * h)/3 = (12 + 4/7) * 12/3 = (50 + 2/7) \text{ braccia}^3.$$

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema contenuto nel testo di Calandri mostra un cono rappresentato in assonometria, con tre approssimative ellissi.



Il *rapporto di fuga* è la proporzione che intercorre fra le lunghezze dell'asse minore e dell'asse maggiore di una singola ellisse (che è la deformazione di un cerchio in assonometria).

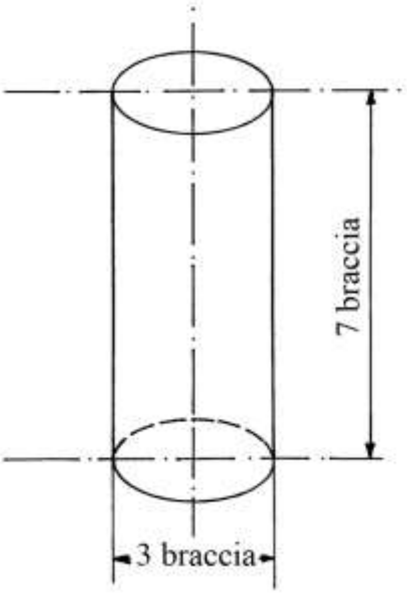
L'ellisse intermedia della figura presenta un rapporto di fuga che con un certa approssimazione può essere fissata in 0,2.

- -

Un pozzo riempito d'acqua

Un pozzo cilindrico ha diametro *d* di 3 braccia ed è profondo 7.

Viene riempito d'acqua.



Deve essere calcolato il volume dell'acqua che può contenere.

La sezione trasversale *S* è:

$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 3^2 = 99/14$ braccia^2.

Il volume *V* è:

$V = S *$ profondità $= (99/14) * 7 = 49{,}5$ braccia^3.

Infine, Calandri converte il volume in *barili* sulla base dell'equivalenza:

1 braccio^3 [da panno] = 5 barili.

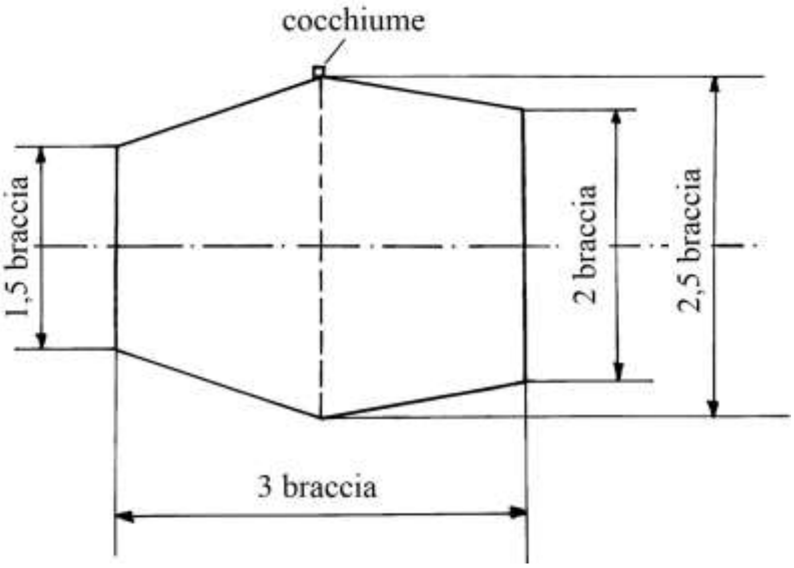
La stessa equivalenza fra *braccia*^{3} e *barili* era stata usata dal fratello maggiore Pier Maria Calandri.

$V = 49{,}5 * 5 = 247{,}5$ barili.

Volume di una botte

Una botte ha il fondo posteriore con diametro 2 braccia, al cocchiume ha diametro di 2,5 e il fondo anteriore ha diametro lungo 1,5 braccia.

La lunghezza misurata fra i due fondi è di 3 braccia.



Per semplicità, qui sopra è disegnato un solido simmetrico rispetto al piano passante per il cocchiume, che risulta *equidistante* dai due fondi, anteriore e posteriore.

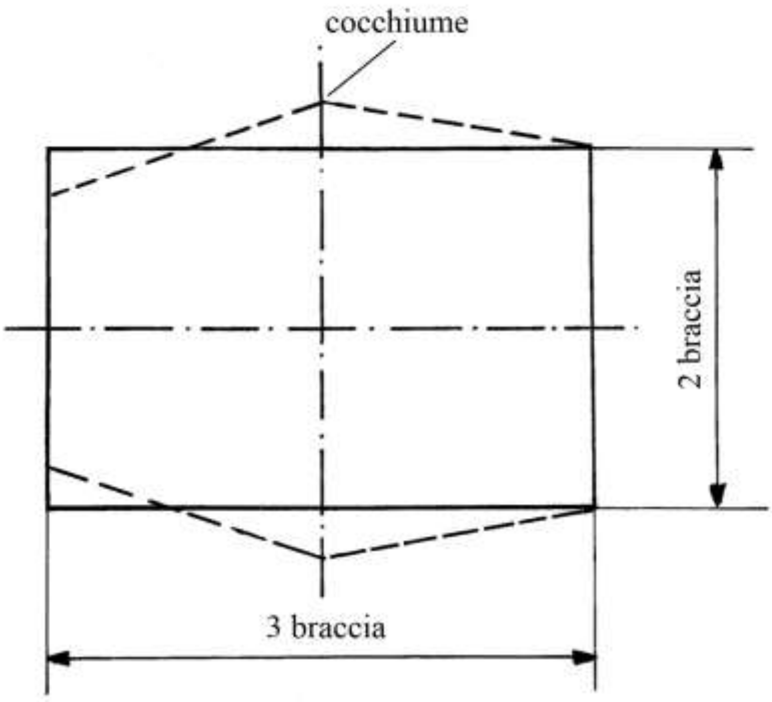
La botte ha la forma di un doppio tronco di cono: le basi maggiori dei due tronchi sono unite lungo il piano passante per il cocchiume.

La botte è costruita con *doghe* di legno rigidamente connesse per mezzo di *cerchi* metallici. Nella parte superiore, nella zona di diametro maggiore (*entasi*) è praticato un foro su di un'unica doga: è il *cocchiume*, chiuso con un tappo di forma conica o tronco-conica, lo *zaffo*.

Il problema chiede il volume del vino contenuto nella botte ed espresso in *barili*.

Calandri semplifica la forma del solido in maniera sintetica e senza fornire spiegazioni: il doppio tronco di cono è assimilato a un cilindro con la stessa lunghezza, 3 braccia, e con diametro ottenuto dalla media aritmetica dei tre diametri, al fondo anteriore (1,5), al cocchiume (2) e al fondo posteriore (2,5):

$$(1,5 + 2 + 2,5)/3 = 6/3 = 2 \text{ braccia.}$$



L’area S del cerchio del solido equivalente è:

$S = 11/14 * 2^2 = 44/14 = 22/7$ braccia^2.

Il volume V del cilindro equivalente è:

$V = S * \ell$, con ℓ lunghezza:

$V = 22/7 * 3 = 66/7 = (9 + 3/7)$ braccia^3.

Calandri conclude con la conversione da braccia^3 a barili:

$V = (9 + 3/7) * 5 = (47 + 1/7)$ barili.

\- APPROFONDIMENTO -

Nel Codice 2669 della Biblioteca Riccardiana di Firenze è presentato un problema simile, con dimensioni leggermente aumentate: esso è descritto alle pagine 168-169 dell’edizione curata da Gino Arrighi (citata in bibliografia), qui riprodotte.

> Egli è una botte che el diamitro del fondo dinanzj è 3 bracia et nel mezo è alta 3 bracia et 1/2 e 'l diamitro del fondo di drieto è 2 bracia et 1/2 et da l’uno fondo a l’autro è 3 bracia; vo’ sapere quantj barili terrà, tenendo el bracio quadro 5 barili. Fa’ così. Racogli insieme el diamitro de’ dua fondj et del mezo, cioè 3 bracia et 3 et 1/2 et 2 et 1/2, fanno 9 bracia et questo partj per 3 per sapere quanto è raghuagliato el diamitro, che sono 3 bracia. Et queste 3 bracia dj diamitro vedj quante bracia quadre sono; perciò multiprica 3 bracia per se medesimo, fa 9
>
> bracia et di questo piglia li 11/14, che sono 7 et 1/14 et questo multiprica vie 3 bracia, che è da l’uno fondo a l’autro, fa 21 bracio et 3/14 e tanto fia quadra tutta la botte. Ora multiprica 21 bracio et 3/14 vie 5 barili, che tiene 1 bracio quadro, fa 106 barili et 1/14. E tanto tiene.

In questo caso Calandri spiega in dettaglio la soluzione usata per determinare il diametro medio, *d*, della botte:

$d = (3 + 2{,}5 + 3{,}5)/3 = 9/3 = 3$ braccia.

La sezione trasversale ha area S che è:

$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 3^2 = 11/14 * 9 = 99/14 = (7 + 1/14)$ braccia^2.

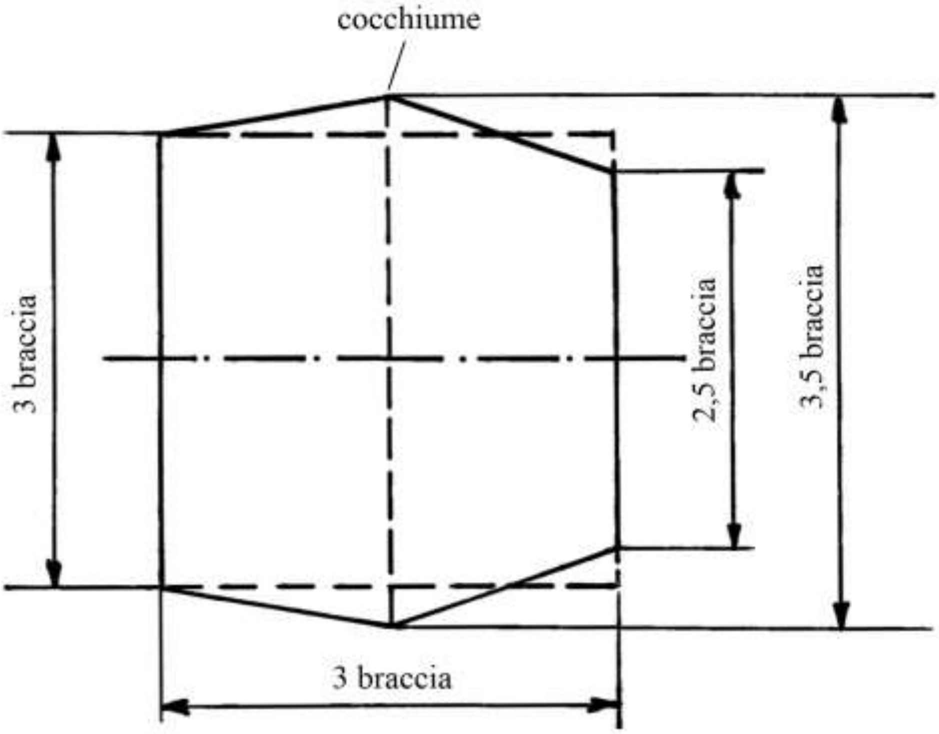
Il volume V della botte è:

$V = S *$ lunghezza $= (7 + 1/14) * 3 = (21 + 3/14)$ braccia^3.

Il volume del vino contenuto nella botte, espresso in barili, è:

$V = (21 + 3/14) * 5 = (106 + 1/14)$ barili.

La figura che segue descrive la botte equivalente oggetto di questo problema:



- -

<u>Canale pieno di uve pigiate</u>

Un canale è pieno di uve pigiate. In basso è praticato un foro per il deflusso del vino.

Il recipiente ha la forma di un parallelepipedo lungo 4 braccia, largo 2,5 e profondo 2 braccia.

L'operazione mostrata nello schema originale qui riprodotto è la *pigiatura delle uve*.

La vinaccia residua è uguale ai 7/24 della quantità delle uve: il vino è i suoi 17/24.

Il problema chiede il volume del vino che esce dal canale.

Il volume V del canale è:

$$V = 4 * 2,5 * 2 = 20 \text{ braccia}^3.$$

Il volume espresso in barili è:

V = 20 * 5 = 100 barili.

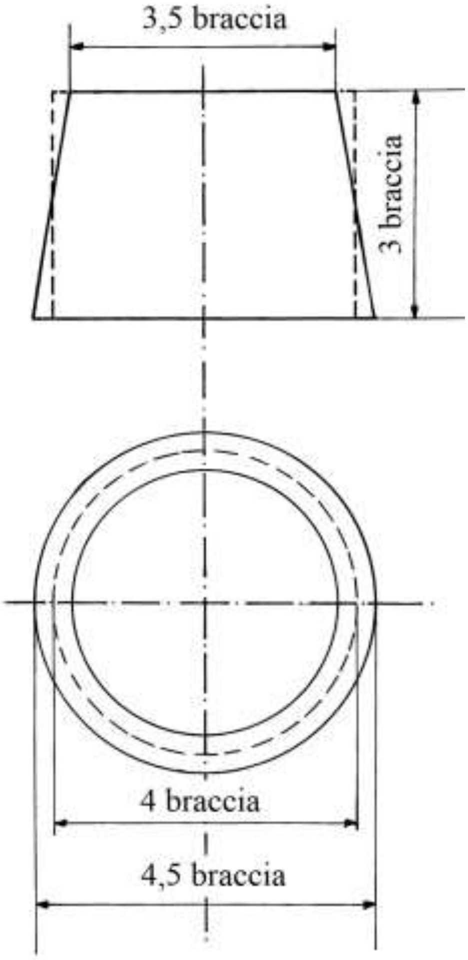
La quantità Q di vino che esce è:

Q = V * 17/24 = 100 * 17/24 = (70 + 5/6) barili.

Tino pieno di uve pigiate

Un tino circolare è pieno di uve pigiate.

Esso ha la forma di un tronco di cono cavo: il diametro al fondo è 4,5 braccia, alla bocca è 3,5 ed è alto 3 braccia.



Il problema chiede il volume del vino che ne risulterà.

L'Autore semplifica i calcoli assimilando il tronco di cono a un cilindro con diametro *d* dato dalla media aritmetica dei diametri al fondo e alla bocca:

d = (4,5 + 3,5)/2 = 8/2 = 4 braccia.

L'area S della sezione trasversale di questo ipotetico cilindro è:

S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 4^2 = 88/7 braccia^2 [(12 + 4/7) braccia^2].

Il volume V del cilindro è:

V = S * altezza = 88/7 * 3 = 264/7 = (37 + 5/7) braccia^3.

In barili, il volume è:

V = (37 + 5/7) * 5 = (188 + 4/7) barili.

Dato che il vino è i 17/24 del volume e i restanti 7/24 sono vinaccia, il volume del vino è:

V_{VINO} = (188 + 4/7) * 17/24 = (133 + 4/7) barili.

- APPROFONDIMENTO -

Il volume di un tronco di cono è oggi calcolato con una formula:

$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + R * r + r^2)$.

* π è approssimato a 22/7 (o 3 + 1/7);
* *h* è l'altezza del tronco di cono, 3 braccia;
* *R* è il raggio del cerchio al fondo: R = 4,5/2 = 2,25 braccia;
* *r* è il raggio del cerchio alla bocca: r = 3,5/2 = 1,75 braccia.

Il volume V è:

$V = 1/3 * 22/7 * 3 * (2{,}25^2 + 2{,}25 * 1{,}75 + 1{,}75^2) =$

$= 22/7 * (5{,}0625 + 3{,}9375 + 3{,}0625) = 22/7 * 12{,}0625 \approx 37{,}911$ $braccia^3$.

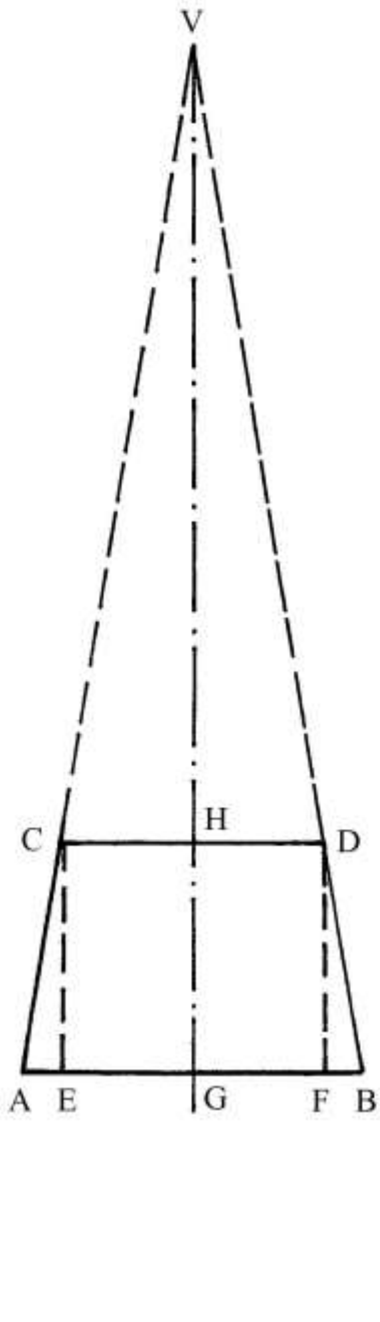
Il suo equivalente in barili è:

V = 37,911 * 5 = 189,555 barili.

La soluzione offerta da Calandri fornisce risultati leggermente approssimati per difetto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una soluzione corretta, sicuramente alla portata di Calandri, è data dal calcolo dei volumi di due coni.



Il tronco di cono che forma il tino è definito dai vertici A, B, C e D ed è ricavato da un ipotetico cono con vertice in V e altezza VG, tagliato con un piano passante per i punti C, H e D, piano parallelo al fondo e perpendicolare alla stessa altezza VG.

Il tronco di cono ha volume dato dalla differenza fra quello dell'intero cono e quello del cono che ha altezza VH.

Da C e da D sono abbassate le perpendicolari CE e DF al diametro del fondo, AB.

ACE è un triangolo rettangolo, simile al triangolo rettangolo AVG.

AE è lungo:

AE = FB = (AB – EF)/2 = (AB – CD)/2 = (4,5 – 3,5)/2 = 0,5 braccia.

CE è l'altezza del tronco di cono (il tino), che è 3 braccia.

Fra i due triangoli rettangoli vale la proporzione che segue:

AE : AG = CE : VG da cui

VG = (AG * CE)/AE = [(4,5/2) * 3]/0,5 = (2,25 * 3) *2 = 13,5 braccia.

L'altezza VH è lunga:

VH = VG – HG = 13,5 – 3 = 10,5 braccia.

Le aree del fondo e della bocca del tino sono le seguenti:

$S_{FONDO} = \pi * R^2 = 22/7 * (2,25)^2 \approx 15,91$ braccia^2;

$S_{BOCCA} = \pi * r^2 = 22/7 * 1,75^2 = 9,625$ braccia^2.

I volumi dei coni con altezze VG e VH sono rispettivamente:

$V_{VG} = S_{FONDO} * VG/3 = 15,91 * 13,5/3 = 71,595$ braccia^3;

$V_{VH} = S_{BOCCA} * VH/3 = 9,625 * 10,5/3 = 33,6875$ braccia^3.

La differenza fra i volumi dei due coni è:

$V_{VG} – V_{VH} = 71,595 – 33,6875 = 37,9075$ braccia^3.

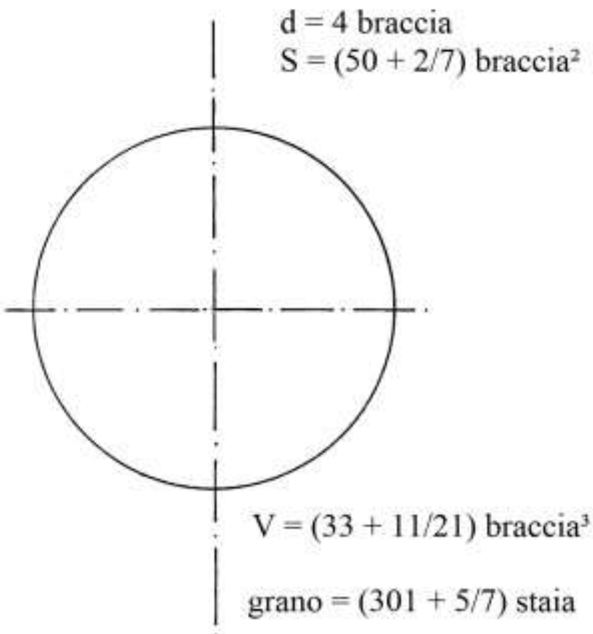
Il risultato è pressoché uguale a quella calcolato con la precedente formula e quasi coincide con quello ottenuto da Calandri.

- -

Grano contenuto in una sfera

Il diametro della palla della cupola [probabilmente Calandri si riferisce a quella collocata sulla cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze, che ha le stesse dimensioni] è di 4 braccia: $d = 4$ e raggio $r = 2$.

Il problema chiede il volume di grano che essa potrebbe contenere e l'area del panno occorrente per ricoprirla.



Il volume V della sfera è:

$V = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * 22/7 * 2^3 = 88/21 * 8 = (33 + 11/21)$ braccia^3.

Sulla base dell'equivalenza

1 braccio^3 = 9 staia, la quantità G di grano conservabile nella sfera è:

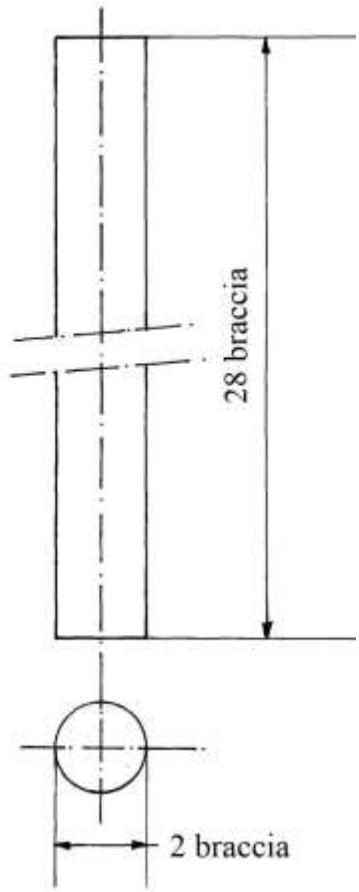
$G = V * 9 = (33 + 11/21) * 9 = (301 + 5/7)$ staia.

Il panno occorrente per rivestire la sfera è la sua superficie laterale S, che è data da:

$S = 4 * \pi * r^2 = 4 * 22/7 * 2^2 = 88/7 * 4 = (50 + 2/7)$ braccia^2.

Peso di una colonna di pietra

Una colonna di pietra ha forma cilindrica e ha diametro di 2 braccia ed è alta 28.
Il problema chiede il suo peso sapendo che un braccio cubico pesa 1600 libbre.



La sezione trasversale della colonna ha area S che è:

$S = 11/14 * 2^2 = 44/14 = 22/7$ braccia^2.

Il volume V della colonna è:

V = S * altezza = 22/7 * 28 = 88 braccia^3.

Il peso P della colonna è dato da:

P = V * 1600 = 88 * 1600 = 140800 libbre.

- APPROFONDIMENTO -

La colonna di pietra è misurata in braccia [da panno]: un braccio equivaleva a 0,583626 metri.

Il diametro *d* della colonna valeva:

d = 2 * 0,583626 m = 1,167252 m.

L'altezza *h* equivaleva a:

h = 28 * 0,583626 = 16,361528 m.

La colonna sembra eccessivamente alta in rapporto al suo relativamente esile diametro.

Era ricavabile da un unico blocco di pietra?

Era in grado di resistere a eventuali piccoli sforzi di flessione?

- -

<u>Un vivaio</u>

Un vivaio ha la forma di un parallelepipedo lungo 12 braccia, largo 10 e con acqua alta 8 braccia.

Nel vivaio cade una pietra sferica che ha diametro 3 braccia e che finisce sul fondo: la sua caduta provoca un innalzamento del livello dell'acqua.

Il problema chiede esattamente di determinare l'aumento del livello dell'acqua.

