sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: poligoni regolari, angoli caratteristici di un poligono, numeri periodici, poligoni costruibili con riga e compasso, ettagono, Archimede, neusis, Abu'l Wafa, Crockett Johnson, Viète, trisettore tomahawk, Erone, Mallet, triangolo diofanteo, Rachel Fletcher, Dudley, Luca Pacioli, Albrecht Dürer, Scaligero, Druidi, triangolo ettagonale, Clavio, Malaspina, Carlo Renaldini, Bardin, Röber, Johnson Pimpinelli, Franz Reuleaux, Plemelj, Jon Allen, Miranda Lundy, Mark Reynolds, Robin Hu, García-Salgado, Susan McBurney, Lluís i Giovart, Daniel Dobre, Vincenzo Flauti

L'articolo qui presentato riproduce, in parte, il contenuto di uno scritto, citato in bibliografia, alla voce numero 4.

Per semplificare, in questo articolo le frazioni sono scritte usando la *barra* "/" invece della linea orizzontale.

PREMESSA
COSTRUZIONI GEOMETRICHE DI FIGURE PIANE

Una citazione:

"Puro contro applicato

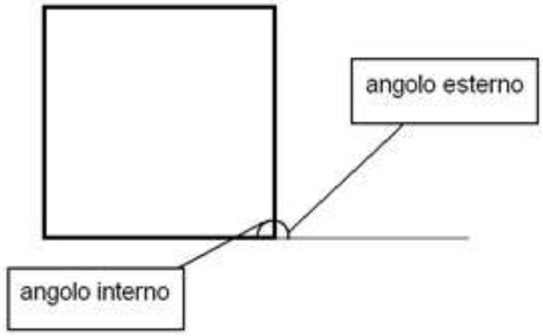
I rapporti tra matematici puri e applicati si basano sulla fiducia e sulla comprensione. I matematici puri non si fidano dei matematici applicati, e i matematici applicati non comprendono i matematici puri"

(Ian Stewart, "La piccola bottega delle curiosità matematiche del professor Stewart", trad. it., Torino, Codice edizioni, 2010, pp. XV-300, citazione da p. 64).

La costruzione dei poligoni regolari con riga e compasso

In Geometria un poligono è una figura che comprende almeno tre punti (o *vertici*), collocati in un piano, e segmenti che congiungono il primo e il secondo punto, questo con il terzo, fino a connettere l'ultimo punto con il primo. In altri termini, un poligono è una parte di piano racchiusa da una linea spezzata chiusa e non intrecciata.

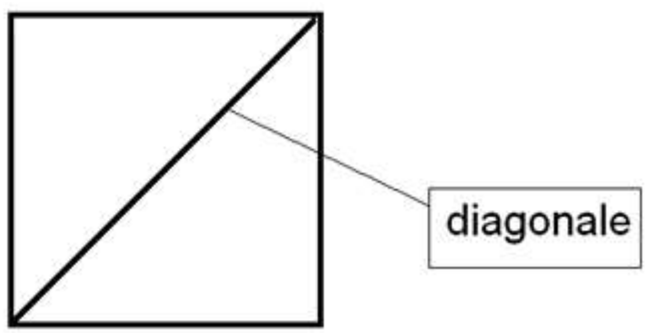
I poligoni regolari sono *equilateri* e cioè i loro lati hanno uguale lunghezza. Essi sono anche *equiangoli* perché i loro angoli sono tutti della stessa ampiezza: fra di loro lo sono sia gli angoli interni e sia quelli esterni, come da figura che segue:



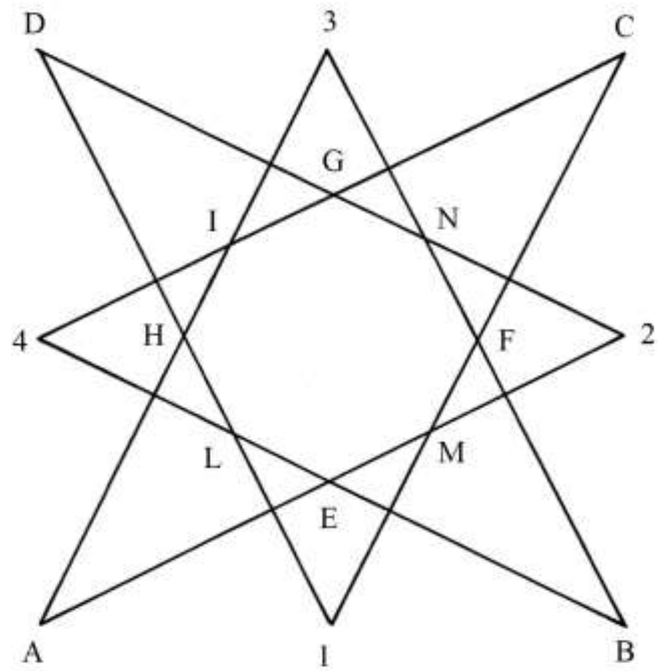
In un poligono regolare qualsiasi, l'angolo esterno è *supplementare* e cioè la sua ampiezza è uguale a (180° – ampiezza angolo interno).

La parola *poligono* deriva dalla fusione di due parole greche e significa "molti angoli": fu introdotta da Galileo Galilei nel 1638.

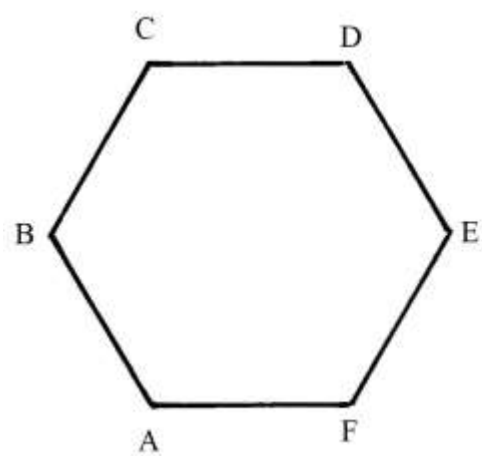
Un segmento che congiunge due vertici non consecutivi di un poligono è chiamato *diagonale*:



Se in un poligono due lati si incontrano in punti diversi dai vertici, esso si dice *intrecciato*:



Se ciò non accade, il poligono è chiamato *ordinario*, come nell'esempio del quadrato o dell'esagono:



Come già scritto in precedenza, un *poligono regolare* è un poligono che ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali. Queste due proprietà sono molto importanti perché lo rendono *inscrittibile* in un cerchio la cui circonferenza passa per tutti i suoi vertici: la circonferenza di un secondo cerchio è *circoscrivibile* al poligono regolare. Le due circonferenze sono concentriche.

La tabella che segue contiene i nomi di alcuni poligoni regolari:

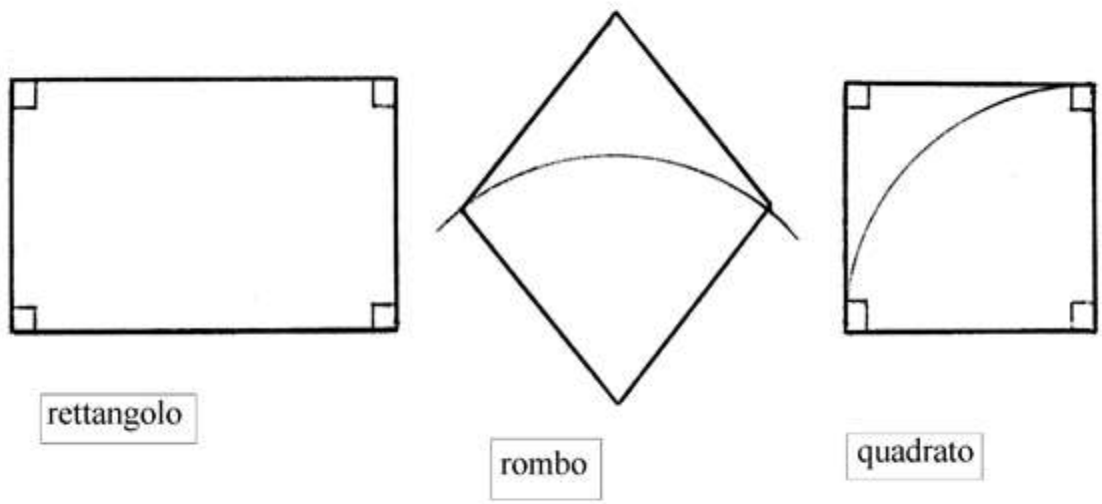
Numero dei lati	Nome del poligono
3	triangolo
4	quadrato
5	pentagono
6	esagono
7	ettagono (o eptagono)
8	ottagono
9	ennagono
10	decagono
11	endecagono
12	dodecagono
13	tridecagono
14	tetradecagono
15	pentadecagono
16	esadecagono
17	eptadecagono
18	ottadecagono
19	ennadecagono
20	icosagono
21	endeicosagono
22	doicosagono
23	triaicosagono
24	tetraicosagono
25	pentaicosagono
26	esaicosagono
27	eptaicosagono
28	ottaicosagono
29	ennaicosagono
30	triacontagono
40	tetracontagono
50	pentacontagono
60	esacontagono
70	eptacontagono
80	ottacontagono
90	ennacontagono
100	decacontagono o centagono
1 000	chiliagono
10 000	miriagono

In teoria, si possono disegnare poligoni *quasi* regolari con un numero qualsiasi di lati: quando il numero è molto grande, la linea che racchiude la figura tende a divenire una circonferenza. È quello che accade usando uno dei dialetti del linguaggio informatico Logo quando, con i comandi ripeti 360 [avanti 1 destra 1]   ,

facciamo disegnare alla tartaruga, sullo schermo del computer, un poligono formato da 360 lati lunghi 1 pixel [avanti 1]: questo poligono si confonde con una circonferenza.

- APPROFONDIMENTO -

Un parallelogramma è *equiangolo* se ha tutti gli angoli uguali, come è il caso del *rettangolo* e del *quadrato*:

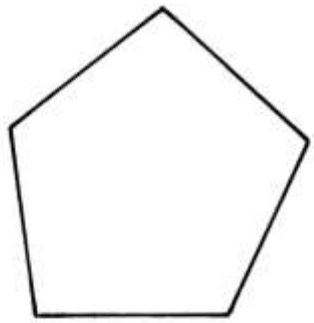


Un parallelogramma è *equilatero* quando ha tutti i lati di uguale lunghezza, come è il caso del *rombo*.

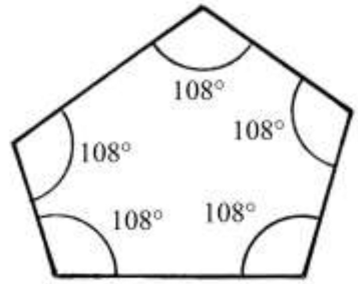
Il *quadrato* è un parallelogramma *regolare* perché è sia equiangolo che equilatero.

Il rombo è un poligono *semiregolare* perché ha solo i lati uguali e non anche gli angoli.

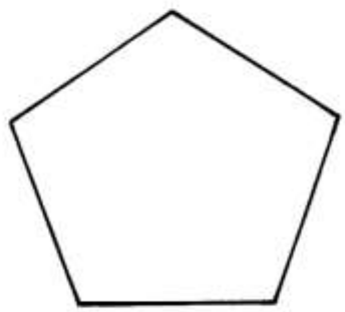
Nella figura che segue sono presentati tre differenti pentagoni:



pentagono equilatero



pentagono equiangolo



pentagono regolare
(equilatero e equiangolo)

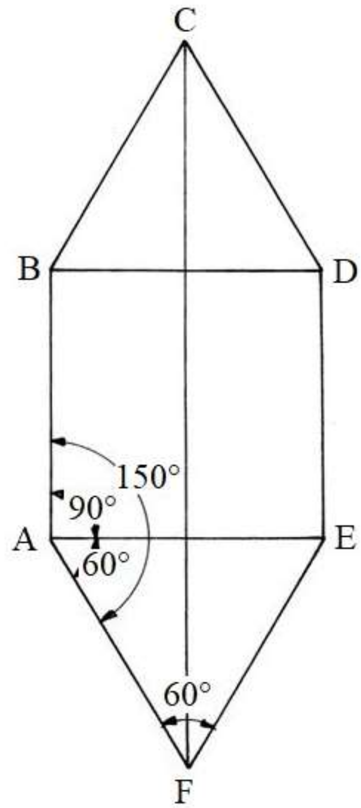
Il primo, in alto a sinistra, è *equilatero* perché ha i lati della stessa lunghezza, ma gli angoli interni hanno differente ampiezza.

Il secondo pentagono, in alto a destra, è soltanto *equiangolo,* perché ha gli angoli interni della stessa ampiezza, 108°: i lati hanno differenti lunghezze.

Infine, il terzo pentagono (in basso nella figura) è *regolare* perché è sia equilatero che equiangolo.

Il primo e il secondo pentagono sono poligoni *semiregolari* (o *non regolari*) e solo il terzo è, come già detto, *regolare*.

ABCDEF è un *esagono equilatero* perché ha tutti i lati di uguale lunghezza, ma non è equiangolo perché ha angoli di differente ampiezza:



L'esagono è formato dal quadrato ABDE e da due triangoli equilateri: BCD e AED.
Gli angoli in C e in F sono ampi 60° e gli angoli in A, B, D e E sono di ampiezza

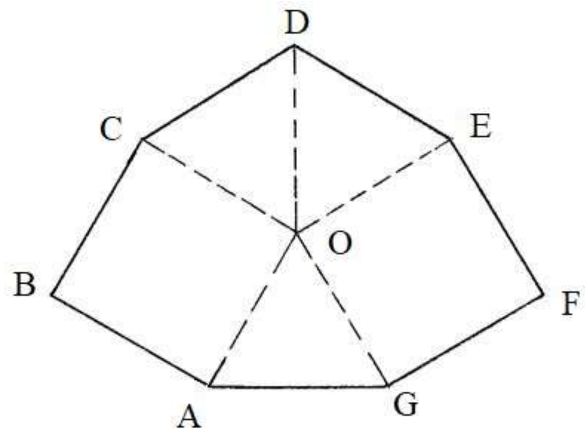
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = \hat{E}$$

$$\hat{A} = B\hat{A}E + E\hat{A}F = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

Il poligono è un esagono *non regolare* e non è inscrivibile in una circonferenza.

Attualmente l'espressione *poligono regolare* è usata per indicare i poligoni che in passato erano chiamati congiuntamente *equilateri* e *equiangoli*. La denominazione oggi impiegata può generare un po' di confusione.

L'*ettagono* che segue è formato da due quadrati e da tre triangoli equilateri che hanno in comune il vertice O e alcuni lati:



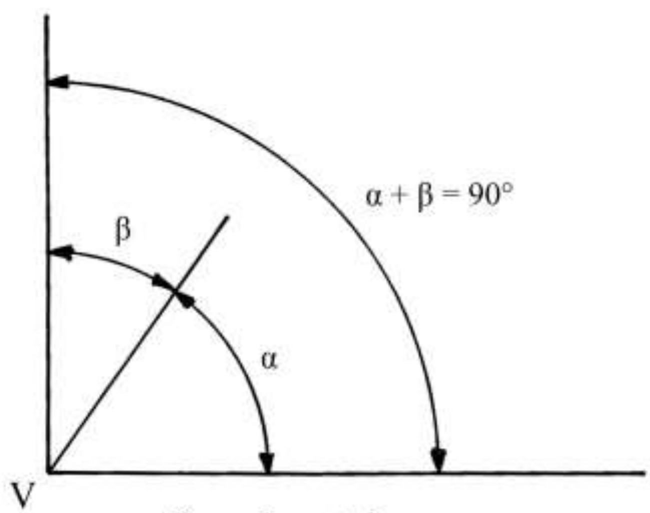
Tutti i lati hanno uguale lunghezza: l'ettagono è equilatero, ma non equiangolo e quindi è un poligono *non regolare*.

\- -

\- NOMENCLATURA -

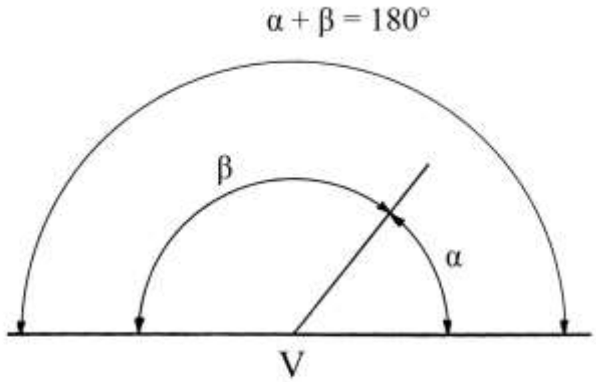
<u>Angoli caratteristici</u>

Due angoli sono chiamati *complementari* se la loro somma è uguale a 90°:



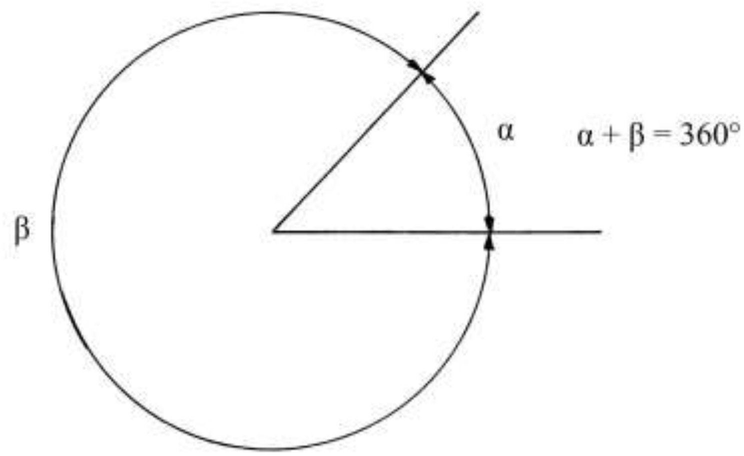
angoli complementari

Due angoli sono detti *supplementari* quando la loro somma è uguale a 180°:



angoli supplementari

Infine, due angoli sono chiamati *esplementari* se la loro somma è pari a 360°:



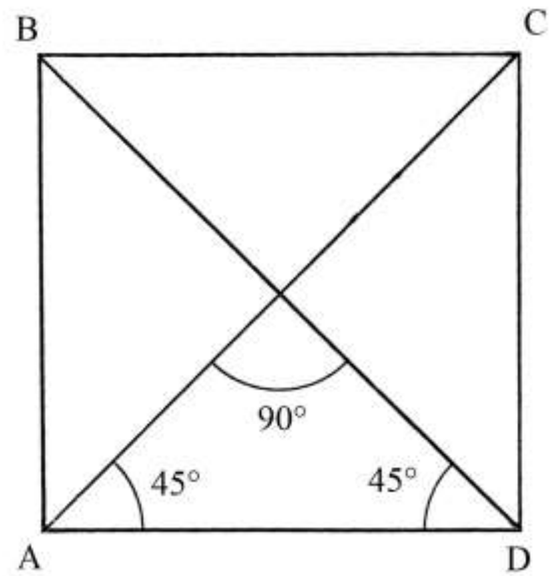
angoli esplementari

- -

La somma degli angoli interni di un poligono

La somma degli angoli interni del poligono più semplice, il *triangolo*, è uguale a 180°.

Un qualsiasi poligono regolare convesso di *n* lati può essere scomposto in un numero *n* di triangoli isosceli. Nel caso di un quadrato, i triangoli isosceli sono *quattro* e gli angoli interni del quadrato misurano tutti 90°:



La somma degli angoli dei *quattro* triangoli è pari 4 * 180 = 720°.

La somma degli angoli interni del *quadrato* è uguale a 4 * 90 = 360°.

Le due cifre *non* coincidono perché i quattro angoli retti nel punto O fanno parte dei quattro triangoli, ma non del quadrato.

La somma S, espressa in gradi sessagesimali (°), degli angoli interni di un poligono è data dalla seguente formula:

S = (numerolati – 2)*180

Dal numero dei lati dobbiamo sottrarre l'equivalente dell'*angolo giro* al centro della precedente figura. Un angolo giro equivale a due angoli *piatti*:

360° = 2 * 180°

L'ampiezza dell'angolo interno di un poligono regolare è data dalla formula

ampiezza = S/(numero lati) e cioè:

ampiezza = (numero lati – 2)*180/(numero lati) =
= (180 * numero lati – 360)/(numero lati) =
= 180 – 360/(numero lati).

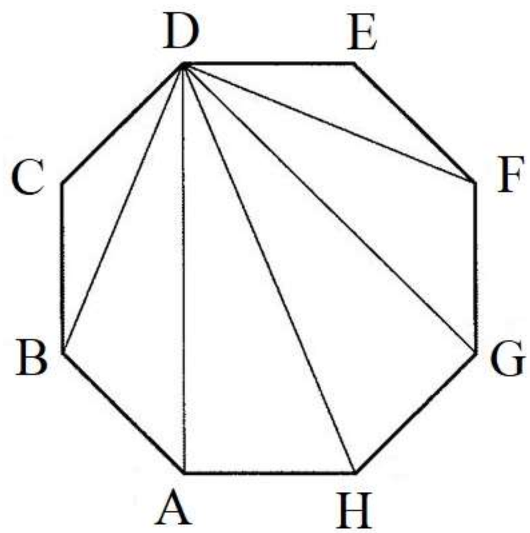
La tabella che segue riporta alcuni dati ricavati con le precedenti formule e relativi ai poligoni regolari con numero di lati compreso fra 3 e 20:

Numero lati del poligono regolare	(numerolati – 2)	S (in gradi) (somma angoli interni)	Ampiezza angolo interno = S/numerolati (in gradi)	Ampiezza angolo al centro = 360/numero lati)(in gradi)
3	1	180	60	120 (triangolo equilatero)
4	2	360	90	90
5	3	540	108	72
6	4	720	120	60
7	5	900	900/7 ≈ 128,57°	360/7 = 51° 25’ 43’’
8	6	1080	135	45
9	7	1260	140	40
10	8	1440	144	36
11	9	1620	1620/11 = 147,(27)° (*)	32,(72)° (*)
12	10	1800	150	30
13	11	1980	152,30	27,69
14	12	2160	154,29	25,71
15	13	2340	156	24
16	14	2520	157,5	22,5
17	15	2700	158,82	21,18
18	16	2880	160	20
19	17	3060	161,05	18,95
20	18	3240	162	18

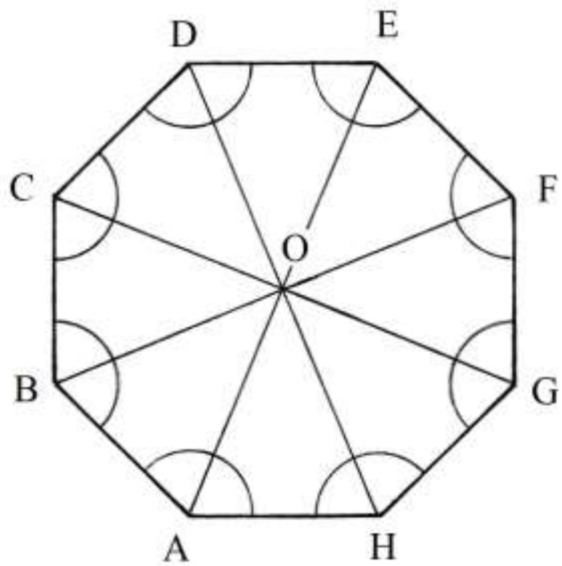
Nota. (*) Le parentesi *tonde* (…) indicano una frazione *periodica*.

Le regole relative all’ampiezza degli angoli interni valgono anche per i corrispondenti *poligoni non regolari*.

Facciamo un altro esempio di poligono regolare. Nella figura che segue è mostrato un ottagono; vi sono disegnate le *cinque diagonali* uscenti dal vertice D:



Le cinque diagonali dividono l'ottagono in 6 triangoli. La somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è 180°. La somma degli angoli interni dei *sei* triangoli è 6 x 180° = 1080°.
La somma degli *otto* angoli interni dell'ottagono vale ugualmente 1080°:



Ciascuno degli *otto* angoli interni dell'ottagono (ABC, BCD e via di seguito) vale 1080°/8 e cioè 135°.

Verifichiamo che il risultato sia conforme alla formula, con *S* che indica la somma degli angoli interni dell'ottagono:

$$S_{ottagono} = (8-2)*180 = 6 * 180 = 1080°.$$

- APPROFONDIMENTO -

I numeri periodici

Un numero decimale *periodico* è un numero razionale che scritto sotto forma di notazione decimale mostra una *stringa* di cifre poste dopo la virgola: da una certa posizione in poi la stringa si ripete all'infinito.

La stringa è chiamata *periodo*: la frazione

$$\frac{5}{3}$$

è rappresentata in notazione decimale sotto la forma 1,6666...

La stringa scritta a destra della virgola – 6666 – è il periodo e si ripete all'infinito.

Per semplificare la scrittura di questi numeri sono usate due diverse convenzioni che hanno lo stesso significato:

* le cifre che formano il periodo sono scritte con un segmento orizzontale sovrastante:

$$\frac{5}{3} = 1,\overline{66}$$

;

* una seconda convenzione racchiude le cifre del periodo fra *parentesi tonde*:

$$\frac{5}{3} = 1,(66)$$

.

Una parte dei numeri periodici possiede una seconda stringa di cifre che non si ripetono e che precedono la stringa del periodo: si tratta dell'*antiperiodo*, come mostrato nell'esempio che segue:

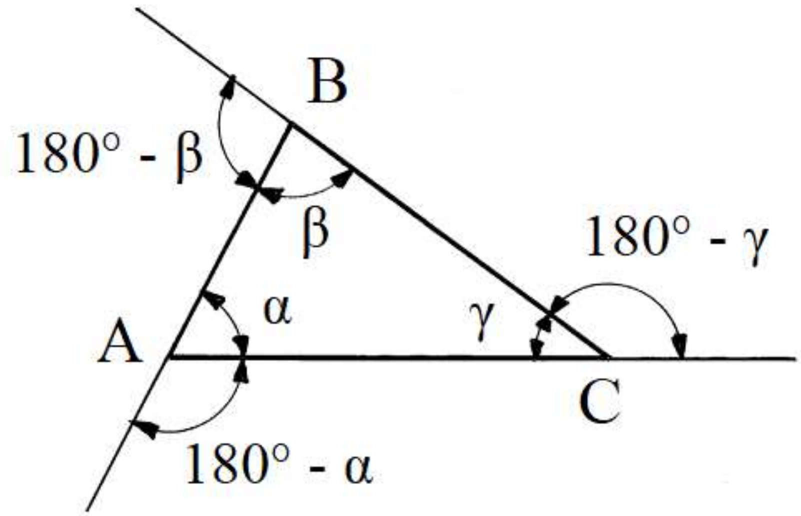
$$\frac{17}{6} \approx 2,8333... \approx 2,\underbrace{8}_{\text{antiperiodo}}(\underbrace{333}_{\text{periodo}})$$

- -

Somma degli angoli esterni di un poligono

L'*angolo esterno* di un poligono è l'angolo che, in un vertice, viene formato da un suo lato e dal prolungamento di uno dei due lati consecutivi. Gli esempi che seguono chiariscono il concetto.