Il volume V dell'acqua è:

$V = 12 * 10 * 8 = 960$ braccia^3.

Il volume della sfera è:

$V_{SFERA} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * 22/7 * (3/2)^3 = 4/3 * 22/7 * 27/8 = 99/7 =$
$= (14 + 1/7)$ braccia^3.

La sfera fa aumentare il volume dell'insieme "acqua + pietra":

$V_{TOTALE} = V + V_{SFERA} = 960 + (14 + 1/7) = (974 + 1/7)$ braccia^3.

L'area S del vivaio è:

$S = 12 * 10 = 120$ braccia^2.

La nuova altezza dell'acqua, H, è data da:

$H = V_{TOTALE}/S = (974 + 1/7)/120 = 6819/840 = (8 + 33/280)$ braccia.

L'incremento I del livello dell'acqua è:

$I = H – 8 = (8 + 33/280) – 8 = 33/280$ braccia.

<u>Unione di due sacche</u>

Una sacca contiene 9 staia e un'altra ne contiene 16: esse hanno uguale altezza.

Le due sacche sono scucite e poi vengono unite per formarne una sola: il problema chiede il volume della nuova sacca.

Calandri procede come segue:

* moltiplicare i volumi delle due sacche: $9 * 16 = 144$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$;
* moltiplicare per 2: $12 * 2 = 24$;
* sommare con i volumi dei due sacchi originari: $24 + (9 + 16) = 49$ staia, volume del sacco risultante.

\- APPROFONDIMENTO -

Calandri non fornisce alcuna spiegazione riguardo alla procedura impiegata.

I sacchi, i primi due e quello risultante dalla loro unione, sono assimilati a dei cilindri. Essi hanno tutti la stessa altezza *h*.

Il sacco risultante dall'unione dei primi due possiede una circonferenza che è data dalla somma delle circonferenze dei primi due sacchi.

Il volume di un cilindro è proporzionale all'altezza e al quadrato del diametro della base:

$V = S * h$, dove *S* è l'area e *h* è l'altezza.

L'area S è data da:

$S = \pi * (d/2)^2 = 11/14 * d^2$.

Per il sacco meno capiente si ha:

$V_1 = (11/14 * d^2) * h = 9$ staia, da cui si ricava *d*:

$d^2 = 9 * [14/(11 * h)]$ e

$d = 3 * \sqrt{[14/(11 * h)]}$.

Per semplificare i calcoli, l'espressione "$\sqrt{[14/(11 * h)]}$" è sostituita con "Z":

$\sqrt{[14/(11 * h)]} = Z$.

Ne consegue:

$d = 3 * Z$.

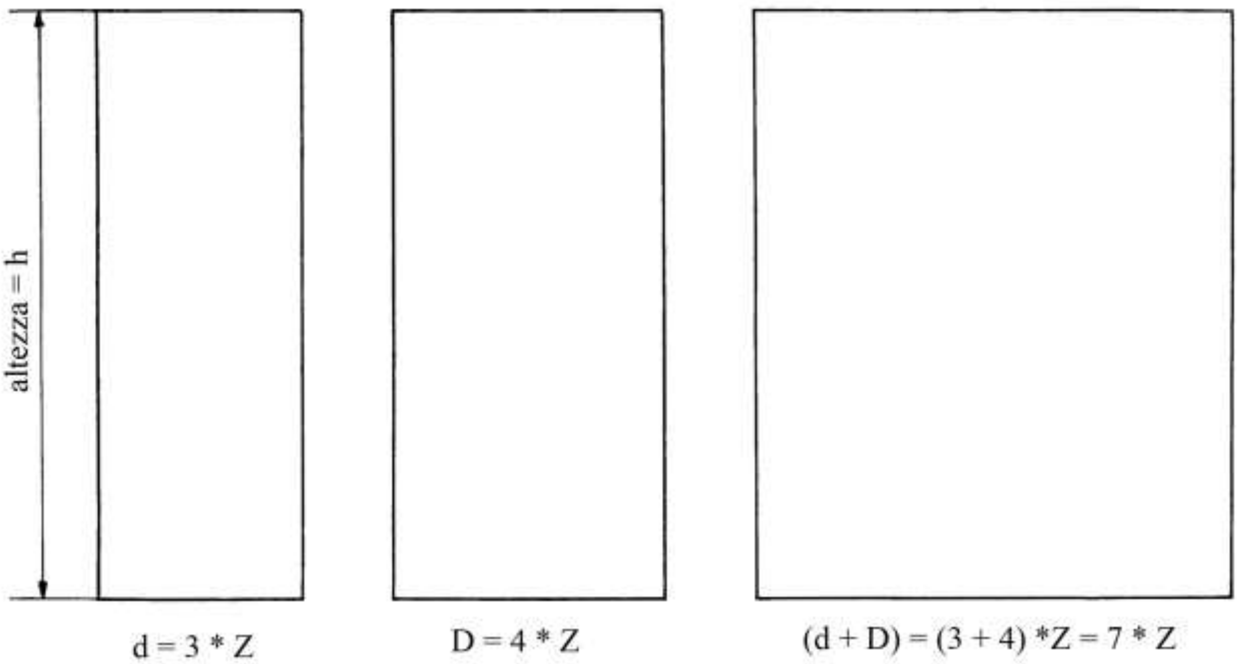
Il secondo sacco ha volume V_2 che è:

$V_2 = (11/14 * D^2) * h = 16$ staia.

D è il diametro del secondo sacco.

$D^2 = 16 * [14/(11 * h)]$ e

$D = 4 * \sqrt{[14/(11 * h)]} = 4 * Z$.



La circonferenza *c* delle basi del primo sacco è lunga:

$c = \pi * d = 22/7 * 3 * Z = 66/7 * Z$.

La circonferenza *C* della base del secondo sacco è lunga:

$C = \pi * D = 22/7 * 4 * Z = 88/7 * Z$.

La circonferenza K del nuovo sacco è lunga:

$K = c + C = (3 + 4) * 22/7 * Z = 7 * 22/7 * Z$.

Il diametro Δ del sacco risultante è dato dalla somma dei diametri dei primi due:

$\Delta = d + D = 3 * Z + 4 * Z = 7 * Z$.

L'area della base del nuovo sacco è proporzionale al quadrato del diametro Δ:

$\Delta^2 = (7 * Z)2 = 49 * \{\sqrt{[14/(11 * h)]}\}2 = 49 * 14/(11 * h)$.

Come scritto sopra, i volumi dei tre sacchi sono proporzionali ai quadrati dei rispettivi diametri. *W* è il volume del sacco risultante.

Vale la seguente proporzione:

$d^2 : D^2 : \Delta^2 = V_1 : V_2 : W$

$(3 * Z)^2 : (4 * Z)^2 : (7 * Z)^2 = 9 * 14/(11 * h) : 16 * 14/(11 * h) : 49 * 14/(11 * h)$.

Semplificando si ha:

$9 : 16 : 49 = 9 : 16 : 49$.

Il volume W del sacco risultante è 49 staia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Usiamo i simboli appena utilizzati per riassumere in una formula la procedura impiegata da Calandri per calcolare il volume *W* della nuova sacca:

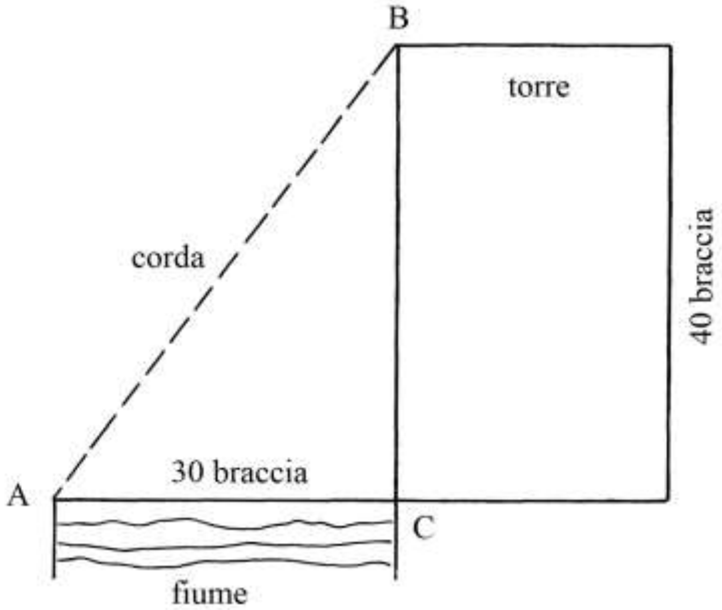
$W = 2 * \sqrt{(V_1 * V_2)} + (V_1 + V_2) = 2 * \sqrt{(9 * 16)} + (9 + 16) = 2 * \sqrt{144} + 25 =$
$= 2 * 12 + 25 = 49$ staia.

- -

Una torre lungo un fiume

Una torre alta 40 braccia è costruita sulla riva di un fiume largo 30 braccia.

Il problema chiede la lunghezza di una fune che vada dalla cima della torre alla riva opposta del fiume.



AB è la corda: essa è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC.

I cateti AC e BC sono lunghi:

* AC = 30 braccia;
* BC = 40 braccia.

La lunghezza di AB è:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500$ e

$AB = \sqrt{2500} = 50$ braccia.

Le lunghezze dei tre lati del triangolo ABC formano la terna derivata 30-40-50, ottenuta moltiplicando per 10 i membri della terna primitiva 3-4-5.

Un albero spezzato

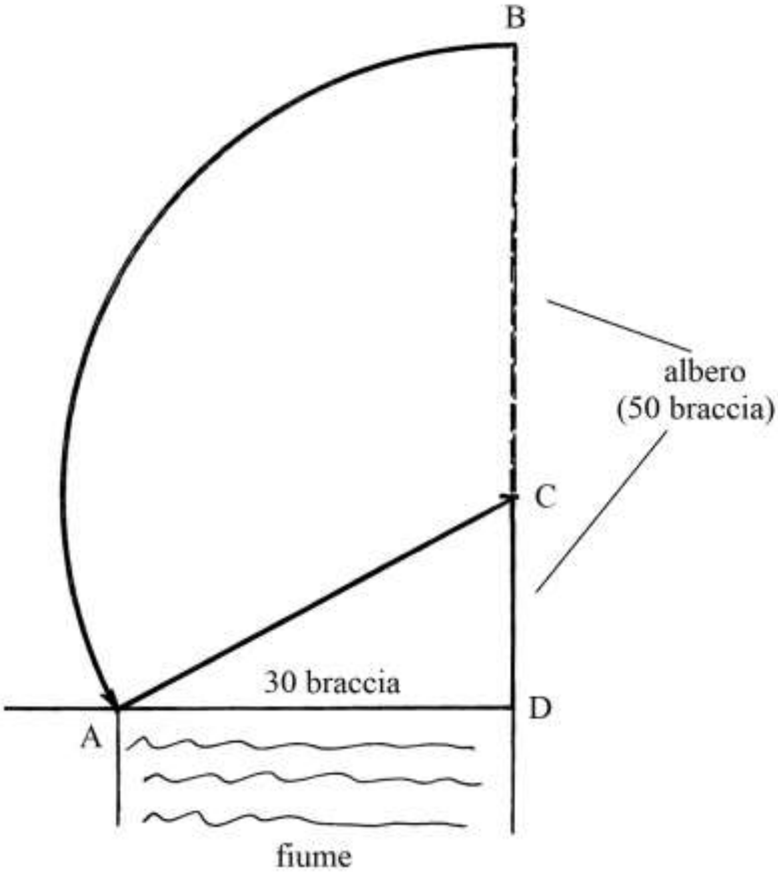
Un albero alto 50 braccia è piantato sulla riva di un fiume largo 30 braccia.

L'albero si rompe e la sua cima tocca la riva opposta.

Il problema chiede le lunghezze delle due parti di albero: quella rotta e quella rimasta in piedi.

AD è il profilo del pelo dell'acqua del fiume. BCD è l'albero: BC è la parte di tronco spezzata nella sezione indicata con C che ruota fino a posizionare la cima B sulla viva opposta del fiume, adagiandosi in A. La rotazione avviene in senso antiorario.

CD è la parte di tronco che rimane in piedi.



ACD è un triangolo rettangolo.

Indicando con "x" la lunghezza incognita di BC si ha:

CD = BD – BC = (50 – x).

L'ipotenusa AC ha la stessa lunghezza di BC:

AC = BC = x.

La lunghezza di AC è:

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$

$x^2 = 900 + 2500 - 100 * x + x^2$

$100 * x = 3400$

$x = 3400/100 = 34$ braccia = AC = BC.

Infine, la lunghezza di CD è:

CD = BD – BC = 50 – 34 = 16 braccia.

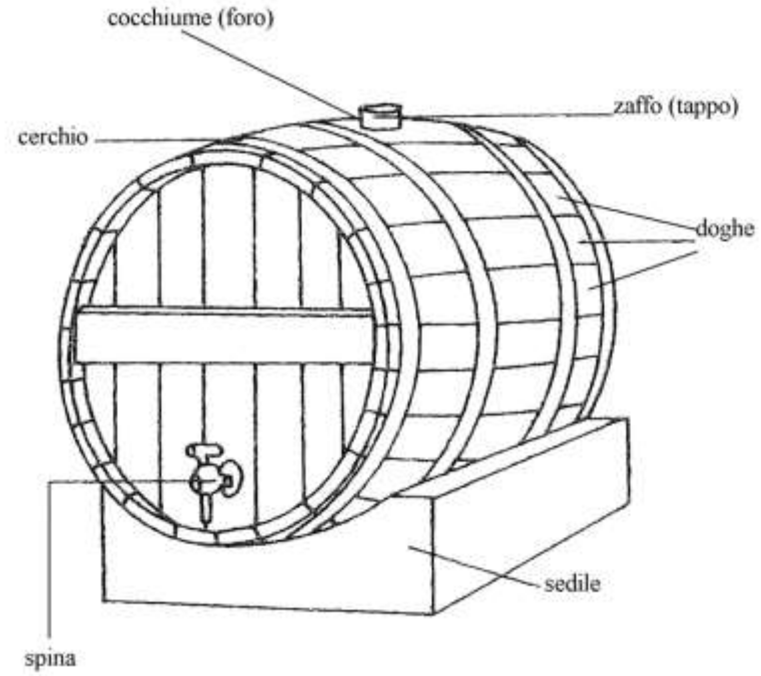
Due botti con doghe

Una prima botte ha 50 doghe e ha volume uguale a 50 barili.

Una seconda botte ha volume uguale a 18 barili: il problema chiede quante doghe possiede questa seconda botte.

Entrambe le botti possiedono doghe di uguali dimensioni e la stessa altezza.

La figura che segue descrive una botte con basi circolari, vista in prospettiva (da Devoto – Oli, "*Dizionario illustrato della Lingua Italiana*"):



La botte è costruita con *doghe* di legno rigidamente connesse per mezzo di *cerchi* metallici.

Le doghe sono gli elementi che formano la superficie laterale di una botte: variando il loro numero variano nella stessa proporzione il diametro e la circonferenza esterna.

Per certi aspetti, questo problema presenta delle analogie con quello già incontrato e relativo all'unione di due sacchi di uguale altezza.

La procedura usata da Calandri contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il numero delle doghe della prima botte per sé stesso: 50 * 50 = 2500;
* moltiplicare per il numero dei barili della seconda botte: 2500 * 18 = 45000;
* dividere per il numero dei barili della prima botte: 45000/50 = 900;
* estrarre la radice quadrata: √900 = 30, numero delle doghe della seconda botte.

- APPROFONDIMENTO -

Usiamo alcuni simboli:

* D è il numero delle doghe della prima botte: $D = 50$;
* d è il numero delle doghe della seconda botte;
* V_1 è il volume in barili della prima botte: $V_1 = 50$ barili;
* V_2 è il volume in barili della seconda botte: $V_2 = 18$ barili.

A parità di altezza delle due botti, i loro volumi sono proporzionali ai quadrati dei loro diametri e quindi delle loro circonferenze: i diametri e le circonferenze sono proporzionali al numero delle doghe. Vale la seguente proporzione:

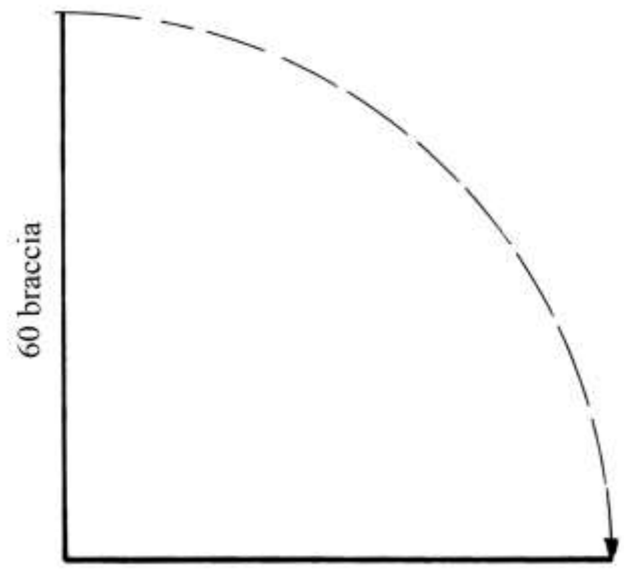
$$D^2 : V_1 = d^2 : V_2$$
$$50^2 : 50 = d^2 : 18$$
$$d^2 = 50^2 * 18/50 = 50 * 18 = 900 \quad \text{e}$$
$$d = \sqrt{900} = 30 \text{ doghe.}$$

- -

<u>Abbattimento di un albero</u>

Un agricoltore vuole tagliare un albero alto 60 braccio con dei colpi.
Ogni colpo che impartisce fa piegare la cima dell'albero di *un braccio* verso terra.

È che la cima dell'albero ruota verso terra in senso orario e di 90°.
Il problema chiede il numero dei colpi occorrenti per portare l'albero in terra.



La soluzione proposta da Calandri contiene i seguenti passi:

* moltiplicare l'altezza dell'albero per (3 + 1/7): 60 * (3 + 1/7) = (188 + 4/7) [è evidente che la costante (3 + 1/7) è usata quale approssimazione di "π"];
* dividere per 2: (188 + 4/7)/2 = (94 + 2/7), numero dei colpi occorrenti per abbattere l'albero.

<u>Triangolo equilatero inscritto</u>

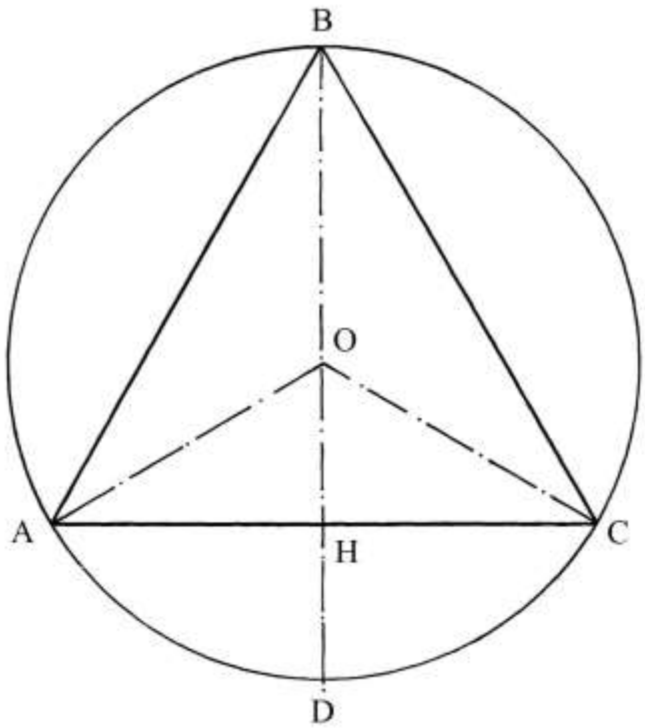
Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 braccia: deve essere inscritto in un cerchio.

Deve essere calcolato il diametro del cerchio.

ABC è il triangolo e BH è un'altezza.

Il raggio del cerchio circoscritto è lungo OB che è *due terzi* della lunghezza di BH: ne consegue che il diametro BD è lungo:

BD = 2 * OB = 2 * (2/3 * BH) = 4/3 * BH.



La lunghezza di BH è:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AC/2)^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = 12^2 – (12/2)^2 =$
$= 144 – 36 = 108$ e
$BH = \sqrt{108}$ braccia.

Il diametro BD è lungo:
$BD = 4/3 * BH = 4/3 * \sqrt{108} = \sqrt{(16 * 108/9)} = \sqrt{(16 * 12)} = \sqrt{192} \approx (13 + 6/7)$ braccia.

La soluzione proposta da Calandri conduce allo stesso risultato:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $12 * 12 = 144$;
* dividere per 3: $144/3 = 48$;
* sommare 144 e 48: $144 + 48 = 192$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{192} = (13 + 6/7)$ braccia.

<u>Triangolo 13-14-15</u>

ABC è un triangolo scaleno con lati lunghi come segue:

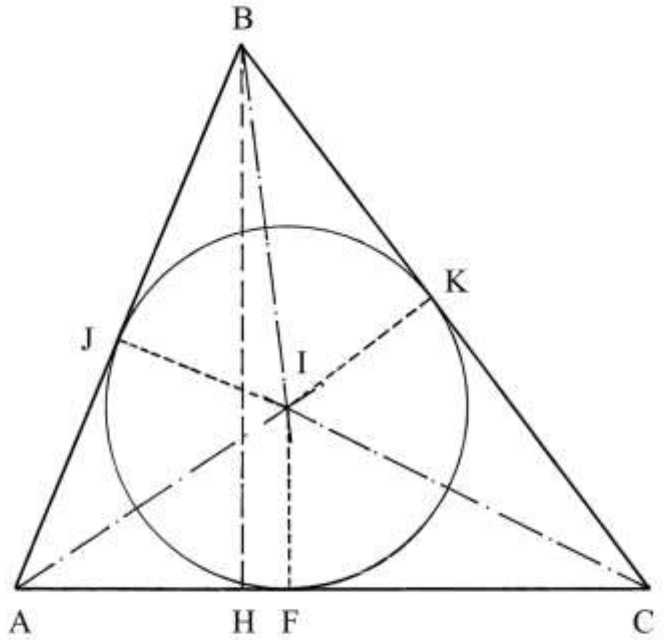
* AB = 13 braccia;
* BC = 15 braccia;
* AC = 14 braccia.

AH è un’altezza del triangolo che è lunga 12 braccia.
Calandri fornisce come dato noto l’area del triangolo:

$S_{ABC} = 84$ braccia^2.

Infatti si ha:

$S_{ABC} = (BH * AC)/2 = (12 * 14)/2 = 84$ braccia^2.



Il problema chiede la lunghezza del diametro del cerchio inscritto nel triangolo scaleno.

La soluzione presentata da Calandri, peraltro corretta, contiene i seguenti passi:

* calcolare il perimetro: AB + BC + AC = 13 + 15 + 14 = 42;
* dividere per 2: 42/2 = 21;
* dividere l'area del triangolo per il semiperimetro: 84/21 = 4 braccia, raggio del cerchio inscritto;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8 braccia, diametro del cerchio inscritto.

- APPROFONDIMENTO -

Le *bisettrici* dei tre angoli interni del triangolo ABC si intersecano in un punto, I, che è chiamato *incentro*, centro del cerchio inscritto.

Si chiama *inraggio* la distanza dell'incentro dai lati: IF = IJ = IK. I tre *inraggi* sono perpendicolari ai lati del triangolo nei punti F, J e K.

Il cerchio di centro I e di inraggio IF si chiama *incerchio*.

Le bisettrici IA, IB e IC dividono ABC in tre triangoli: ABI, BCI e ACI.

Dall'incentro I condurre tre perpendicolari ai lati del triangolo: sono IF, IJ e IK.

I tre segmenti hanno uguale lunghezza, indicata con r, e sono tre raggi del cerchio di centro I inscritto nel triangolo

L'area dell'intero triangolo ABC è data dalla somma delle aree dei tre triangoli:

$S_{ABC} = \text{Area}_{ABI} + \text{Area}_{BCI} + \text{Area}_{ACI} = AB * IJ/2 + BC * IK/2 + AC * IF/2.$

Ma IJ = IK = IF = *r*, raggio del cerchio per cui:

$S_{ABC} = AB * r/2 + BC * r/2 + AC * r/2 = r * (AB/2 + BC/2 + AC/2).$

L'espressione fra parentesi tonde corrisponde al *semiperimetro m* del triangolo ABC:

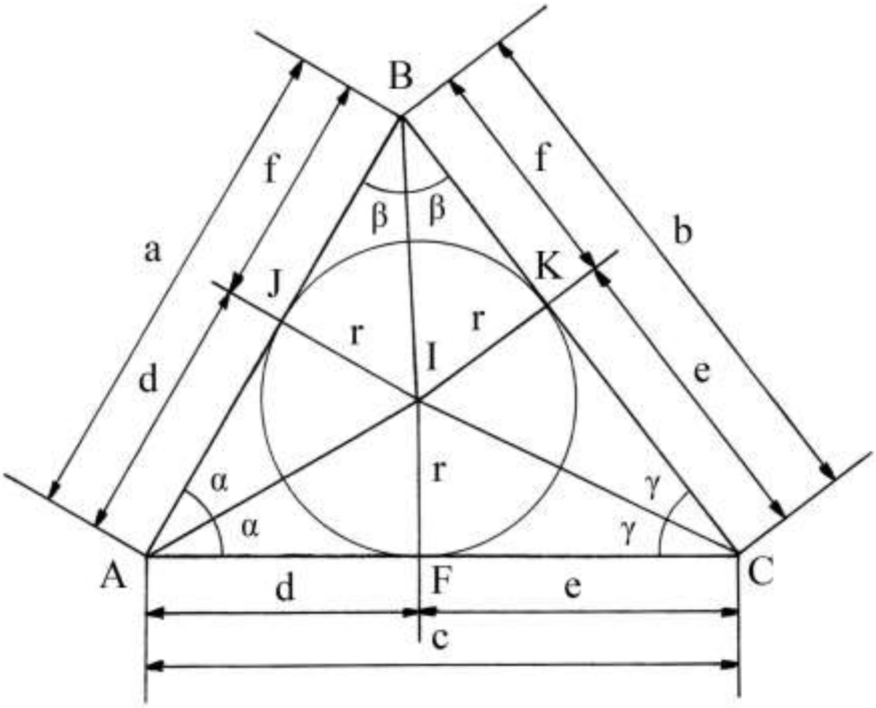
$(AB/2 + BC/2 + AC/2) = m.$

Il perimetro vale: $(AB + BC + AC) = 2 * m.$

Conoscendo l'area di ABC e il valore di *2 * m* e di *m*, è possibile ricavare la lunghezza del raggio *r* del cerchio inscritto:

$r = S_{ABC}/m = (2 * S_{ABC})/(2*m).$

La prima parte di questa formula – $r = S_{ABC}/m$ – è stata usata da Calandri.



Le bisettrici dividono gli angoli in A, B e C in coppie di angoli di uguale ampiezza: $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ e $\gamma - \gamma$.

I triangoli AIF e AIJ sono rettangoli e hanno uguali dimensioni. Lo stesso accade alle coppie di triangoli JIB – KIB e FIC – KIC.

I lati dei triangoli hanno le seguenti lunghezze:

- AB = a = d + f;
- BC = b = f + e;
- AD = c = d + e.

Il triangolo ABC è così scomposto in tre triangoli isosceli: AIB, BIC e AIC. Sommando le loro aree si ricava quella di ABC:

$$\text{Area}_{ABC} = \text{Area}_{AIB} + \text{Area}_{BIC} + \text{Area}_{AIC} =$$
$$= (IJ * AB)/2 + (IK * BC)/2 + (IF * AC)/2 = r * AB/2 + r * BC/2 + r * AC/2 =$$
$$= r * (AB/2 + BC/2 + AC/2) = r * (a + b + c)/2 = r * (2 * m)/2 = r * m.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda soluzione conduce a un identico risultato: è necessario calcolare le aree dei *sei* triangoli rettangoli nei quali le tre bisettrici e i tre raggi scompongono il triangolo ABC.

I triangoli rettangoli sono i seguenti: AJI, BJI, BKI, CKI, AFI e CFI.

L'area di ABC è:

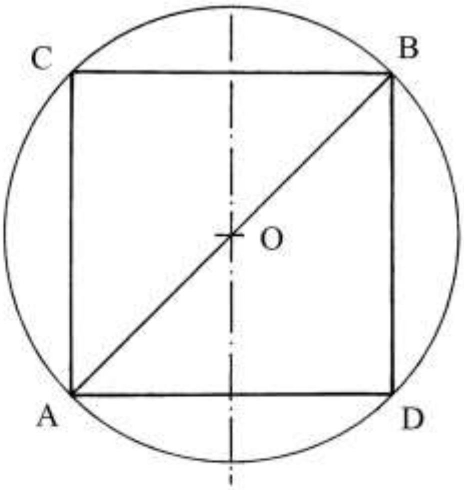
$$S_{ABC} = (S_{AJI} + S_{BJI}) + (S_{BKI} + S_{CKI}) + (S_{AFI} + S_{CFI}) =$$
$$= (d * r/2 + f * r/2) + (f*r/2 + e * r/2) + (d * r/2 + e * r/2) =$$
$$= (d + f) * r/2 + (f + e) * r/2 + (d + e) * r/2 =$$
$$= a * r/2 + b * r/2 + c * r/2 = r * (a + b + c)/2 = r * (2 + m)/2 = r * m.$$

Entrambe le soluzioni conducono a calcolare l'area del triangolo semplicemente conoscendo le lunghezze dei tre lati, senza richiedere calcoli o misurazioni per determinare le lunghezze del raggio *r* e dei segmenti *d*, *e*, *f*.

- -

Quadrato inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 10 braccia. Vi è inscritto il più grande quadrato possibile: è chiesta la lunghezza dei lati di questo poligono.



AB è una diagonale del quadrato che è anche un diametro del cerchio.

ABCD è il quadrato inscritto.

La soluzione è semplice:

* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 2: $100/2 = 50$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{50} \approx (7 + 1/14)$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

AB divide il quadrato in due triangoli rettangoli isosceli: ACB e ABD. AB è la loro comune ipotenusa che è lunga:

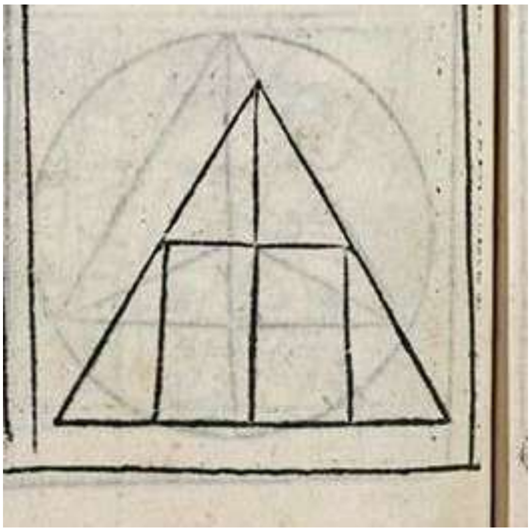
$AB^2 = AC^2 + CB^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{50})^2 = 50 + 50 = 100$ e

$AB = \sqrt{100} = 10$ braccia.

Quadrato inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.

Vi deve essere inscritto il più grande quadrato possibile.



La soluzione presentata da Calandri è aritmetica:

* calcolare il perimetro del triangolo: $10 + 10 + 10 = 30$;
* moltiplicare per sé stesso: $30 * 30 = 900$;
* dividere per 3: $900/3 = 300$;
* sommare con 900: $300 + 900 = 1200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1200}$;
* sottrarre 30: $\sqrt{1200} - 30 \approx (4 + 9/14)$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

Possiamo riassumere la procedura con una formula:

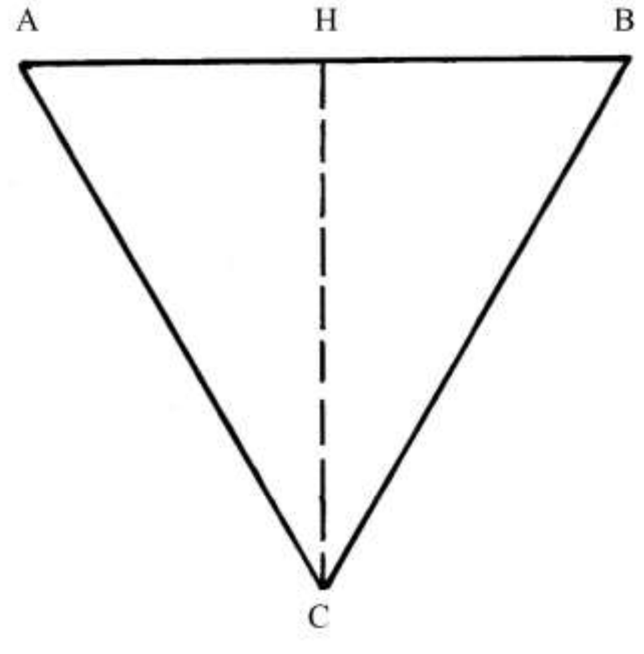
* *L* è la lunghezza dei lati del triangolo,
* *p* è il perimetro del triangolo equilatero,
* *ℓ* è la lunghezza dei lati del quadrato:

$$\ell = \sqrt{(4/3 * p^2)} - p.$$

\- APPROFONDIMENTO -

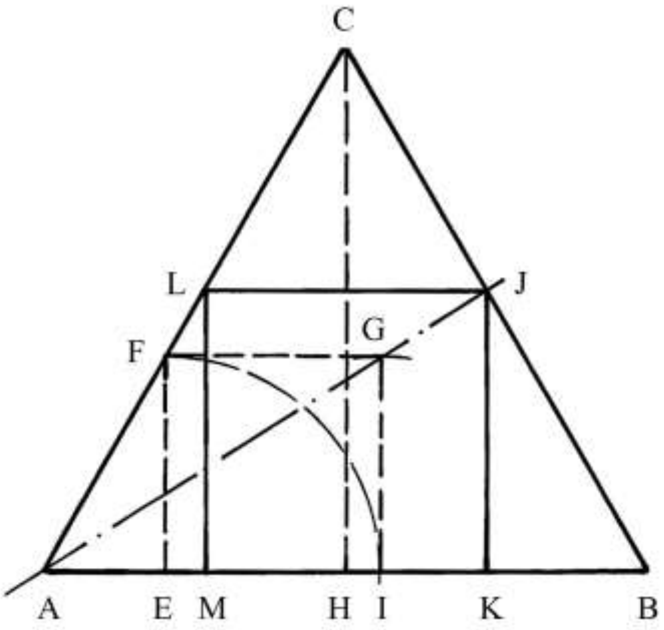
Il problema era presente nel *Libro di ragioni*" scritto dal mercante e abacista fiorentino Paolo Gherardi che lo compilò nei primissimi decenni del XIV secolo.

Nel caso di Gherardi il triangolo era disegnato con la base in alto e il vertice in basso e il poligono era chiamato *scudo*:



Per risolvere il problema possiamo ricorrere a una semplice costruzione geometrica forse ignota sia a Gherardi che a Filippo Calandri.

ABC è il triangolo equilatero e CH è l'altezza relativa alla base AB.



Costruire un quadrato generico EFGI con *tre* soli vertici collocati sui lati del triangolo equilatero.

Tracciare la retta passante per i punti A e G: essa taglia il lato BC nel punto J.

Da questo ultimo punto disegnare due segmenti paralleli a CH e a AB: sono JK e JL.

Dal punto L abbassare la parallela a HC e a JK: LM è il quarto lato del quadrato inscritto nel triangolo ABC.

Il triangolo equilatero è ora diviso in *quattro* poligoni:

* il quadrato JKML con lato di lunghezza *incognita*;
* il triangolo equilatero CJL che ha lati lunghi quanto quelli del quadrato JKML;
* i due triangoli rettangoli ALM e KJB che hanno uguali dimensioni.

Questi ultimi hanno angoli di 30°, 60° e 90°:

* KBJ = MLA = 60° ;
* AML = BKJ = 90° ;
* ALM = BJK = 30°.

Fissiamo il valore incognito del lato del quadrato: JL = x. Ne consegue che

AL= AC – LC = AC – x.

Il seno dell'angolo MAL è dato da:

sen MAL = LM/AL.

Ma:

ML = x e

AL = AC – CL = AC – LM = 10 – x, per cui sia ha:

sen MAL = x/(10 – x).

Essendo questo angolo ampio 60°, il suo seno vale (√3)/2:

sen 60° = (√3)/2.

Sostituendo si ottiene:

$$(\sqrt{3})/2 = x/(10 - x)$$
$$(10 - x) * \sqrt{3} = 2 * x$$
$$10 * \sqrt{3} = 2 * x + x * \sqrt{3}$$
$$10 * \sqrt{3} = x * (2 + \sqrt{3})$$
$$x = (10 * \sqrt{3})/(2 + \sqrt{3})$$
$$x = (10 * \sqrt{3}) * (2 - \sqrt{3})/[(2 + \sqrt{3}) * (2 - \sqrt{3})]$$

$x = (20 * \sqrt{3} - 30)/(4 - 3) = (20 * \sqrt{3} - 30) = 4{,}641 \approx (4 + 9/14)$ braccia, che è il risultato ottenuto da Filippo Calindri.

- -

<u>Copertura di un padiglione</u>

Un padiglione è sostenuto da un palo che è alto 8 braccia.

Quando il panno che lo ricopre è teso, la copertura misurata dalla cima del palo a terra è lunga 10 braccia.

Il problema chiede quante braccia quadre di panno misura la copertura.

La soluzione prevede i seguenti passi:

* moltiplicare 10 per sé stesso: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare 8 per sé stesso: $8 * 8 = 64$;
* sottrarre 64 da 100: $100 - 64 = 36$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$;
* moltiplicare per 2: $6 * 2 = 12$;
* moltiplicare per (3 + 1/7): $12 * (3 + 1/7) = (37 + 5/7)$;
* dividere per 2: $(37 + 5/7)/2 = (18 + 6/7)$;
* moltiplicare per 10: $(18 + 6/7) * 10 = (188 + 4/7)$ braccia^2, area del panno di copertura.

- APPROFONDIMENTO -

La copertura distesa su di un piano è assimilata alla superficie laterale di un cono alto 8 braccia e con l'*apotema* BA = BC lunga 10 braccia.

Lo schema che segue è una doppia proiezione ortogonale della copertura.

Il palo è BH che è l'altezza del cono e un cateto comune ai due triangoli rettangoli ABH e HBC, che hanno uguali dimensioni.

Occorre ricavare la lunghezza del raggio AH = HC della base circolare del cono:

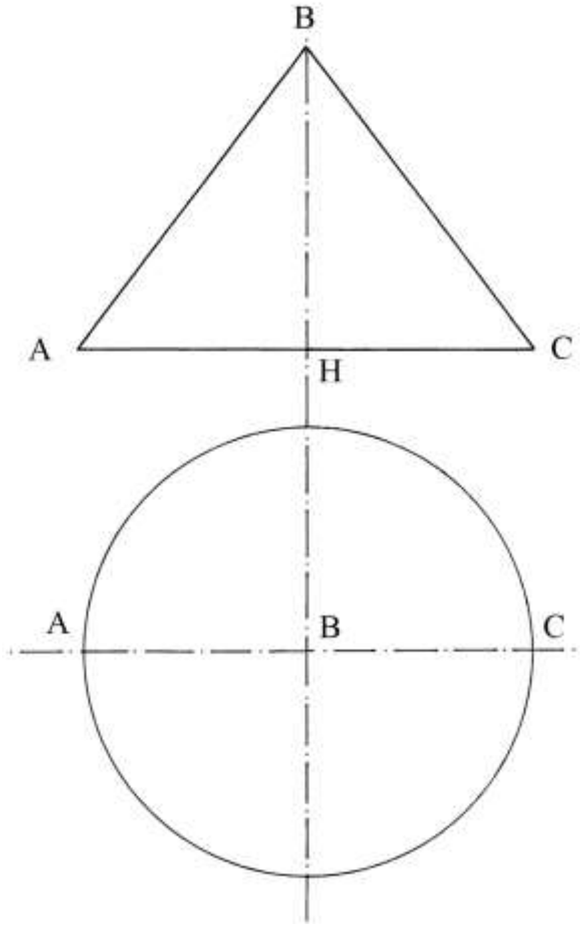
$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ e

$AH = \sqrt{36} = 6$ braccia.

La superficie laterale di un cono, S, è data dalla formula:

$S = \pi * r * a$, dove *r* è il raggio (r = AH = 6 braccia) e *a* è l'apotema (a = AB = 10 braccia):

$S = 22/7 * 6 * 10 = 1320/7 = (188 + 4/7)$ braccia^2.



Lo sviluppo su di un piano della superficie laterale di un cono ha la forma di un settore circolare.

L'area di un settore circolare è data da:

$S_{SETTORE} = \pi * r * a$, dove *r* è il raggio del settore e *a* è l'apotema.

In questo problema si hanno i seguenti dati:

r = AH = 6 braccia,

a = AB = 10 braccia.

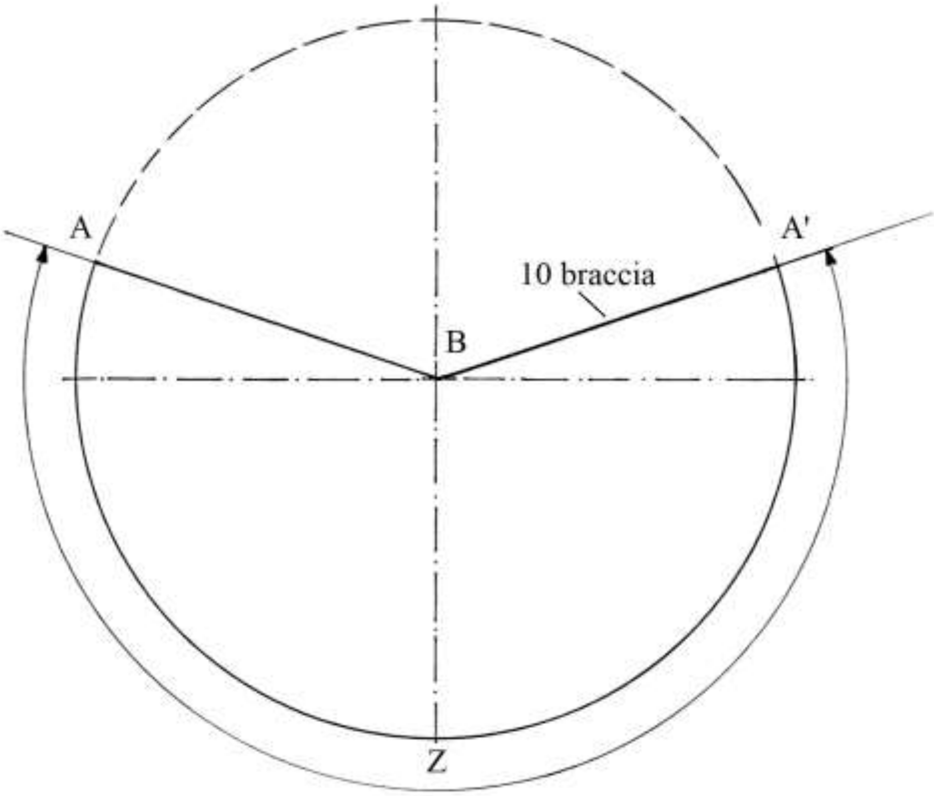
L'area è:

$S_{SETTORE} = 22/7 * 6 * 10 = 1320/7 = (188 + 4/7)$ braccia^2, che è il risultato ottenuto da Calandri.

Nello schema che segue, B è il centro di una circonnferenza di raggio BA = 10 braccia e l'arco AZA' è lungo quanto la circonferenza di base del padiglione:

$AZA' = 2 * \pi * r = 2 * 22/7 * 6 = 264/7 = (37 + 5/7)$ braccia.

ABA'Z è il settore circolare che rappresenta la copertura del padiglione.

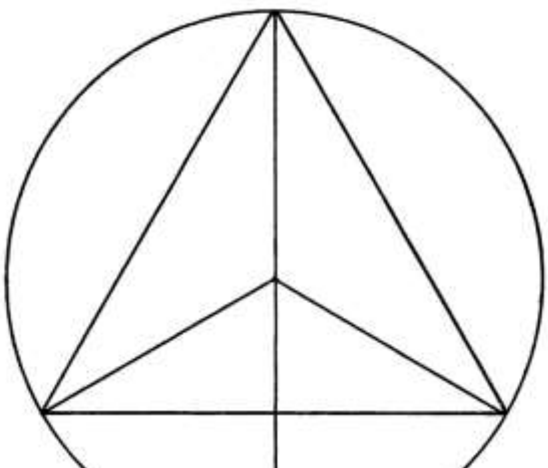


AZA' = 2 * π * r = 2 * 22/7 * 6 = 264/7 = (37 + 5/7) braccia

Tetraedro inscritto in una sfera

Una sfera ha diametro D lungo 6 braccia. Vi è inscritto un *tetraedro*, solido regolare che possiede quattro facce formate da altrettanti triangoli equilateri.

Il problema chiede la lunghezza del lato del solido, *L*.



La soluzione proposta da Calandri prevede i seguenti passi:

*	moltiplicare il diametro della sfera per sé stesso:	$6 * 6 = 36$;
*	moltiplicare per 2/3:	$36 * 2/3 = 24$;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{24} = (4 + 881/890)$ braccia, lunghezza dei lati del tetraedro.

La procedura usata da Calandri può essere sintetizzata in una formula:

$$L = \sqrt{(D^2 * 2/3)} = D * \sqrt{(2/3)}.$$

- APPROFONDIMENTO -

Esiste una precisa relazione fra le lunghezze del raggio R della sfera e quella del lato, L, del tetraedro inscritto:

$$R = L * (\sqrt{6})/4, \text{ da cui:}$$

$$L = R * 4/\sqrt{6} = 3 * 4/\sqrt{6} = (3 * 4 * \sqrt{6})/6 = 2 * \sqrt{6} = 4{,}899 = (4 + 881/980) \text{ braccia},$$

risultato uguale a quello ricavato da Calandri.

La formula equivale a quella di Calandri. Dato che $R = D/2$, si ha:

$$L = D/2 * 4/\sqrt{6} = D * 2/\sqrt{6} = D * \sqrt{(4/6)} = D * \sqrt{(2/3)}.$$

- -

<u>Due torri</u>

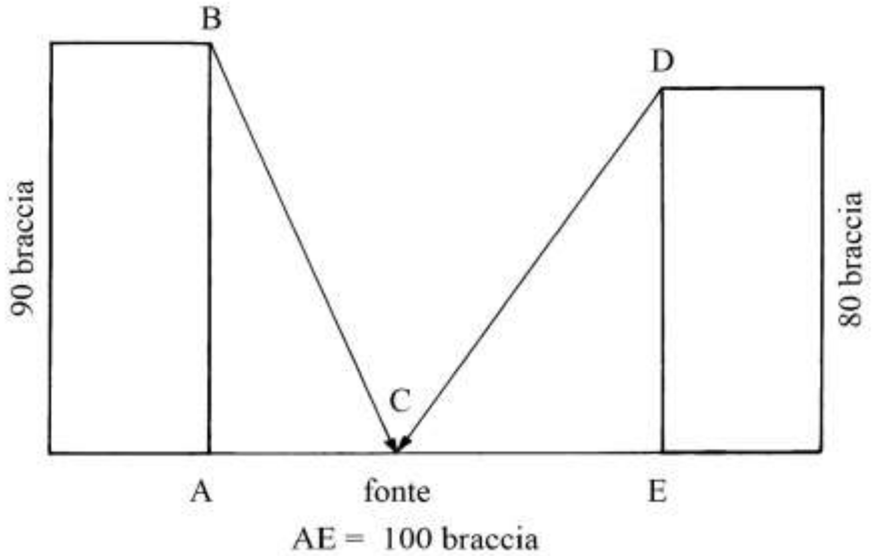
In una pianura si ergono due torri: una è alta 80 braccia e l’altra 90.