ABC è un triangolo generico:



La somma degli angoli interni del triangolo è:

$$somma_{interni} = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Prolungare verso l'esterno i lati AC, BA e CB.
Nei vertici A, B e C sono formati tre angoli di ampiezza uguale a 180°.
La somma degli *angoli esterni* nei tre vertici è:

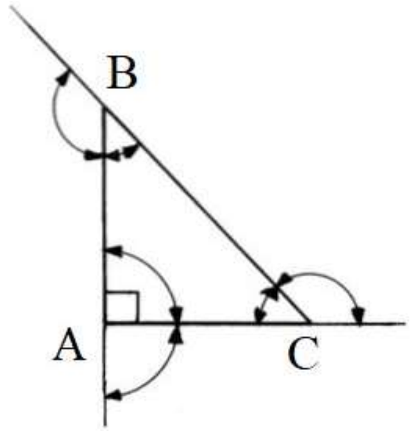
$$\begin{aligned} somma_{esterni} &= (180 - \alpha) + (180 - \beta) + (180 - \gamma) = \\ &= 3*180 - (\alpha + \beta + \gamma) = 540 - 180 = 360° = \\ &= 2 * (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

La somma degli angoli esterni è uguale a 360° e cioè al doppio della somma degli angoli interni:

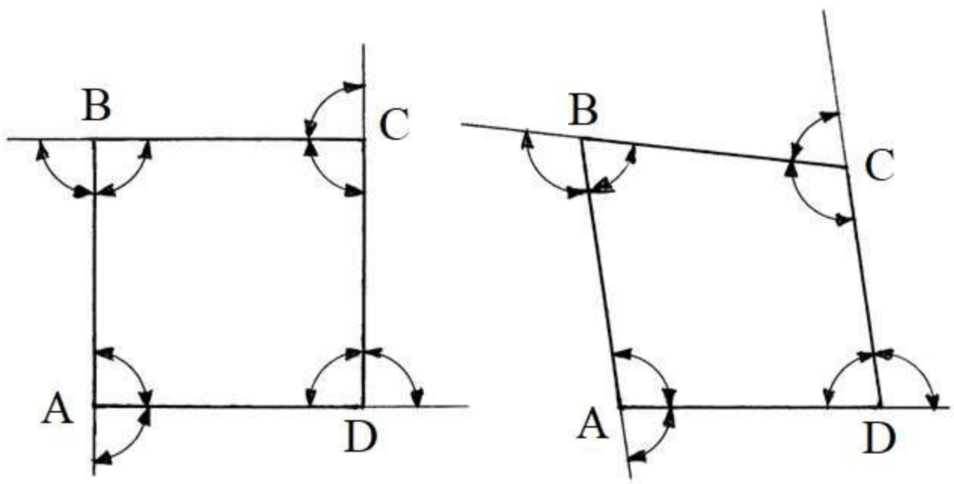
$$somma_{esterni} = 2 * somma_{interni}.$$

Gli angoli esterni sono *supplementari* ai rispettivi angoli interni e cioè le loro unioni formano angoli di 180°.

La somma degli angoli esterni di un triangolo rettangolo è uguale a 360°:

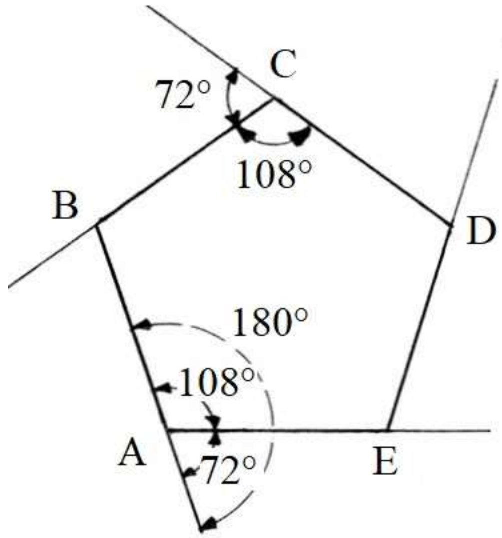


La somma degli angoli esterni di un *quadrato* è uguale a quella degli angoli interni e cioè 360°:



Lo stesso accade alla somma degli angoli esterni di un qualsiasi *quadrilatero* (rettangolo, rombo, trapezi di varia forma).

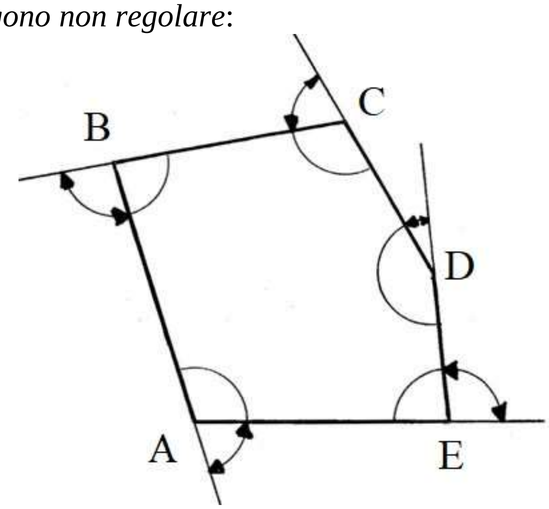
Anche le somme degli angoli esterni di un *pentagono regolare* e di un *pentagono non regolare* sono uguali a 360°.



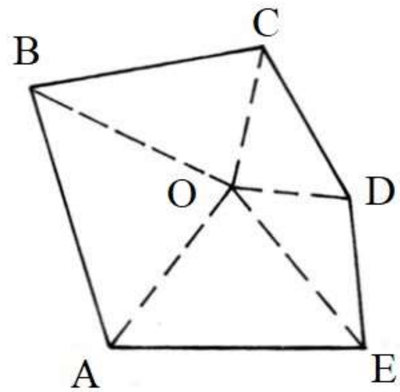
Gli angoli esterni del pentagono regolare sono *cinque* e tutti di ampiezza uguale a 72°:

$$somma_{esterni} = 5 * 72° = 360°.$$

ABCDE è un *pentagono non regolare*:



Esso può essere scomposto in *cinque* triangoli:



I cinque triangoli hanno uguale somma degli angoli interni, pari a 180°.
Come già visto in precedenza, la somma degli angoli interni del pentagono non regolare è:

$$\text{somma}_{\text{interni}} = (\text{numerolati} – 2) * 180 = (5 – 2) * 180 = 540°.$$

La somma degli *angoli piatti* nei cinque vertici del pentagono è:

$$\text{somma angoli piatti vertici} = 5 * 180 = 900°.$$

La somma degli angoli esterni è data da:

$$\text{somma}_{\text{esterni}} = \text{somma angoli piatti vertici} - \text{somma}_{\text{interni}} =$$
$$= 900° - 540° = 360°.$$

Anche nel caso di un pentagono non regolare, la somma degli angoli esterni è uguale a 360°.

- APPROFONDIMENTO -

Il rapporto fra la lunghezza del perimetro e quella del diametro

Tutti i poligoni regolari possono essere inscritti in un cerchio. La lunghezza del lato di un poligono inscritto è direttamente proporzionale a quella del diametro del cerchio e un simile rapporto di proporzionalità intercorre fra la lunghezza del perimetro del poligono e il diametro del cerchio.

La tabella che segue fornisce i dati relativi ai rapporti fra le lunghezze del perimetro e quella del diametro per alcuni poligoni regolari (costruibili con riga e compasso), indicati sia sotto forma di espressione aritmetica sia con il numero decimale approssimato. Tutti i rapporti crescono fino al limite massimo, pari a $\pi \approx 3{,}14\ldots$, rapporto fra la lunghezza della circonferenza (costituita da un poligono con un numero di lati *infinito*) e quella del suo diametro:

Numero lati	Nome	Rapporto perimetro/diametro (espressione aritmetica)	Rapporto perimetro/diametro (espressione decimale approssimata)
3	Triangolo equilatero	$3/2 * \sqrt{3}$	2,598 076 211
4	Quadrato	$2 * \sqrt{2}$	2,828 427 125
5	Pentagono	$5/2 * \sqrt{[(5 - \sqrt{5})/2]}$	2,938 926 261
6	Esagono	3	3
8	Ottagono	$4 * \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$	3,061 467 459
10	Decagono	$5 * (\sqrt{5} – 1)/2$	3,090 169 944
12	Dodecagono	$3 * (\sqrt{3} – 1) * \sqrt{2}$	3,105 828 541
15	Pentadecagono	$15/8 * [\sqrt{(10 + 2*\sqrt{5})} – \sqrt{3} * (\sqrt{5} – 1]$	3,118 675 363
16	Esadecagono	$8 * \sqrt{[2 – \sqrt{(2 + \sqrt{2})}]}$	3,121 445 152
20	Icosagono	$5 * \sqrt{[8 – 2*\sqrt{(10 + 2*\sqrt{5})}]}$	3,128 689 301
24	Tetraicosagono	$6 * \sqrt{(8 – 2 * \sqrt{2} – 2 * \sqrt{6})}$	3,132 628 613
30	Triacontagono	$15/4 * [\sqrt{(30 – 6*\sqrt{5})} – \sqrt{5} – 1]$	3,135 853 898
∞	Circonferenza	π	3, 141 592 654

- -

La costruzione dei poligoni regolari con più di 4 lati

La divisione di una circonferenza in un certo numero di parti uguali e il tracciamento di poligoni regolari inscritti sono argomenti che interessano molto i tecnici.

La costruzione delle ruote dentate è un esempio molto importante. Il numero dei denti può assumere valori alti, anche oltre 50.

Fin dalle epoche più antiche, è stato dimostrato che con la riga *non graduata* e con il compasso si possono costruire pochissimi poligoni, con i seguenti numeri di lati:

*	3;
*	4;
*	5;
*	17;
*	257;
*	65537.

I numeri 3, 5, 17, 257 e 65537 sono *numeri primi*: sono tutti potenze di 2 alle quali è stato addizionato 1, come spiega la seguente tabella:

Numero primo	Scomposizione	Scomposizione come potenze di 2
3	2 + 1	$2^1 + 1$
5	4 + 1	$2^2 + 1$
17	16 + 1	$2^4 + 1$
257	256 + 1	$2^8 + 1$
65537	65536 + 1	$2^{16} + 1$

Quei numeri sono conosciuti come numeri di Fermat (dal nome del matematico francese Pierre de Fermat, 1601-1665).

Un numero di Fermat è dato dalla formula:

$F_n = (2^2)^n$, con *n* intero non negativo.

La divisione di una circonferenza in 17 parti uguali è utile per la costruzione di ruote dentate. In certi meccanismi possono essere presenti ruote con numeri di denti grandi (ad esempio 257), ma una ruota con 65537 denti è sicuramente irrealizzabile. È probabile che negli orologi meccanici siano usate ruote con un elevato numero di denti: ad esempio, l'*orologio dei pianeti* di Lorenzo della Volpaia (1446-1512) recava una ruota con 453 denti e cioè il prodotto di due numeri primi: 3*151 = 453.

I tecnici e i disegnatori usano *metodi approssimati* per disegnare poligoni con un numero qualsiasi di lati: 7, 11, 13, 19, 23 e via di seguito. In via di principio, esse possono essere realizzate con una *riga graduata* e con un *compasso ad apertura variabile.*

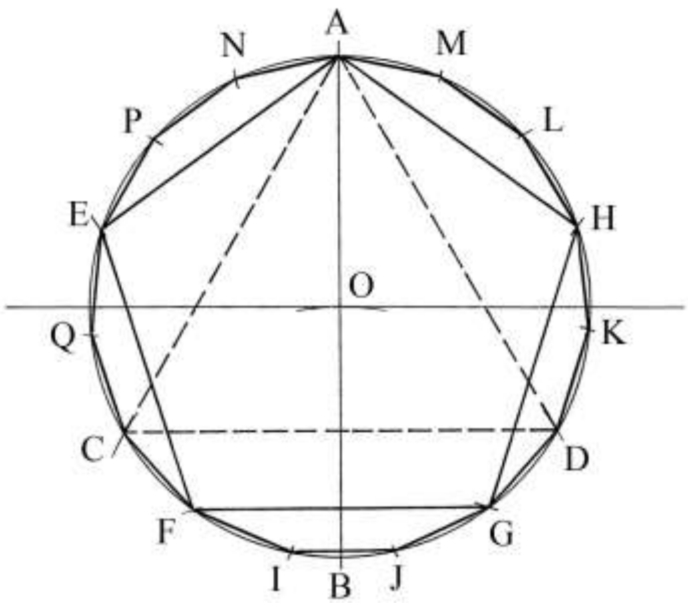
Alcune fra le costruzioni geometriche proposte in questo articolo sono approssimate, con errori relativi alla lunghezza dei lati e all'ampiezza degli angoli che non dovrebbero superare l'1%.

Per le costruzioni geometriche i matematici Greci imponevano soltanto l'uso di una riga non graduata e di un compasso collassabile, che una volta usato non conservava l'apertura impiegata: tutto ciò è l'opposto delle righe graduate e dei balaustrini e dei balaustroni che oggi impieghiamo. Come è noto a tutti, questi modelli di compassi conservano l'apertura.

Nei poligoni regolari è facile dividere per *due* gli archi sottesi dai lati per cui da quei poligoni costruibili è possibile ricavare altri poligoni con un numero di lati multiplo di 2, come indicato nella tabella che segue:

Numero lati poligoni	Multipli di 2	Multipli di 4	Multipli di 8	Multipli di 16
3	6	12	24	48
4	8	16	32	64
5	10	20	40	80
17	34	68	136	272

Dato che sono costruibili i poligoni inscritti di 3 (triangolo equilatero) e di 5 lati (pentagono regolare) è pure tracciabile il poligono di 15 lati (pentadecagono) che è disegnabile per via *indiretta*, dopo aver inscritto nello stesso cerchio i due poligoni più semplici, il triangolo ADC e il pentagono AHGFE, con il vincolo di un vertice in comune, che è A:



COSTRUZIONI DELL'ETTAGONO

L'ettagono regolare inscritto in un cerchio non è costruibile con riga e compasso: tutti i metodi proposti con l'impiego di questi due strumenti portano a soluzioni approssimate.

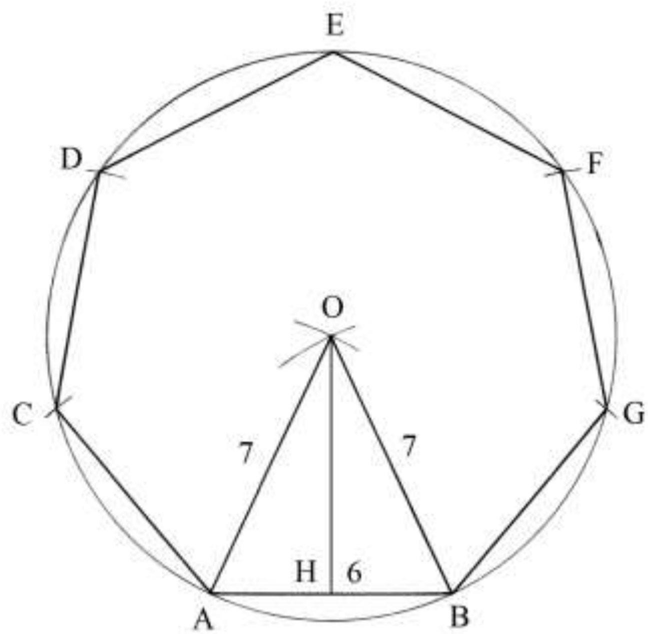
Esistono altri strumenti che consentono la costruzione *esatta* di questo poligono: il metodo *neusis* e i trisettori come il *tomahawk*.

La maggior parte delle costruzioni disponibili è relativa all'ettagono inscritto: un numero minore è rappresentato dai metodi che lo tracciano a partire dalla lunghezza di un lato. Spesso questi ultimi metodi richiedono il disegno di una circonferenza sulla quale giaceranno i vertici del poligono.

Una costruzione babilonese dell'ettagono inscritto

Nel volume commemorativo dedicato a Alpay Özdural, citato in bibliografia, sono riprodotti alcuni studi di questo scomparso Autore. Fra gli altri vi è la ricostruzione di un metodo attribuito ai Babilonesi.

Un ettagono è costruito a partire da un triangolo isoscele con base lunga 6 unità e lati obliqui 7:



Il vertice O è il centro del cerchio in cui è inscritto l'ettagono.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AB.

ACDEFGB è l'ettagono inscritto approssimato: due lati, DE e EF, sono leggermente più lunghi degli altri cinque.

In teoria, il perimetro dell'ettagono è lungo:

perimetro = 7 * AB = 7 * 6 = 42.

Esso corrisponde a 6 volte il raggio del cerchio OA:

6 * raggio = 6 * 7 = 42.

In un ettagono regolare, l'*apotema* è lunga 1,038 volte il lato:

apotema = 1,038 * 6 = 6,228.

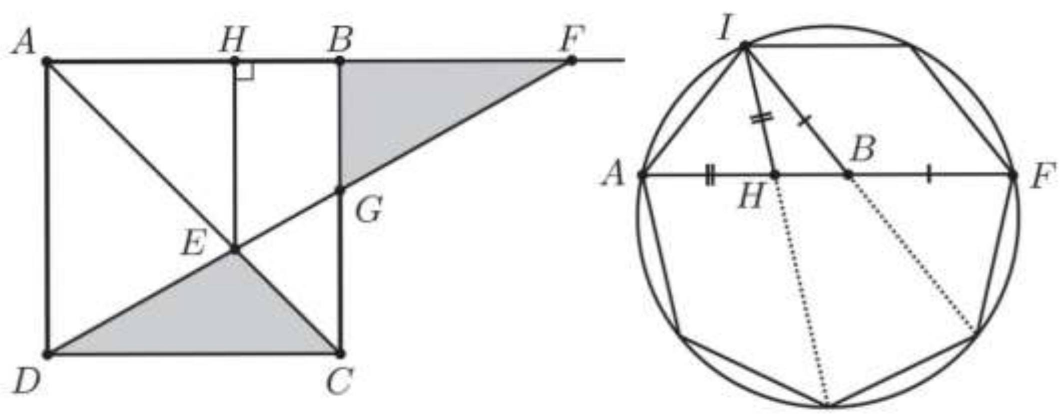
Nel poligono della figura OH è l'apotema che è lungo:

$OH^2 = OA^2 – AH^2 = 7^2 – 3^2 = 49 – 9 = 40$ e

$OH = \sqrt{40} = 2 * \sqrt{10} \cong 6,3245$.

COSTRUZIONE DELL'ETTAGONO REGOLARE SECONDO ARCHIMEDE

Nel bel libro di David S. Richeson (citato in bibliografia) alle pp. 142-143 è spiegato il metodo usato da Archimede per disegnare l'ettagono regolare a partire dalla lunghezza di un suo lato, AB:

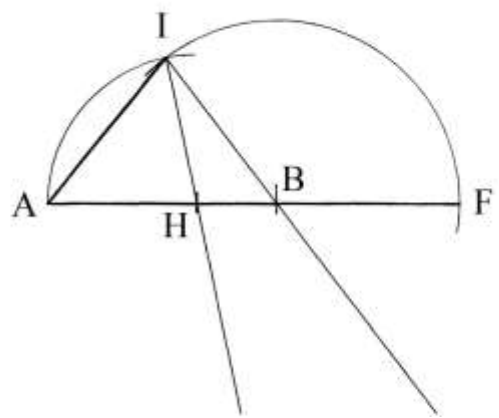


Sul lato AB disegnare il quadrato ABCD e prolungare verso destra AB. Tracciare la diagonale AC.

Archimede impiegò delle *coniche* – argomento qui non considerato data la natura puramente divulgativa di questo articolo – per disegnare un segmento DF che in grado di soddisfare a una condizione: esso doveva intersecare AC nel punto E e BC in G. Da E innalzare la perpendicolare a AF. Inoltre, l'area del triangolo DEC deve essere *uguale* a quella del triangolo rettangolo BFG.

Proponiamo una soluzione geometrica semplificata.

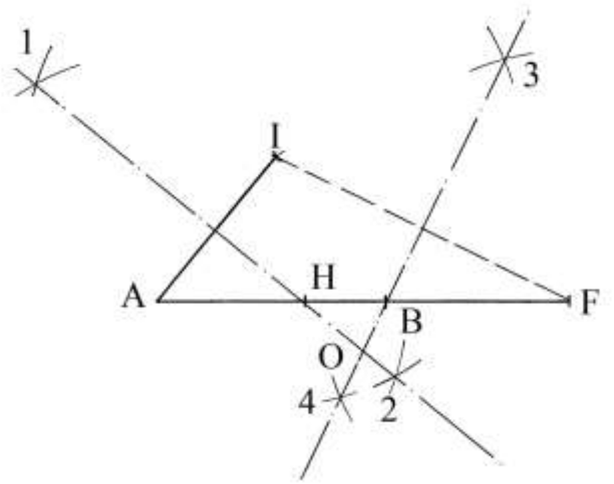
Su di una retta orizzontale riprodurre il segmento AHBF:



Fare centro in H e con raggio HA disegnare un arco a partire da A e con centro in B e raggio BF tracciare un secondo arco che taglia il primo nel punto I. AI è il primo lato dell'ettagono e F ne è un altro vertice.

Occorre determinare la posizione del centro O del cerchio in cui deve essere inscritto il poligono.

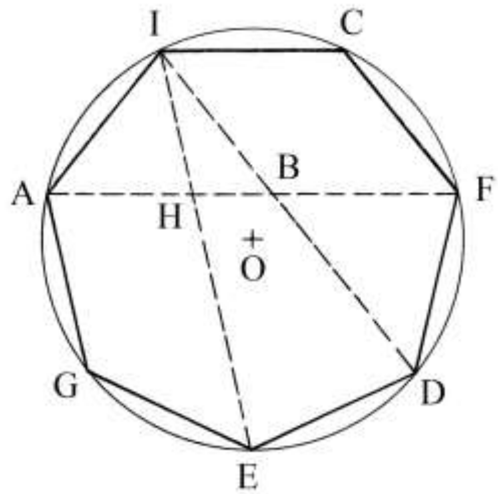
Collegare I con F. Per i punti A, I e F passa una sola circonferenza. Costruire gli assi delle corde AI e IF: essi passano rispettivamente per le coppie di punti 1-2 e 3-4:



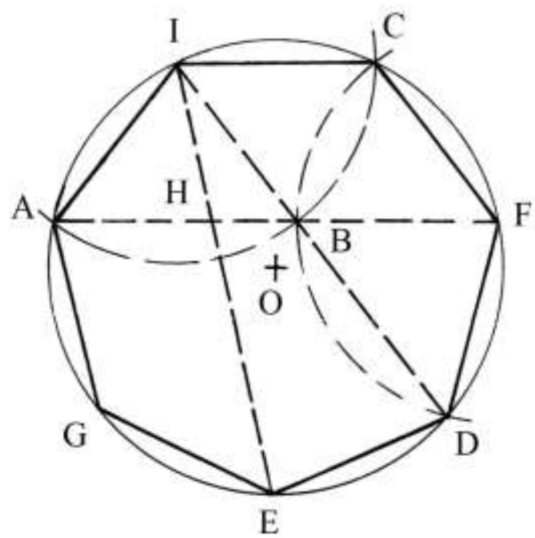
Il punto O è posto nell'intersezione dei due assi.

Fare centro in O e con raggio OA = OI = OF disegnare una circonferenza sulla quale va riportata la lunghezza di AI.

AICFDEG è l'ettagono regolare inscritto.



BICF è un *rombo* che ha lati lunghi quanto quelli dell'ettagono:



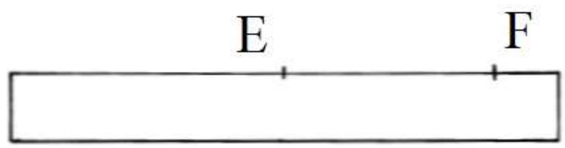
Le tre diagonali, AF, IE e ID, sono tutte parallele a un lato: rispettivamente a IC, a AG e a CF.

COSTRUZIONI CON IL METODO *NEUSIS*

IL METODO "*NEUSIS*"

Il termine *neusis* viene dal greco e, grosso modo, significa "nella direzione di".

Il metodo risale agli antichi geometri greci e in particolare a Archimede (287-212 a.C.); richiede l'uso del compasso e di un righello *graduato recante due sole tacche distanziate*, come quello rappresentato nella figura che segue:



I righelli usati dai tecnici e dagli artigiani sono quasi tutti graduati in cm, mm e talvolta in pollici.

Il righello usato con il metodo *neusis* può scorrere e ruotare. Esso era impiegato nei casi nei quali era impossibile usare la riga non graduata e il compasso: la costruzione dell'ettagono, dell'ennagono, del tridecagono, la trisezione di un angolo qualsiasi e la duplicazione del cubo.

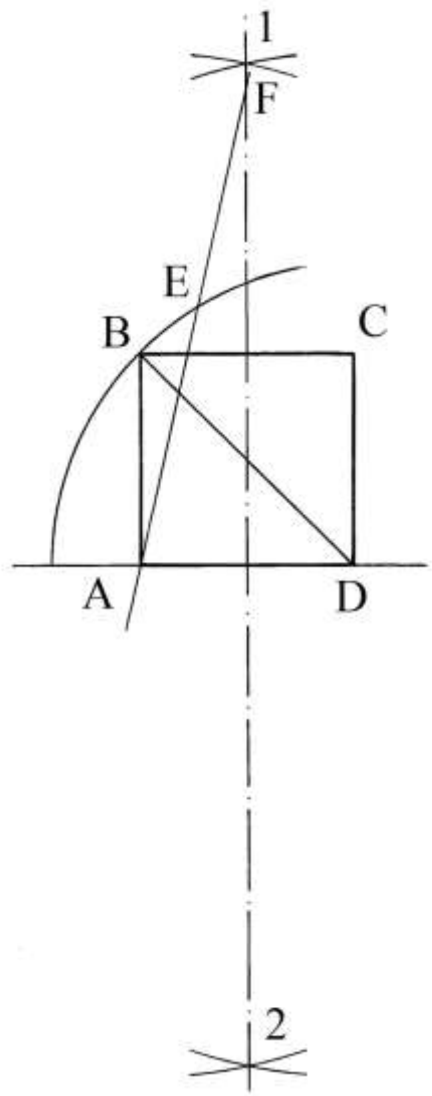
Il righello scorre e ruota intorno a un polo posto in corrispondenza di un punto scelto, ad esempio, a sinistra di E.

L'ettagono con il metodo *neusis*

Presentiamo una prima costruzione per ricavare l'ettagono regolare a partire dal suo lato, applicando il metodo *neusis*.

Disegnare un quadrato ABCD, con lato AB uguale alla lunghezza del lato dell'ettagono da costruire.