Fra di loro vi è una distanza di 100 braccia.

Nel terreno posto fra le due torri c’è una sorgente d’acqua.

Due uccelli si muovono dalle cime delle due torri e giungono nello stesso istante alla fonte: ovviamente essi compiono percorsi di uguale lunghezza.

Il problema chiede la distanza della fonte dalle due torri.



La soluzione proposta da Calandri contiene i seguenti passi:
*	elevare al quadrato le lunghezze date:

$80^2 = 6400$,
$90^2 = 8100$,
$100^2 = 10000$;

* sottrarre 6400 da 8100: 8100 – 6400 = 1700;
* sommare con 10000: 1700 + 10000 = 11700;
* dividere per il doppio della distanza fra le due torri: 11700/(2 * 100) = 11700/200 = = 58,5 braccia, lunghezza di CE;
* sottrarre da 100: 100 – 58,5 = 41,5 braccia, lunghezza di AC.

La formula che riassume la procedura è la seguente:

$$CE = [(AB^2 – DE^2) + AE^2]/(2 * AE).$$

\- APPROFONDIMENTO -

ABC e CDE sono due triangoli rettangoli: le loro ipotenuse BC e DC hanno uguale lunghezza.

Assegniamo alla lunghezza del cateto AC il valore dell'incognita "x":

$$AC = x.$$

La lunghezza di CE è:

$$CE = AE – AC = 100 – x.$$

La lunghezza di BC è:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 90^2 + x^2 = 8100 + x^2.$$

La lunghezza della seconda ipotenusa, CD, è data da:

$$CD^2 = DE^2 + CE^2 = 80^2 + (100 – x)^2 = 6400 + (100 – x)^2.$$

Dato che le due ipotenuse, BC e CD, hanno uguali lunghezze, sono uguali anche i loro quadrati:

$$8100 + x^2 = 6400 + (100 – x)^2$$
$$8100 + x^2 = 6400 + 10000 – 200 * x + x^2$$
$$200 * x = 6400 + 1000 – 8100$$
$$200 * x = 8300$$
$$x = 8300/200 = 41,5 \text{ braccia} = AC$$
$$CE = AE – AC = 100 – 41,5 = 58,5 \text{ braccia}.$$

\- -

IL CODICE 2669 DELLA BIBLIOTECA RICCARDIANA

Nell’edizione del Codice fatta da Gino Arrighi sono riprodotti solo i testi dei diversi problemi aritmetici e geometrici: non sono disegnate le figure nel Codice (che è stato pubblicato da un altro Editore con testi e immagini).

Qui sono considerati soltanto i problemi geometrici per i quali sono proposte soluzioni basate sulla trascrizione fatta dal benemerito storico della matematica medievale (o *medioevale* come scriveva lui) Gino Arrighi.

Quando sono state ritenute necessarie, le figure recano le lettere maiuscole che indicano i punti significativi.

Il Codice e il testo del volume stampato a Firenze nel 1491-1492 non sono del tutto coincidenti: in entrambi si trovano problemi simili, ma con dimensioni differenti.

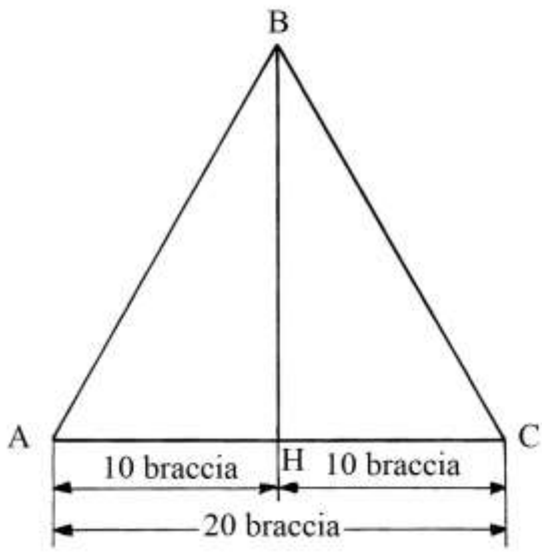
I problemi con dati uguali sono stati considerati solo per la versione stampata e sono omessi nell’analisi che segue riservata al contenuto del Codice della Riccardiana.

Alcuni problemi simili ma con dati notevolmente differenti sono presenti sia nella parte relativa al testo a stampa sia in quella riservata al Codice Riccardiano.

Gli schemi che accompagnano i problemi che seguono sono stati realizzati sulla base delle informazioni contenute nella trascrizione curata da Gino Arrighi e sono disegnati in scala.

Area di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 20 braccia. Il problema chiede la sua area: “*quanto è quadro*”.



Occorre calcolare la lunghezza di un’altezza che Calandri chiama “*chatetto*”.

Dato che i lati sono tutti di uguale lunghezza, ne consegue che un’altezza cade nel punto medio del lato opposto e lo divide in due segmenti di lunghezza uguale a:

20/2 = 10 braccia = AH = HC.

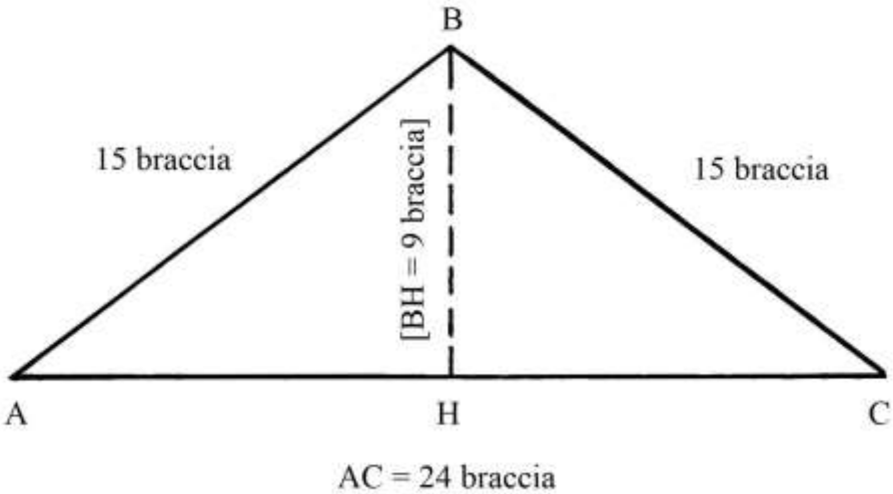
La procedura usata da Calandri contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* moltiplicare la lunghezza di metà lato [AC/2] per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* sottrarre 100 da 400: 400 – 100 = 300;
* estrarre la radice quadrata: √300 braccia, lunghezza di BH;
* moltiplicare per metà della lunghezza di AC: √300 * 10 = √(300 * 100) = √30000 =

= (173 + 41/200) braccia^2, area del triangolo equilatero ABC.

Area di un triangolo isoscele

Un triangolo isoscele ha due lati lunghi 15 braccia e il terzo lato è 24.
Il problema domanda l'area del triangolo.



La soluzione richiede il calcolo dell'altezza BH:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 15^2 – (24/2)^2 = 15^2 – 12^2 = 225 – 144 = 81$ e

$BH = \sqrt{81} = 9$ braccia.

Calandri definisce l'altezza BH nel modo che segue:

"…*et la radicie di 81 sarà lungo el cateto o vero diametro che vien dall'angolo delle due faccie di 15 bracia*…".

L'area S del triangolo è:

$S = BH * AH = 9 * 12 = 108$ braccia^2.

L'altezza BH divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e HBC. Entrambi hanno lati le cui lunghezze formano la terna derivata 9-12-15: essa proviene dalla terna primitiva 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 3.

Un altro triangolo isoscele

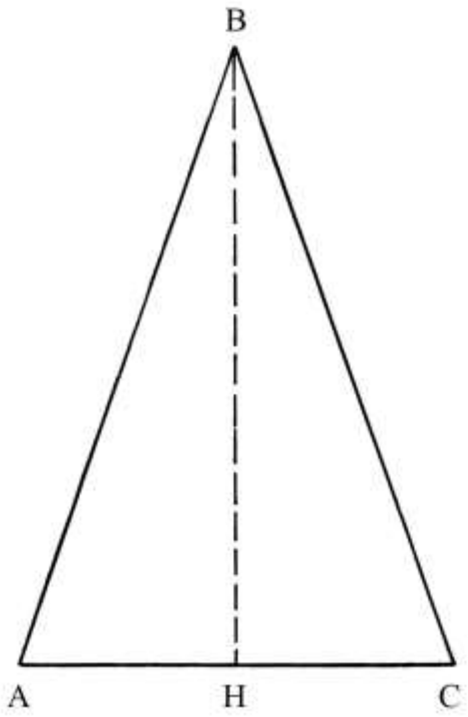
Un triangolo isoscele ha due lati lunghi 24 braccia e il terzo è 16.
Il problema chiede l'area del triangolo.
L'altezza BH è lunga:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AC/2)^2 = 24^2 – 8^2 = 576 – 64 = 512$ e

$BH = \sqrt{512} \approx (22 + 5/8)$ braccia.

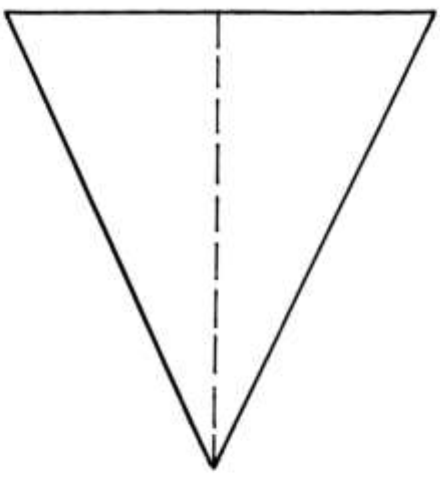
L'area S è:

$S\ AH * BH = 8 * (22 + 5/8) = 181$ braccia^2.



Triangolo 13-14-15

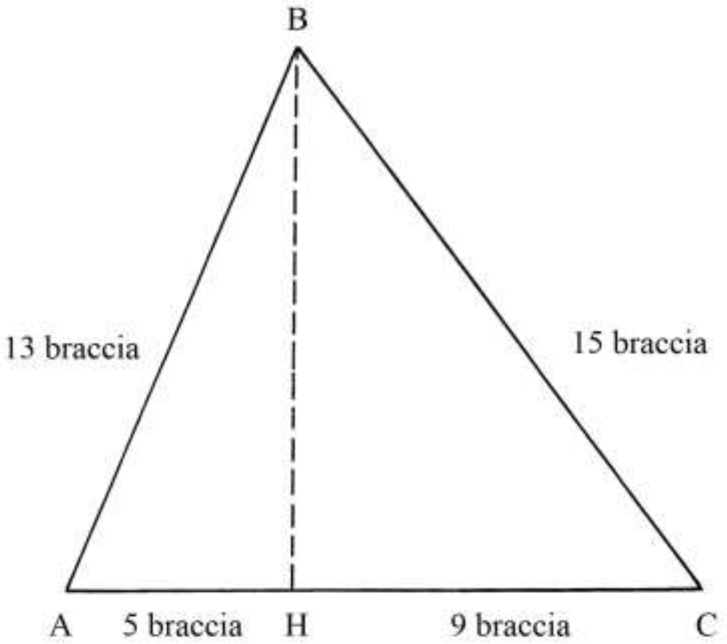
Uno *scudo*, cioè un triangolo ha lati lunghi 13, 14 e 15 braccia. Come accennato in precedenza, per alcuni abacisti il termine *scudo* indicava un triangolo con un vertice collocato in basso e il lato orizzontale in alto:



Di seguito, il triangolo è disegnato con il lato orizzontale in basso e il vertice opposto in alto.

L'argomento è stato affrontato anche nell'edizione a stampa con uno scopo diverso: calcolare la lunghezza del diametro inscritto nel triangolo.

Questo nuovo problema chiede l'area del triangolo ABC.



Occorre calcolare la lunghezza del "*diamitro*" del triangolo e cioè un'altezza: la procedura è chiaramente finalizzata al calcolo di un'altezza espressa da un numero intero, che è quella BH di figura, rivolta al lato lungo 14 braccia (che è quello AC).

I passi utilizzati da Calandri sono:

* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* sommare i due precedenti quadrati: 196 + 169 = 365;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sottrare l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due: 365 – 225 = 140;
* dividere per 2: 140/2 = 70;
* dividere per la lunghezza della base AC: 70/14 = 5 braccia, lunghezza di AH;
* sottrarre 5 da 14: 14 – 5 = 9 braccia, lunghezza di HC;
* moltiplicare la lunghezza di HC per sé stessa: 9 * 9 = 81;
* sottrarre dal quadrato della lunghezza di BC: 225 – 81 = 144;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144}$ = 12 braccia, lunghezza dell'altezza BH;
* moltiplicare per la lunghezza della base: 12 * 14 = 168;
* dividere per 2: 168/2 = 84 braccia^2, area del triangolo ABC.

I passi della procedura impiegati per calcolare la lunghezza di AH sono riassumibili in una formula:

$$AH = (AC^2 + AB^2 – BC^2)/(2 * AC).$$

La lunghezza di AH è data dalla seguente formula:

$$HC = (AC^2 + BC^2 – AB^2)/(2 * AC).$$

- APPROFONDIMENTO -

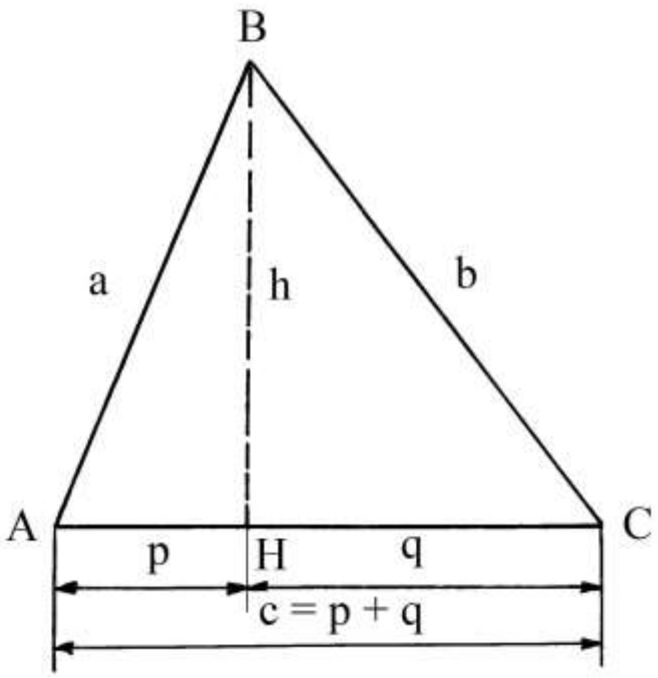
Erone e il triangolo 13-14-15

Spieghiamo in questo paragrafo l'origine delle due ultime formule.

Lo studio delle proprietà del triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15 fornì al matematico e ingegnere Erone di Alessandria (I secolo d.C.) lo spunto per definire una formula di valore generale, utile allo scopo di calcolare le lunghezze delle proiezioni dei lati inclinati di un triangolo sulla base.

Nella figura che segue i lati hanno le seguenti lunghezze:

- AB = a = 13
- BC = b = 15
- AC = c = 14



BH è l'altezza relativa alla base AC.

Il punto H divide il lato di base in due parti, *p* e *q*, che sono rispettivamente le *proiezioni* dei lati AB e BC:

$AC = AH + HC \quad \leftrightarrow \quad c = p + q$

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ABH e BCH si ha:

$BH^2 = AB^2 – AH^2$

$h^2 = a^2 – p^2$

$BH^2 = BC^2 – HC^2$

$h^2 = b^2 – q^2$

Le due formule si equivalgono:

$a^2 – p^2 = b^2 – q^2$

Ma $p = c – q$ e sostituendo

$a^2 – (c – q)^2 = b^2 – q^2$

$a^2 – (c^2 – 2cq – q^2) = b^2 – q^2$

$a^2 – c^2 + 2cq – q^2 = b^2 – q^2$

$2cq = b^2 + c^2 – a^2$

Ne consegue:

$q = (b^2 + c^2 – a^2)/(2 * c)$

Quest'ultima è la formula trovata da Erone per risolvere il problema.

Sostituendo nella formula precedente i valori noti si ha:

$$q = (15^2 + 14^2 – 13^2)/(2 * 14) = (225 + 196 – 169)/28 = 252/28 = 9 .$$

Il valore di *p* è:

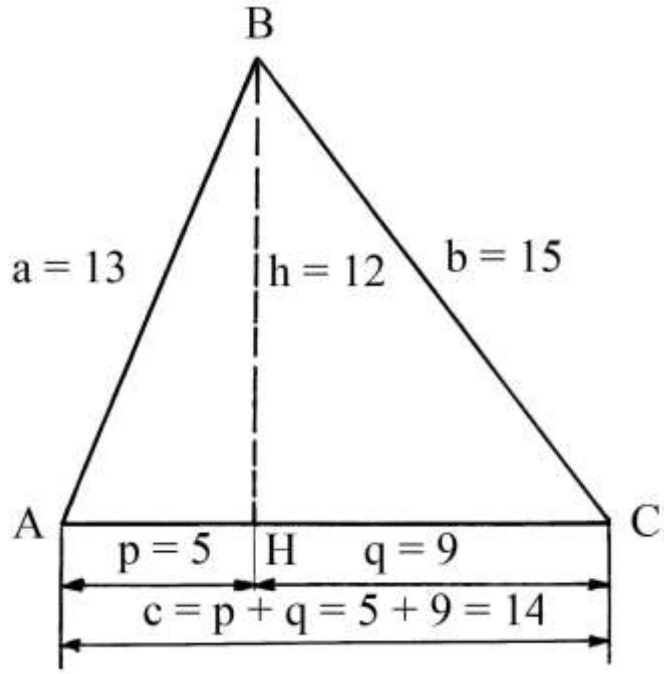
$$p = c – q = 14 – 9 = 5.$$

La formula di Erone usata per determinare *p* è la seguente:

$$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (13^2 + 14^2 – 15^2)/(2 * 14) = 140/28 = 5.$$

L'altezza BH = h è uguale a:

$$BH^2 = AB^2 – AH^2 \quad e$$
$$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{(13^2 – 5^2)} = \sqrt{(169 – 25)} = \sqrt{144} = 12.$$



Le formule di Erone hanno valore generale e cioè si applicano a tutti i triangoli.

- -

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

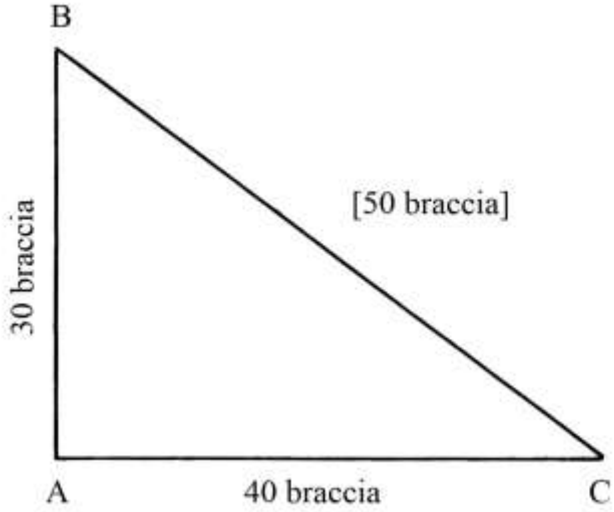
Il successivo problema verte sempre sullo stesso triangolo 13-14-15 e ne calcola l'area applicando la *formula di Erone*.

La procedura contiene i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei tre lati: 13 + 14 + 15 = 42, perimetro del triangolo;
* dividere per 2: 42/2 = 21, semiperimetro:
* sottrarre la lunghezza di AB dal semiperimetro: 21 – 13 = 8;
* moltiplicare 8 per il semiperimetro: 8 * 21 = 168;
* sottrarre la lunghezza di AC dal semiperimetro: 21 – 14 = 7;
* moltiplicare 7 per 168: 7 * 168 = 1176;
* sottrarre la lunghezza di BC dal semiperimetro: 21 – 15 = 6;
* moltiplicare 6 per 1176: 6 * 1176 = 7056;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{7056}$ = 84 braccia^2, area del triangolo ABC.

Area di un triangolo rettangolo

Un triangolo rettangolo ha il cateto BA lungo 30 braccia e quello BC è 40 braccia.



Il problema chiede la lunghezza dell'ipotenusa AC e l'area del triangolo.

La lunghezza di AC è data da:

$AC^2 = BC^2 + BA^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500$ e

$AC = \sqrt{2500} = 50$ braccia.

Il triangolo rettangolo ABC ha lati con lunghezze che formano la terna derivata 30-40-50 che è ottenuta dalla terna primitiva 3-4-5 moltiplicando per 10 tutti suoi componenti.

L'area S del triangolo è:

$S = AB * (AC/2) = 30 * (40/2) = 30 * 20 = 600$ braccia^2.

Cerchio inscritto in un triangolo rettangolo

Nel triangolo rettangolo che ha fatto oggetto del precedente problema deve essere inscritto il più grande cerchio possibile.

AB è lungo 30 braccia, AC è 40 e BC è 50 braccia.

Il problema chiede la lunghezza della circonferenza del cerchio inscritto.

Il punto I è l'*incentro*, centro del cerchio inscritto: ID, IE e IF sono tre raggi, tutti perpendicolari rispettivamente a AB, BC e AC.

Calandri calcola il diametro *d* del cerchio inscritto come segue:

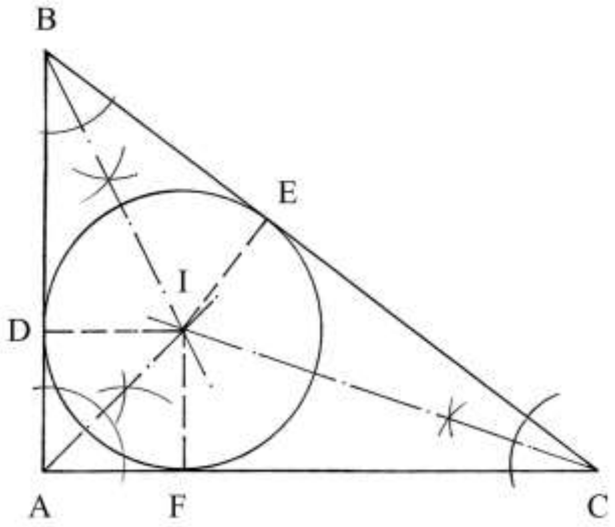
$d = AB + AC – BC = 30 + 40 – 50 = 20$ braccia.

Ne consegue:

$ID = d/2 = 20/2 = 10$ braccia.

La circonferenza *c* di questo cerchio è lunga:

$c = 22/7 * d = 22/7 * 20 = (62 + 6/7)$ braccia.



\- APPROFONDIMENTO -

L'*incentro* I è il punto di intersezione delle bisettrici dei tre angoli interni.

Le bisettrici AI, BI e CI dividono ABC in tre triangoli: ABI, BCI e ACI.

Conosciamo l'area di ABC:

$S_{ABC} = 600$ braccia^2.

Il suo perimetro è:

$2 * p = AB + AC + BC = 30 + 40 + 50 = 120$ e il semiperimetro *p* vale

$p = 120/2 = 60$.

L'area dell'intero triangolo ABC è data dalla somma delle aree dei tre triangoli:

$S_{ABC} = S_{ABI} + S_{BCI} + S_{ACI} = AB * ID/2 + BC * IE/2 + AC * IF/2$.

Ma ID = IE = IF = *r*, raggio del cerchio per cui:

$S_{ABC} = (AB * r)/2 + (BC * r)/2 + (AC * r)/2 = r * (AB/2 + BC/2 + AC/2)$.

L'espressione fra parentesi tonde corrisponde al *semiperimetro p* del triangolo ABC:

$(AB/2 + BC/2 + AC/2) = p$.

Il perimetro vale: $(AB + BC + AC) = 2*p$.

Conoscendo l'area di ABC e i valori di *2*p* e di *p*, è possibile ricavare la lunghezza del raggio *r* del cerchio inscritto:

$r = S_{ABC}/p = (2 * S_{ABC})/(2*p) = 2 * 600/120 = 10$ braccia.