Costruire l'asse del segmento AD che passa per i punti 1 e 2:



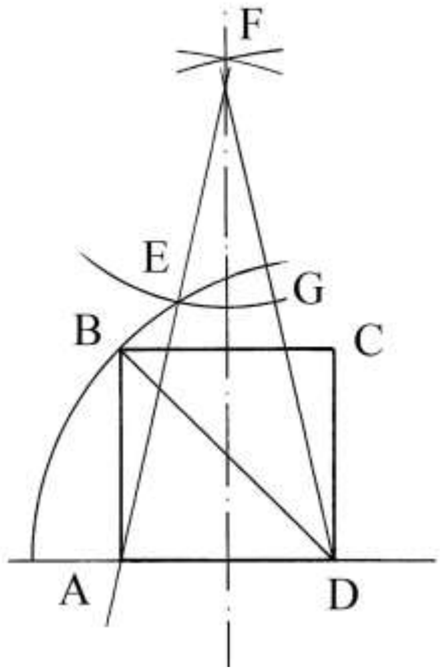
Con centro in D e raggio DB disegnare un arco di circonferenza.

Il segmento DB è la diagonale del quadrato ed è lungo √2 *AB.

Su di una riga riportare la lunghezza di AB e posizionarla sul punto A fino ad intersecare l'asse del segmento AD.

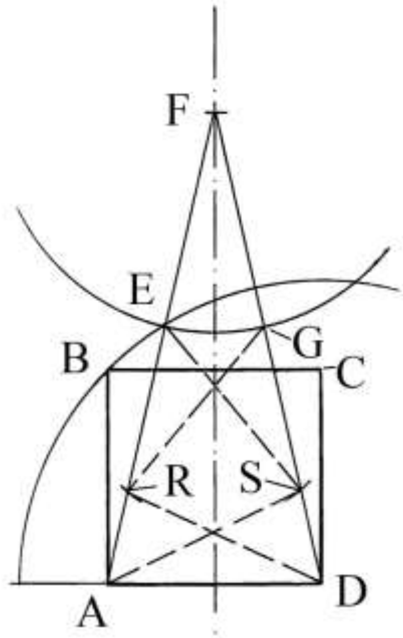
Con la riga misurare una lunghezza uguale a quella di AB, dall'arco di circonferenza con centro in D, fino ad incontrare l'asse di AD in nuovo punto, F. Sono così fissati i due punti E e F, allineati con A: EF è lungo quanto AB.

Riprodurre la precedente figura e disegnarvi anche il segmento FD:



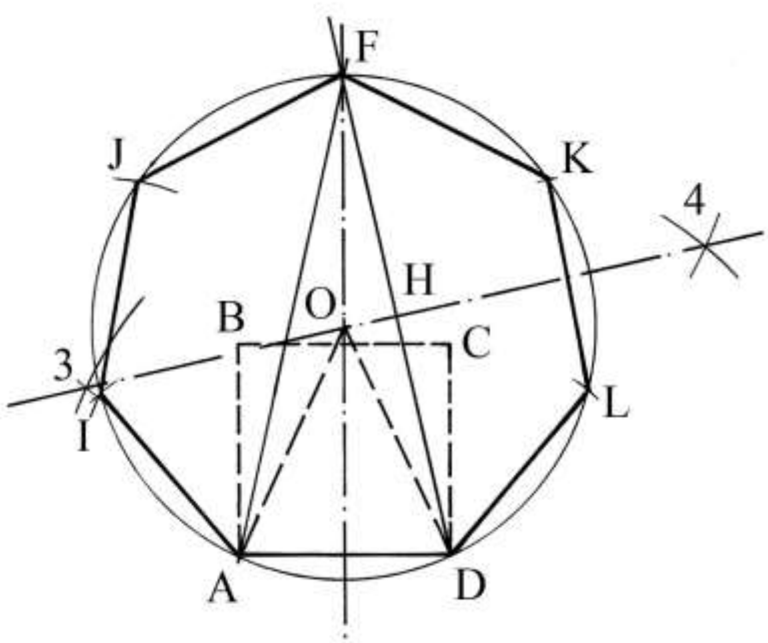
Fare centro in F e con raggio FE tracciare un arco che taglia FD in un nuovo punto, G.

La costruzione presenta un'interessante proprietà, mostrata nello schema che segue:



Con apertura uguale a AB fare centro in A, B, E e G: i quattro archi si incontrato nei punti R e S che giacciono sui segmenti FA e FD.

La tracciatura dell'ettagono con il metodo *neusis* è mostrata nella figura che segue:



Costruire l’asse del segmento FD, 3-4, che lo taglia nel nuovo punto H. Questa linea incontra l’asse di simmetria di AD in un punto, O, che è il centro della circonferenza circoscritta all’ettagono da costruire.

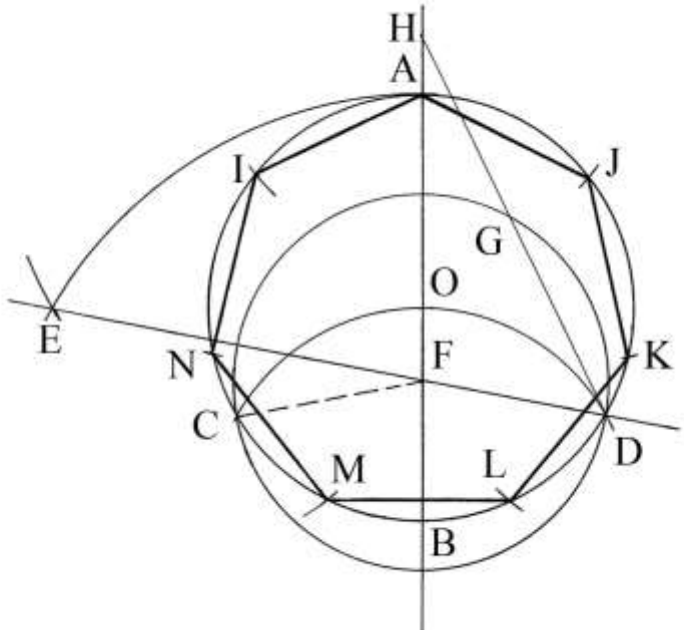
Con raggio OF = OA = OA disegnare una circonferenza: essa interseca l’asse di FD in un punto, I, che è un vertice dell’ettagono: altri tre vertici sono A, D e F.

A partire da F riportare sulla circonferenza la lunghezza di AD.

AIJFKLD è l’ettagono cercato, costruito con il metodo *neusis*.

Ettagono inscritto

Il grafico che segue presenta la costruzione dell’ettagono regolare inscritto. Sutton la attribuisce a Abu’l Wafa:



Tracciare il diametro verticale e fissarvi il centro del cerchio, O.

Con il raggio scelto, OA, disegnare la circonferenza e con lo stesso raggio fare centro in B per tracciare un arco che passa da O e fissa i punti C e D.

Con apertura AB fare centro in A e in B e disegnare due archi che si incontrano nel punto E.

Collegare D con E: la linea retta taglia AB nel nuovo punto F.

Fare centro in F e con raggio FC = FD tracciare una circonferenza.

Sulla consueta riga riportare la lunghezza di FC e posizionarla sul punto D facendola ruotare intorno ad esso fino a disegnare una retta passante per D, G e H a condizione che sia soddisfatta la condizione

HG = FC.

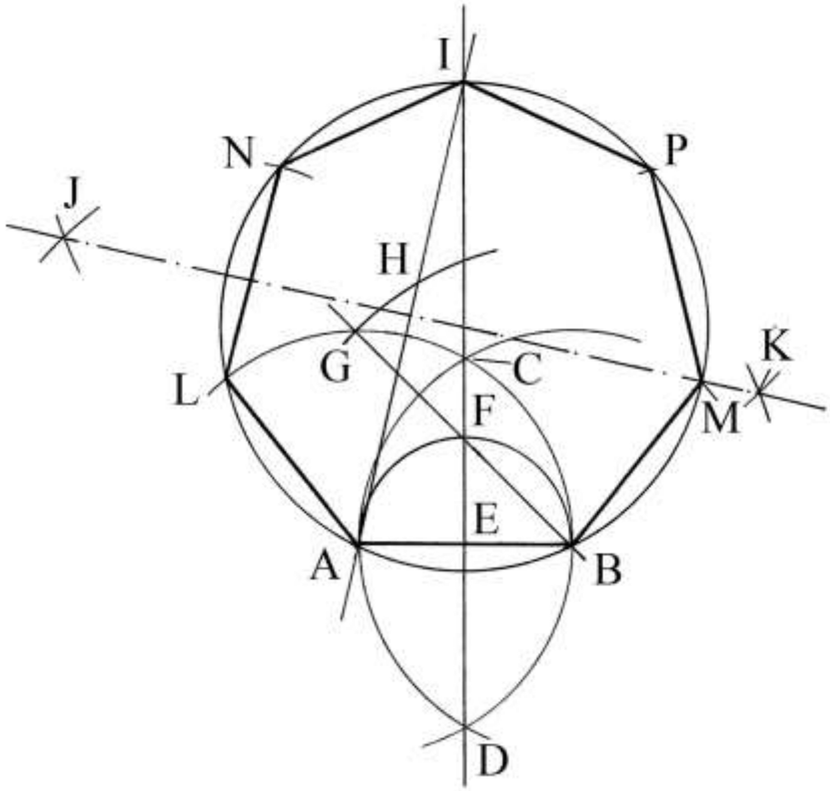
Con raggio OA fare centro in H e tracciare due archi che tagliano la prima circonferenza in I e in J: le corde AI e AJ sono due lati dell'ettagono inscritto.

Riportare la lunghezza di AJ sulla prima circonferenza.

Il poligono AJKLMNI è l'ettagono regolare inscritto con il metodo *neusis*.

Ettagono dato il lato

È data la lunghezza di un lato di un ettagono: è AB. La costruzione è attribuita a Crockett Johnson.



Anche il metodo qui descritto è rielaborato da Sutton ed è *neusis*.

La costruzione è inversa alla precedente, quella dell'ettagono *inscritto*.

Fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare due archi che si incontrano nei punti C e D, per i quali passa l'asse che divide in due AB nel punto E.

Fare centro in E e con raggio EA = EB disegnare una semicirconferenza che taglia l'asse verticale in F.

Per i punti B e F tracciare una retta che interseca l'arco di centro A in un nuovo punto, G.

Fare centro in B e con raggio BG disegnare un arco che taglia l'asse verticale.

Sulla solita riga riportare la lunghezza di AB e posizionarla sul punto A in modo da tracciare una retta che incontra l'asse verticale in un punto, I, in modo da soddisfare la condizione

HI = AB.

I è un vertice dell'ettagono.

Fare centro nei punti A e I e costruire l'asse di AI: è JK. Questo ultimo interseca l'asse verticale in O, centro della circonferenza sulla quale giacciono i vertici del poligono in costruzione.

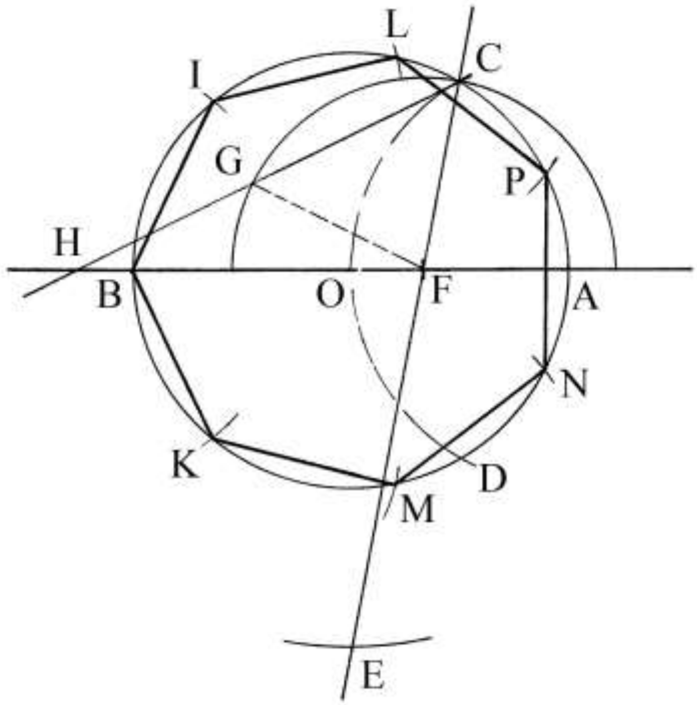
Sulla circonferenza riportare la lunghezza di AB.

ALNIPMB è l'ettagono regolare.

Ettagono inscritto – metodo di Viète

La costruzione è dovuta al matematico francese François Viète (1540-1603) e anch'essa applica il metodo *neusis*.

Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA e il diametro AB.



Fare centro in A e con raggio AO disegnare un arco che interseca la circonferenza nei punti C e D.

Sul raggio OA fissare il punto F a distanza OF = 1/3 * OA.

Tracciare una retta passante per i punti C e F.

Con raggio CD fare centro in O e disegnare un arco che taglia in E la retta passante per C e per F.

Fare centro in F e con raggio FC tracciare una semicirconferenza.

Su di una riga riportare la lunghezza di FC e disegnare una retta passante per C, fino a incontrare in H il prolungamento di AB: deve essere rispettata la condizione

GH = FC.

La retta taglia in G la semicirconferenza di centro F.

Con raggio OA fare centro in H per stabilire i punti I e K: questi sono due vertici dell’ettagono.

Sulla circonferenza di centro O, a partire da K riportare la lunghezza di BK.

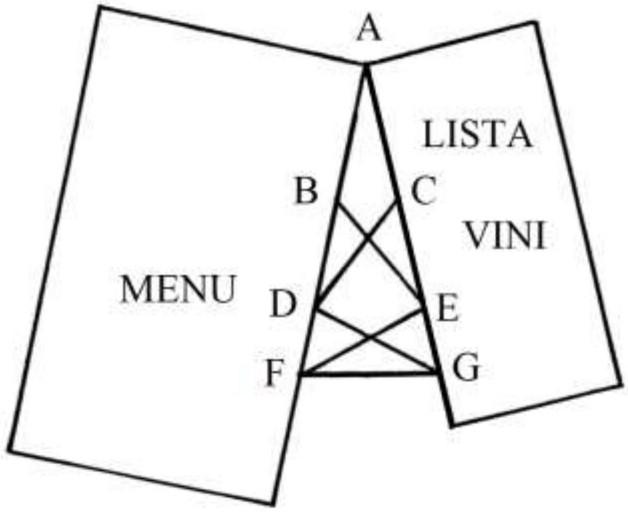
BILPNMK è l’ettagono regolare inscritto.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Il metodo di Crockett Johnson</u>

Il disegnatore americano Crockett Johnson (pseudonimo di David Johnson Leisk, 1906-1975) studiò la costruzione sopra spiegata e la riprodusse in alcuni suoi quadri di stile geometrico.

In vacanza a Siracusa nel 1973, Johnson era seduto al tavolino di un caffè e la sua attenzione cadde su uno strano oggetto: il menu e la carta dei vini erano collegati da stuzzicadenti di uguale lunghezza: AB, AC, BE, CD, DG e EF:

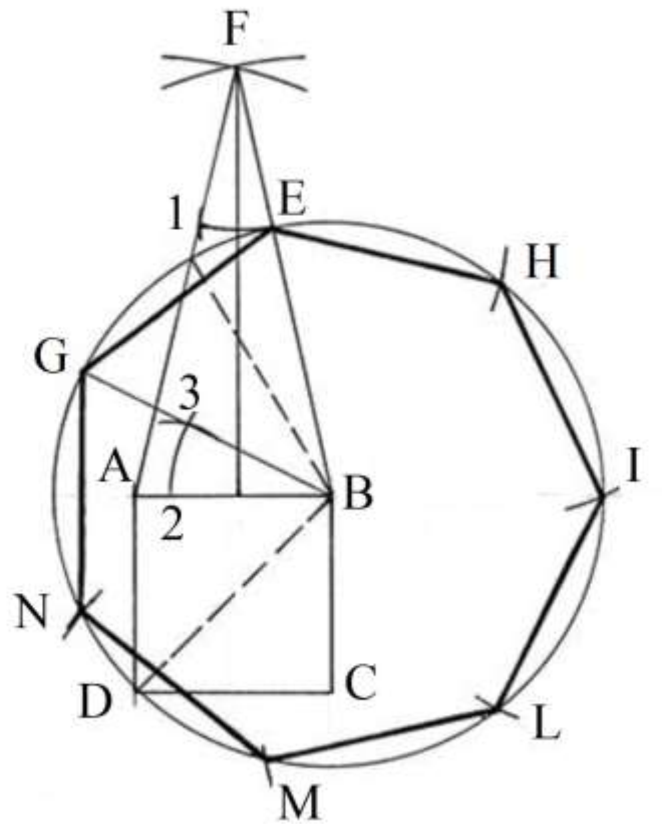


Il proprietario del caffè siciliano aveva, involontariamente, realizzato una struttura geometrica *neusis*.

La figura che segue è la descrizione del metodo usato da Crockett Johnson per costruire l'ettagono regolare.

Il triangolo ABF è lo stesso già usato nelle figure utilizzate per la costruzione dell'ettagono *neusis* a partire dalla lunghezza del suo lato AB. Il metodo qui descritto porta all'ettagono inscritto in un cerchio che ha raggio uguale a $\sqrt{2}$ * AB.

Costruire il quadrato di lato AB: è ABCD.



Tracciare la diagonale BD e con centro in B e raggio BD, disegnare una circonferenza. Essa taglia il segmento BF in un punto, E, che è il primo vertice dell'ettagono inscritto.

Occorre riportare l'angolo in F nel punto B: con centro in F e raggio FE, tracciare un arco che taglia AF nel punto 1.

Con la stessa apertura FE, fare centro in B e disegnare un arco che determina il punto 2.

Con il compasso misurare la lunghezza della corda 1-E e riportare la misura facendo centro in 2: si ricava il punto 3.

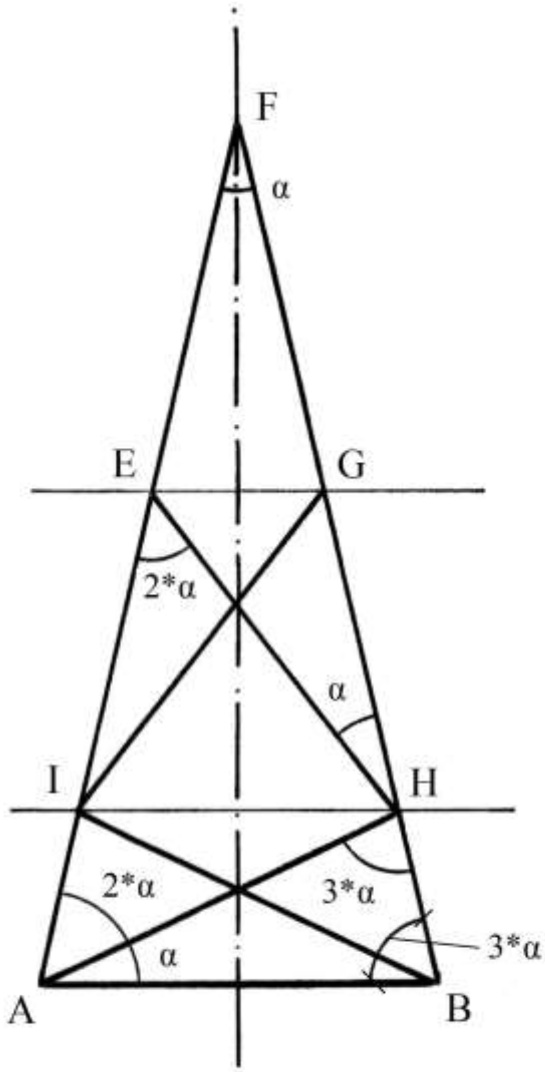
Per il punto 3 tracciare il raggio: esso intercetta sulla circonferenza il punto G, secondo vertice dell'ettagono. GE è la lunghezza del lato dell'ettagono.

Il poligono GEHILMN è l'ettagono inscritto.

- -

Ulteriori applicazioni del metodo neusis

Usiamo di nuovo la costruzione *neusis* dell'ettagono e scriviamo i valori degli angoli:

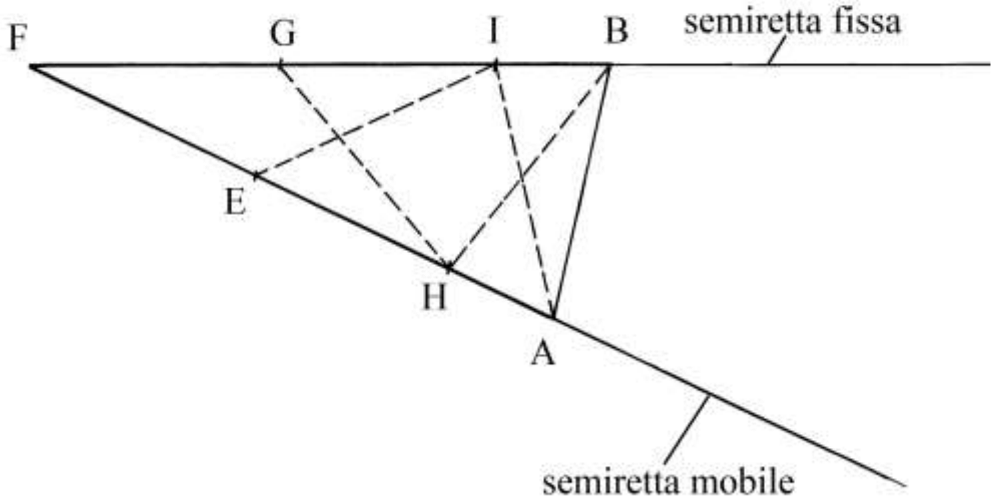


$\alpha = \pi/7 = 180°/7 \approx 25{,}71°$

$2 * \alpha = 51{,}43\ °$

$3 * \alpha = 77{,}14°$.

La costruzione può essere ruotata fino a disporre orizzontalmente la semiretta uscente da F e passante per B:



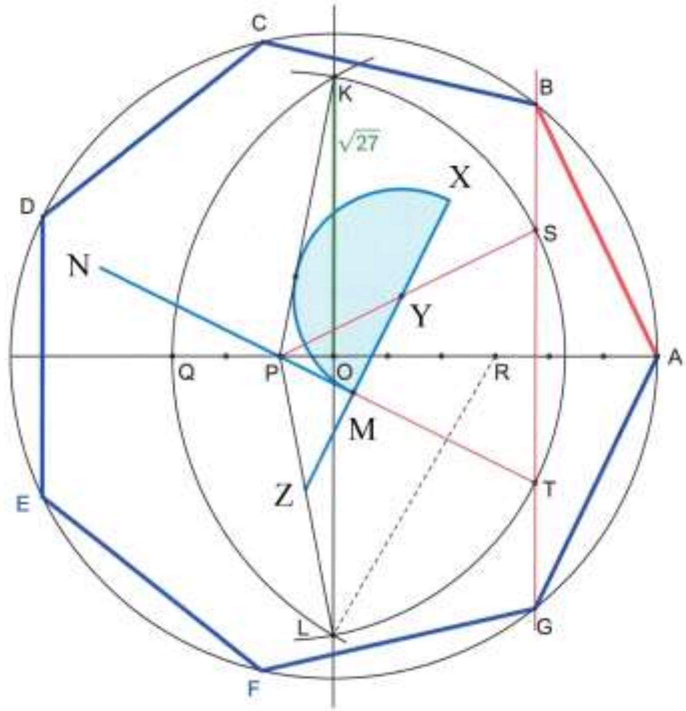
La semiretta orizzontale passante per F e per B è *fissa*. La semiretta FA è *mobile* e viene ruotata per far sì che i vertici delle aste siano posizionati sulle due semirette.

I triangoli formati da due segmenti consecutivi sono sempre isosceli perché i segmenti hanno la stessa lunghezza: un triangolo è sempre isoscele se ha due lati uguali (e due angoli di uguale ampiezza).

L'ultima asta – AB nel caso dell'ultima figura – deve essere perpendicolare alla bisettrice dell'angolo in F (BFA), così che il triangolo BFA che essa determina sia *isoscele*.

COSTRUZIONE DELL'ETTAGONO CON IL *TOMAHAWK*

Lo schema che segue, riprodotto da Wikipedia e qui rielaborato, presenta la costruzione di un ettagono inscritto in un cerchio di centro O, con il *trisettore tomahawk*:



Eccone la spiegazione. Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA lungo convenzionalmente *sei* e i due diametri perpendicolari che si intersecano in O.

Dividere OA in *sei* parti uguali, tutte di lunghezza convenzionale uguale a *uno* e fissare il suo punto medio: è R.

A sinistra di O, sul diametro orizzontale fissare altre tre divisioni di lunghezza uguale a 1/6 di quella di OA: fra gli altri sono individuati i punti P e Q.

Fare centro in R e con raggio RQ (uguale alla lunghezza di OA) tracciare un arco che taglia il diametro verticale nei punti K e L.

Disegnare i segmenti PK e PL. Fare centro in P e con raggio PK disegnare un arco da K a L.

Il segmento OK è lungo $\sqrt{27}$. Spieghiamo l'origine di questo dato. La lunghezza convenzionale di OA è 6 e lo è pure quella di QR. QKR è un triangolo equilatero, peraltro non disegnato nella figura.

L'altezza del triangolo equilatero QKR, KO, è lunga:

$$KO = (\sqrt{3})/2 * QR = \sqrt{(3)}/2 * 6 = 3 * \sqrt{3} = \sqrt{(9 * 3)} = \sqrt{27}.$$

Posizionare il *tomahawk* sullo schema: il semicerchio deve risultare tangente al segmento PK, l'asta MN deve passare per il centro O e il punto Z deve collocarsi su PL.

Sul punto P deve essere posizionata la maniglia MN.

Per i punti P e Y passa una linea che interseca il secondo arco nel punto S e il prolungamento di PY in un punto sullo stesso arco, che è S.

PST deve essere un *triangolo isoscele*, con PA che è una sua mediana: il tomahawk deve essere opportunamente posizionato per tentativi.

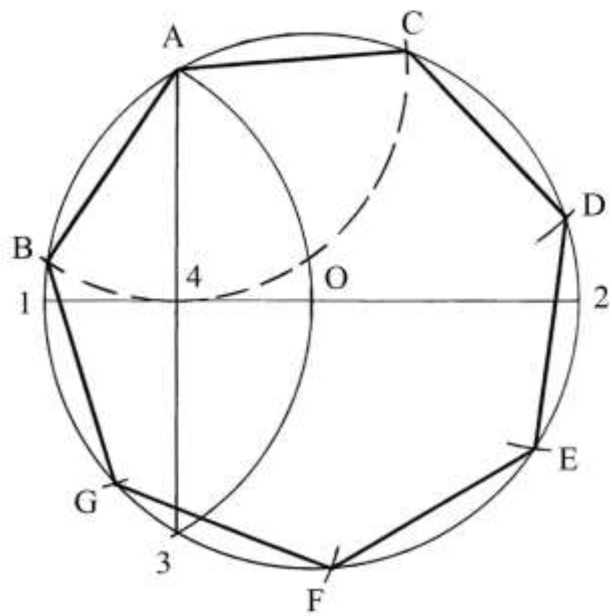
Per i punti S e T tracciare una corda che taglia la circonferenza nei punti B e G che risultano essere due vertici dell'ettagono.

Riportare la lunghezza di AB o di AG sulla circonferenza: ABCDEFG è l'ettagono inscritto.

<u>COSTRUZIONE DI UN ETTAGONO INSCRITTO SECONDO ERONE</u>

La costruzione che segue è *approssimata*.

Tracciare una circonferenza con centro in O e disegnare il diametro orizzontale 1-2:



Con centro in 1 e con lo stesso raggio O-1, tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti A e 3. Disegnare il segmento A-3*:* il punto 4 lo divide a metà e il segmento A-4 (=3-4), è la lunghezza approssimata del lato dell’ettagono.

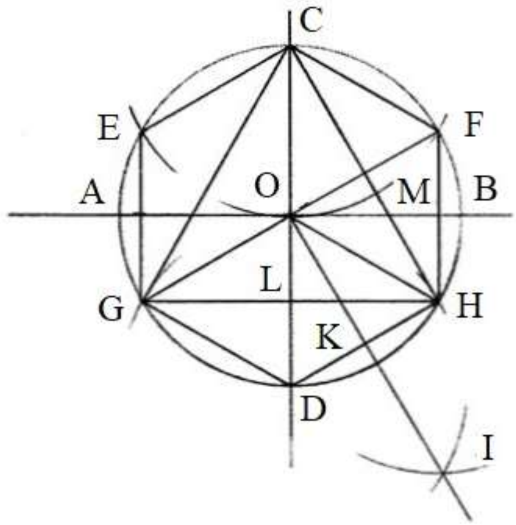
Fare centro nel punto A e, con apertura A-4, disegnare l’arco da 4 a B. A partire da A riportare la stessa lunghezza e determinare in successione i punti C, D, E, F, G. Disegnare i lati dell’ettagono.

Questa costruzione approssimata dell’ettagono inscritto è dovuta al matematico e ingegnere egizio Erone di Alessandria, vissuto nel I secolo d.C.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le due figure che seguono descrivano in dettaglio il metodo usato da Erone.

La figura seguente mostra la costruzione del triangolo equilatero (GCH) e dell’esagono regolare GECFHD) inscritti in una circonferenza di centro O e raggio OA:



AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari.

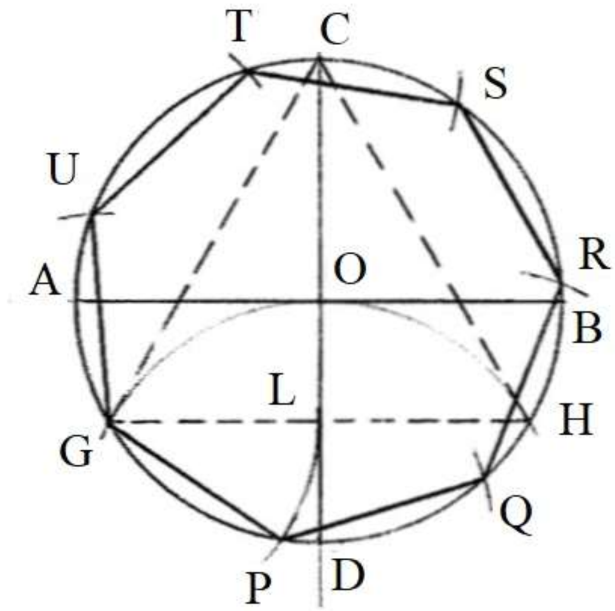
I raggi OF, OG e OH danno vita a due triangoli equilateri: rispettivamente OFH, OGD e OHD. Un esagono regolare può essere scomposto in *sei* triangoli equilateri uguali.

Costruire la bisettrice dell’angolo DOH: essa passa per il punto esterno I e taglia DH nel punto K.

La lunghezza del segmento OM è chiaramente uguale a quella del segmento LH: entrambi sono le altezze di due triangoli equilateri uguali (OFH e ODH). Essi sono anche due apotemi dell’esagono GECFHD. Inoltre, il segmento LH è lungo la metà del lato GH del triangolo equilatero GCH.

In conclusione, l’apotema dell’esagono è lungo la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.

Erone usò la precedente figura per costruire l’ettagono approssimato inscritto; il suo lato è lungo quanto l’apotema dell’esagono:



Fare centro in G e, con raggio GL, tracciare un arco che taglia la circonferenza in P. Riportando la stessa lunghezza sulla circonferenza, si ottiene l'ettagono approssimato GPQRSTU.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

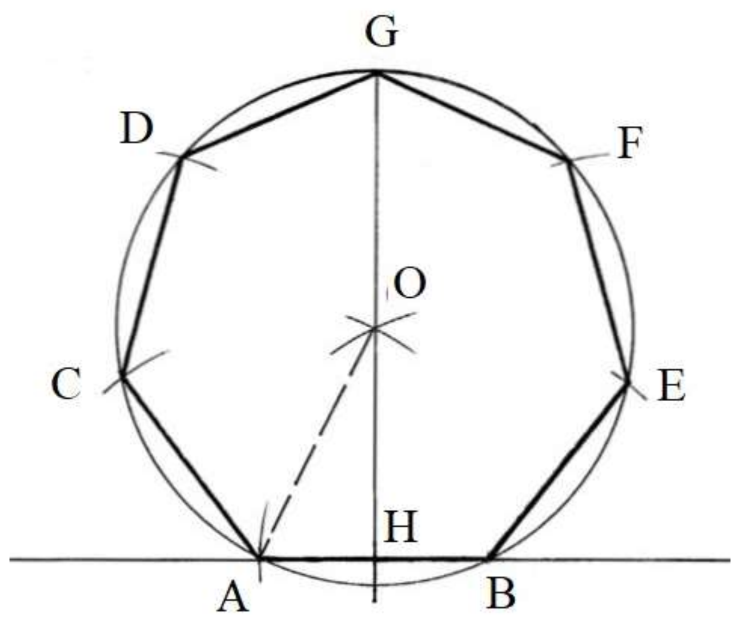
Una variante della precedente costruzione di Erone è spiegata nella figura che segue.
Il lato ℓ è in relazione alla lunghezza del raggio r:

$$AB = \ell = 7/8 * r \cong ½ * \sqrt{3} * r.$$

La seconda parte della precedente espressione richiama la costruzione di Erone vista sopra.
I termini numerici appena scritti valgono:

$$7/8 = 0{,}875 \qquad \text{e} \qquad ½ * \sqrt{3} \cong 0{,}866.$$

Il primo (0,875) è leggermente maggiore del secondo (≅0,866).



Conoscendo la lunghezza del lato l, con le formule inverse delle precedenti calcoliamo i seguenti rapporti:

$$r = 8/7 * \ell \cong 1{,}1428 * \ell$$
$$r = 2 * \ell/\sqrt{3} \cong 1{,}1547 * \ell$$

Tracciare una retta orizzontale e fissarvi il segmento AB, che è il primo lato del poligono.

Fare centro nei punti A e B con raggio $r = 1{,}1547 * \ell$ e tracciare due archi che fissano il punto O, centro del cerchio nel quale va inscritto l'ettagono.

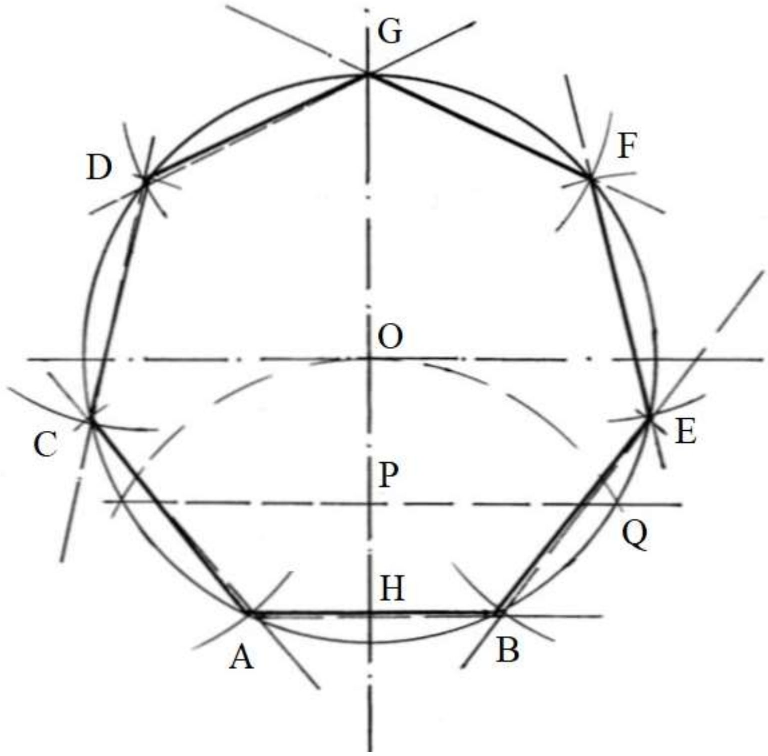
Riportare sulla circonferenza la lunghezza del lato AB e fissare i punti C, D, E e F.

Il punto G si trova sull'asse del segmento AB (che è il diametro verticale della circonferenza).

I lati AB, AC, AD, BE e EF hanno la stessa lunghezza. Invece, i lati DG e GF sono leggermente più corti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue mette a confronto le due varianti della costruzione di Erone:



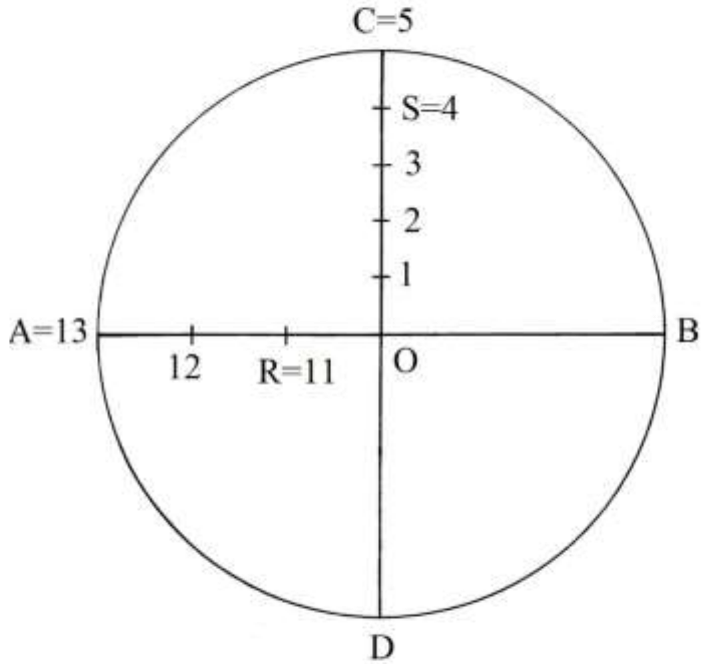
Con segno *continuo* è disegnata l’ultima costruzione (realizzata a partire dal lato AB) e con segno *tratteggiato* le è sovrapposta la prima: la differenza è minima. La costruzione tratteggiata ha lati dell’ettagono lunghi quanto il segmento OH, che è l’*apotema* dell’esagono regolare inscritto nello stesso cerchio:

$$PQ = OA * (\sqrt{3})/2 = r * (\sqrt{3})/2.$$

<u>Una variante della costruzione dell’ettagono inscritto</u>

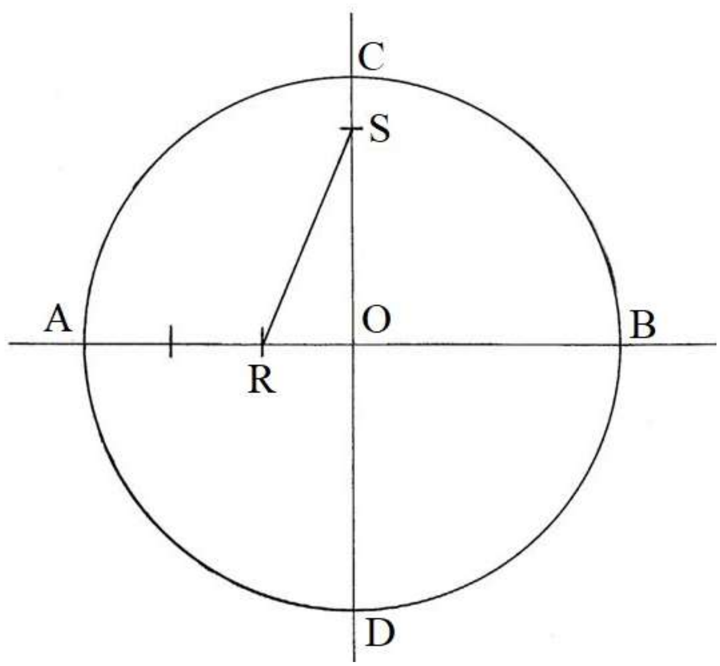
Oltre ai due valori approssimati forniti dalle due costanti descritte nel precedente paragrafo, esiste un altro valore approssimato del rapporto fra la lunghezza del lato del poligono e quella del raggio della circonferenza.

Tracciare una circonferenza con centro nel punto O e i diametri perpendicolari AB e CD; dividere in *cinque* parti uguali il raggio OC e in *tre* il raggio OA.



Tracciare il segmento RS: esso è l'ipotenusa del triangolo rettangolo RSO; i suoi cateti sono lunghi:

RO = 1/3 * OA =1/3 * raggio e OS = 4/5 * OC = 4/5 * raggio.



Dividere in *tre* parti uguali il raggio OA e in *cinque* parti uguali OC: fissare i punti R e S tali che le loro distanze da O siano:

RO = 1/3 * OA OS = 4/5 * OC.

Disegnare il segmento RS: esso è l'ipotenusa del triangolo rettangolo RSO.

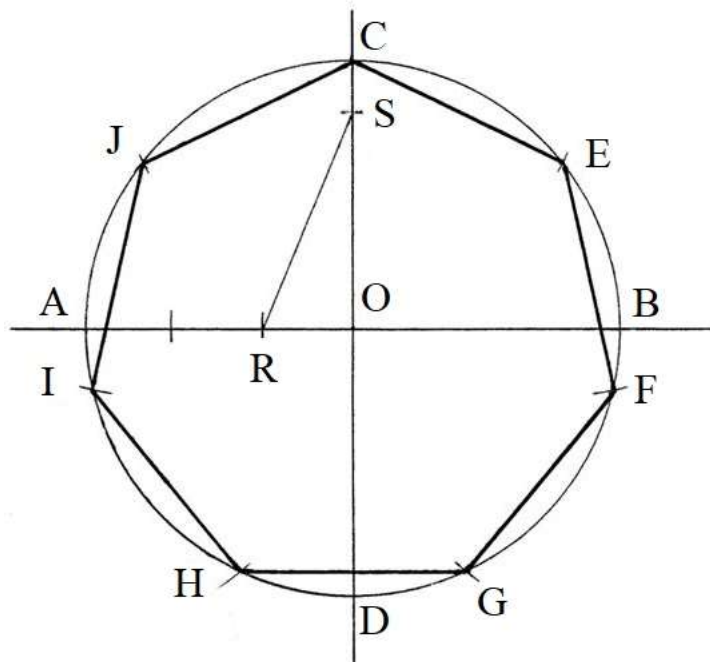
RS è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono da inscrivere nel cerchio di raggio OA. Calcoliamo la sua lunghezza, indicando con *r* il raggio OA=OC:

$RS^2 = RO^2 + OS^2 = ((1/3 * OA)^2 + (4/5 * OC)^2 = 1/9 * r^2 + 16/25 * r^2 =$
$= (25 + 144)/225 * r^2 = 169/225 * r^2$
$RS = \sqrt{(169/225 * r^2)} = 13/15 * r.$

La parte frazionaria 13/15 vale:

13/15 ≈ 0,8(66) e cioè uguale al rapporto 0,8(66) usato da Erone.

La figura che segue contiene l'ettagono costruito secondo il metodo appena descritto:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue è un ettagono costruito a partire dal lato AB, con lo stesso rapporto 13/15 fra le lunghezze del lato e del raggio usato nella precedente figura.

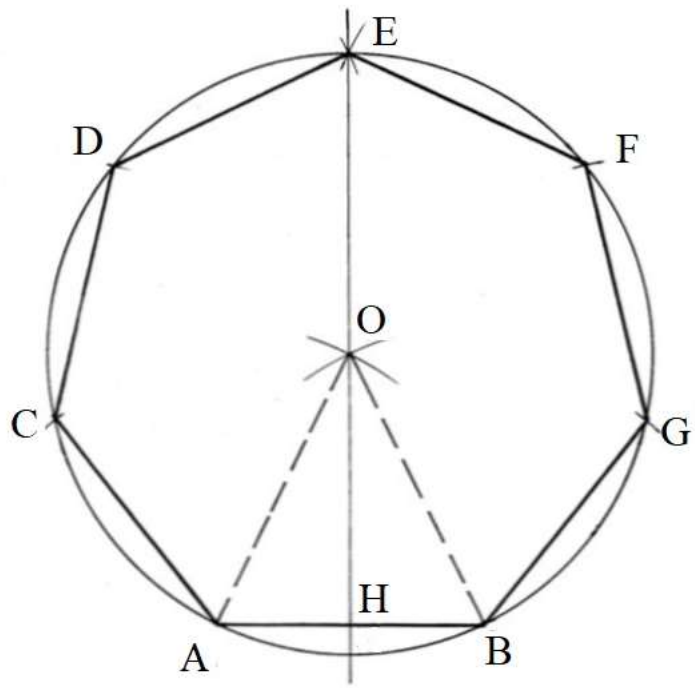
Tracciare l'asse del segmento AB che interseca nel punto H.

Calcolare la lunghezza del raggio r:

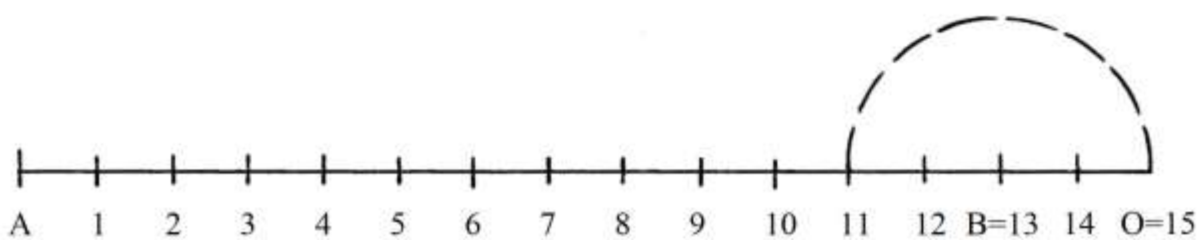
OA = OB = r = AB * 15/13 ≈ AB * 1,1538 oppure

OA = OB = r = AB/(13/15) ≈ AB/0,8(66).

Disegnare la circonferenza di centro O e raggio OA=OB e riportarvi la lunghezza di AB. ACDEFGB è l'ettagono inscritto.



La costruzione di un segmento, OA, lungo i 15/13 di un altro, il lato AB, può essere fatta con il metodo suggerito nello schema che segue:



AB è diviso in *tredici* parti uguali: fare centro nel punto B=13 e con raggio B-11 tracciare una semicirconferenza che fissa O=15 sul prolungamento di AB. AO è lungo i 15/13 di AB.

- APPROFONDIMENTO -

Poligoni inscritti – metodo di Mallet

Ian Mallet è un ricercatore americano. A lui si devono una formula e un metodo approssimati per la costruzione di poligoni regolari di *n* lati, inscritti in un cerchio di raggio *r*.

La lunghezza del lato del singolo poligono, ℓ, è data formula:

$$\ell = [13/(2*n + 1)] * r$$

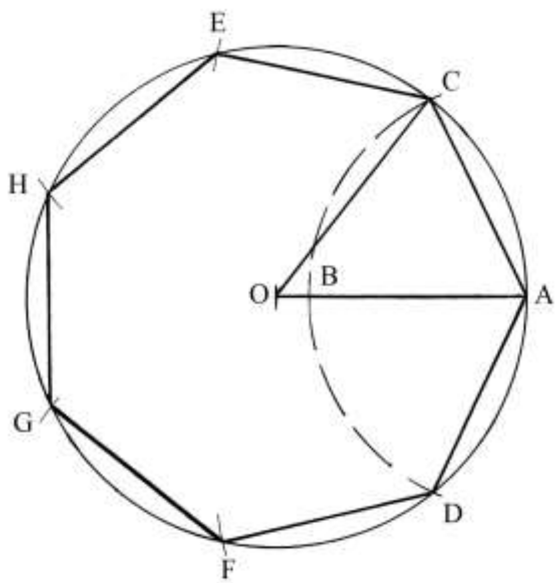
Indichiamo con k la costante 13/(2*n + 1) : k = 13/(2*n + 1).

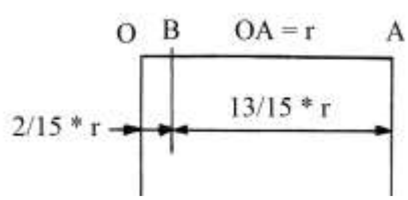
Ulteriori informazioni sono reperibili nel sito https://geometrian.com/research/RegularPolygons.php.

Lo schema che segue mostra l'esempio dell'ettagono inscritto: il coefficiente k vale:

k = 13/(2*n + 1) = 13/(2*7 + 1) = 13/15.

Quindi, il lato dell'ettagono è lungo: k * r = 13/15 * r.





Disegnare il raggio OA e la circonferenza di centro O.

Fissare il punto B distante da O i 2/15 del raggio OA: il segmento BA è lungo i 13/15 del raggio ed è la lunghezza del lato dell'ettagono inscritto. Fare centro in A e con raggio AB tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti C e D.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza AB: ADFGHEC è l'ettagono inscritto.

Questo metodo riproduce quelli descritti in precedenza e basati sull'approssimazione:

lato ≈ 13/15 * raggio ≈ 0,8(666) * raggio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La tabella che segue fornisce i valori della costante k = 13/(2*n + 1) per i primi poligoni:

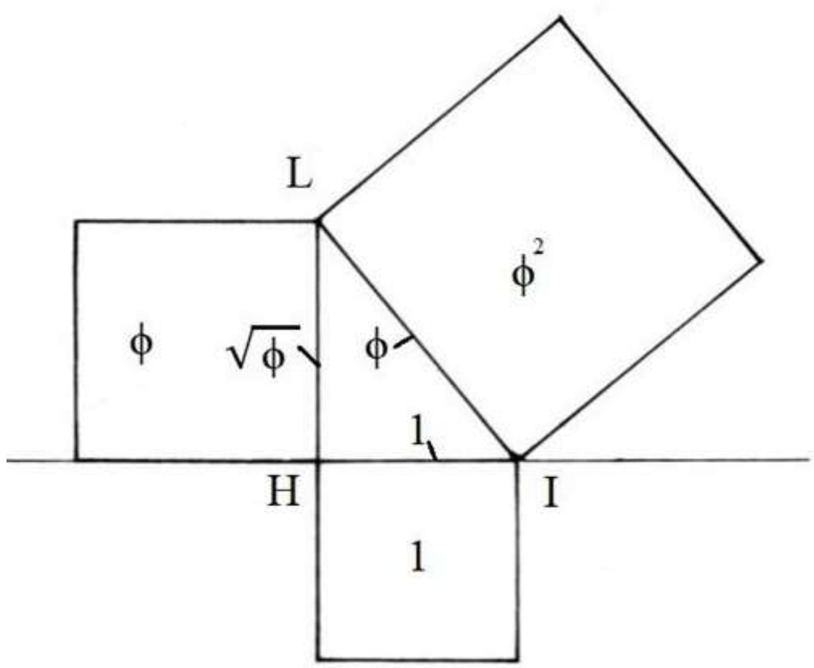
Poligoni	Valori della costante *k*
Pentagono	13/11 = 1,(18)
Esagono	13/13 = 1
Ettagono	13/15 = 0,8(666)
Ottagono	13/17 = 0,7647
Ennagono	13/19 = 0,6842
Decagono	13/21 = 0,619
Endecagono	13/23 = 0,5652
Dodecagono	13/25 = 0,52
Tridecagono	13/27 = 0,(481)

- -

Costruzione con il triangolo diofanteo

Una costruzione che è strettamente legata alla *sezione aurea* può essere impiegata per ricavare l'ettagono inscritto.

Il punto di partenza è un particolare triangolo rettangolo, il *triangolo diofanteo* (dal nome del matematico Diofanto di Alessandria, III-IV secolo) o *triangolo di Keplero* (dal nome del matematico e astronomo tedesco Giovanni Keplero, 1571-1630).



LHI è un triangolo rettangolo. I suoi lati hanno le dimensioni convenzionali riportate sulla figura:

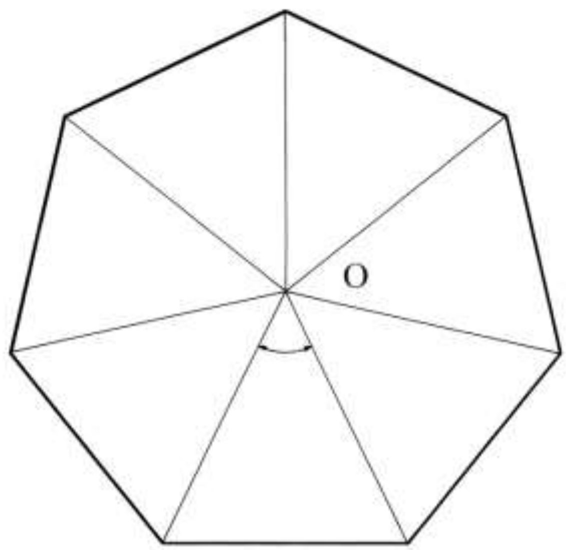
*	il cateto minore, HI, è lungo 1;
*	il cateto maggiore, HL, è lungo $\sqrt{\phi}$;
*	l'ipotenusa, LI, è lunga ϕ.

Sui tre lati sono costruiti i loro quadrati all'interno dei quali sono scritte le rispettive aree.
Conoscendo le lunghezze dei due cateti possiamo ricavare quella dell'ipotenusa:

$LI^2 = LH^2 + HI^2 = (\sqrt{\phi})^2 + 1^2 = \phi + 1 = \phi^2$.

$LI = \sqrt{(\phi^2)} = \phi$.

L'angolo LIH è ampio 51° 49' 38'' ≅ 51,827°. Questo valore si avvicina a quello dell'angolo al centro dei sette triangoli isosceli nei quali è scomposto un ettagono regolare:

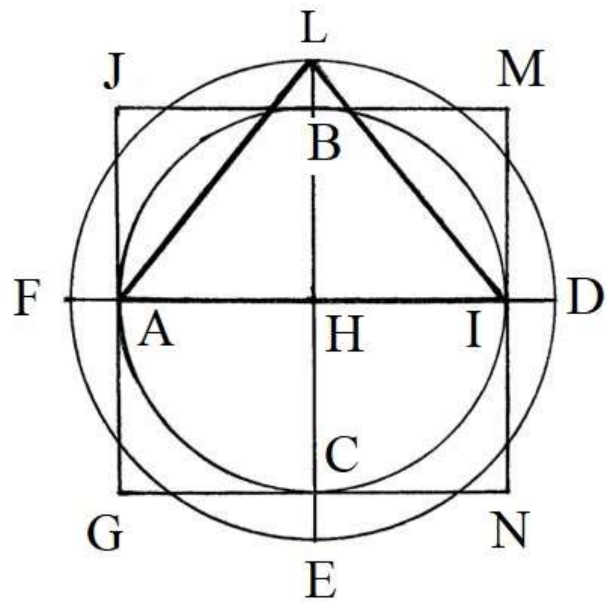


L'angolo in O è ampio:

$360°/7 \approx 51{,}42857°$.