\- -

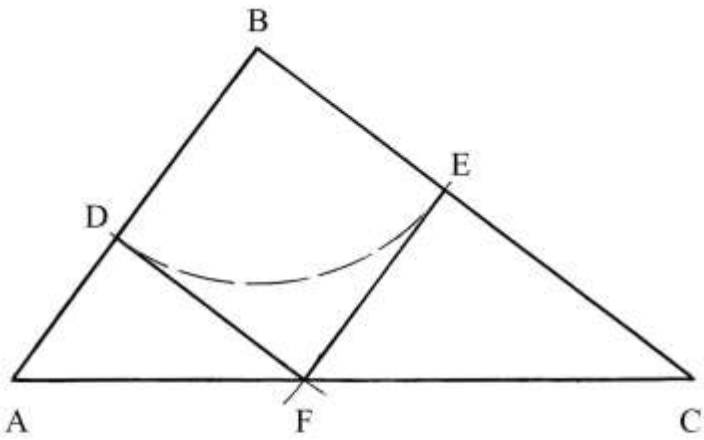
Quadrato inscritto in un triangolo

Un triangolo ha lati lunghi 30, 40 e 50 braccia:

* AB = 30,
* BC = 40,
* AC = 50.

Si tratta del triangolo rettangolo già incontrato in precedenti problemi.

Vi deve essere inscritto il più grande quadrato possibile: il problema chiede la lunghezza dei suoi lati.



La procedura usata da Calandri contiene i seguenti passi:

* moltiplicare le lunghezze dei due cateti: AB * BC = 30 * 40 = 1200 [è il doppio dell'area del triangolo ABC];
* sommare le lunghezze dei due cateti: AB + BC = 30 + 40 = 70;
* dividere il prodotto (AB * BC) per la somma delle lunghezze (AB + BC):
  (AB * BC)/(AB + BC) = 1200/70 = (17 + 1/7) braccia, lunghezza dei lati del quadrato DBEF.

La costruzione geometrica è piuttosto semplice: con apertura di compasso uguale a (17 + 1/7) fare centro in B e tracciare un arco che taglia AB in D e BC in E. Poi fare centro in D e in E con la stessa apertura BD e disegnare due archi che si incontrano in F, punto situato sull'ipotenusa AC.

DBEF è il quadrato cercato: esso è inscritto nel triangolo ABC perché tutti i suoi vertici giacciono sui lati del triangolo.

\- APPROFONDIMENTO -

Nel testo a stampa, Calandri ha presentato un problema simile: l'inscrizione del più grande quadrato possibile in un triangolo equilatero.

Le soluzioni dei due problemi differiscono.

Il triangolo di questo secondo problema ha area S che è:

$S = AB * BC/2 = 30 * 40/2 = 600$ braccia^2.

L'area del quadrato DBEF è:

$S_{DBEF} = BD^2 = (17 + 1/7)^2 = (293 + 43/49)$ braccia^2.

\- -

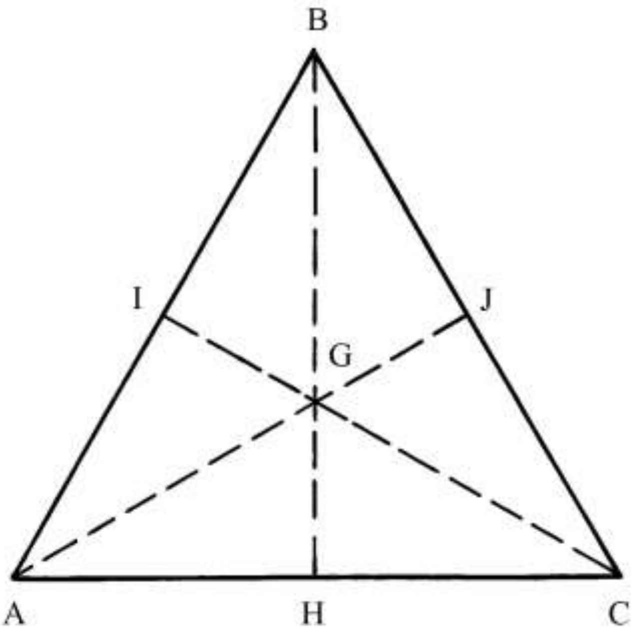
<u>Triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.

Il problema chiede di ricavare la distanza fra il centro G e un vertice qualsiasi.

BH, AJ e CI sono tre altezze, mediane, bisettrici e assi che si intersecano nel centro G.

Deve essere calcolata la lunghezza di GA = GB = GC, che è il raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC.



La procedura usata da Calandri è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 3: $100/3 = (33 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(33 + 1/3)} \approx (5 + 17/22)$ braccia, lunghezza di GA = GB = GC.

La procedura è riassunta in una formula:

$$GA = \sqrt{(AB^2/3)}.$$

\- APPROFONDIMENTO -

BH è un'altezza ed è lunga:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = AB^2 - (AB/2)^2 = 10^2 - (10/2)^2 = 100 - 25 = 75 \quad \text{e}$$

$$BH = \sqrt{75}.$$

Il punto G divide BH in due parti:

$$BG : 2 = GH : 1.$$

BG è lungo il doppio di GH e *due terzi* di BH:

$$BG = 2/3 * BH = 2/3 * \sqrt{75} = \sqrt{(4/9 * 75)} = \sqrt{(300/9)} = \sqrt{(100/3)} = \sqrt{(33 + 1/3)}$$

braccia.

\- -

<u>Area di un gherone</u>

Un triangolo ha la forma di un settore circolare.

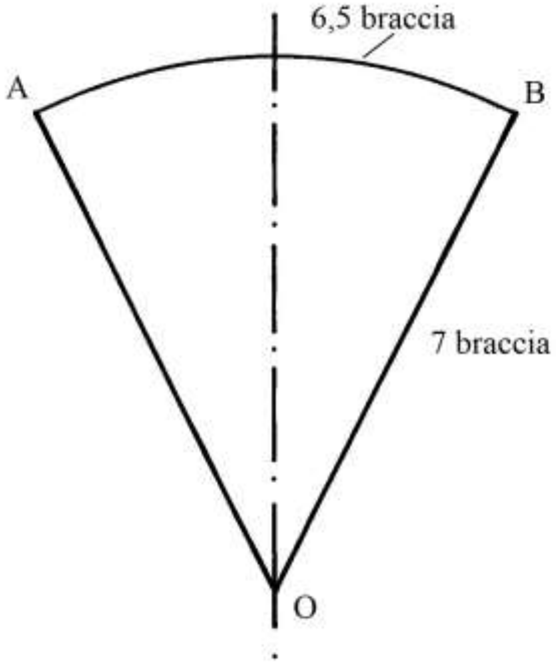
I due raggi, OA e OB, sono lunghi 7 braccia e l'arco AB è lungo 6,5 braccia.

Il problema chiede l'area del gherone.

La soluzione contiene i seguenti passi:

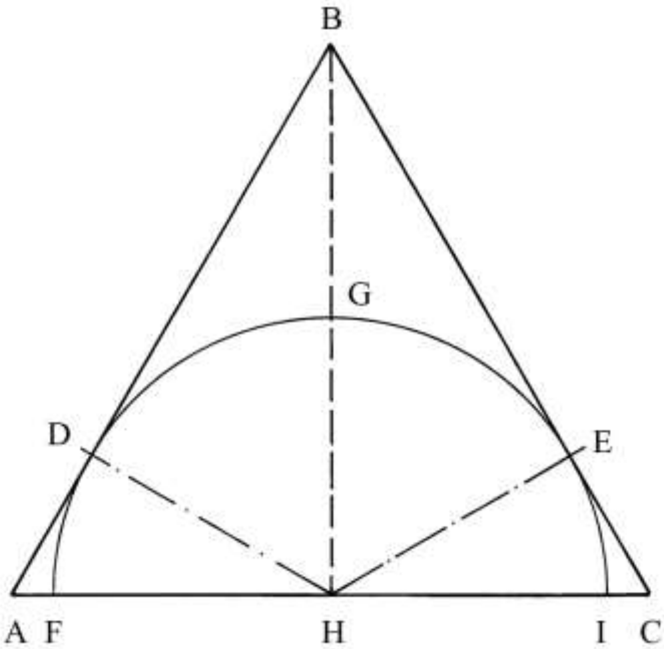
* dividere la lunghezza dell'arco per 2: $6{,}5/2 = (3 + ¼)$;
* moltiplicare per la lunghezza di OA: $(3 + ¼) * 7 = (22 + ¾)$ braccia^2, area della figura.

L'angolo AOB è ampio 53,18°.



Semicerchio inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 14 braccia: vi deve essere inscritto il più grande semicerchio.



La procedura usata da Calandri è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* moltiplicare per ¾: 196 * ¾ = 147;
* estrarre la radice quadrata: √147 = (12 + 1/8) braccia [altezza BH];
* dividere per 2: (12 + 1/8)/2 = (6 + 1/16) braccia, raggio del semicerchio inscritto.

- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza di BH è correttamente calcolata da Calandri:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = 14^2 – 7^2 = 196 – 49 = 147$ e

$BH = \sqrt{147} \approx (12 + 1/8)$ braccia.

Con apertura di compasso uguale a (6 + 1/16) fare centro in H e tracciare la semicirconferenza che è tangente ai lati AB e BC rispettivamente nei punti D e E.

La semicirconferenza è la curva FDGEI.

Dal punto H sono disegnate le perpendicolari ai lati AB e BC: sono HD e HE. Gli angoli che esse formano, DHA e EHC, hanno entrambi ampiezza uguale a 30°.

HD e HE sono due raggi del semicerchio: possiamo ricavare la loro lunghezza in modo diverso da quello utilizzato da Calandri.

BH divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e HBC. HD e HE sono due altezze: esse sono *perpendicolari* rispettivamente ai lati AB e BC.

L'area dell'intero triangolo ABC è:

$S_{ABC} = BH * AC/2 = (12 + 1/8) * (14/2) = (12 + 1/8) * 7 = (84 + 7/8)$ braccia^2.

ABH ha area uguale a metà di quella di ABC:

$S_{ABH} = S_{ABC}/2 = (84 + 7/8)/2 = (42 + 7/16)$ braccia^2.

L'area di ABH è data da:

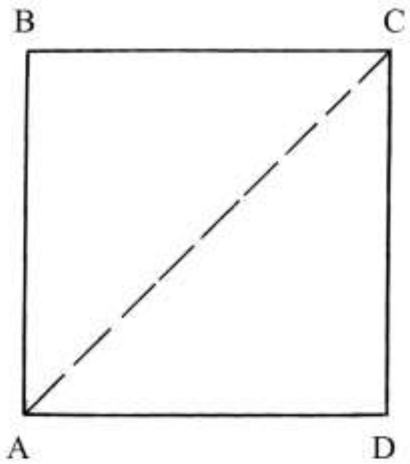
$S_{ABH} = DH * AB/2 = DH * 14/2 = DH * 7$, da cui

$DH = S_{ABH}/7 = (42 + 7/16)/7 = (6 + 1/16)$ braccia, che è la lunghezza del raggio del semicerchio calcolata da Calandri.

- -

Diagonale di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 10 braccia. È tracciata una delle due diagonali, AC:



La lunghezza di AC è:

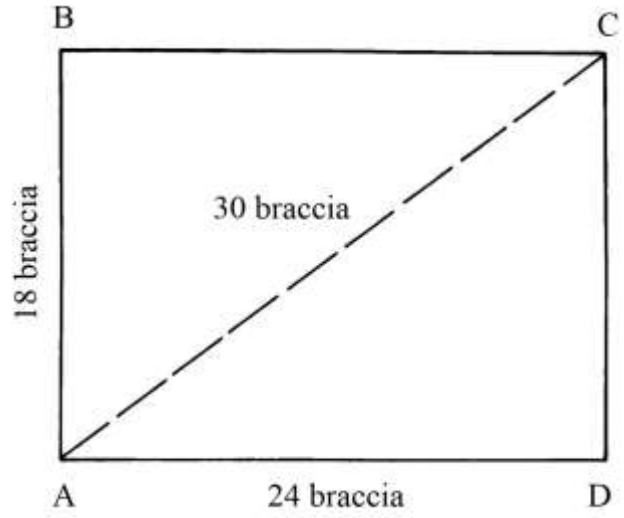
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 10^2 + 10^2 = 200$ e

$AC = \sqrt{200} \approx (14 + 1/7)$ braccia.

Lunghezza di una diagonale e area di un rettangolo

Un rettangolo ("*uno quadro*") è largo 18 braccia e lungo 24.

Il problema chiede la lunghezza di una diagonale e l'area del quadrilatero.



La lunghezza della diagonale AC è:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$ e

$AC = \sqrt{900} = 30$ braccia.

L'area S è data da:

$S = AB * AD = 18 * 24 = 432$ braccia^2.

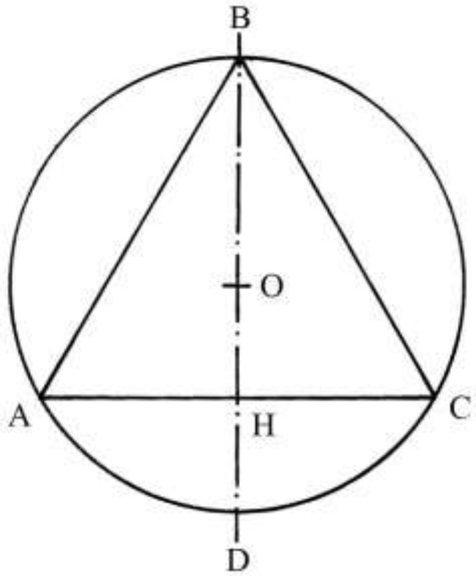
La diagonale AC divide il rettangolo in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABC e ACD.

Essi hanno lati lunghi 18-24-30 braccia, numeri che formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 6.

Triangolo inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 8 braccia: vi deve essere inscritto il più grande triangolo possibile.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del triangolo.



Il testo non lo dice espressamente, ma si tratta di un triangolo equilatero.

La procedura proposta da Calandri è:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $8 * 8 = 64$;
* moltiplicare per ¾: $64 * ¾ = 48$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48} \approx (6 + 47/50)$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo inscritto.

\- APPROFONDIMENTO -

ABC è il triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro O.

BH è un'altezza del triangolo e la sua lunghezza è uguale a ¾ di quella del diametro del cerchio:

$$BH = ¾ * AD = ¾ * 8 = 6 \text{ braccia.}$$

ABH è un triangolo rettangolo: il cateto CH è lungo la metà di AC che è lungo quanto AB.

$$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = ¾ * AB^2.$$

Ne consegue:

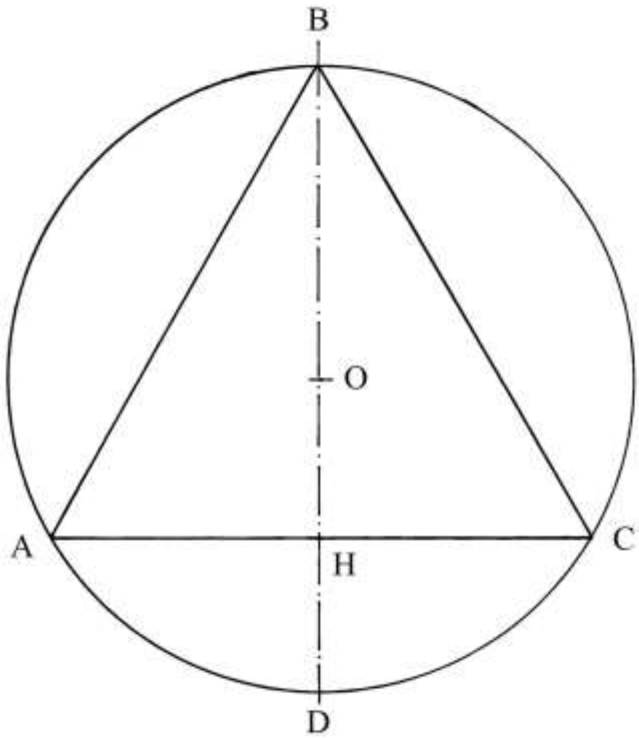
$$AB^2 = 4/3 * BH^2 = 4/3 * 6^2 = (4 * 36)/3 = 48 \quad \text{e}$$

$$AB = \sqrt{48} \approx (6 + 47/50) \text{ braccia.}$$

\- -

<u>Cerchio circoscritto a un triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 braccia e deve essere inscritto in un cerchio.



Il problema chiede il diametro del cerchio.
La procedura usata da Calandri è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $12 * 12 = 144$;
* moltiplicare per 4/3: $144 * 4/3 = 192$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{192} \approx (13 + 6/7)$ braccia, diametro del cerchio circoscritto.

\- APPROFONDIMENTO -

Per risolvere il problema, occorre determinare la posizione del *circoncentro* O, centro del cerchio circoscritto che nel caso del triangolo equilatero coincide con l'incentro del cerchio inscritto.

<u>Alcuni punti notevoli dei triangoli</u>

Nei triangoli sono considerati alcuni *punti notevoli*. Fra di essi sono i seguenti:

* l'*ortocentro* che è l'incrocio delle tre altezze;
* l'*incentro* che è l'intersezione delle bisettrici dei tre angoli interni: è il centro del cerchio inscritto ed è equidistante da tutti i lati;
* il *baricentro*: è il punto di incontro delle *mediane*. Una mediana collega il punto medio di un lato con il vertice opposto;
* il *circocentro* è l'incrocio dei tre *assi*: l'asse di un segmento è la perpendicolare che passa per il suo punto medio. Questo punto è il centro del cerchio circoscritto.

Nel triangolo equilatero le altezze, le bisettrici, le mediane e gli assi dei lati coincidono in tre segmenti: i quattro punti notevoli citati coincidono.

Per il vertice B e per H (punto medio del lato AC) passa un asse di simmetria, che è anche un diametro.

BH è lungo ¾ del diametro del cerchio:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = 12^2 – (12/2)^2 = 144 – 36 = 108$ e
$BH = \sqrt{108}$ braccia.

Il diametro BD è lungo:

$BD = 4/3 * BH = 4/3 * \sqrt{108} = \sqrt{(16 * 108/9)} = \sqrt{192} \approx (13 + 6/7)$ braccia.

Il risultato è uguale a quello ottenuto da Calandri.

- -

Copertura di una sfera

Nel testo stampato è contenuta una versione più completa di questo problema. Nel Codice Riccardiano è chiesta soltanto la superficie in braccia^2 del panno occorrente per ricoprirla.

Volume di una pietra

Una pietra ha la forma di un prisma a base quadrata: i lati della base sono lunghi 8 braccia e il prisma è alto 6 braccia.

Il problema chiede il volume della pietra.

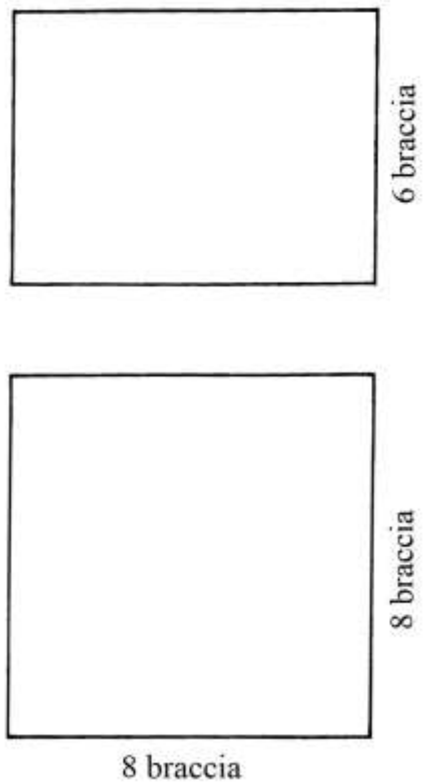
Nello schema, il solido è rappresentato in doppia proiezione ortogonale: in basso la e in alto la vista frontale.

L'area S della base è:

$S = 8 * 8 = 64$ braccia^2.

Il volume V è:

$V = S * altezza = 64 * 6 = 384$ braccia^3.

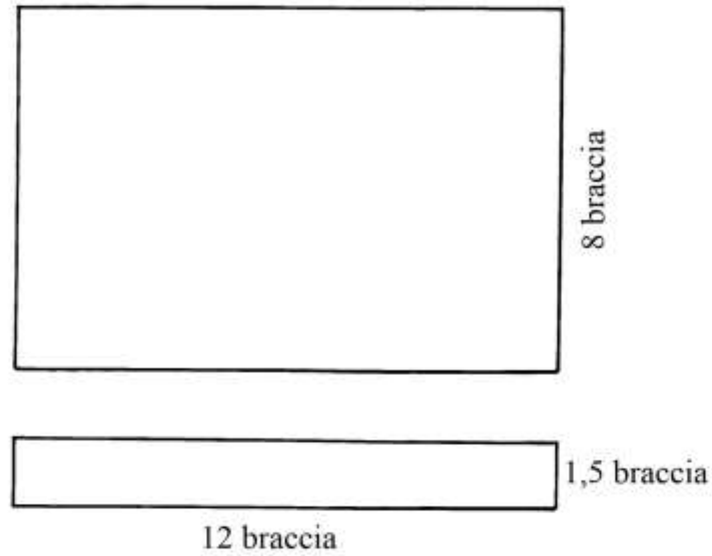


Muro di mattoni

Un maestro artigiano deve costruire un muro con dei mattoni: esso è lungo 12 braccia, alto 8 e spesso 1,5 braccia.

I mattoni sono tutti uguali e lunghi ½ braccio, larghi ¼ e alti o spessi) 1/8 di braccio.

Il problema chiede il numero dei mattoni occorrenti.



Occorre calcolare il volume del muro:

$V_{MURO} = 8 * 12 * 1,5 = 144$ braccia^3.

Il volume di un mattone è:

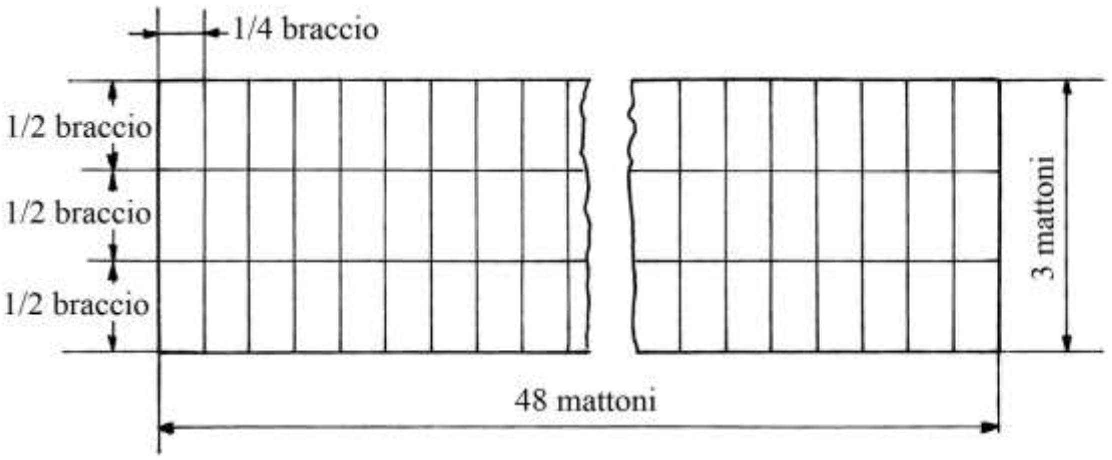
$V_{MATTONE} = ½ * ¼ * 1/8 = 1/64$ braccio^3.

Il numero N dei mattoni occorrenti è:

$N = V_{MURO}/V_{MATTONE} = 144/(1/64) = 144 * 64 = 9216$ mattoni.

- APPROFONDIMENTO -

Le dimensioni dei mattoni permettono una precisa costruzione del muro. Tralasciando lo spessore della calce necessaria per tenere uniti i mattoni, il muro è realizzato con una serie di strati sovrapposti come quello mostrato nello schema che segue:



Tre mattoni coprono perfettamente lo spessore del muro:

$3 * ½ = 1,5$ braccia.