Il triangolo rettangolo HLI è il poligono generatore dell'ettagono.

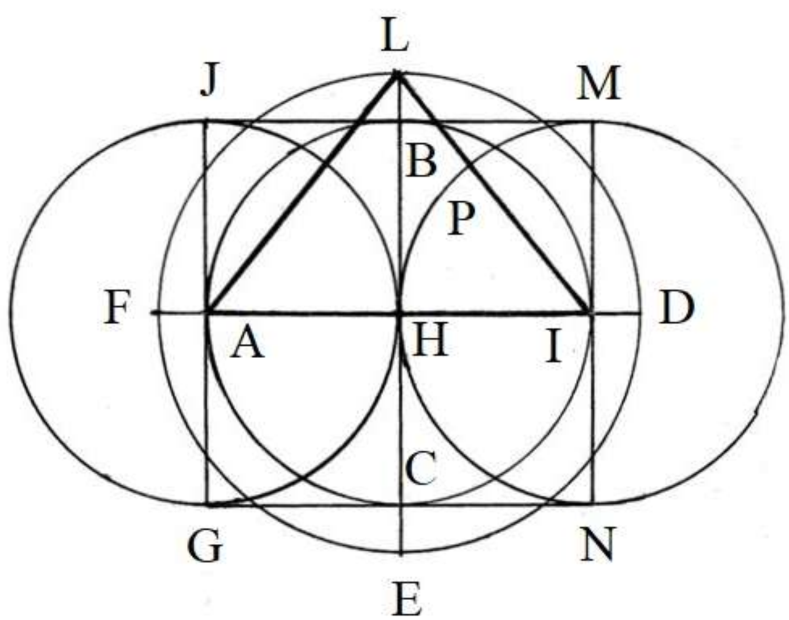
Il triangolo rettangolo AHL è simmetrico a quello HLI rispetto al comune cateto LH.
Tracciare i due assi perpendicolari passanti per il punto H sui quali giacciono i segmenti AI e LH.



Il quadrato GJMN ha lato lungo JM = AI e cioè il doppio delle lunghezze dei cateti HI e HA.
Fare centro nel punto H e disegnare due circonferenze di raggio HB e HL.
La circonferenza interna è *inscritta* nel quadrato GJMN.

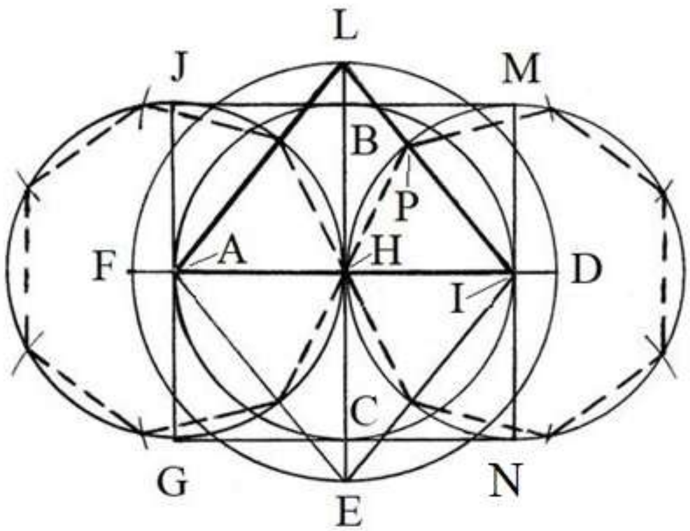
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Fare centro nei punti A e I con raggio AH = IH = HA e tracciare due circonferenze fra loro tangenti nel punto H:



La circonferenza di centro in I interseca il segmento LI in un punto, P: la corda HP è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono inscritto.

La figura che segue mostra la costruzione di due ettagoni, fra loro simmetrici rispetto all'asse LE, con i lati tratteggiati:

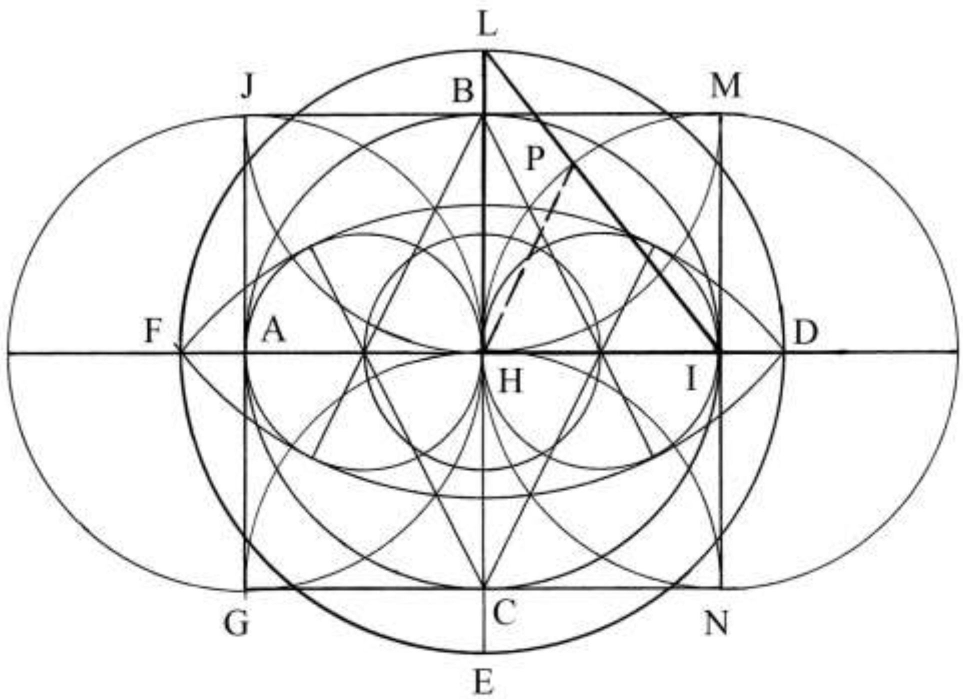


Anche HLA è un triangolo rettangolo diofanteo.

- APPROFONDIMENTO -

<u>La costruzione del triangolo diofanteo</u>

La costruzione del triangolo diofanteo LHI è piuttosto lunga. Con l'aiuto delle due importanti pubblicazioni della geometra americana Rachel Fletcher, citate in bibliografia, qui di seguito ne è riprodotta l'evoluzione.



Tracciare una retta orizzontale e fissarvi due punti, H e I: HI è il raggio del cerchio in cui deve essere inscritto l'ettagono.

Per il punto H elevare la perpendicolare alla retta orizzontale.

Fare centro in H e con raggio HI disegnare una circonferenza che fissa i punti A, B e C.

Sempre con apertura HI fare centro in A, B, C e I e tracciare circonferenze e archi di circonferenza che si incrociano nei punti G, J, M e N: GJMN è un quadrato circoscritto al cerchio di centro H e raggio HI.

Stabilire i punti medi dei raggi HA e HI: sono 1 e 2. Con raggio H-1 fare centro in 1, H e 2 per tracciare *tre* circonferenze.

Dai punti B e C condurre quattro linee passanti per 1 e per 2: esse incontrano le circonferenze di centro 1 e 2 nei nuovi punti 3, 4, 5 e 6.

Fare centro in B e in C e con raggio B-4 disegnare due archi che passano per 3, 4, 5 e 6 e che si incontrano sulla retta orizzontale nei nuovi punti D e F.

Infine, fare centro in H e con raggio HD=HF tracciare una circonferenza che taglia l'asse verticale nei punti E e L.

Collegare L con I: HLI è il triangolo rettangolo, diofanteo, cercato. L'ipotenusa LI taglia in P la circonferenza di centro I e raggio IH: HP è il primo lato dell'ettagono regolare approssimato inscritto nel cerchio.

- -

LE COSTRUZIONI DI ABU'L – WAFA AL' BUZJANI

Abu'l-Wafa nacque nel Khorasan (attuale Iran) nel 940 e all'età di 19 anni si trasferì alla corte dei Califfi a Baghdad, città nella quale morì nel 998.

È stato uno dei maggiori matematici della storia. A lui si devono fondamentali contributi alla *trigonometria*.

Scrisse numerose opere e fra quelle di natura più pratica sono le seguenti:

- Un trattato di aritmetica applicata destinato a amministratori e uomini d'affari (un precursore dei numerosi *trattati di abaco* compilati in Italia, a partire dal basso Medioevo, per mercanti, banchieri e artigiani);
- Un trattato di geometria ad uso degli artigiani ("*Su quelle parti di geometria necessarie agli artigiani*").

In questa seconda opera Abu'l – Wafa spiegò le costruzioni geometriche piane: poligoni regolari, inscrizione e circoscrizione di poligoni dentro o su circonferenze, divisione di figure in parti uguali e unione di poligoni in altri poligoni più grandi.

Le costruzioni di Abu'l – Wafa richiedevano solo l'uso della riga *non graduata* e del compasso ad apertura *fissa*, con poche eccezioni.

Il trattato non sembra essere stato scritto direttamente da Abu'l – Wafa, ma probabilmente da un suo allievo. Da un primitivo testo in arabo (la lingua scientifica del mondo arabo e islamico) deriverebbe la traduzione in persiano.

Il testo è diviso in alcuni capitoli:

- un'*Introduzione* dedicata all'uso della riga, del compasso e della squadra.
- I capitolo: problemi geometrici, trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo e costruzione di uno specchio parabolico.
- II capitolo: costruzione dei poligoni regolari, incluse quelle realizzate con una sola apertura di compasso.
- III capitolo: costruzione di poligoni regolari inscritti in una circonferenza.
- IV capitolo: costruzione della circonferenza circoscritta ai poligoni regolari.
- V capitolo: costruzione della circonferenza inscritta nei poligoni.
- VI capitolo: poligoni inscritti in altri poligoni.
- VII capitolo: divisione dei triangoli.
- VIII capitolo: divisione dei quadrilateri.
- IX capitolo: divisione di cerchi.
- X capitolo: sul modo di stabilire dei percorsi.
- XI capitolo: sulla divisione dei quadrati in un certo numero di quadrati e sulla composizione di un quadrato a partire da un certo numero di quadrati, con operazioni di *copia e incolla*.
- XII capitolo: sulla divisione delle sfere e sulle differenti specie di figure che possono essere disegnate sulla sfera.

Non tutti i capitoli sono giunti a noi integri.

Non sono pervenuti due capitoli:

- Sulla divisione delle figure scalene.
- Sulle tangenti alle circonferenze.

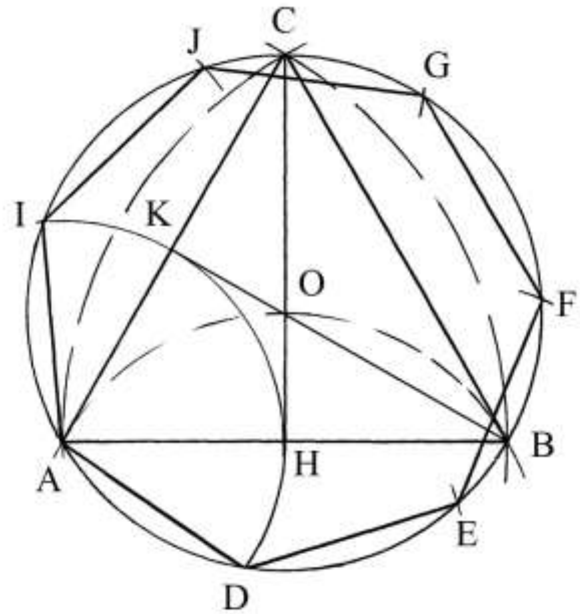
Il testo conservato contiene 171 problemi geometrici, 150 dei quali sono di geometria piana.

Ettagono approssimato dato il lato

La costruzione proposta da Abu'l – Wafa è una variante di quella, anch'essa approssimata, che è basata sul triangolo equilatero, risalente a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

AB è il lato e ABC è il triangolo equilatero generatore.

Determinare i punti medi dei lati AB e AC: sono rispettivamente H e K. I segmenti AH = HB sono lunghi quanto il lato dell'ettagono approssimato da costruire.



Tracciare le altezze CH e BK: esse si intersecano nel punto O, centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC (e al costruendo ettagono).

Disegnare la circonferenza di centro O e raggio OA = OB = OC e riportarvi la lunghezza del segmento AH.

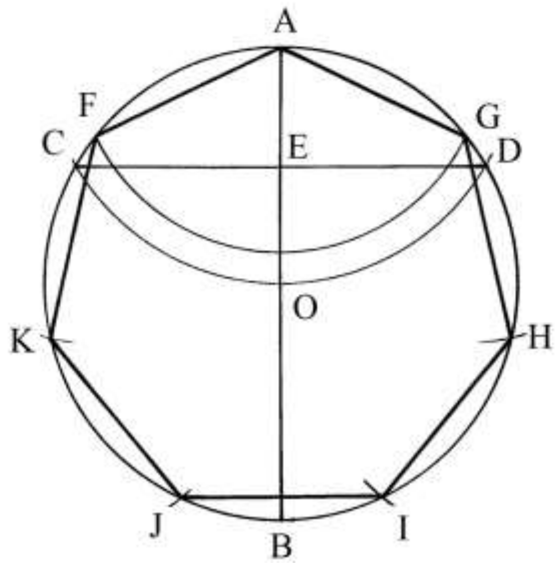
Il poligono ADEFGJI è l'ettagono approssimato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della precedente costruzione è attribuita sempre da Sutter a Abu'l – Wafa.

Disegnare una circonferenza di centro O e il diametro verticale AB.

Con raggio AO fare centro in A e tracciare un arco passante per O e che taglia la circonferenza nei punti C e D. Disegnare la corda CD che incontra in E il diametro AB.



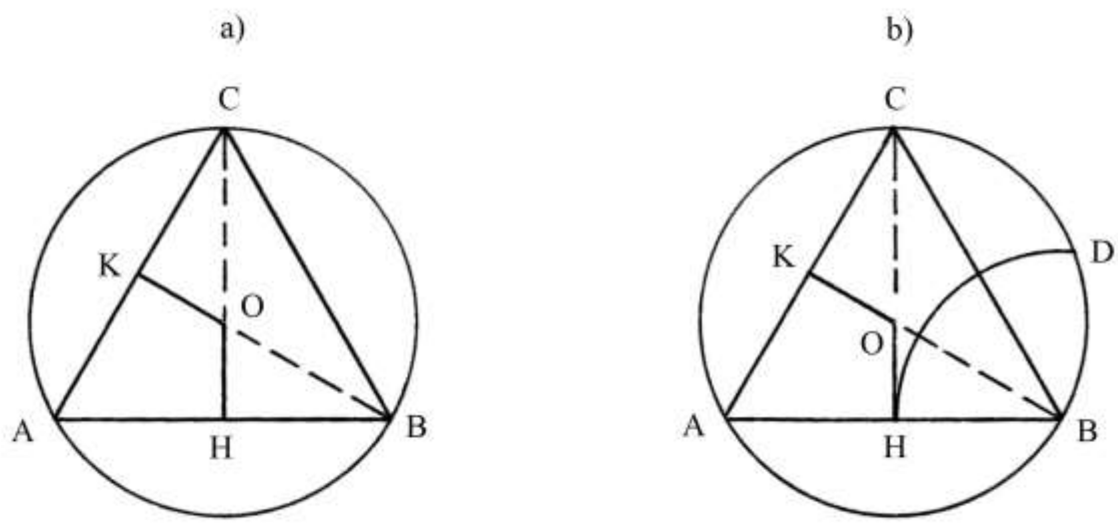
Con raggio CE fare centro in A e tracciare un arco che taglia la circonferenza in F e in G: le corde AF e AG sono i primi due lati dell'ettagono inscritto, che hanno lunghezza uguale a quella di CE e di ED.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AF.

AGHIJKF è l'ettagono inscritto nel cerchio di centro O.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un metodo simile è descritto nelle figure che seguono. Disegnare una circonferenza con centro nel punto O e inscrivervi il triangolo equilatero ABC (*figura a*):



Fissare i punti medi dei lati AB e AC: sono, rispettivamente, H e K.

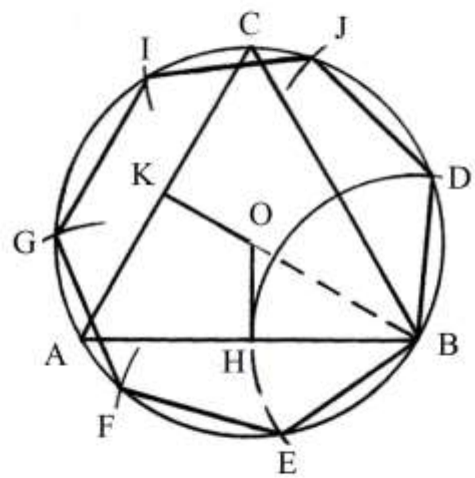
Tracciare gli apotemi OH e OK.

Fare centro nel punto B (*figura b*) e, con raggio BH, disegnare un arco da H fino a incontrare la circonferenza in un punto, D.

La corda BD è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono inscritto.

Riportando con il compasso la lunghezza di BD sulla circonferenza si ottengono i vertici E, F, G, I e J (*figura c*):

c)

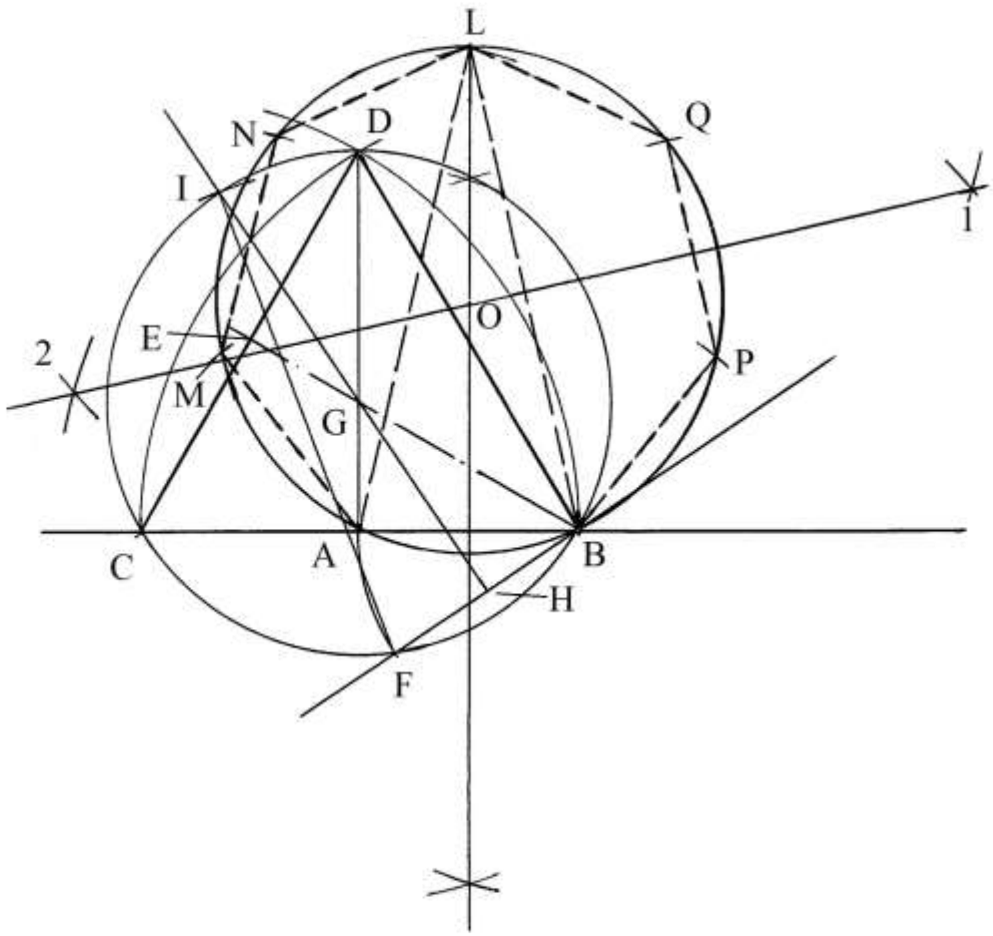


Il poligono DBEFGIJ è l'ettagono *approssimato* inscritto.

Costruzione approssimata dell'ettagono secondo Abu'l Wafa

AB è il lato dell'ettagono. Prolungare verso sinistra fino a fissare il segmento AC = AB.

Costruire il triangolo equilatero con lato CB: D è il suo terzo vertice. Disegnare l'altezza DA:



Con centro in A e in B costruire l’asse del segmento AB.
Determinare il punto medio del lato CD: è E. Tracciare l’altezza BE: essa interseca l’altezza AD nel punto G, baricentro (e circocentro e incentro) del triangolo equilatero CDB.

Con centro in G e raggio GB (= GD = GC) disegnare una circonferenza circoscritta al triangolo equilatero.

Fare centro in B e con raggio BA disegnare un arco da A fino a tagliare in F l’ultima circonferenza.

Tracciare una retta passante per F e per B. Costruire l’asse del segmento FB: esso lo taglia in H e interseca la circonferenza nel punto I.

Disegnare il segmento *tratteggiato* FI.

Con raggio FI fare centro in A e in B e tracciare due archi che si tagliano nel punto L, altro vertice dell’ettagono.

Disegnare i segmenti AL e LB.

Costruire l’asse del segmento LB, passante per i punti 1 e 2. Esso taglia l’asse del segmento AB in un punto, O, centro della circonferenza circoscritta al poligono da costruire.

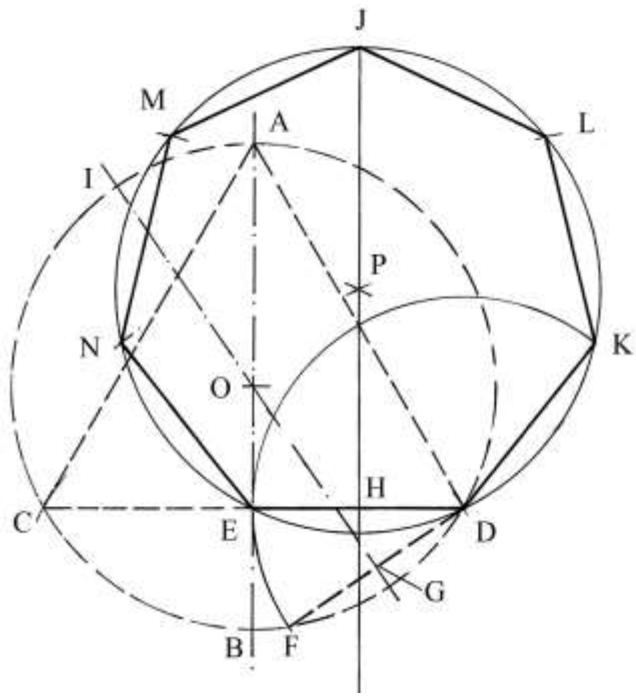
Con centro in O e raggio OA disegnare una circonferenza.

A partire da A e da B riportare la lunghezza di AB.

Il poligono ABPQLNM è l’ettagono cercato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della precedente costruzione è mostrata nello schema che segue:



Tracciare il diametro verticale AB e la circonferenza di centro O e raggio OA=OB.

Con la stessa apertura fare centro in B e disegnare due archi che fissano i punti C e D.

ACD è un triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro O.

Il punto E è il medio di CD. Fare centro in D e tracciare un arco con raggio DE: è stabilito il punto F: la corda DF, come il segmento DE, è lunga quanto il lato dell'ettagono inscritto da costruire.

Fissare i punti medi di FD e ED: sono G e H. Per G e per H disegnare gli assi dei segmenti FD e ED.

L'asse passante per G e per O incontra la circonferenza in un punto, I.

Con il compasso misurare la lunghezza di GI e riportarla a partire da H sull'asse di ED: GI=HJ.

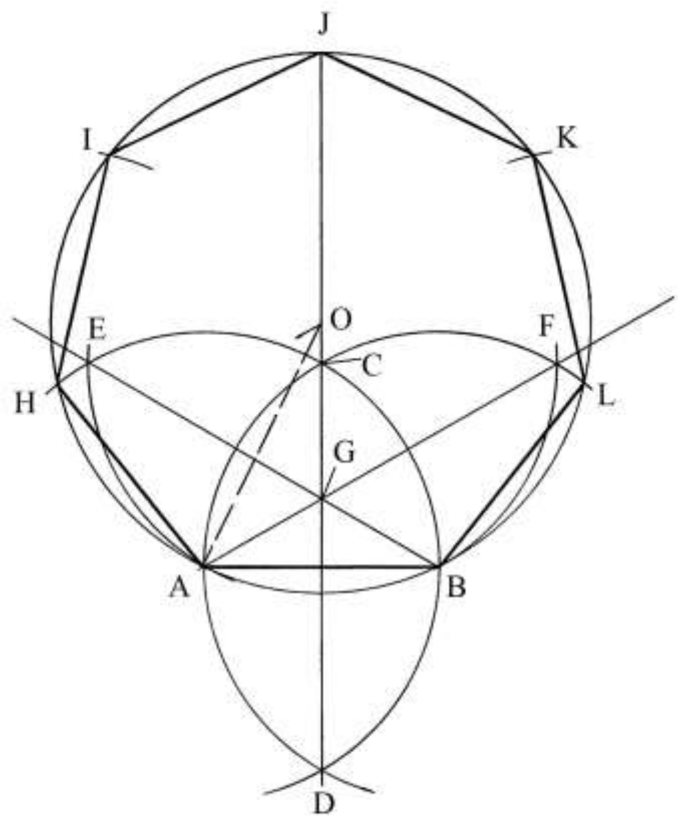
Con raggio OA fare centro in E e in D e tracciare due archi che si tagliano in un punto, P, posto su HJ.

Sempre con lo stesso raggio OA, fare centro in P e disegnare una seconda circonferenza: su di essa riportare la lunghezza di ED.

EDKLJMN è l'ettagono approssimato inscritto nel cerchio di centro P.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Sutton assegna a Abu'l – Wafa anche la costruzione che segue: anche questa muove dalla conoscenza della lunghezza del primo lato dell'ettagono, AB:



Fare centro in A e in B e tracciare due archi che si intersecano nei punti C e D: per questi passa l'asse del segmento AB.

Con apertura AB fare centro nei punti C e D e disegnare due archi che incrociano i primi archi nei punti E e F.

Collegare le coppie di punti A-F e B-E: i due segmenti si intersecano sull'asse passante per C e per D nel punto G.