I mattoni sono affiancati per formare una matrice formata da una fila di 48 colonne contenenti ciascuna 3 mattoni; ogni strato contiene S mattoni:

$S = 3 * 48 = 144$ mattoni.

Ciascuno strato ha lo spessore dato dall'altezza di un mattone e cioè 1/8 di braccio.

Dato che il muro è alto 8 braccia, il numero M degli strati sovrapposti che lo formano è:

$M = 8/(1/8) = 8 * 8 = 64$.

Il numero N dei mattoni occorrenti è dato dal prodotto del numero S dei mattoni che formano uno strato per il numero degli strati S:

$N = S * M = 144 * 64 = 9216$ mattoni, che è il risultato ottenuto da Calandri.

- -

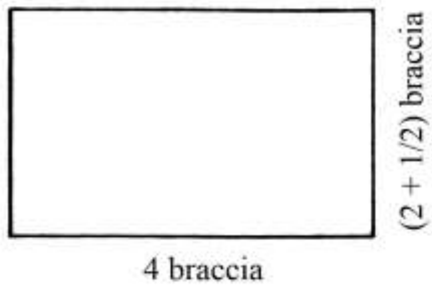
<u>Grano contenuto in una cassa</u>

Il problema è simile a uno contenuto nell'edizione stampata, ma i dati sono diversi.

La cassa è lunga 4 braccia, larga (2 +1/2) e alta (2 + 1/3) braccia.

È chiesto il volume V del grano, espresso in *staia*, che può contenere:

$V = 4 * (2 + ½) * (2 + 1/3) = (23 + 1/3)$ braccia^3.



Un braccio^3 vale 9 staia per cui il volume del grano è:

$V_{GRANO} = V * 9 = (23 + 1/3) * 9 = 210$ staia.

<u>Un sacco contenente grano</u>

Un problema simile a questo, ma con dati differenti, è contenuto nell'edizione a stampa.

Un sacco ha diametro *d* lungo 2 braccia ed è alto 6.

È domandata la quantità di grano in staia che può contenere.

L'area S della sezione trasversale del sacco è:

$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 2^2 = 44/14 = 22/7 = (3 + 1/7)$ braccia^2.

Il volume V è:

$V = (3 + 1/7) *$ altezza $= (3 + 1/7) * 6 = (18 + 6/7)$ braccia^3.

Il grano contenuto, misurato in staia, è:

$V_{GRANO} = V * 9 = (18 + 6/7) * 9 = (169 + 5/7)$ staia.

Doghe di due botti

Anche questo problema è simile a uno contenuto nel testo stampato, ma i dati differiscono notevolmente.

Una botte è fatta di con 30 doghe e ha volume di 30 barili.

Una seconda botte ha un volume di 12 barili ed ha la stessa altezza della prima.

Il problema chiede quante doghe possiede questa seconda botte.

La procedura usata da Calandri contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il numero delle doghe della prima botte per sé stesso: $30 * 30 = 900$:
* moltiplicare per il volume della seconda botte: $900 * 12 = 10800$;
* dividere per il numero dei barili della prima botte: $1088/30 = 360$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{360} = (18 + 36/37)$ numero delle doghe della seconda botte, da arrotondare a 19.

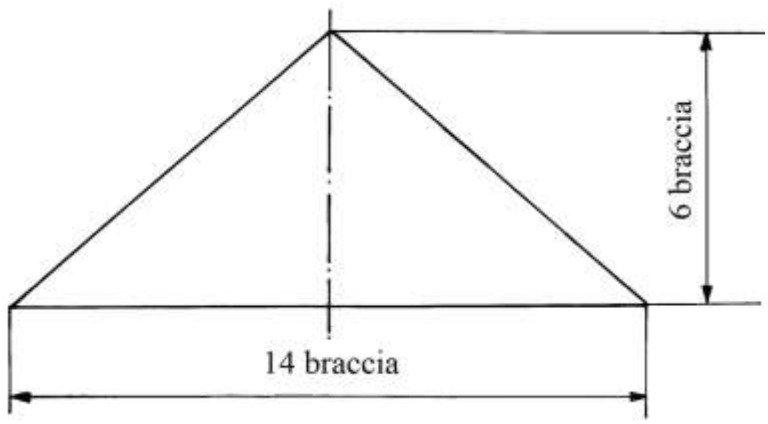
Volume di un monte di grano

Su di un'aia colonica è stato formato un monte di grano che ha forma conica.

La base ha circonferenza *c* lunga 44 braccia e il cono è alto 6 braccia.

Il diametro *d* della base è lungo:

$d = c/(3 + 1/7) = 44/(3 + 1/7) = 14$ braccia.



Il problema chiede il volume del grano misurato in staia.

L'area S della base è calcolata da Calandri usando la costante 7/88:

$S = c^2 * 7/88 = 44^2 * 7/88 = 154$ braccia^2.

Il volume V è:

$V = S *$ altezza$/3 = V * 6/3 = 154 * 2 = 308$ braccia^3.

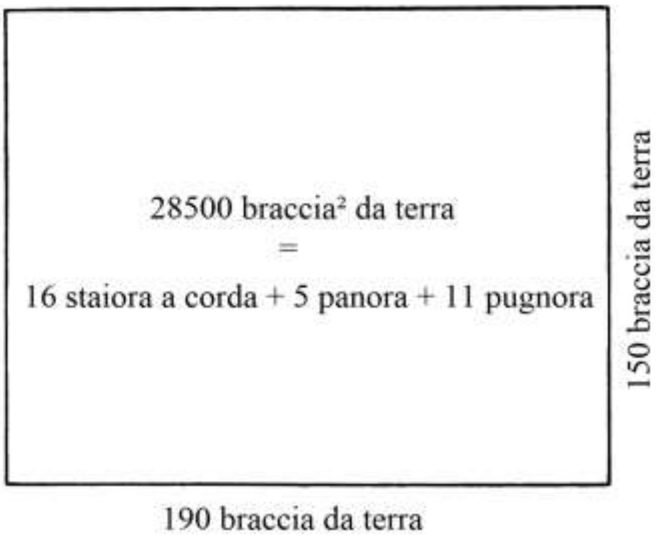
Il volume del grano in staia è:

$V_{GRANO} = V * 9 = 308 * 9 = 2772$ staia.

Area di un campo

Il problema è simile a uno contenuto nell'edizione a stampa, ma i dati sono nettamente differenti.

Un campo è lungo 190 braccia ed è largo 150.



È chiesta la sua area espressa in *staiora a corda* e suoi sottomultipli.

Anche se Calandri non lo scrive espressamente, le lunghezze di un terreno agricole erano misurate in *braccia da terra* che – ricordiamolo – erano più corte delle *braccia da panno*:

1 braccio da terra = 17/18 di 1 braccio da panno.

L'area S del campo è:

S = 190 * 150 = 28500 braccia^2 da terra.

Utilizziamo le equivalenze già indicate:

* 1 staioro a corda = 12 panora;
* 1 panoro = 12 pugnora;
* 1 pugnoro = 12 braccia^2 da terra.

Ne consegue:

* 1 panoro = 12 * (12 braccia^2 da terra) = 144 braccia^2 da terra;
* 1 staioro a corda = 12 * (144 braccia^2 da terra) = 1728 braccia^2 da terra.

Procediamo alla conversione:

S = 28500 braccia^2 da terra/1728 = 16 staiora + 852 braccia^2 da terra;

852/144 = 5 panora + 132 braccia^2 da terra;

132/12 = 11 pugnora.

In conclusione si ha:

S = 16 staiora + 5 panora + 11 pugnora.

IL MANOSCRITTO DI SIENA

Il Codice L. VI. 45 della Biblioteca Comunale di Siena contiene, fra l'altro, una "*Raccolta di ragioni*" di cui è autore Filippo Calandri.

Il codice è cartaceo ed è composto da 112 carte numerate e può essere suddiviso in tre parti.

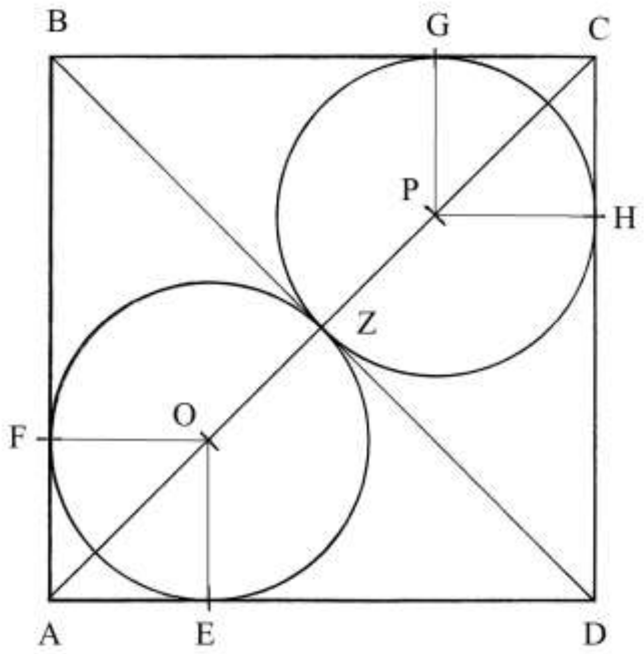
La prima parte è un testo di carattere astronomico e occupa le carte da 1 a 60. La seconda presenta una serie di regole per determinare le date delle feste mobili, da carta 62 a carta 74.

I problemi geometrici che sono qui di seguito descritti sono ricavati dalla terza parte del Codice.

La "*Raccolta di ragioni*" è stata pubblicata da Daniela Santini in un fascicolo che è citato in bibliografia.

Cerchi inscritti in un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 12 braccia. Vi devono essere inscritti due cerchi uguali e i più grandi possibili: il problema chiede la lunghezza dei diametri.



ABCD è il quadrato e AC e BD sono le due diagonali che si incontrano nel punto Z.

I due cerchi hanno centri in O e in P che sono collocati sulla diagonale AC. Essi sono fra loro tangenti in Z e toccano i lati del quadrato nei punti E, F, G e H.

I cerchi hanno raggi lunghi:

OZ = PZ = OE = OF = PG = PH.

La soluzione presentata da Calandri contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* moltiplicare per 2: 144 * 2 = 288;
* estrarre la radice quadrata: √288;
* sommare le lunghezze di due lati: 12 + 12 = 24;
* sottrarre √288: (24 – √288) braccia, lunghezza dei diametri dei due cerchi.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione può essere ricavata e dimostrata in altro modo.

AC è lunga:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$ e

$AC = \sqrt{288}$ braccia.

AC è formata da quattro *segmenti adiacenti*:

$AC = AO + OZ + ZP + PC$.

OZ e PZ sono due raggi dei cerchi.

OA e PC sono le diagonali di due quadrati che hanno lati lunghi quanto i raggi OZ e PZ.

Quindi si ha:

$OA^2 = OE^2 + OF^2 = 2 * OE^2 = 2 * OZ^2$ e

$OA = OZ * \sqrt{2}$.

Analoghe considerazioni valgono per le lunghezze di ZP, PH e PC:

$ZP = PG = PH$ e $PC = OA$.

La lunghezza del raggio OZ è l'incognita "x":

$OZ = x$.

La diagonale AC è lunga:

$AC = AO + OZ + ZP + PC = OZ * \sqrt{2} + OZ + OZ + OZ * \sqrt{2} =$

$= 2 * OZ + 2 * \sqrt{2} * OZ = 2 * x * (1 + \sqrt{2})$.

MA $AC = \sqrt{288}$, per cui si ha:

$2 * x * (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{288}$ da cui:

$x = \sqrt{288}/[2 * (1 + \sqrt{2})] = [\sqrt{(288/4)}]/(1 + \sqrt{2}) = (\sqrt{72})/(1 + \sqrt{2}) =$

$[(\sqrt{72}) * (1 - \sqrt{2})]/[(1 + \sqrt{2}) * (1 - \sqrt{2}) = (\sqrt{72}) * (1 - \sqrt{2})/(-1) =$

$= (\sqrt{72}) * (\sqrt{2} - 1) = OZ$, raggio dei due cerchi.

Il diametro *d* dei due cerchi è lungo il doppio del raggio OZ:

$d = 2 * OZ = 2 * (\sqrt{72}) * (\sqrt{2} - 1) = 2 * \sqrt{72} * \sqrt{2} - (2 * \sqrt{72}) =$

$= 2 * \sqrt{144} - \sqrt{(4 * 72)} = \sqrt{576} - \sqrt{288} = (24 - \sqrt{288})$ braccia, lunghezza dei diametri dei due cerchi.

Il risultato è uguale a quello ottenuto da Filippo Calandri.

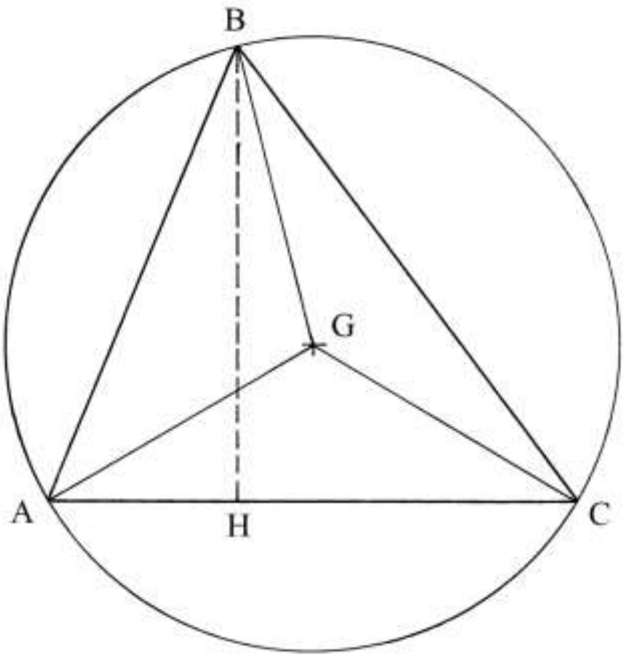
- -

Cerchio circoscritto a un triangolo 13-14-15

Un triangolo ha lati lunghi 13, 14 e 15 braccia: il suo lato lungo 14, AC in figura, è orizzontale.

AB è lungo 13 e BC 15 braccia.

Il triangolo deve essere inscritto in un cerchio di cui deve essere determinato il diametro.



G è il *circocentro* del triangolo e il cerchio del cerchio circoscritto che ha raggio GA = GB = GC.

La soluzione proposta da Calandri contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di AB per quella di BC: 13 * 15 = 195;
* dividere per l'altezza BH (che è lunga 12 braccia): 195/12 = 16,25 braccia, diametro del cerchio circoscritto;
* dividere per 2: 16,25/2 = 8,125 [8 + 1/8] braccia, lunghezza dei raggi GA = GB = GC.

La procedura di Calandri è riassunta nella formula che segue:

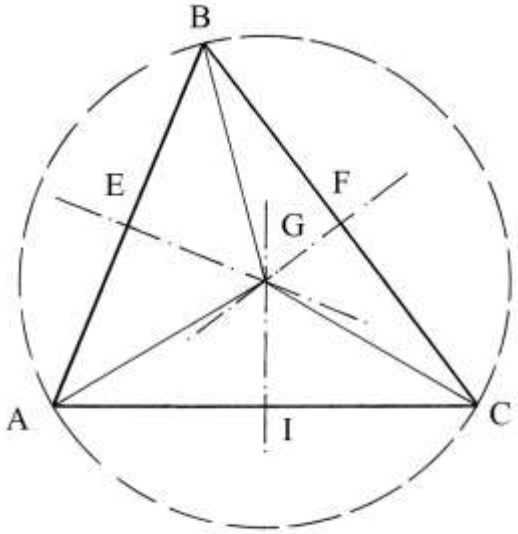
GA = [(AB * BC)/BH]/2.

È opportuno sottolineare un dato di fatto: i tre segmenti – AB, BC e BH – coinvolti nella procedura sono tutti uscenti dallo stesso vertice B: nel successivo APPROFONDIMENTO è contenuta una ulteriore spiegazione. In altre parole, la lunghezza del diametro del cerchio circoscritto è data dal prodotto di due lati *consecutivi* nello stesso vertice (ad esempio B) diviso per la lunghezza dell'altezza uscente dallo stesso vertice.

Fra le note proprietà possedute dal triangolo scaleno 13-14-15 vi è quella di avere le lunghezze dei lati, quella di un'altezza (BH, relativa al lato AC di lunghezza 14, media aritmetica fra quelle degli altri due lati) e l'area, grandezze tutte espresse da numeri interi. BH è lunga 12 braccia e l'area è 84 braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

Il centro del cerchio circoscritto, il *circocentro*, è fissato dall'intersezione dei tre assi dei lati del cerchio. Un *asse* è la perpendicolare a un segmento che passa per il suo punto medio.

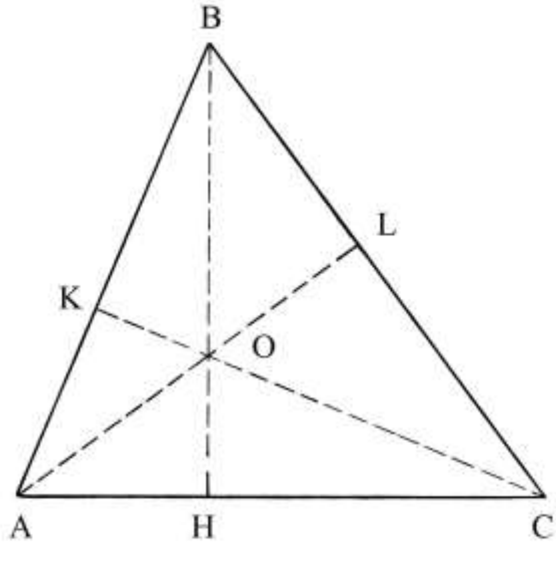


Nella figura qui sopra, i punti medi dei tre lati sono:

* E su AB;
* F su BC;
* I su AC.

Verifichiamo la validità della formula sottostante alla procedura usata da Calandri.

Le tre altezze si incontrano in un punto, O, che è l'*ortocentro* del triangolo.



Conoscendo l'area del triangolo che è 84 braccia^2, possiamo ricavare le lunghezze delle tre altezze.

L'area *S* di un triangolo è data da:

S = (lato * altezza)/2 = (ℓ * h)/2.

Da questa formula possiamo ricavare l'altezza *h*:

h = (2 * S)/ℓ.

Le tre altezze di ABC sono:

* BH = (2 * S)/AC = (2 * 84)/14 = 12 braccia;
* CK = (2 * S)/BC = (2 * 84)/13 = 168/13 braccia;
* AL = (2 * S)/BC = (2 * 84)/15 = 168/15.

Utilizziamo le altezze CK e AL per ricavare il diametro del cerchio usando la procedura di Calandri:

2 * GB = (AB * AC)/AL = (13 * 14)/(168/15) = (13 * 14 * 15)/168 = 16,25 braccia;
GB = 16,25/2 = 8,125 braccia.

2 * GC = (BC * AC)/CK = (15 * 14)/(168/13) = (15 * 14 * 13)/168 = 16,25 braccia;
GC = 16,25/2 = 8,125 braccia.

Tutte queste formule sono varianti di quella che è oggi usata:

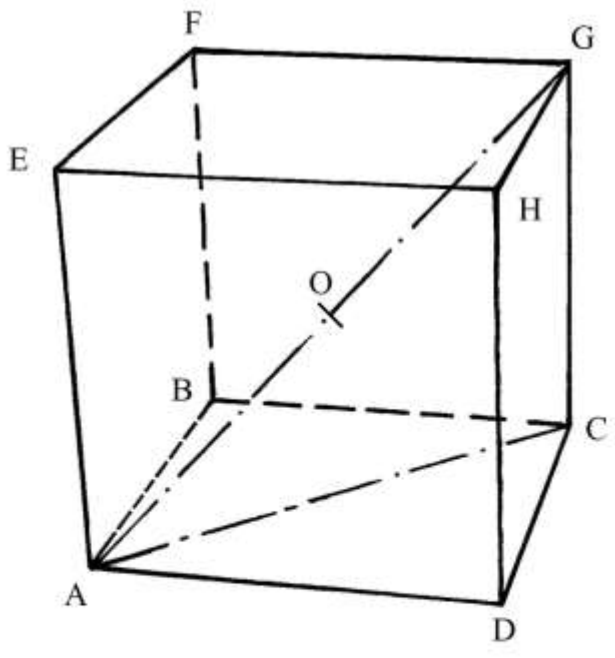
GA = GB = GC = (AB * BC * AC)/(2 * S).

- -

<u>Cubo inscritto in una sfera</u>

Un cubo ha spigoli lunghi 8 braccia. Deve essere inscritta in una sfera: il problema chiede il diametro della più piccola sfera in cui viene collocato.

Lo schema che segue rappresenta il cubo in prospettiva:



La soluzione proposta da Calandri è:

* moltiplicare la lunghezza dello spigolo per sé stessa: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare per 3: 64 * 3 = 192;
* estrarre la radice quadrata: √192 braccia, lunghezza del diametro della sfera.

L'Autore propone una verifica: se una sfera ha diametro lungo √192 braccia, lo spigolo del più grande cubo in essa inscritto è così calcolato:

* moltiplicare √192 per sé stesso: √192 * √192 = 192;

* dividere per 3: $192/3 = 64$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{64} = 8$ braccia, lunghezza dello spigolo del cubo inscritto.

\- APPROFONDIMENTO -

Il punto O è il baricentro del cubo (e della sfera): esso è determinato dall'intersezione delle *quattro* diagonali che possiede questo solido: AG è una di esse e O è il suo punto medio. Le altre tre diagonali sono: BH, CE e DF.

Le quattro diagonali sono altrettanti diametri della sfera circoscritta.

Costruiamo la lunghezza di AG.

AG è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha cateti AC e GC.

A'B'C'D' è un quadrato che ha lati lunghi quanto quelli di ABCD. A'C' è una diagonale di questo quadrato.

Prolungare verso l'alto D'C' e verso sinistra B'C'.

Fare centro in C' e con raggio C'D' tracciare un arco da D' fino a stabilire il punto G'.

Di nuovo, fare centro in C' e con raggio C'A' disegnare un arco da A' fino fissare A''.

A'C' è lungo:

$$(A'C')^2 = (A'B')^2 + (B'C')^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128 \quad \text{e}$$

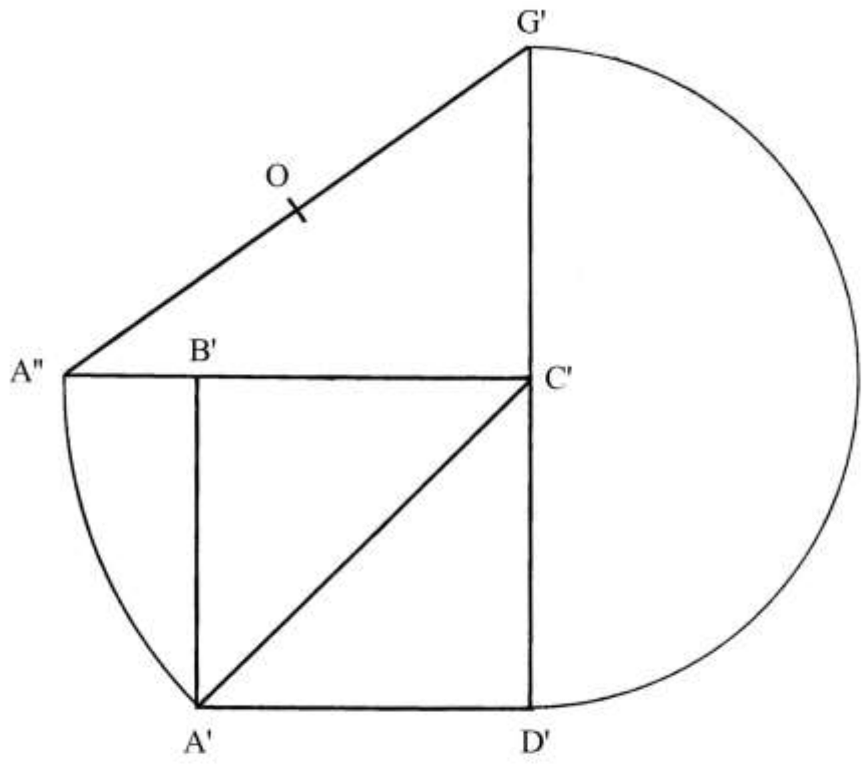
$$A'C' = \sqrt{128} \text{ braccia.}$$

A''G' è l'ipotenusa del triangolo rettangolo A''G'C' (che nel cubo equivale al triangolo rettangolo AGC). La sua lunghezza è:

$$(A''G')^2 = (C'A'')^2 + (C'G')^2 = (C'A')^2 + (C'G')^2 = (\sqrt{128})^2 + 8^2 = 128 + 64 = 192$$

e

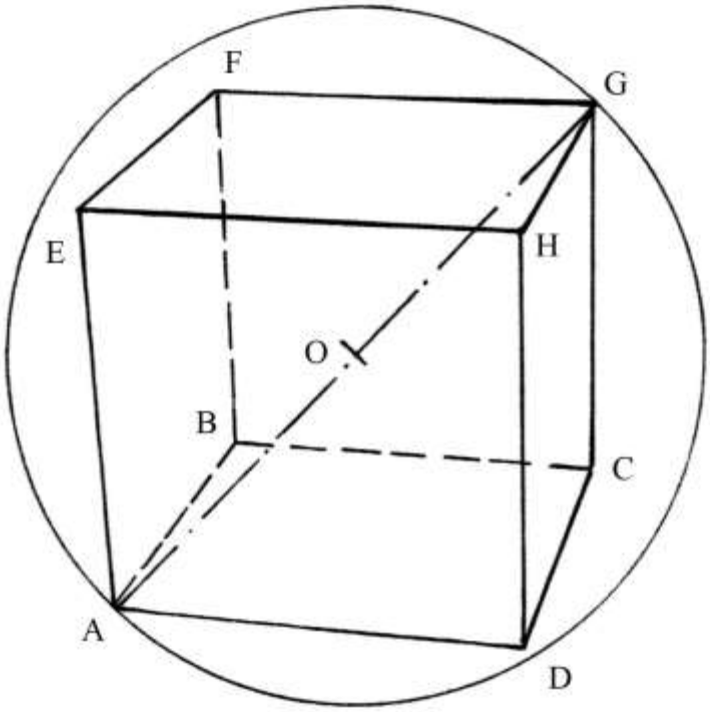
$$A''G' = \sqrt{192} \text{ braccia} = AG.$$



Il punto O è il medio di A''G' ed è il baricentro del cubo e della sfera.

Il risultato è uguale a quello ottenuto da Calandri.

Lo schema che segue presenta il cubo e la sfera circoscritta disegnati in prospettiva:



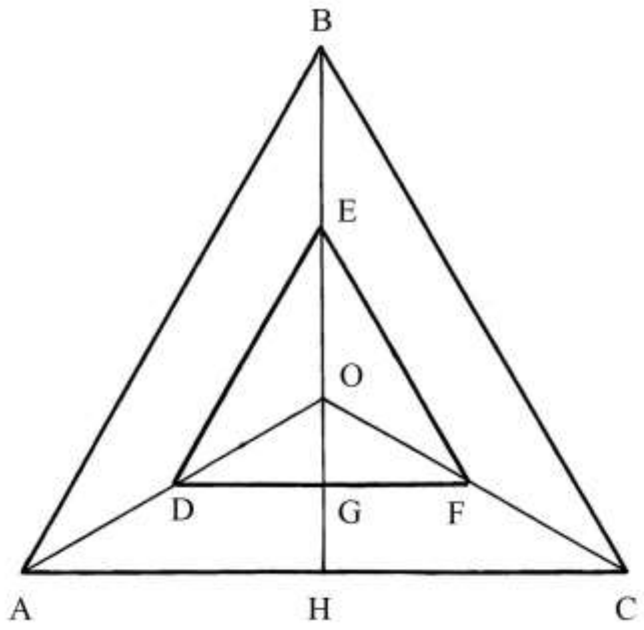
- -

<u>Pozzo triangolare</u>

Un pozzo ha la sezione a forma di triangolo equilatero: all'esterno ha lati lunghi 10 braccia e i muri sono spessi 1,5 braccia.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del triangolo interno.

I due triangoli sono concentrici.



Il segmento GH è la distanza che intercorre fra i lati dei due triangoli, misurata lungo le altezze:

BH – BG = GH = 1,5 braccia.

La soluzione proposta da Calandri porta a fissare alcuni dati:

* la *perpendicolare* del triangolo grande BH (è l'*altezza*) è lunga √75 braccia;
* la lunghezza di OH è [OH = 1/3 * BH = 1/3 * √75 = √(75/9) = √(8 + 1/3)]: √(8 + 1/3) braccia;
* determinare la lunghezza di OG: OG = OH – GH = [√(8 + 1/3) – 1,5];
* ricavare la lunghezza di EG: EG = 3 * OG = 3 * [√(8 + 1/3) – 1,5] = = √[9 * (8 + 1/3)] – 4,5 = (√75 – 4,5) braccia;
* per calcolare la lunghezza dei lati del triangolo DEF, moltiplicare (√75 – 4,5) per sé stessa: (√75 – 4,5) * (√75 – 4,5) = (95 + ¼ – 9 * √75) = (95 + ¼ – √6075);
* moltiplicare per 4/3: (95 + ¼ – √6075) * 4/3 = (127 – √10800);
* estrarre la radice quadrata: √[127 – √10800)] ≈ 4,804 braccia.

- APPROFONDIMENTO -

La descrizione della soluzione del problema da parte di Calandri è un po' lacunosa e non reca alcune dimostrazioni.

Un'altezza di ABC è BH e la sua lunghezza è data da:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = ¾ * AB^2 = 10^2 – (10/2)^2 = 100 – 25 = 75$ e
BH = √75 braccia.

È opportuno citare la relazione inversa esistente fra i quadrati delle lunghezze del lato e dell'altezza:

$AB^2 = 4/3 * BH^2$.

Nella relazione diretta e in quella inversa compaiono le due frazioni, fra loro reciproche, ¾ e 4/3.

Il punto O, centro dei due triangoli equilateri, divide l'altezza in due parti che hanno le lunghezze che seguono:

* BO = 2/3 * BH = 2/3 * √75 = √((4/9 * 75) = √(100/3) braccia;
* OH = 1/3 * BH = 1/3 * √75 = √(75/9) = √(25/3) braccia.

OG è lungo:

$OG = OH – GH = (\sqrt{25/3} – 1,5)$ braccia.

L'altezza EG è lunga 3 volte il segmento OG:

$EG = 3 * OG = 3 * (\sqrt{25/3} – 1,5) = \sqrt{9 * 25/3} – 4,5 = (\sqrt{75} – 4,5)$ braccia.

Fra le lunghezze dell'altezza *h* e quella ℓ dei lati di un triangolo equilatero intercorre il rapporto già ricordato sopra:

$h^2 = ¾ * \ell^2$.

Da questa formula si ricava quella inversa:

$\ell^2 = 4/3 * h^2$ e

$\ell = h * \sqrt{4/3}$, che equivale a

$DF = EG * \sqrt{4/3} = [(\sqrt{75} – 4,5)] * \sqrt{4/3} = \sqrt{4 * 75/3} – 9/2 * \sqrt{4/3} =$
$= \sqrt{100} – \sqrt{[(9/2)^2 * 4/3]} = 10 – \sqrt{81/4 * 4/3} = 10 – \sqrt{27} = 10 – 3 * \sqrt{3} \approx$
$\approx 4,804$ braccia.

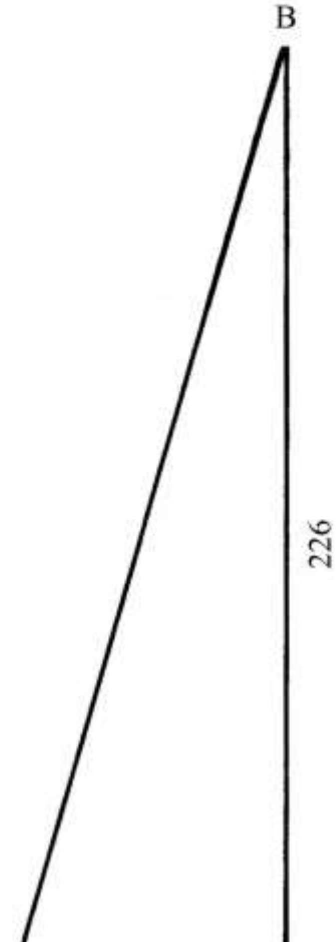
Il risultato è uguale a quella calcolato con la procedura di Calandri.

- -

Un triangolo rettangolo

ABC è un triangolo rettangolo. Un cateto è lungo la radice quadrata del secondo cateto.

Il problema chiede le lunghezze di tutti i lati.



AC è lungo $\sqrt{226}$ e BC è lungo 226.

L'ipotenusa AB è lunga:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (\sqrt{226})^2 + 226^2 = 226 + 51076 = 51302$ e

$AB = \sqrt{51302} \approx 266{,}5$.

L'area S del triangolo è:

$S = AC * BC/2 = (\sqrt{226} * 226)/2 = \sqrt{(226 * 51076/4)} = \sqrt{2885794} \approx 1639$.

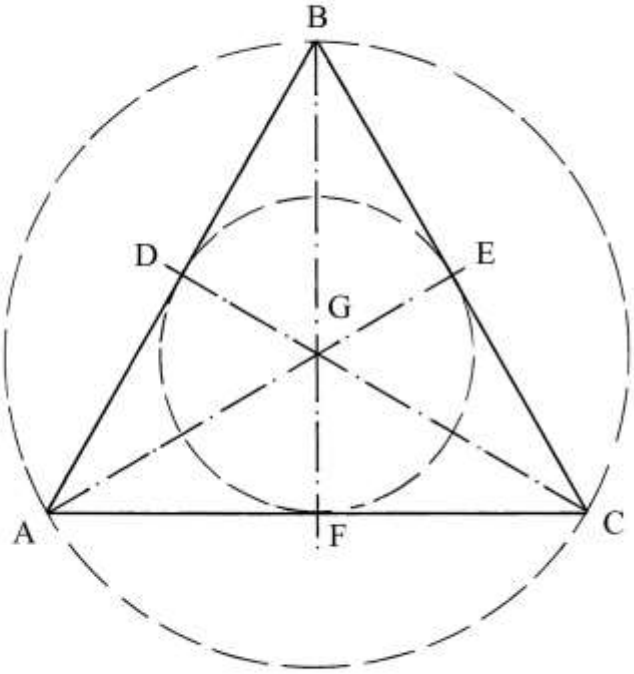
Calandri utilizza l'algebra e fornisce risultati assai diversi.

Triangolo equilatero

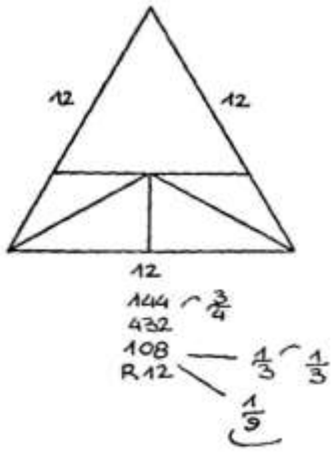
ABC è un triangolo equilatero che ha lati lunghi 12 braccia.

Il problema chiede la distanza fra il centro e i punti medi dei tre lati.

In un triangolo equilatero le tre altezze, le tre bisettrici degli angoli interni, le tre mediane e gli assi dei tre lati coincidono: il loro comune punto di intersezione è G che è anche il centro del cerchio inscritto e di quello circoscritto.



Lo schema originale, contenuto a p. 20 del fascicolo curato da Daniela Santini, non è del tutto corretto: la corda orizzontale, parallela al lato orizzontale, non ha ragione di esistere perché il problema chiede le distanze dal centro del triangolo ai punti medi dei lati:



AE, BH e CD sono le tre altezze (rivedere la penultima figura), le tre mediane, le tre bisettrici e i tre assi che si intersecano nel punto G.

L'altezza BH (che Calandri chiama "*perpendiqulare*") è lunga:

$BF^2 = AB^2 - AF^2 = AB^2 - (AB/2)^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$ e

$BF = \sqrt{108}$ braccia.

Anche AE e CD hanno la stessa lunghezza di $\sqrt{108}$ braccia.

Dal centro G ai punti medi dei lati si ha lunghezza uguale a *un terzo* di quella delle relative altezze:

$GF = 1/3 * BF = 1/3 * \sqrt{108} = \sqrt{(1/9 * 108)} = \sqrt{12}$ braccia.

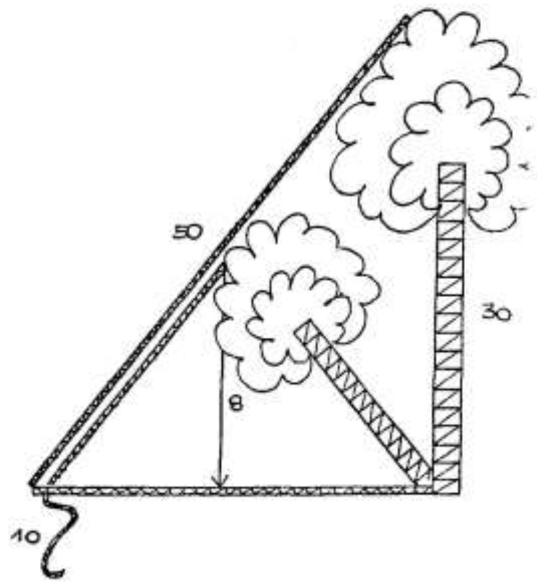
<u>Un albero</u>

Un albero è alto 30 braccia. È tagliato alla base e per farlo cadere a terra, alla sua cima viene legata una corda lunga 50 braccia.

Tirando la corda, l'albero non si spezza ma ruota verso terra rimanendo piegato.

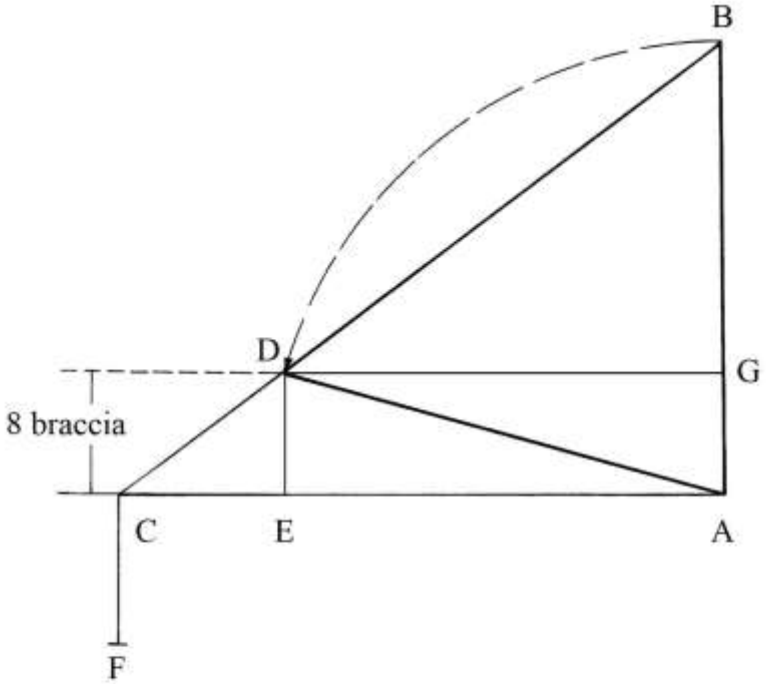
Nella nuova posizione, la cima dell'albero si trova a 8 braccia da terra e il capo della corda si allontana di 10 braccia.

Lo schema che segue è la riproduzione da pagina 21 della figura originale:



Il problema chiede la distanza fra il piede (A) dell'albero e l'estremo (C) della corda e quella fra la proiezione della cima (E) nella nuova posizione e il piede (A).

La figura che segue semplifica il problema:



AB è l'albero nella posizione originaria, ancora verticale: AB è lungo 30 braccia.

Dal vertice B al punto C sul terreno è tirata la corda: ABC è un triangolo rettangolo e il cateto AC è lungo:

$AC^2 = BC^2 – AB^2 = 50^2 – 30^2 = 2500 – 900 = 1600$ e

$AC = \sqrt{1600} = 40$ braccia.

L'albero ruota verso sinistra intorno all'ipotetico centro in A e si adagia nella posizione indicata con AD, conservando l'altezza originaria: AD = AB.

La proiezione di D sul terreno è E: DE è lungo 8 braccia.

DAE è un triangolo rettangolo e il cateto EA è lungo:

$EA^2 = DA^2 – DE^2 = 30^2 – 8^2 = 900 – 74 = 836$ e

$EA = \sqrt{836}$ braccia.

Anche CDE è un triangolo rettangolo: il cateto CE è lungo:

$CE = CA – EA = (40 – \sqrt{836})$ braccia.

La lunghezza dell'ipotenusa CD è data da:

$CD^2 = CE^2 + DE^2 = (40 – \sqrt{836})^2 + 8^2 = (40 – \sqrt{836})^2 + 64$ e

$CD = \sqrt{[(40 – \sqrt{836})^2 + 64]}$ braccia.

Nel testo originale vi è una stranezza: dopo la rotazione dell'albero verso sinistra, la cima si sposta da B in D. La corda assume la lunghezza della spezzata DCF: non è possibile che il tratto di fune che avanza, CF, sia lungo soltanto 10 braccia: CF dovrebbe essere lungo quanto BD.

BD è l'ipotenusa del triangolo rettangolo DBG: DG è lungo quanto EA. A sua volta, il cateto BG è:

$BG = BA – GA = BA – DE = 30 – 8 = 22$ braccia.

BD è lunga:

$BD^2 = DG^2 + BG^2 = EA^2 + BG^2 = (\sqrt{836})^2 + 22^2 = 836 + 484 = 1320$ e

$BD = \sqrt{1320}$ braccia.

CD è lungo:

$CD = BC – BD = (50 – \sqrt{1320})$ braccia.

La spezzata DCF dovrebbe essere lunga 50 braccia:

$DCF = 50$.

Stando ai dati del testo, invece, la lunghezza di DCF sarebbe:

$DCF = DC + CF = 58 – \sqrt{1320} \approx 21{,}67$ braccia, invece di 50 braccia. Quindi CF dovrebbe essere lungo:

$CF = DCF – DC = 50 – (50 – \sqrt{1320}) = 50 – 50 + \sqrt{1320} = \sqrt{1320} \approx 36{,}33$ braccia.

Il testo originale dà luogo a qualche fondato dubbio: inoltre sembra aver subito un taglio nella parte finale: i passaggi che concludono il testo di Calandri possono essere così sintetizzati:

* sottrarre 8 da 40: $40 – 8 = 32$ [AC – DE];
* moltiplicare per sé stesso: $32 * 32 = 1024$;
* moltiplicare 40 per sé stesso: $40 * 40 = 1600$;
* sottrarre 1024 da 1600: a questo punto termina il testo con "*resta //*".

Il risultato della di questa sottrazione è 576 la cui radice è 24.

Ruota da dividere fra tre fabbri

Tre fabbri hanno comprato una mola circolare: il problema chiede di dividere la sua superficie in parti uguali.

Il suo diametro originario *d* è di 7 braccia.

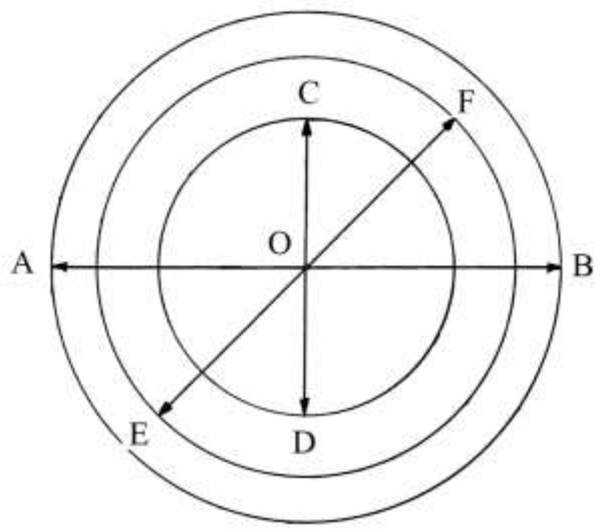
Il problema è un classico presso gli abacisti toscani: fu affrontato e risolto ad esempio da Paolo dell'Abbaco (1282 – 1374) nel *Trattato d'Aritmetica*.

L'area S della ruota è:

$S = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * (7/2)^2 = 38{,}5$ braccia^2.

A ciascun fabbro spetta *un terzo* di quella superficie:

$S/3 = 38{,}5/3 = (12 + 5/6)$ braccia^2.



La procedura usata da Calandri è un po' troppo concisa, ma corretta. Di seguito essa viene ampliata per renderla più chiara:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* dividere per 3: $49/3 = (16 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(16 + 1/3)}$ braccia, diametro del cerchio interno [CD nella figura];

* moltiplicare 49 per 2/3: $49 * 2/3 = (32 + 2/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(32 + 2/3)}$ braccia, diametro della corona intermedia [EF].

- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo i risultati calcolati da Calandri.

I tre fabbri useranno la mola consumandola per un terzo ciascuno.

Il cerchio interno ha area che è data da:

$S_{CD} = 22/7 * (CD/2)^2 = 22/7 * \{[\sqrt{(16 + 1/3)}]/2\}^2 = 22/7 * (49/3)/4 = (12 + 5/6)$ braccia^2 =
$= 1/3 * S = 38{,}5/3$ braccia^2.

La corona circolare che è delimitata dalle circonferenze di diametri EF e CD ha area che è data dalla differenza fra le aree dei cerchi di diametri EF e CD:

$S_{EF} = 22/7 * (EF/2)^2 = 22/7 * \{[\sqrt{(32 + 2/3)}]/2\}^2 = 22/7 * 22/7 * (32 + 2/3)/4 =$
$= 22/7 * (98/3)/4 = (25 + 2/3)$ braccia^2.

L'area della corona circolare è:

$S_{CORONA} = S_{EF} – S_{CD} = (25 + 2/3) – (12 + 5/6) = (12 + 5/6)$ braccia^2.

L'area della corona circolare esterna, delimitata dalle circonferenze di diametri AB e EF, è data da:

$S_{CORONA\ ESTERNA} = S_{AB} – S_{EF} = 38{,}5 – (25 + 2/3) = (12 + 5/6)$ braccia^2.

La divisione in tre parti di uguali aree del cerchio della mola è corretta.

- -

<u>Due torri</u>

Due torri si ergono in una pianura. La prima è alta 50 braccia e la seconda è 40.

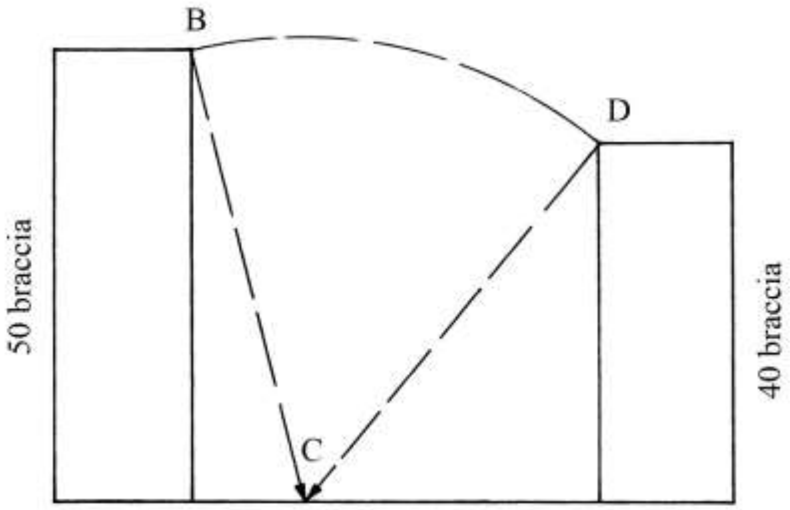
Le due torri sono a distanza di 45 braccia.

Sulla cima di entrambe le torri è un uccello e i due volatili si muovono verso una fonte collocata nel piano fra le due costruzioni che raggiungono nello stesso istante.