Con raggio GE = GF fare centro in A e in B e tracciare due archi che si tagliano nel punto O.

Con raggio OA = OB disegnare una circonferenza sulla quale riportare la lunghezza di AB.

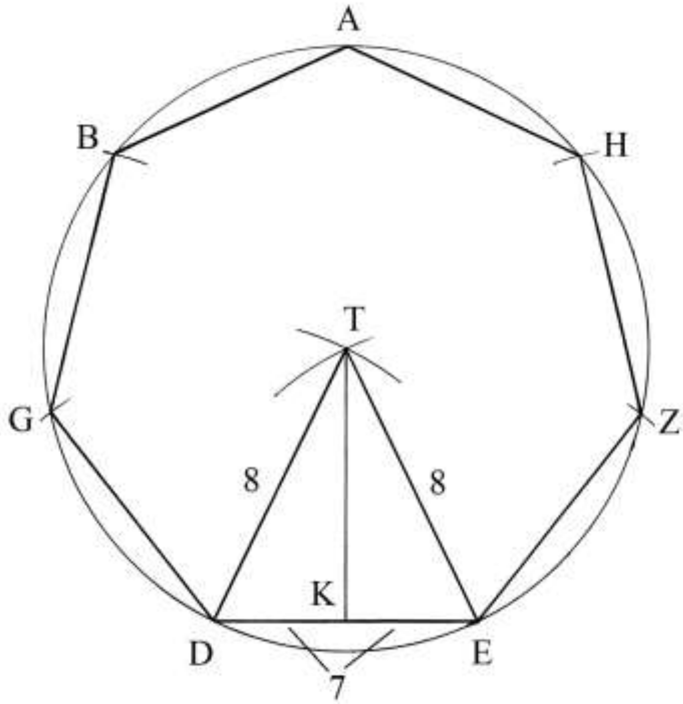
AHIJKLB è l'ettagono regolare inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Alpay Özdural ha attribuito a Abu'l – Wafa anche la costruzione che segue.

Essa muove dal triangolo isoscele DTE che ha la base DE lunga 7 unità e che è il primo lato dell'ettagono.

I lati obliqui, TD e TE, sono lunghi 8 unità e rappresentano due raggi del cerchio in cui deve essere inscritto il poligono.



Disegnare la circonferenza di centro T e raggio TD=TE e riportarvi la lunghezza di DE. DGBBAHZE è l'ettagono approssimato inscritto.

Ettagono inscritto con l'ausilio di una griglia

La lunghezza del lato dell'ettagono inscritto *approssimato* può essere determinata con la seguente relazione:

lato = (5*√2 – 1)/7 * raggio.

La costante vale:

(5*√2 – 1)/7 ≈ 0,867295, valore non troppo distante dalla costante 0,8(66) usata da Erone.

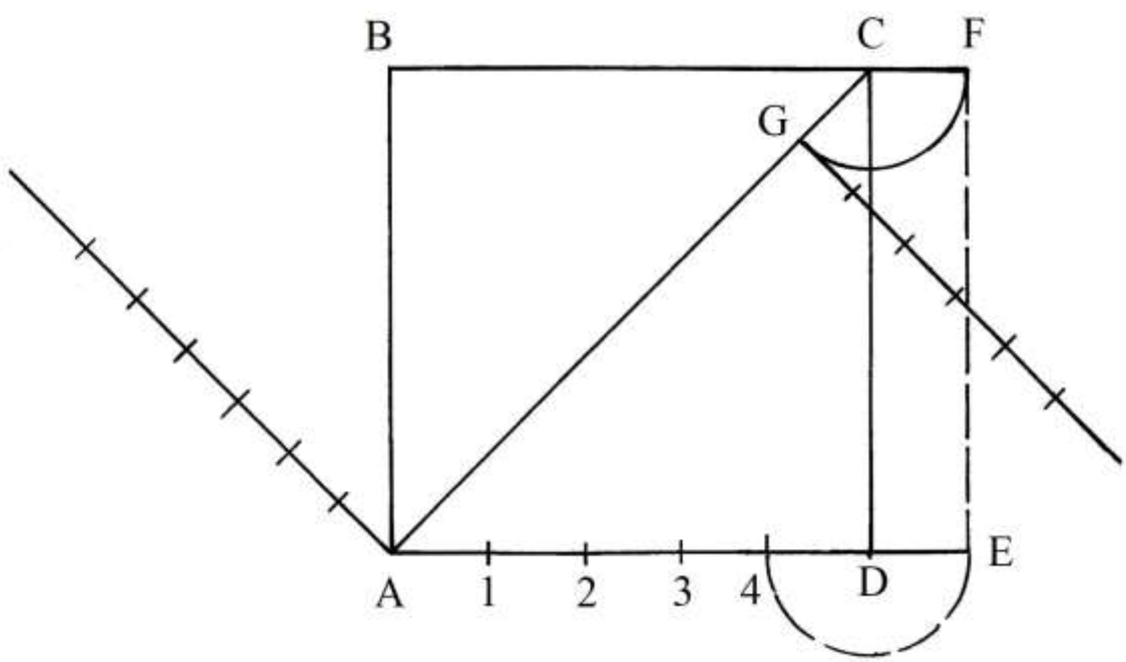
Occorre costruire per via geometrica la lunghezza del risultato fornito dalla precedente espressione.

Disegnare il quadrato ABCD e dividere il lato AD in *cinque* parti uguali.

Prolungare verso destra i lati AD e BC.

Tracciare la diagonale AC.

Fare centro nel punto D e con raggio D-4 disegnare una semicirconferenza dal punto 4 al nuovo punto E.



Dal punto E condurre una parallela a DC fino a determinare il punto F.

Fare centro nel punto C e, con raggio CF (= DE = D4) tracciare un arco da F fino a incontrare la diagonale AC in un punto, G.

La diagonale AC è lunga:

AC = AD * √2.

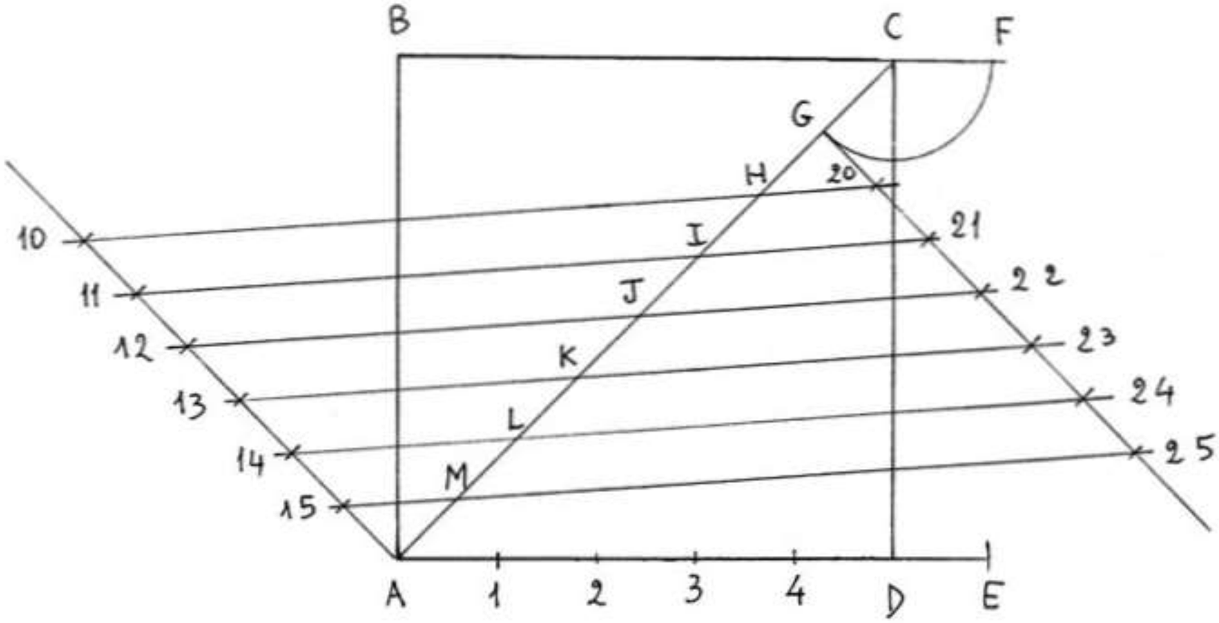
Il segmento GC è lungo:

GC = CF = DE = D-4 = 1/5 * AD.

Quindi, il segmento AG è lungo:

$$AG = AC - GC = AD * \sqrt{2} - 1/5 * AD = AD * (\sqrt{2} - 1/5) = AD * (5*\sqrt{2} - 1)/5 \approx$$
$$\approx AD/5 * 6{,}071 \approx AD * 1{,}2142.$$

Il segmento AG deve essere diviso in *sette* parti uguali.
Disegnare due linee perpendicolari al segmento AG in due direzioni opposte.



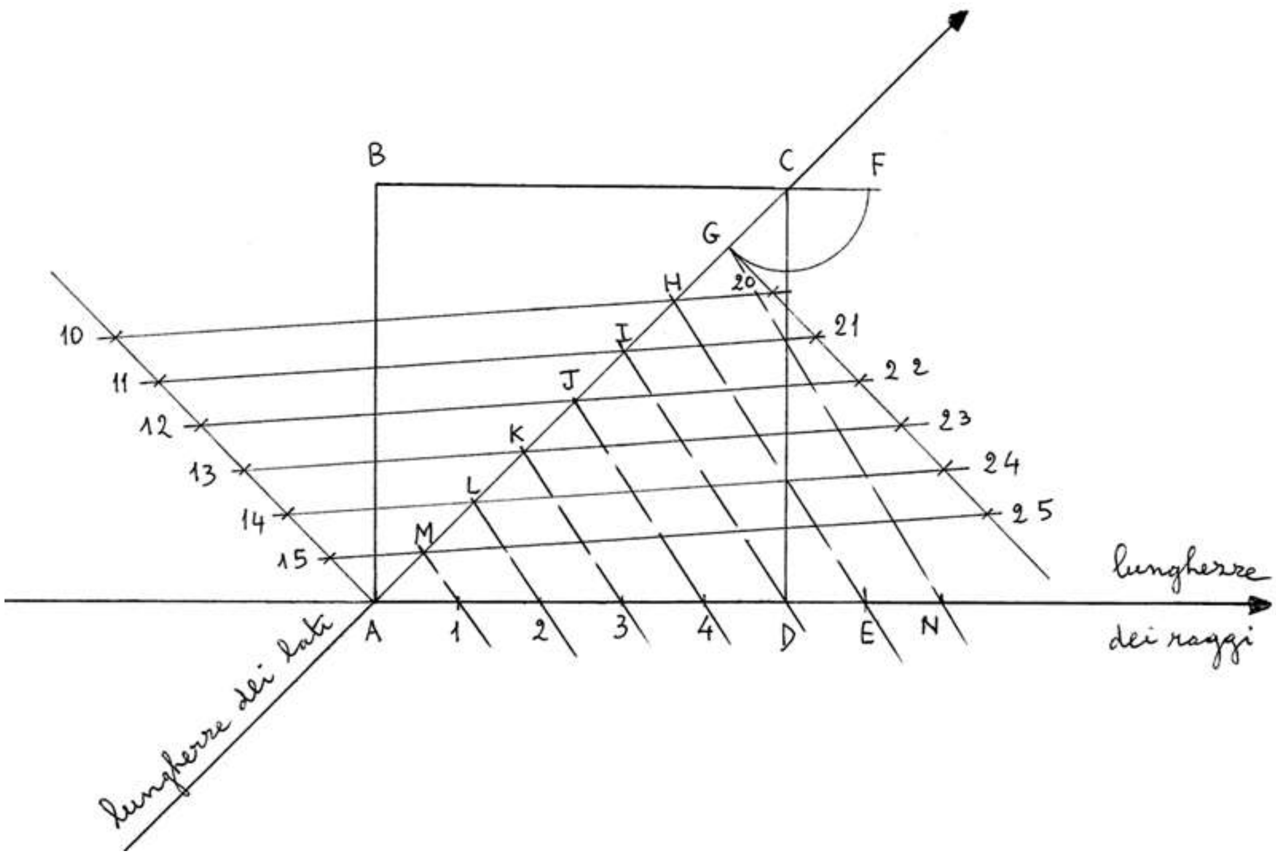
A partire dai punti A e G fissare *sei* lunghezze uguali lungo le due perpendicolari e stabilire i punti (10, 11, 12, 13, 14 e 15) e (20, 21, 22, 23, 24 e 25).

Tracciare le rette fra loro parallele passanti per le coppie di punti 10-20, 11-21, 12-22, 13-23, 14-24 e 15-25: esse tagliano AG in *sette* parti uguali e vi stabiliscono i punti H, I, J, K, L e M.

Prolungare AG e AE nelle due direzioni.

Collegare con delle rette parallele le coppie di punti M e 1, L e 2, K e 3, J e 4, I e D, H e E e G e N.

Sul diagramma così ottenuto sono disponibili le *lunghezze collegate* del lato dell’ettagono (sulla retta AC) e del raggio della circonferenza circoscritta (sulla retta AN).



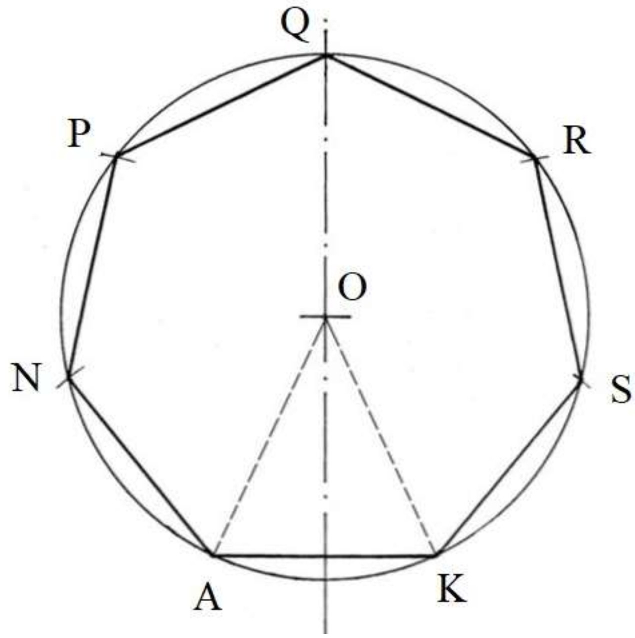
Così, ad esempio, AK è il lato dell'ettagono e A-3 è il raggio del cerchio circoscritto al poligono. Fra queste due grandezze vale la relazione:

AK = A-3 * (5*√2 – 1)/7 ≈ (A-3) * 0,867. Il valore di questa ultima costante si avvicina a quello della costante di Erone: 13/15 = 0,8(66).

La tabella che segue mostra le relazioni esistenti fra le lunghezze dei segmenti:

Lunghezze dei lati dell'ettagono	Lunghezze dei raggi dei corrispondenti cerchi circoscritti
AM	A-1
AL	A-2
AK	A-3
AJ	A-4
AI	AP
AH	AE
AG	AN

La figura che segue è un ettagono *approssimato* inscritto con le dimensioni date dalle due precedenti lunghezze AK e A-3, opportunamente ingrandite nella stessa scala:

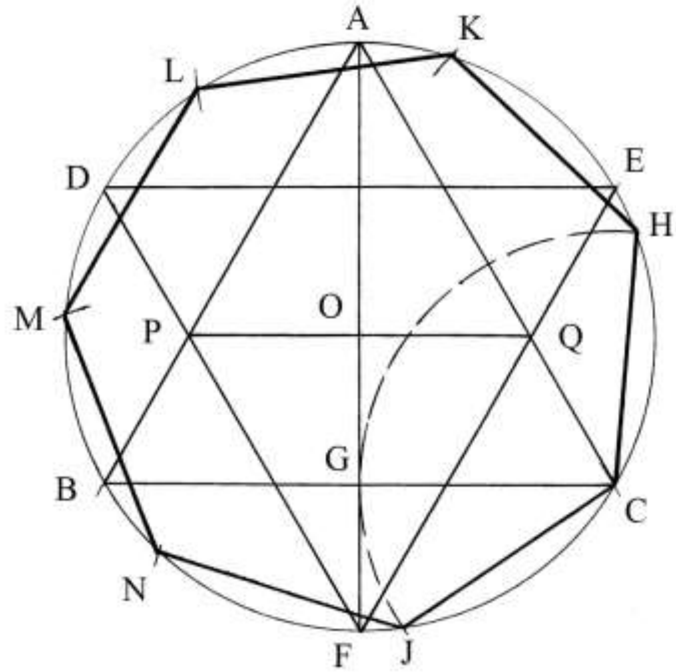


<u>Le costruzioni approssimate dell'ettagono inscritto secondo Dudley</u>

Colin Joseph Dudley è uno storico inglese che ha studiato l'architettura di alcune cattedrali medievali inglesi.

Ha suggerito due distinte costruzioni *approssimate* dell'ettagono inscritto: dato che i costruttori medievali credevano nel simbolismo geometrico dei numeri 3, 4 e 5, Dudley ritiene che almeno la prima fra quelle che seguono, basata sul triangolo equilatero, fosse impiegata da quei costruttori per tracciare l'ettagono.

Disegnare la circonferenza con centro in O e tracciare il diametro verticale AF:



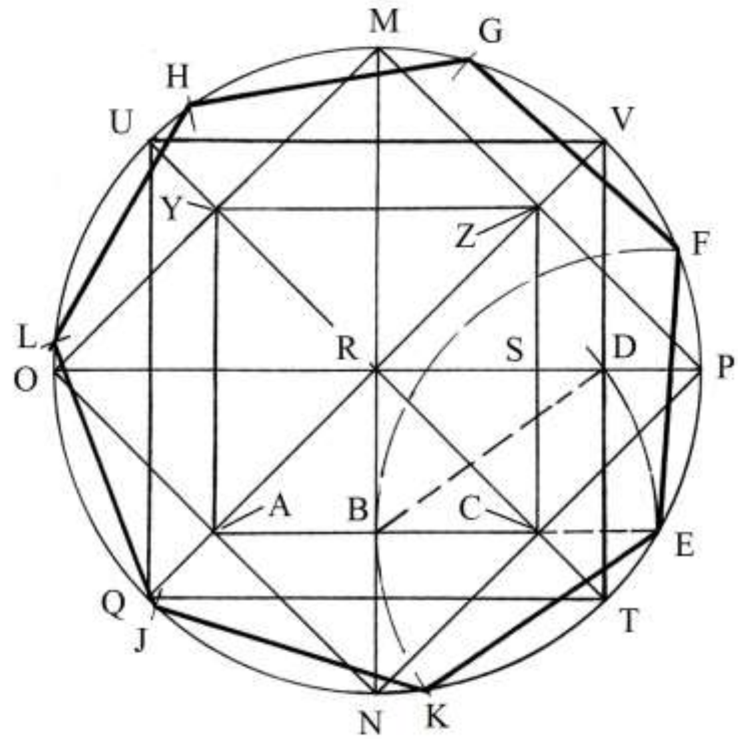
Facendo con centro in A e in F, con raggio OA, disegnare due archi che tagliano la circonferenza nei punti B, C, D e E. Disegnare i triangoli equilateri ABC e FDE.

I lati obliqui dei due triangoli si intersecano nei punti P e Q. Il segmento CG è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono: è evidente la derivazione di questo metodo da quello di Erone.

Il poligono cercato è CHKLMNJ.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda costruzione è basata sul *quadrato*. Disegnare la circonferenza con centro in R e tracciare i due diametri, orizzontale OP e verticale MN:



Disegnare il quadrato OMPN.

Costruire le bisettrici dei quattro angoli retti in R e disegnare i due diametri inclinati di 45° rispetto a OP: sono i segmenti UT e QV.

Tracciare il quadrato UVTQ.

I due diametri inclinati determinano i punti Y, Z, C e A: disegnare il quadrato YZCA.

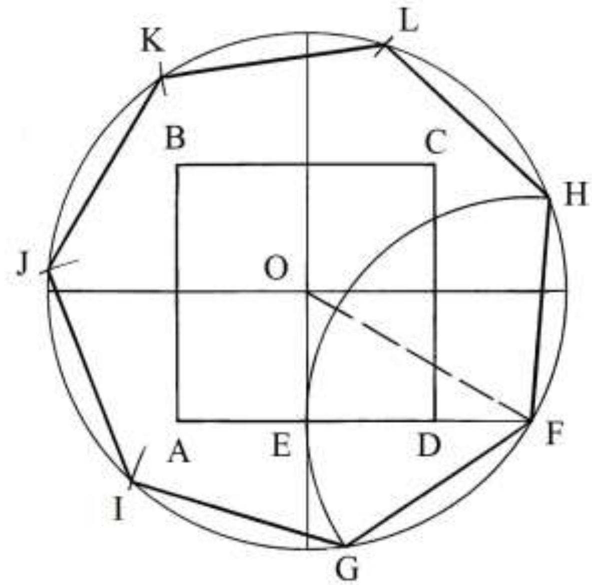
Tracciare il segmento BD; con centro in B e raggio BD disegnare l'arco da D fino a tagliare la circonferenza nel punto E: prolungare il segmento AC fino al punto E.

L'intersezione nel punto E fra il prolungamento di AC e l'arco DE serve a verificare la precisione della costruzione.

Il segmento BE è la lunghezza del lato dell'ettagono. Con centro in E e raggio EB disegnare un arco che taglia la circonferenza nei punti F e K. Riportare sulla circonferenza la lunghezza di BE: il poligono EFGHLJK è l'ettagono *approssimato* (ma abbastanza preciso).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della seconda costruzione è descritta nella figura che segue. Essa impiega un quadrato quale struttura iniziale.



ABCD è il quadrato e O è il suo centro, oltreché della circonferenza nella quale deve essere inscritto l'ettagono.

Tracciare le due mediane del quadrato che si intersecano nel punto O. Prolungare verso destra il lato AD e fissare il suo punto medio, E.

Con apertura AD, fare centro nel punto O e disegnare una circonferenza che taglia il prolungamento di AD in un punto: è F.

Il cerchio appena ottenuto è quello che risulterà *circoscritto* all'ettagono.

Fare centro in F e, con apertura FE, tracciare un arco che taglia la circonferenza in due punti, G e H.

I segmenti GF e FH sono i primi due lati dell'ettagono inscritto. Riportare la loro lunghezza sulla circonferenza.

GIJKLHF è l'ettagono regolare inscritto, *approssimato*.

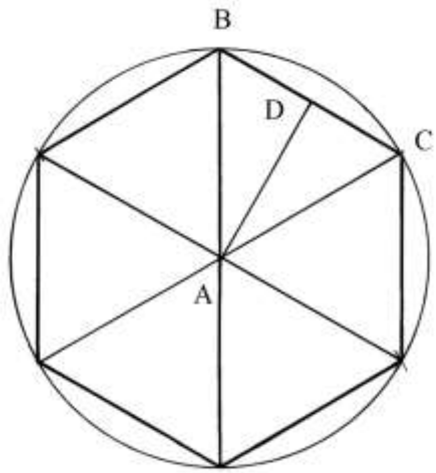
Le costruzioni di Luca Pacioli

Luca Pacioli (Borgo Sansepolcro circa 1445 – Roma 1517) è stato un frate francescano autore di alcuni testi matematici e ragionieristici.

Nel "*De viribus Quantitatis*" presenta due costruzioni dell'ettagono approssimato inscritto, che possono essere ritenute alla stregua di varianti del metodo di Erone.

Entrambe le costruzioni non sono completate con la tracciatura dell'ettagono: la prima usa l'esagono regolare e la seconda il triangolo equilatero inscritti.

La prima è mostrata nella figura che segue:



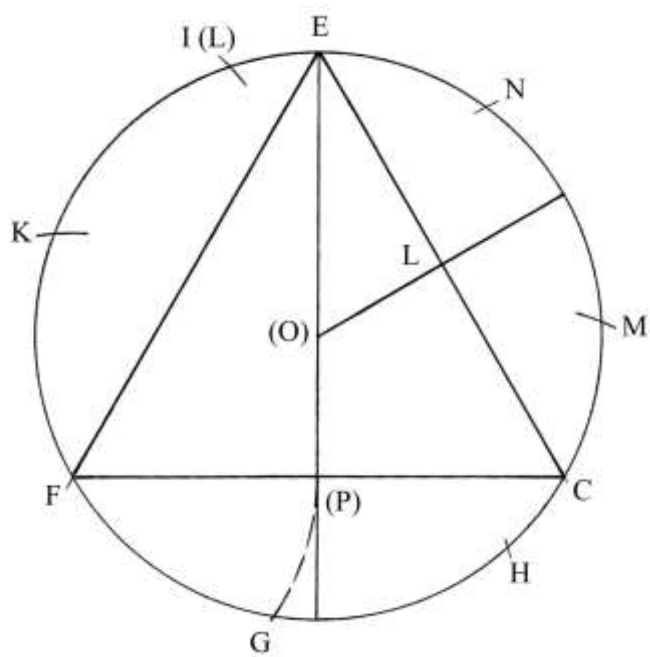
Nel cerchio di centro A è inscritto l’esagono che è ripartito in sei triangoli equilateri con un vertice comune nel centro A.

Pacioli considera il triangolo ABC e vi traccia l’altezza relativa al lato BC: è AD.

Il segmento AD è la lunghezza approssimata del lato dell’ettagono da inscrivere nello stesso cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda costruzione utilizza il triangolo equilatero inscritto EFC, inscritto in un cerchio di centro (O):



Dal punto (O) è disegnato un raggio perpendicolare al lato EC che taglia nel suo punto medio L: EL=LC è la lunghezza approssimata del lato dell'ettagono inscritto, FGHMNIK, che non è disegnato.

Sembra che i vertici dell'ettagono siano stati fissati da Pacioli sulla circonferenza in senso antiorario a partire da F riportando la lunghezza EL, oppure quella identica di F(P).

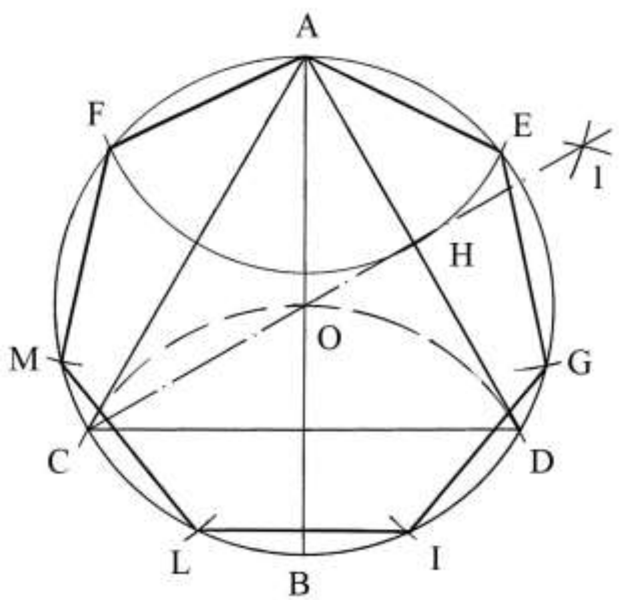
Il vertice I è nel disegno originale di Pacioli indicato erroneamente con la lettera "L", già impiegata per indicare il punto medio di EC.

I punti (O) e (P) sono scritti fra parentesi perché assenti nell'originale di Pacioli.

Ettagono inscritto – metodo di Dürer

Nel suo trattato geometrico del 1525 Albrecht Dürer espose alcune costruzioni di poligoni: fra di esse vi è quella dell'ettagono *approssimato*.

Disegnare una circonferenza con centro in O e tracciare il diametro verticale AB:



Con apertura di compasso uguale a OB, fare centro in B e disegnare un arco che taglia la circonferenza nei punti C e D.

Tracciare il triangolo equilatero ACD.

Condurre il diametro passante per C e O: esso coincide con la bisettrice dell'angolo ACD (e coincide pure con una mediana e con un'altezza del triangolo equilatero ACD). Il lato AD è tagliato nel suo punto medio H.

Il segmento AH (= HD) è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono inscritto.

Il poligono AEGILMF è l'ettagono approssimato.

Anche questa costruzione è una variante del primo metodo esposto in precedenza.

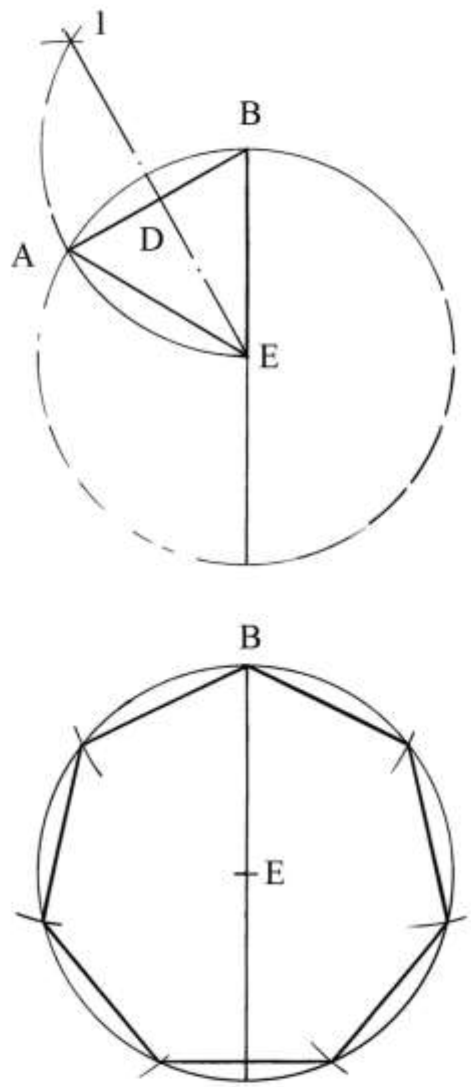
In sintesi, Dürer stabilì che la lunghezza *approssimata* dell'ettagono inscritto fosse uguale alla lunghezza della metà del lato di un triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio. Il metodo di Dürer coincide con quello di Erone.

La sua costruzione è una rielaborazione di un metodo descritto da Matthäus Roriczer nella sua "*Geometria deutsch*": Roriczer (circa 1435-1495) è stato un architetto e costruttore tedesco.

Roriczer approntò una costruzione *approssimata* dell'ettagono inscritto, a partire da quella dell'esagono regolare inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue mostra, in alto, l'inizio della costruzione di un esagono inscritto in un cerchio con centro in E e raggio EB (le lettere che indicano i punti sono quelle originali di Roriczer che le scrisse *minuscole* e non *maiuscole*, come usa oggi):

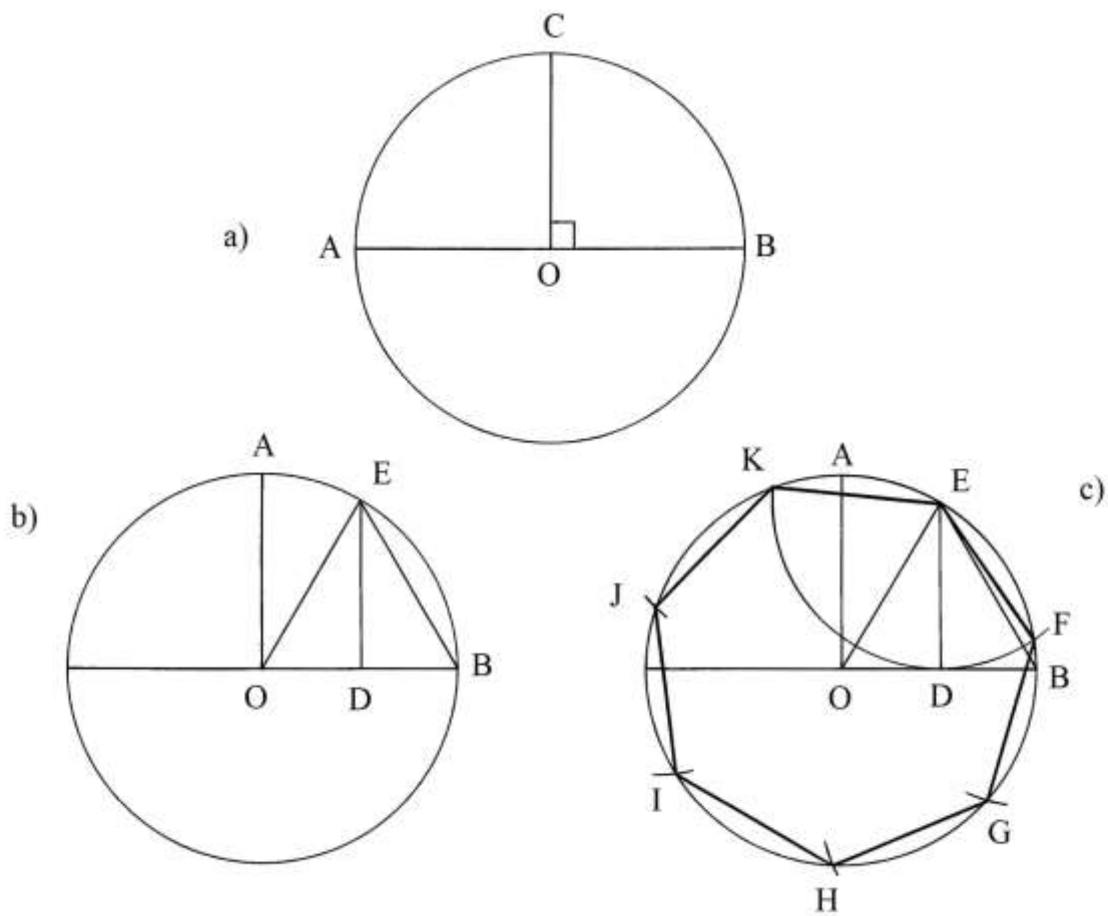


Il punto A è ricavato facendo centro in B con raggio BE. Il punto D è medio del lato AB e ED è l'altezza del triangolo equilatero AEB, rispetto al lato AB.

Nella seconda figura, Roriczer disegnò una seconda circonferenza, con centro in E, e raggio uguale a quello della prima circonferenza. Per i punti B e E passa il diametro verticale.
Con il compasso, Roriczer misurò la lunghezza del segmento DE nella costruzione in alto e la riportò sulla seconda circonferenza a partire dal punto B: ottenne così la costruzione approssimata dell'ettagono inscritto.
L'innovazione introdotta da Dürer fu una semplificazione: egli riunì in un'unica costruzione le due fasi del metodo di Roriczer.
Questa costruzione era già stata spiegata da Abu'l – Wafa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del metodo di Dürer è descritta nelle figure che seguono.



Disegnare una circonferenza con centro O, il diametro orizzontale AB e il raggio ad esso perpendicolare, OC (*figura a*).

Determinare il punto medio del raggio OB: è D. Tracciare un segmento parallelo a OC, da D fino a incontrare la circonferenza in un nuovo punto: è E (*figura b*).

Il segmento DE è un'altezza del triangolo equilatero OEB: la sua lunghezza è, con *approssimazione* accettabile, uguale a quella del lato dell'ettagono inscritto.

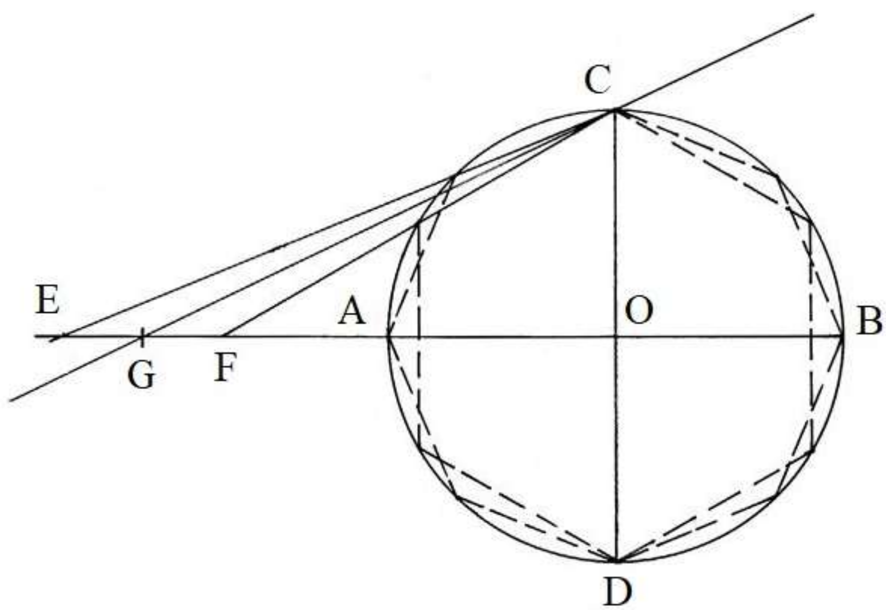
Con il compasso misurare la lunghezza di DE e riportarla sulla circonferenza a partire dal punto E.

EFGHILM è l'ettagono approssimato inscritto (*figura c*).

Ettagono inscritto approssimato – metodo di Viète - Scaligero

Il già citato François Viète (1540 – 1603) descrisse e criticò un metodo semplificato per la costruzione di un ettagono *approssimato* inscritto in un cerchio messo a punto dallo scrittore francese, di origine italiana, Giuseppe Giusto Scaligero (1540 – 1609): la critica di Viète era dovuta al fatto che Scaligero la riteneva *esatta*, mente era solo una buona approssimazione.

Tracciare i diametri fra loro perpendicolari AB e CD:



Prolungare AB verso sinistra.

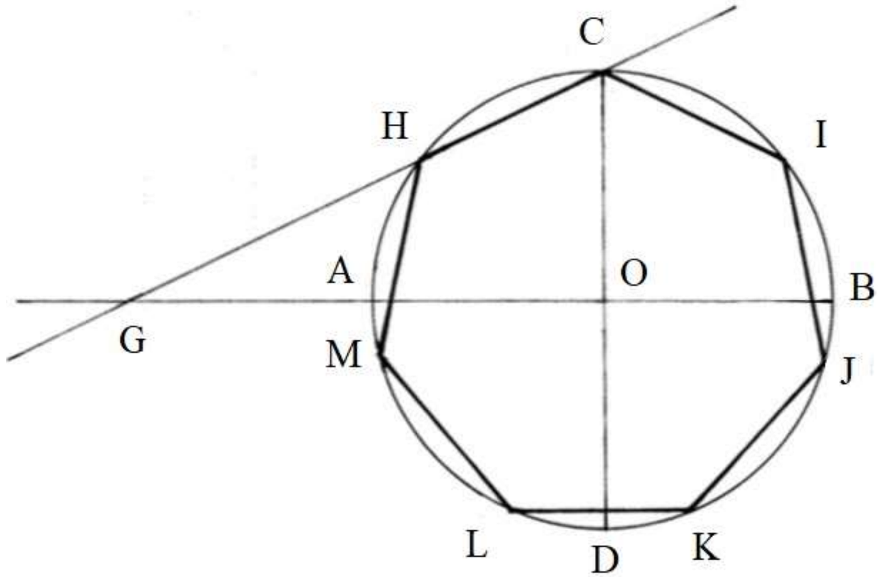
Disegnare l'*esagono* e l'*ottagono* regolare inscritti: i lati dei due poligoni sono tratteggiati.

Dal vertice A condurre due semirette che prolungano due lati: uno dell'ottagono e uno dell'esagono. Le semirette tagliano rispettivamente il prolungamento di AB in due punti: E (ottagono) e F (esagono).

Dato che l'*ettagono* ha un numero di lati intermedio fra quelli dell'esagono e quelli dell'ottagono Scaligero stabilì che la lunghezza del lato dell'ettagono fosse intermedia fra quelle dei lati degli altri due poligoni:

numero lati ettagono = (numero lati esagono + numero lati ottagono)/2 = (6 + 8)/2 =
= 14/2 = 7.

Fissare il punto medio del tratto EF: è G.



Tracciare una retta passante per i punti C e G: essa taglia la circonferenza in un punto, H.

La corda CH è il primo lato dell'ettagono approssimato HCIJKLM.

La costruzione può essere applicata soltanto ai casi nei quali i due poligoni *inquadranti* (esagono e ottagono nell'esempio appena presentato) sono costruibili con riga e compasso.

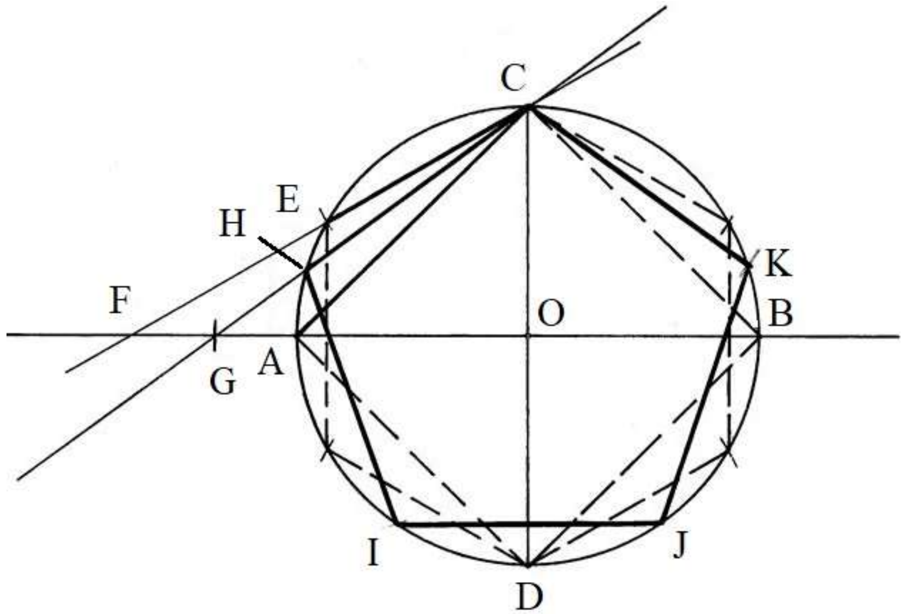
Invece, essa non può essere usata nel caso di due o più poligoni non costruibili e consecutivi: è il caso delle coppie 13-14 e 18-19 e della terna 21-22-23.

- APPROFONDIMENTO -

Pentagono approssimato con il metodo di Scaligero

Non è dato sapere se Scaligero e Viète abbiano applicato il metodo alla costruzione del pentagono approssimato che è di seguito descritto.

In una circonferenza con centro O sono tracciati i due diametri perpendicolari AB e CD.



Nella circonferenza sono inscritti un quadrato e un esagono regolare.

Prolungare il lato CE dell’esagono fino a intersecare la retta orizzontale in un punto, F.

Il quadrato inscritto ha un lato, AC, utile per la costruzione.

Determinare il punto medio di FA: è G.

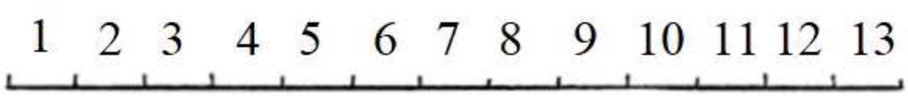
Per il punto G tracciare una retta passante anche per il vertice C: essa taglia la circonferenza in un punto, H.

La corda HC è il primo lato del pentagono *approssimato* CHIJK.

- -

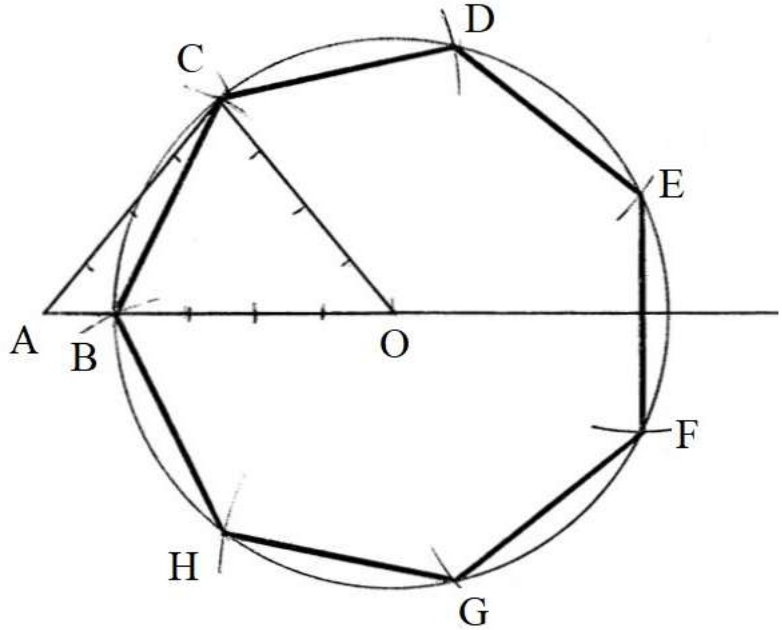
Ettagono con la corda dei Druidi

I Druidi erano i sacerdoti dei Celti. Nel corso del Medioevo era conosciuta e usata una “corda dei Druidi” formata da 13 tratti uguali, invece dei 12 della tradizione *corda egizia* o corda 3-4-5:



Con la corda dei Druidi è possibile costruire un triangolo isoscele con lati lunghi 4, 4 e 5.

Il triangolo isoscele può essere usato per disegnare un ettagono inscritto *approssimato*, come spiega la figura che segue:



Il segmento AO è lungo 5 e i segmenti AC e OC sono lunghi 4.

L'angolo CÔB è ampio 51° 19', ampiezza vicina a quella dell'angolo che è 1/7 dell'angolo giro: 360/7 = 51° 25' 43''.

Moltiplicando l'ampiezza dell'angolo CÔB per 7, si ottiene:

51° 19' x 7 = 359° 13'.

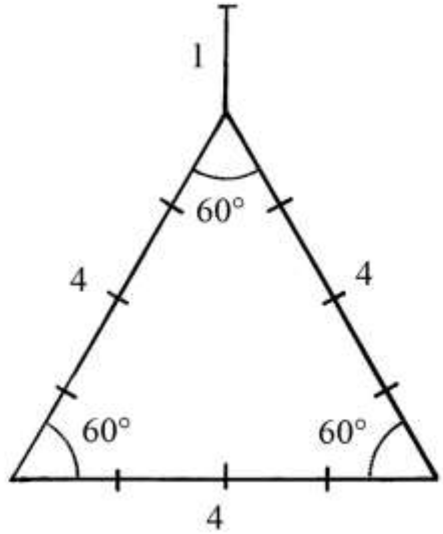
La differenza rispetto all'angolo giro è di soli 47'. La costruzione dell'ettagono *approssimato* è abbastanza precisa e accettabile per gli usi tecnici.

La corda BC è il primo lato dell'ettagono: riportandone la lunghezza lungo la circonferenza si ricava il poligono BCDEFGH, che è l'ettagono approssimato.

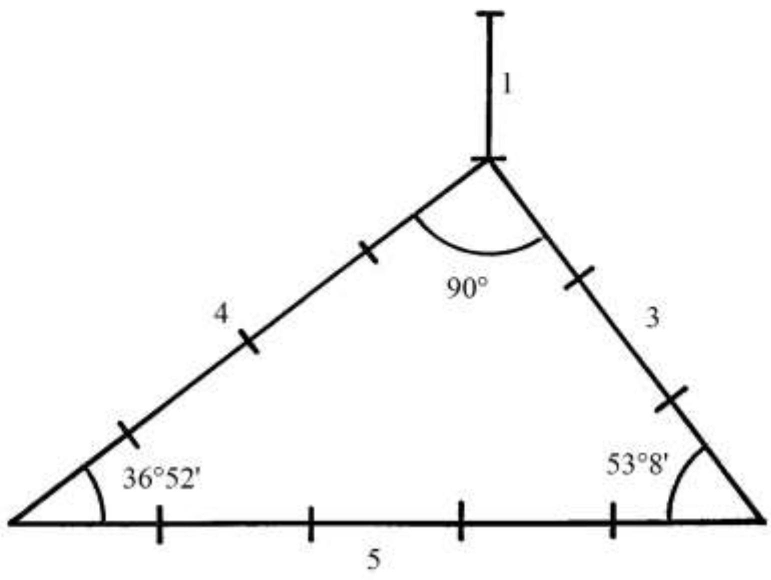
I triangoli e gli angoli costruibili con la corda dei Druidi

I 13 tratti della corda dei Druidi possono comporre almeno quattro diverse tipologie di triangoli, come mostrato nelle figure che seguono:

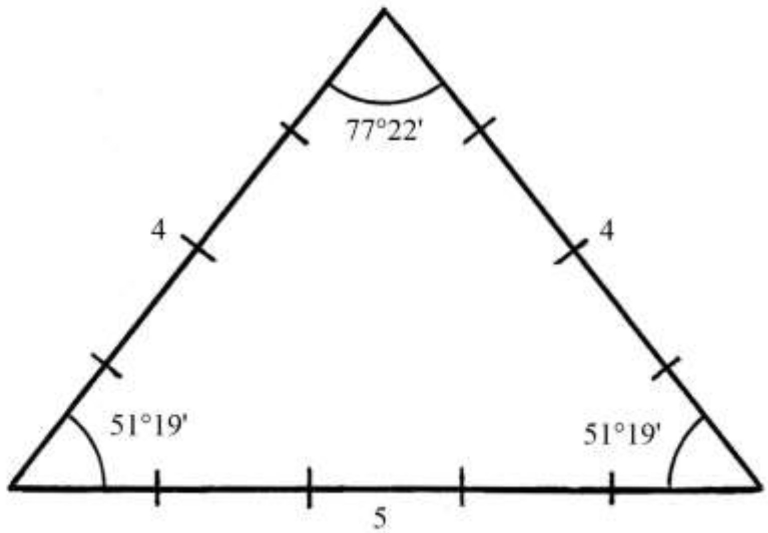
triangolo equilatero



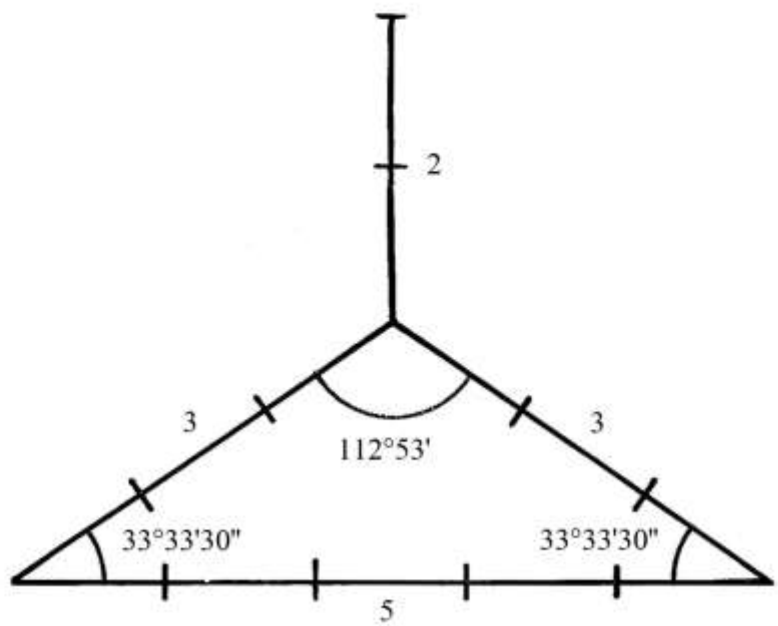
triangolo rettangolo scaleno



triangolo isoscele (5-4-4)



triangolo isoscele (5-3-3)



Usando 12 dei 13 tratti si ottiene un *triangolo equilatero*: i suoi lati sono lunghi ciascuno 4 tratti e uno avanza o, per meglio dire, *sporge* verso l’alto.

Sempre con 12 tratti è facilmente realizzabile il *triangolo rettangolo egizio,* con i lati lunghi 3, 4 e 5 tratti.

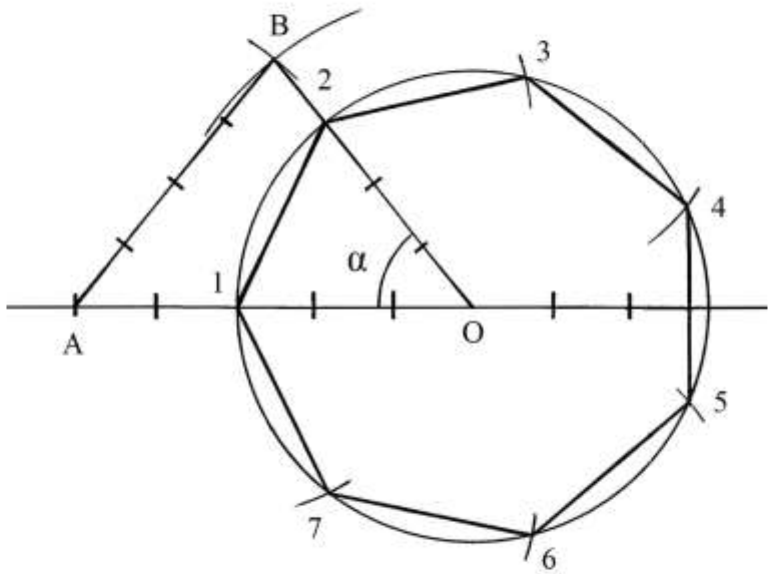
Impiegando tutti i 13 tratti e disponendoli nella forma 5-4-4 si realizza un *triangolo isoscele*.

Con 11 tratti si traccia un altro *triangolo isoscele* con lati lunghi 5, 3 e 3 tratti.

Nelle figure sono anche indicati gli angoli interni dei quattro triangoli.