Il problema riproduce uno analogo contenuto nell'edizione a stampa del 1491-1492: solo le lunghezze sono diverse e in questo caso le torri sono più basse e più vicine.

Sono chieste le distanze fra la fonte e le due torri.

Nel fascicolo contenente la riproduzione del manoscritto senese mancano la soluzione del problema e una qualsiasi figura: il testo è interrotto.



AC = 12,5 braccia CE = 32,5 braccia

AE = 45 braccia

ABC e CDE sono due triangoli rettangoli: le loro ipotenuse BC e DC hanno uguali lunghezze perché i due uccelli giungono alla fonte nello stesso tempo e ad uguale velocità.

AC è la lunghezza incognita:

$AC = x$.

CE è lungo:

$CE = AE – AC = (45 – x)$.

L'ipotenusa BC è lunga:

$BC^2 = BA^2 + AC^2 = 50^2 + x^2$.

A sua volta, CD è lunga:

$CD^2 = DE^2 + CE^2 = 40^2 + (45 – x)^2$.

Le due ipotenuse hanno lunghezze uguali e lo sono anche i loro quadrati:

$BC^2 = CD^2$

$50^2 + x^2 = 40^2 + (45 – x)^2$

$2500 + x^2 = 1600 + 2025 – 90 * x + x^2$

$90 * x = 3625 – 2500$

$90 * x = 1125$

$x = 1125/90 = 12{,}5$ braccia = AC.

Il segmento CE è lungo:

$CE = AE – AC = 45 – 12{,}5 = 32{,}5$ braccia.

L'ipotenusa BC è lunga:

$BC^2 = BA^2 + AC^2 = 50^2 + 12{,}5^2 = 2656{,}25$ e

$BC = \sqrt{2656{,}25}$ braccia [$\approx 51{,}54$ braccia].

L'ipotenusa CD è lunga:

$CD^2 = DE^2 + CE^2 = 40^2 + 32{,}5^2 = 2656{,}25$ e

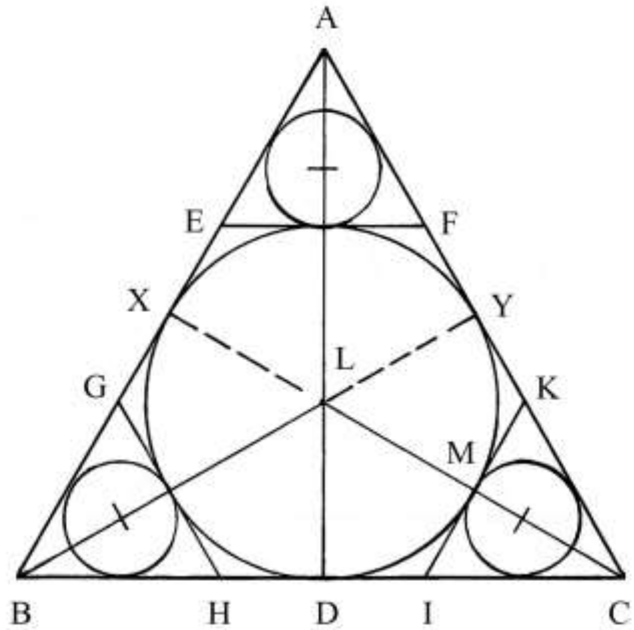
$CD = \sqrt{2656{,}25}$ braccia.

Le due ipotenuse hanno uguali lunghezze.

Cerchi inscritti in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.

Sono disegnate le tre altezze (e mediane, bisettrici e assi) che si incontrano nel centro L.



In prossimità dei tre vertici (A, B e C) sono disegnati tre cerchi tangenti a due lati del triangolo e tutti con diametro di 2 braccia.

Al centro del triangolo e tangente ai tre cerchi e ai tre lati, è inscritto un quarto cerchio che ha raggio LD = LX = LY. Il problema chiede il suo diametro.

Spieghiamo la soluzione proposta da Filippo Calandri aggiungendo alcuni dettagli.

AD, BY e CX sono tre altezze del triangolo che, come scritto sopra, si incontrano in L.

Tracciare le corde EF, GH e IK che sono tangenti ai tre cerchi periferici e sono anche parallele ai lati del triangolo:

EF // BC
GH // AC
IK // BA.

Le tre corde creano altri tre triangoli equilateri: AEF, BGH e CIK.

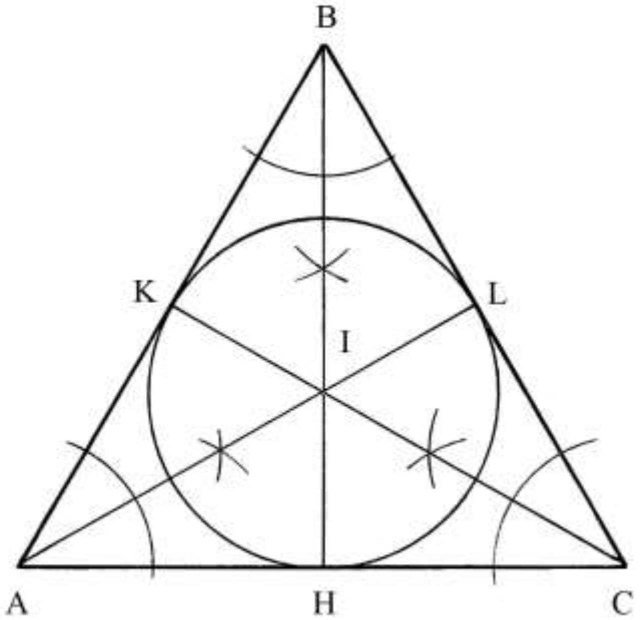
Fare centro in L e con raggio LD = LX = LY disegnare una circonferenza che è tangente anche alle corde EF, GH e IK nei loro punti medi.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato di ABC per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 3: 100/3 = (33 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) braccia, che è la lunghezza di LC, uguale a quella del diametro XM [Calandri scrive "*semidiametro*"];
* l'altezza CM è lunga 3/2 del diametro del cerchio (2 braccia): CM = 3/2 * 2 = 3 braccia [il raggio di un cerchio inscritto in un triangolo equilatero è lungo *un terzo* dell'altezza];
* il raggio LM è lungo:
  LM = LC – CM = [√(33 + 1/3) – 3] braccia;
* il diametro XM è lungo il doppio di LM: XM = 2 * LM = 2 * [√(33 + 1/3) – 3] = = [√(133 + 1/3) – 6] braccia.

- APPROFONDIMENTO -

ABC è un triangolo equilatero. Dai vertici sono tracciate le bisettrici dei tre angoli interni che si incontrano in I, *incentro* del triangolo e centro del cerchio inscritto.



AL, BH e CK sono bisettrice e altezze.

L'altezza BH ha lunghezza che è data da:

$BH^2 = AB^2 – AH^2$.

AB è un lato e ha lunghezza ℓ e AH è lungo la metà di AC:

$AH = AC/2 = \ell/2$.

Quindi si ha:

$BH^2 = \ell^2 – (\ell/2)^2 = ¾ * \ell^2$ e

$BH = (\sqrt{3}) * \ell/2$.

L'area S del triangolo ABC è:

$S = (AC * BH)/2 = [\ell * (\sqrt{3}) * \ell/2]/2 = \sqrt{3} * \ell^2/4$.

Le bisettrici scompongono ABC in tre triangoli isosceli di uguali dimensioni:

* ABI;
* ACI;
* BCI.

Il triangolo ABI ha area che è uguale a *un terzo* di quella di ABC:

$S_{ABI} = S/3 = (\sqrt{3} * \ell^2/4)/3 = \sqrt{3} * \ell^2/12$.

L'area di ABI è anche data da:

$S_{ABI} = AB * KI/2$.

S_{ABI} e AB sono grandezze note, ma non lo è la lunghezza di KI:

$KI = 2 * S_{ABI}/AB = (\sqrt{3} * \ell^2/12)/\ell = \sqrt{(3)} * \ell/6$.

KI è la lunghezza del raggio del cerchio inscritto nel cerchio.

La lunghezza di CI è data da:

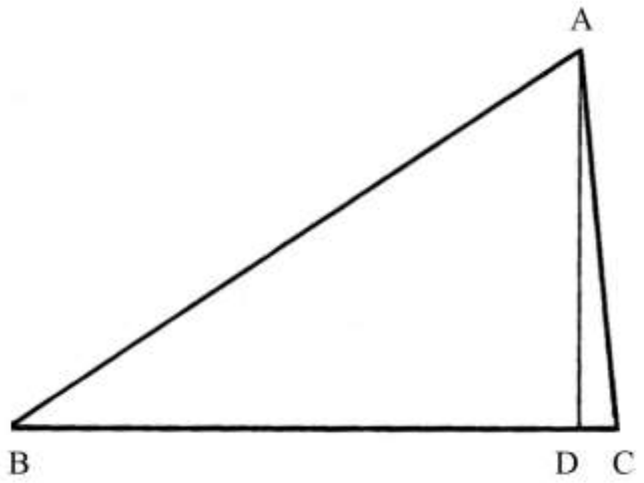
$CI = CK – KI = BH – KI = (\sqrt{3}) * \ell/2 – \sqrt{(3)} * \ell/6 = (\sqrt{3}) * \ell/3$. Essa è il *doppio* della lunghezza del raggio KI.

CI è lungo *due terzi* dell'altezza CK e quest'ultima è lunga *tre mezzi* il diametro del cerchio inscritto o *tre* volte il suo raggio.

- -

Le lunghezze dei lati di un triangolo

Un triangolo ha due lati lunghi 9 r 8 braccia e area S di 20 braccia^2.
Il problema chiede la lunghezza del terzo lato, AC.



AB è lungo 9 braccia e BC 8.
AD è l'altezza relativa al lato di base BC.
L'area del triangolo è data da:

$S = BC * AD/2.$

La lunghezza di AD è:

$AD = 2 * S/BC = 2 * 20/8 = 5$ braccia.

La lunghezza di BD è:

$BD^2 = AB^2 – AD^2 = 9^2 – 5^2 = 81 – 25 = 56$ e
$BD = \sqrt{56}$ braccia.

La lunghezza di DC è:

$DC = BC – BD = (8 – \sqrt{56}).$

Infine, la lunghezza di AC è data da:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 5^2 + (8 – \sqrt{56})^2 = 25 + 64 – 16 * \sqrt{56} + 56 = 145 – 16 * \sqrt{56} =$
$= (145 – \sqrt{14336})$ e
$AC = \sqrt{(145 – \sqrt{14336})}$ braccia.

Un ennagono

Un ennagono regolare ha lati lunghi 6 braccia.
Il problema chiede la sua area: secondo Calandri è insolubile.

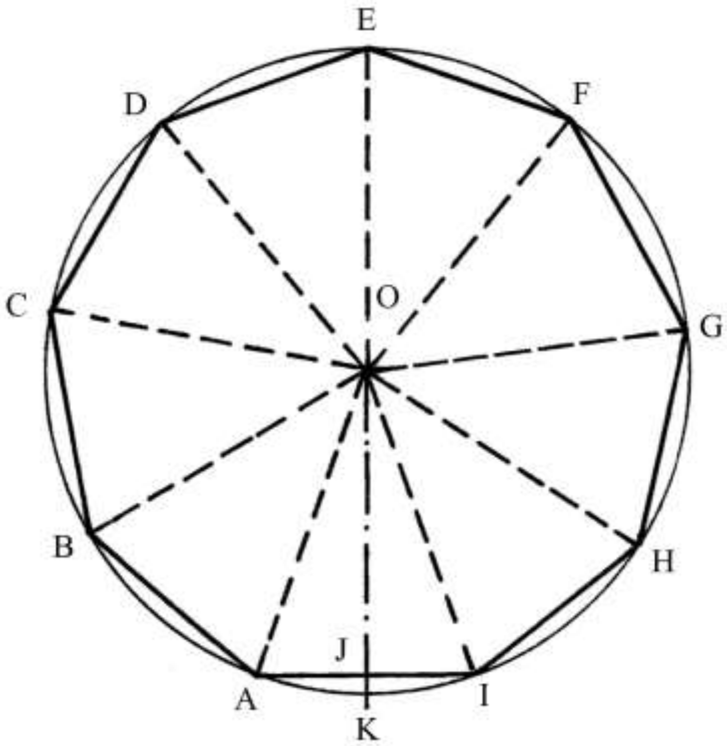
- APPROFONDIMENTO -

L'ennagono regolare non è costruibile con riga e compasso.

Nel corso dei secoli sono stati proposti diversi metodi geometrici e meccanici per risolvere il problema: una panoramica sull'argomento è contenuta nell'articolo "ennagono.pdf" sul sito www.geometriapratica.it.

Calandri non era a conoscenza di quei metodi perché la maggior parte di essi è stata elaborata in epoche successive: comunque, avrebbe potuto avere qualche vaga conoscenza dell'antico metodo *neusis*.

Un ennagono regolare, inscritto o non inscritto, è scomponibile in *nove* triangoli isosceli di uguali dimensioni:



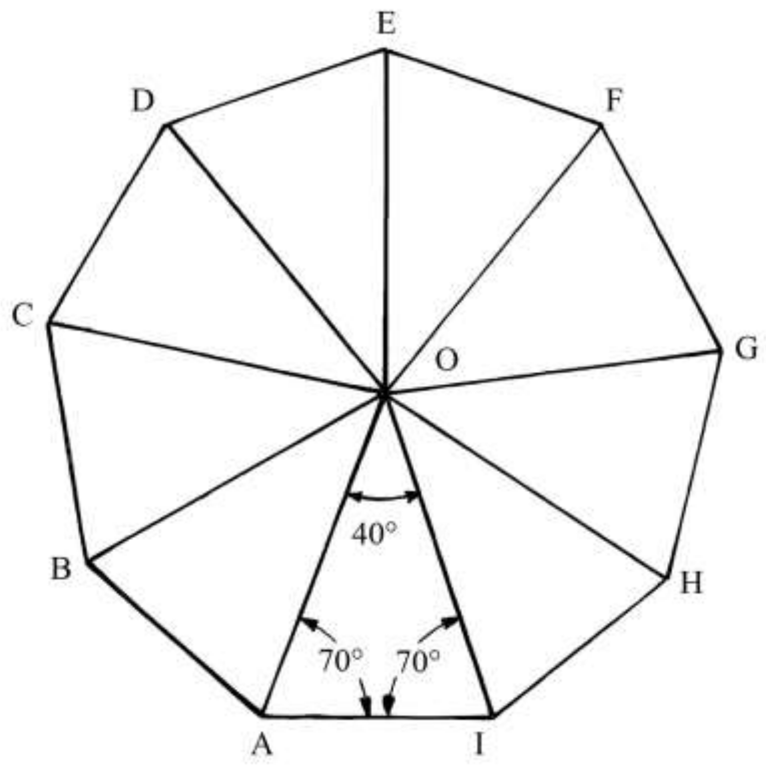
Gli angoli nel vertice O hanno ampiezza uguale a:

360/9 = 40°.

AOI = 40°.

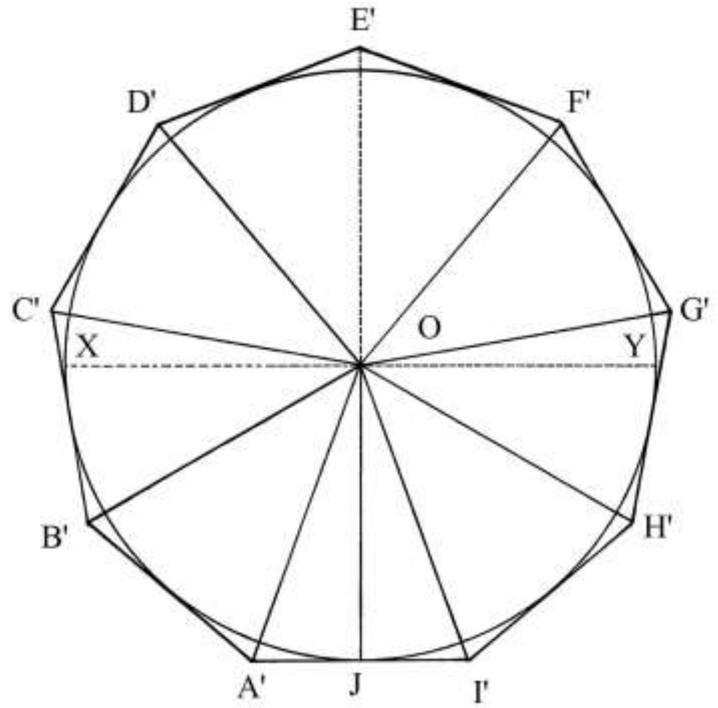
Gli angoli alla base dei triangoli hanno le seguenti ampiezze:

OAI = OIA = (180 – AOI)/2 = (180 – 40)/2 = 70°.



Gli angoli di 40° e di 70° non sono costruibili con riga e compasso: con il goniometro possono disegnati con relativa precisione.

Nel triangolo OA’I’ è tracciata l’altezza OJ che è chiamata *apotema* e indicata con *a*: essa misura il raggio del cerchio *inscritto* nel poligono:



Nello studio e nei calcoli semplificati delle proprietà dei poligoni regolari sono usati due *numeri fissi*, spesso indicati con le lettere *f* e *F*.

Il rapporto fra la lunghezza dell’apotema *a* e quella del lato ℓ è indicato con *f*:

$OJ/A'I' = a/\ell = f$.

Nel caso dell'ennagono *f* vale 1,374.

L'ennagono del problema presentato da Calandri ha apotema OJ che è lungo:

$OJ = f * A'I' = 1{,}374 * 6 = 8{,}244$ braccia.

In un qualsiasi poligono regolare, il rapporto fra la sua area S e quella di un quadrato costruito su di un suo lato di lunghezza ℓ è un secondo numero fisso che è indicato con *F*: nel caso dell'ennagono vale 6,182.

È opportuno far notare che i valori di *f* e di *F* sono approssimazioni di numeri irrazionali.

L'area del triangolo A'OI' è:

$S_{A'OI'} = A'I' * OJ/2 = A'I' * (A'I' * f)/2 = 6 * (8{,}244)/2 = 24{,}732$ braccia^2.

L'area S dell'intero ennagono può essere ricavata in *tre* modi differenti:

I) Moltiplicando per 9 l'area di A'OI':

$S = 9 * S_{A'OI'} = 9 * 24{,}732 = 222{,}588$ braccia^2.

II) Usando il perimetro *p* del poligono

$p = 9 * A'I' = 9 * 6 = 54$ e

$S = p * OJ/2 = 54 * 8{,}244/2 = 222{,}588$ braccia^2.

III) Infine, usando il numero fisso F:

$S = \ell^2 * F = 6^2 * 6{,}182 = 222{,}552$ braccia^2.

La leggera differenza che si ha fra i risultati ottenuti è dovuta al fatto, accennato sopra, che i numeri fissi sono approssimazioni di numeri irrazionali.

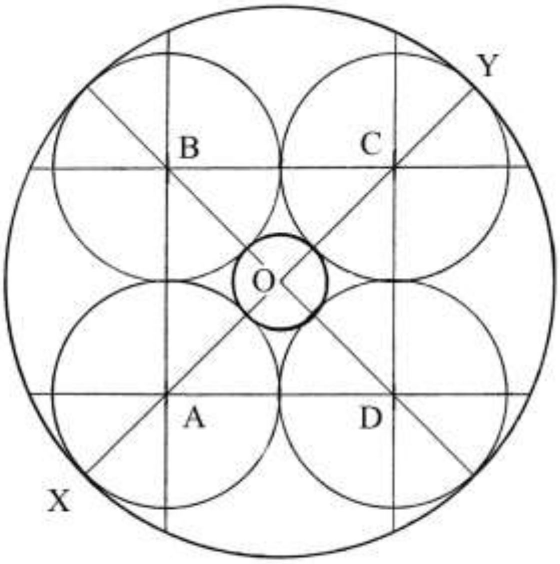
- -

Cinque cerchi inscritti in un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 12 braccia. Vi devono essere inscritti cinque cerchi di uguali dimensioni e i più grandi possibili.

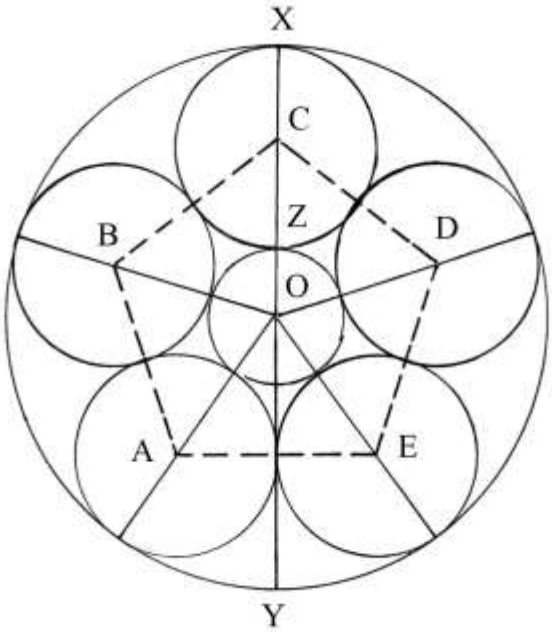
Il testo non contiene alcuna soluzione e non presenta alcuno schema.

Cinque cerchi possono essere disegnati nel modo mostrato nello schema che segue:



È dato un cerchio di centro O e diametro XY. Vi sono inscritti quattro cerchi di diametri uguali, con centri in A, B, C e D: questi punti formano i vertici del quadrato ABCD. I quattro cerchi risultano tangenti al cerchio esterno e fra di loro: il cerchio più piccolo con centro in O è tangente a tutti e quattro.

Nel *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca il problema è risolto nel modo presentato nella figura che segue:



Il cerchio ha centro in O e diametro XY.

I cinque cerchi inscritti hanno uguali dimensioni e i loro cinque centri – A, B, C, D, e E – sono i vertici di un pentagono regolare.

Rispetto alla soluzione di Piero della Francesca è qui aggiunto un sesto cerchio con centro in O e raggio OZ: esso è tangente a tutti e cinque i cerchi.

Bibliografia

1. Biagi Guido, “Fiorenza, fior che sempre rinnovella”, Firenze, Luigi Battistelli Editore, 1925, pp. 279.
2. Calandri Filippo, “Aritmetica”, Firenze, Lorenzo Morgiani e Johann Petri, 1491-1492, 104 carte.
3. Calandri Pietro Maria, “Compendium de agrorum corporumque dimensione”, in “I due trattati dell’Agricoltura e della Coltivazione delle Viti”, di Giovanvettorio Soderini, a cura di Alberto Bacchi Della Lega, Bologna, Romagnoli Dall’Acqua, 1902, pp. da 291 a 346.
4. Calandri Filippo, “Aritmetica”. Secondo la lezione del Codice 2669 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze, Firenze, Edizioni della Cassa di Risparmio di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, 1969, pp. XXXIV + 222.
5. Calandri Filippo, “Una raccolta di ragioni dal Codice L. VI. 45 della Biblioteca Comunale di Siena”, a cura e con introduzione di Daniela Santini, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, n. 4, Servizio Editoriale dell’Università di Siena, Siena, 1982, pp. 50.
6. Calzolani Sergio, “PierMariaCalandri.pdf”, 2020, pp. 88, in www.geometriapratica.it.
7. Calzolani Sergio, “Unitamisuratoscane.pdf”, 2024, pp. 75, www.geometriapratica.it.
8. Cataneo Pietro, “Le pratiche delle due prime matematiche”, Venezia, Giovanni Griffio, 1567, 88 carte.
9. Devoto Giacomo – Oli Gian Carlo, “Vocabolario illustrato della lingua italiana”, Milano, Selezione dal Reader’s Digest, 1983, 2 volumi.
10. “I Medici e le scienze. Strumenti e macchine nelle collezioni granducali”, a cura di Filippo Camerota e Mara Miniati, Firenze, Giunti, 2008, pp. 406.
11. Ulivi Elisabetta, “Gli abacisti fiorentini delle famiglie ‘Del maestro Luca’, Calandri e Micceri e le loro Scuole d’Abaco”, Firenze, Olschki, 2013, pp. X-298.