Costruzione approssimata dell'ettagono inscritto

Un altro metodo simile al precedente è spiegato nella figura che segue:



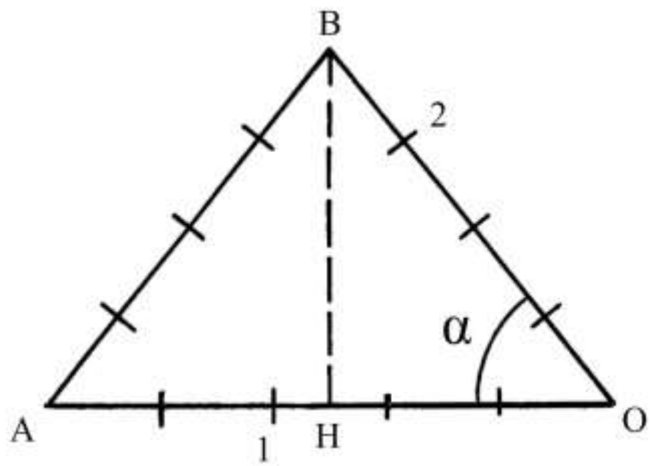
Disegnare il triangolo isoscele AOB: esso ha il lato orizzontale AO lungo 5 e i due lati obliqui, AB e OB, lunghi 4: il perimetro è lungo 13.

L'angolo α, AOB, vale quasi quanto l'angolo l'ampiezza di 360/7°.

Tracciare una circonferenza di raggio 3 con centro in O. Su di essa è sufficiente riportare la lunghezza del segmento 1-2, lato dell'ettagono cercato, a partire da questi due punti sulla circonferenza e determinare i punti 3, 4, 5, 6 e 7 che sono i vertici dell'ettagono.

La costruzione è semplice e il risultato è *approssimato*: l'ampiezza dell'angolo α e, di conseguenza, la lunghezza del segmento 1-2 sono approssimati per difetto dello 0,3%.

Verifichiamo il risultato:



ABO è il triangolo isoscele generatore. Tracciare l'altezza BH: il punto H divide AO in due segmenti di uguale lunghezza:

AH = HO = AO/2 = 5/2 = 2,5 unità.

BHO è un triangolo rettangolo. Il coseno dell'angolo BOH = α è:

cos α = OH/OB = 2,5/4 = 0,625.

A questo valore del coseno corrisponde un angolo ampio:

α ≈ 51,31(66)°.

L'ampiezza dell'angolo al centro in un ettagono regolare è:

angolo al centro = 360°/7 ≈ 51,42857°.

La differenza fra le ampiezze dei due angoli è minima: quella di α è approssimata per difetto di soli 11'.

Il metodo deriva dall'uso della corda 3-4-5 impiegata per tracciare angoli retti sul terreno.

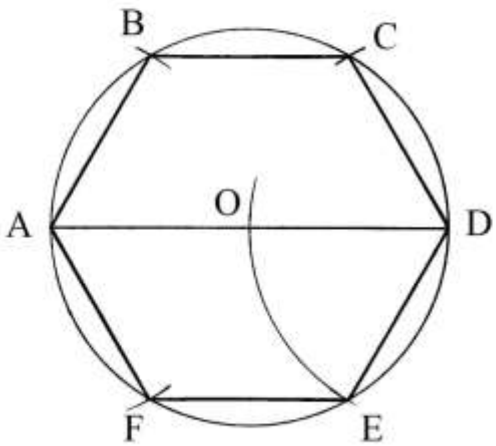
Una probabile costruzione medievale dell'ettagono inscritto

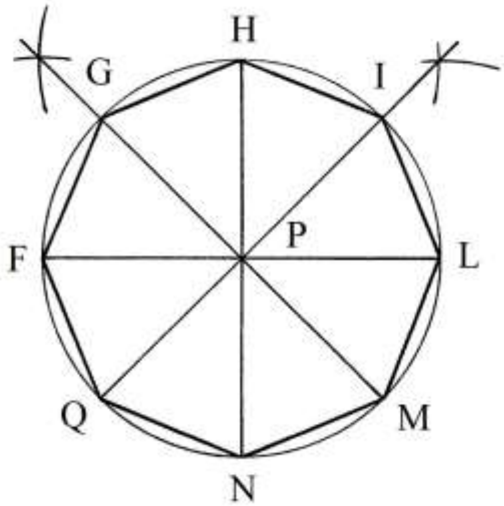
Le costruzioni medievali a pianta *ettagonale* sono in numero molto limitato.

È stata avanzata l'ipotesi che in alcuni casi si sia trattato di una riduzione del numero dei lati da *otto* a *sette*, soluzione che sarebbe stata imposta da contingenze locali.

La costruzione *approssimata* dell'ettagono (ad esempio quella di Archimede) non sembra fosse conosciuta dai costruttori medievali.

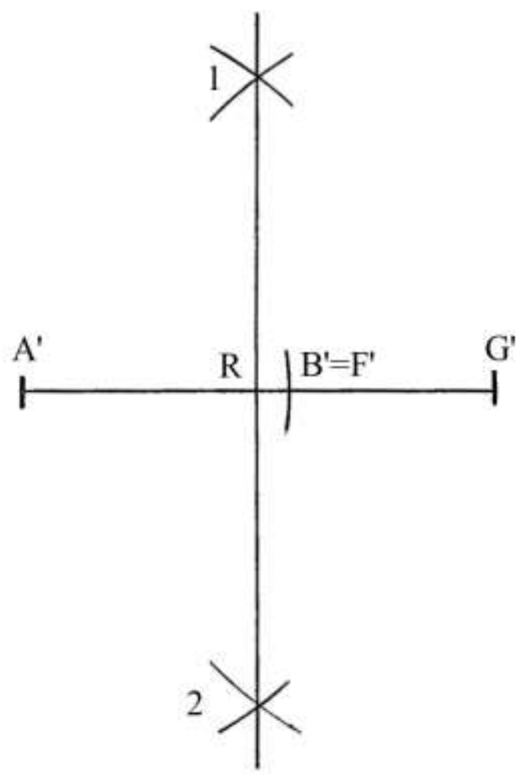
Essi possono aver determinato la lunghezza approssimata del lato dell'ettagono con un metodo abbastanza ingegnoso. Tracciarono due circonferenze di uguale raggio, come spiega la tavola che segue:





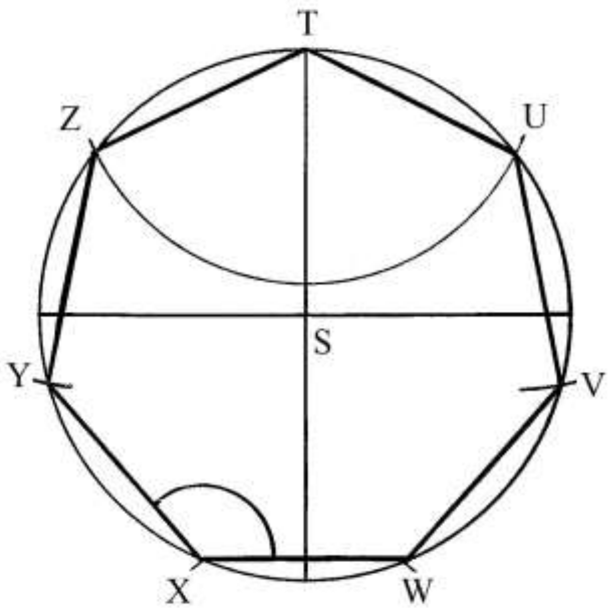
A sinistra è la costruzione dell’esagono regolare inscritto e a destra quella dell’ottagono regolare. Entrambe le costruzioni potevano essere realizzate a piccola scala (su di un foglio con riga e compasso) e a grande scala, sul terreno (con una corda e alcuni paletti).

Su di una retta tracciata su di un foglio riportare in successione la lunghezza A’B’ (= AB) uguale al lato dell’esagono e B’(≡ F’)G’ uguale alla lunghezza del lato dell’ottagono:



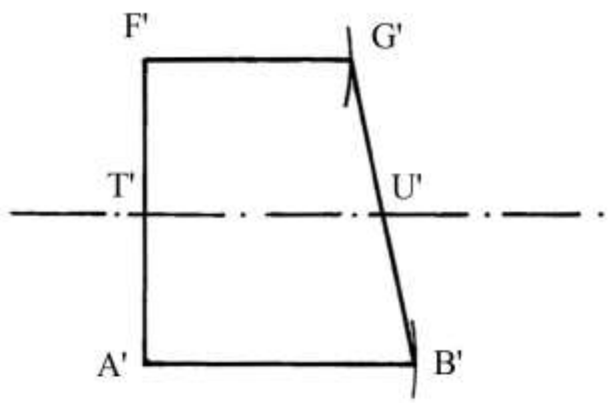
Con la nota costruzione dell’*asse del segmento*, dividere in due parti uguali A’G’. Il punto R è il suo medio e A’R = RG’ è la lunghezza *approssimata* del lato dell’ettagono.

Disegnare una terza circonferenza con centro in S e raggio OA e tracciarvi i due diametri fra loro perpendicolari: dal punto T riportare la lunghezza di A’R per ottenere l’ettagono approssimato TUVWXYZ:



La costruzione è piuttosto imprecisa perché uno dei lati del poligono (XW nell’esempio) è significativamente più corto degli altri sei. Forse la costruzione veniva corretta per tentativi.

La determinazione della lunghezza del lato dell’ettagono poteva essere ottenuta anche con la costruzione descritta nella figura che segue:



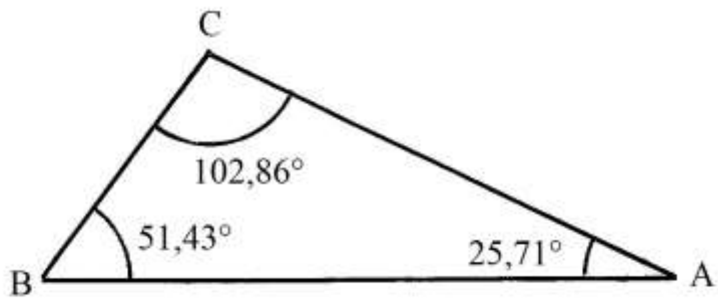
Costruire un *trapezio rettangolo* con basi lunghe F’G’ (lato dell’ottagono) e A’B’ (lato dell’esagono): l’altezza A’F’ può essere scelta a piacere. Determinare il punto medio di A’F’: è T’. Per questo punto tracciare una linea parallela alle due basi: il segmento T’U’ è la lunghezza del lato dell’ettagono.

Sul terreno, a grande scala, la determinazione della lunghezza del lato dell’ettagono era ottenuta piegando a metà la *corda* A’B’G’.

L’angolo interno di un ettagono regolare è 128,57°: questa costruzione può fornire un angolo con un errore di ± 1°.

Costruzione dell’ettagono inscritto con il triangolo ettagonale

Costruire un *triangolo ettagonale* ABC, che è scaleno, con le proprietà descritte nella figura che segue:



$$\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 1 : 2 : 4$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

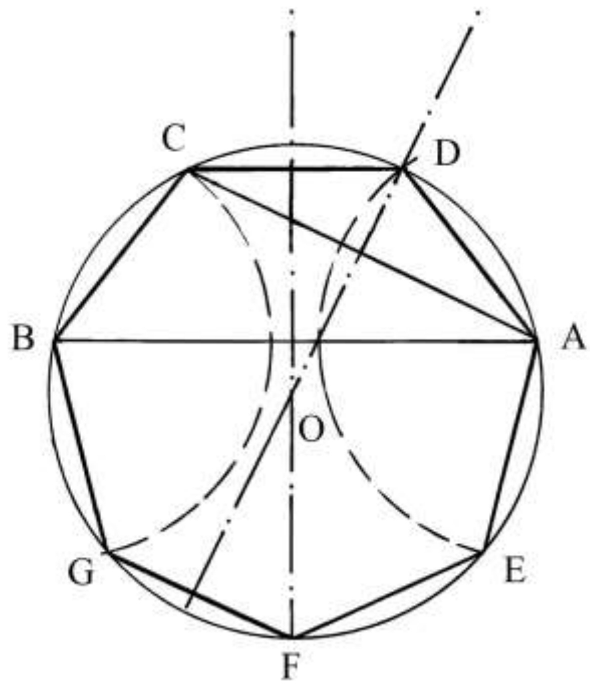
Le ampiezze degli angoli sono *approssimate* alla seconda cifra decimale.

La costruzione fu attribuita ad Archimede da parte di alcuni matematici arabi, come Abu Sahl al-Kuhi (o al-Quhi), morto nel 1014.

Il lato BC è la lunghezza del lato dell’ettagono da costruire.

Disegnare l’asse del segmento AC e quello del segmento BA: essi si intersecano in un punto, O, centro della circonferenza circoscritta e passante per i punti A, B e C. Le costruzioni dei due assi non sono disegnate per non appesantire il grafico.

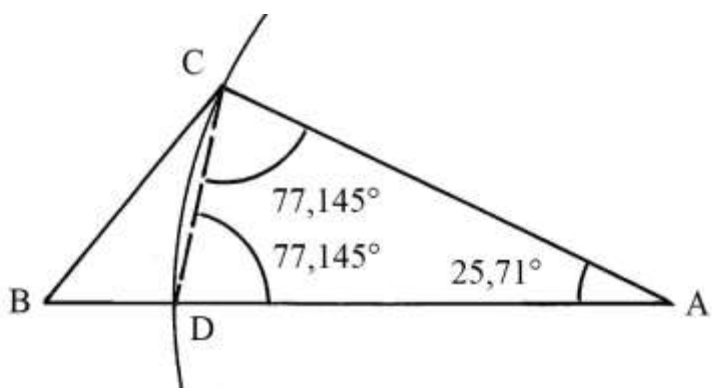
Con centro in O e raggio OA tracciare la circonferenza e riportarvi la lunghezza di BC:



Il poligono BCDAEFG è l'ettagono inscritto.

Un'altra costruzione dell'ettagono

Il triangolo ettagonale ABC fornisce lo spunto per un'altra costruzione.
Con centro in A e raggio AC disegnare l'arco da C fino a tagliare in D il lato AB:



Il triangolo ACD è isoscele perché i lati AC e AD hanno la stessa lunghezza e gli angoli in C e in D hanno identica ampiezza.

L'angolo CAD è ampio:

CAD = 180/7 = 25,71°.

Gli angoli ACD e CDA hanno uguale ampiezza:

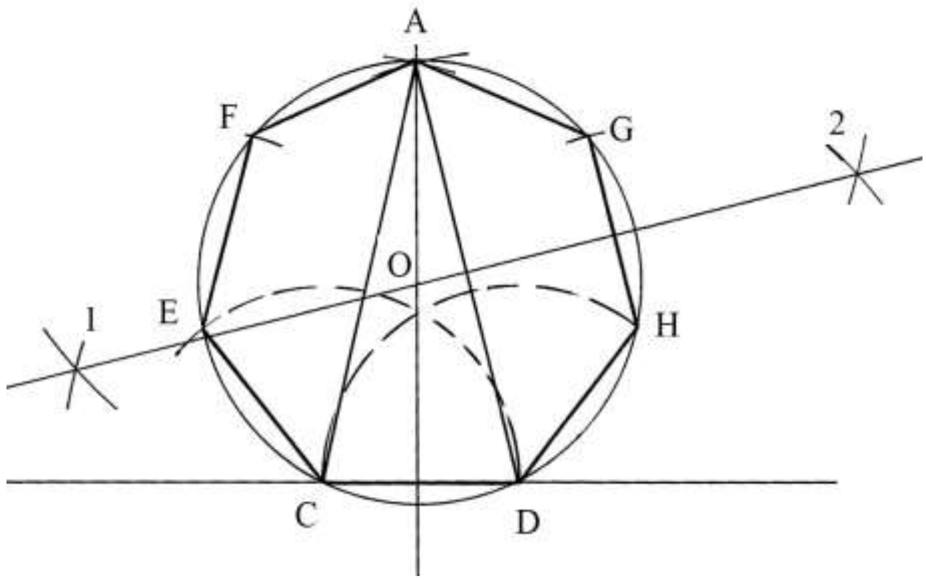
ACD = CDA = 3/7 * 180° = 77,145°.

Le ampiezze dei tre angoli sono in una precisa proporzione:

CAD : ACD : CDA = 25,71 : 77,145 : 77,145 = 1 : 3 : 3.

Il triangolo isoscele ACD può essere usato per costruire l'ettagono regolare.

Disegnare una linea orizzontale e su di essa riportare la lunghezza di CD, che è quella del lato dell'ettagono:



Con centro in C e in D e raggio AC (riportato dalla figura precedente), fissare il vertice A.

Tracciare l'asse del segmento CD, passante per il punto A. Costruire l'asse del segmento AD, passante per i punti 1 e 2 determinati dagli archi tracciati in A e in D.

Questo asse interseca l'asse passante per A: il punto di incrocio è O, centro della circonferenza passante per i tre punti C, D e A.

Con centro in O e raggio OC, disegnare la circonferenza: su di essa riportare la lunghezza di CD.

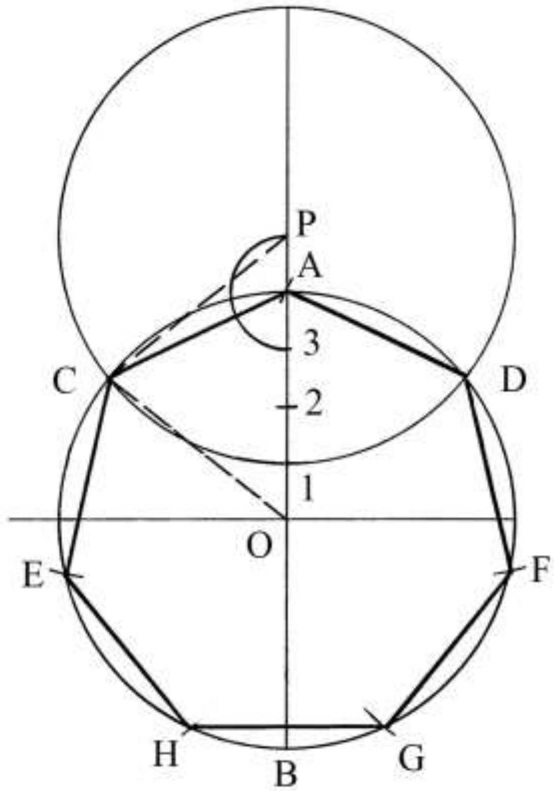
Il poligono CEFAGHD è l'ettagono cercato.

Costruzione dell'ettagono inscritto – metodo di Cristoforo Clavio

La costruzione che segue è una semplificazione del metodo suggerito dal matematico gesuita tedesco Cristoforo Clavio (1538-1612). È contenuta nel suo trattato "*Geometria practica*", pubblicato in latino a Magonza nel 1606. Egli mosse delle critiche alle costruzioni approssimate dell'ettagono proposte dal matematico e architetto Carlo Mariani (cremona, attivo alla fine del Cinquecento e all'inizio del Seicento), da Albrecht Dürer e da un certo "Franciscus Flussas Candalla" (il francese François de Foix Candale?): forse questi tre autori ritenevano i loro metodi esatti?

Anche la costruzione che segue è *approssimata*.

Disegnare una retta verticale e fissarvi un punto, O:

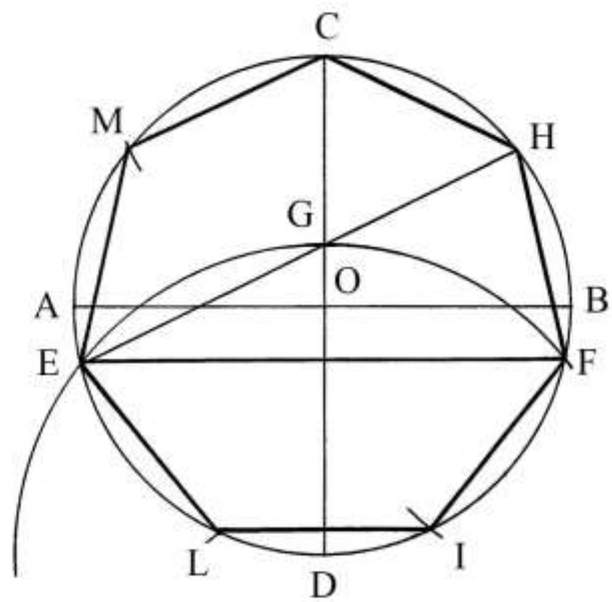


Fare centro in O e tracciare una circonferenza che taglia il diametro nei punti A e B.
Dividere in *quattro* parti uguali il raggio OA; fare centro in A e con raggio A-3 tracciare una semicirconferenza da 3 fino a incontrare la retta verticale nel punto P.

Con la stessa apertura di compasso (OA), fare centro in P e disegnare una seconda circonferenza che taglia la prima nei punti C e D.
Le *corde* AC e AD sono due lati dell'ettagono inscritto nel cerchio di centro O.
Il poligono ADFGHEC è l'ettagono *approssimato* inscritto.

Le costruzioni approssimate di Malaspina

La costruzione che segue fu elaborata da un diplomatico italiano, il marchese Pier Francesco Malaspina (1550-1624). Essa fornisce una costruzione *approssimata* dell'ettagono.
Disegnare una circonferenza con centro in O e tracciare i due diametri perpendicolari, AB e CD.



Con raggio uguale a 5/4 di OA, fare centro in D e disegnare un arco che taglia la circonferenza nei punti E e F e il diametro verticale nel punto G.

Tracciare la corda EF: i punti C, E e F sono tre dei sette vertici dell'ettagono.

Condurre una seconda corda passante per E e per G, fino a farle intersecare la circonferenza in un nuovo punto, H.

Le corde HF e HC sono due lati dell'ettagono approssimato CHFILEM.

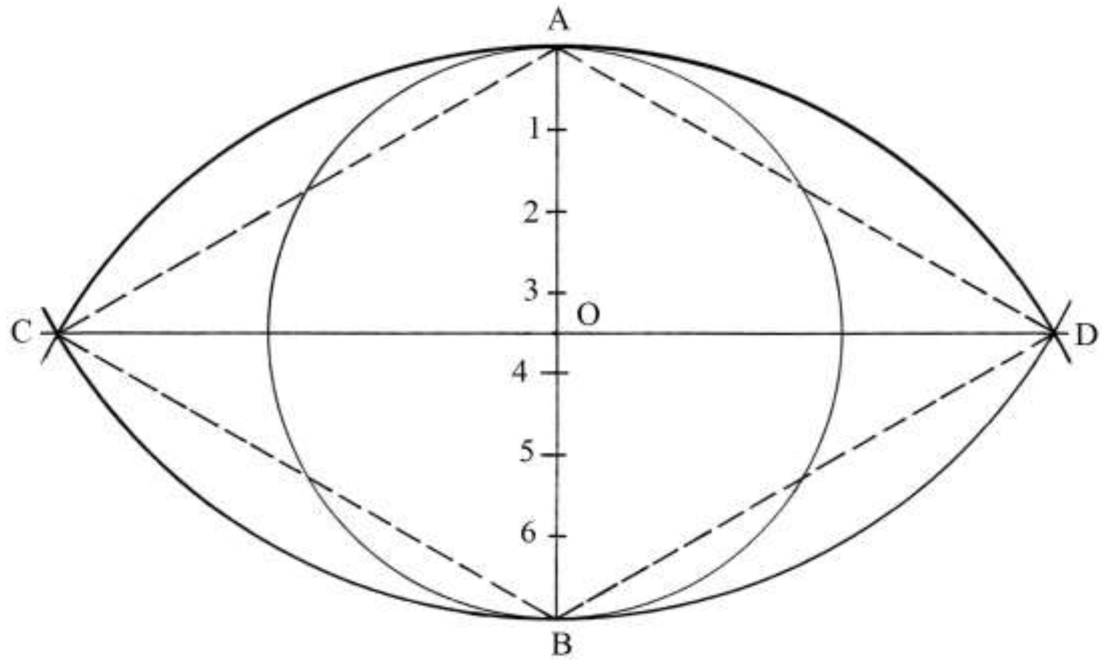
L'uso del raggio DG lungo i 5/4 del raggio OA può far pensare a una parentela con la costruzione proposta da Clavio?

Le costruzioni approssimate di Carlo Renaldini

Carlo Renaldini (1615-1679) è stato un matematico e geometra italiano. A lui si deve una costruzione geometrica *approssimata* per i poligoni non ricavabili con riga non graduata e compasso ad apertura fissa: essa è descritta nel suo trattato "*Geometra promotus*" pubblicato a Padova nel 1670.

Il metodo di Renaldini è qui applicato al caso dell'ettagono, ma esso ha validità generale.

Disegnare il diametro verticale AB e dividerlo in *sette* parti uguali: 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sono i punti separatori.



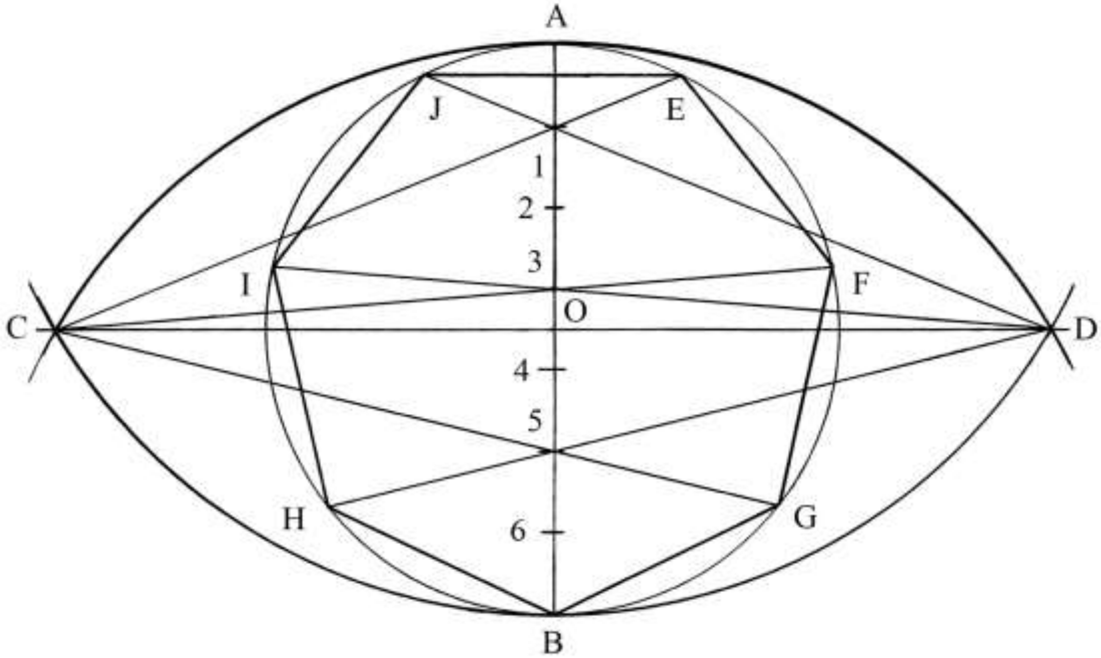
Tracciare la circonferenza con centro in O e raggio OA = OB.

Con raggio AB fare centro in A e in B e disegnare due archi che si intersecano nei punti C e D. Tracciare la retta passante per C e D e le corde CA, CB, DA e DB.

ABC e ABD sono due triangoli equilateri uniti lungo il lato verticale AB: CADB è un *rombo* che possiede la diagonale minore, AB, lunga quanto i suoi lati. La diagonale maggiore CD è lunga quanto la doppia altezza di un triangolo equilatero di lato AB:

$$CD = AB * \sqrt{3}.$$

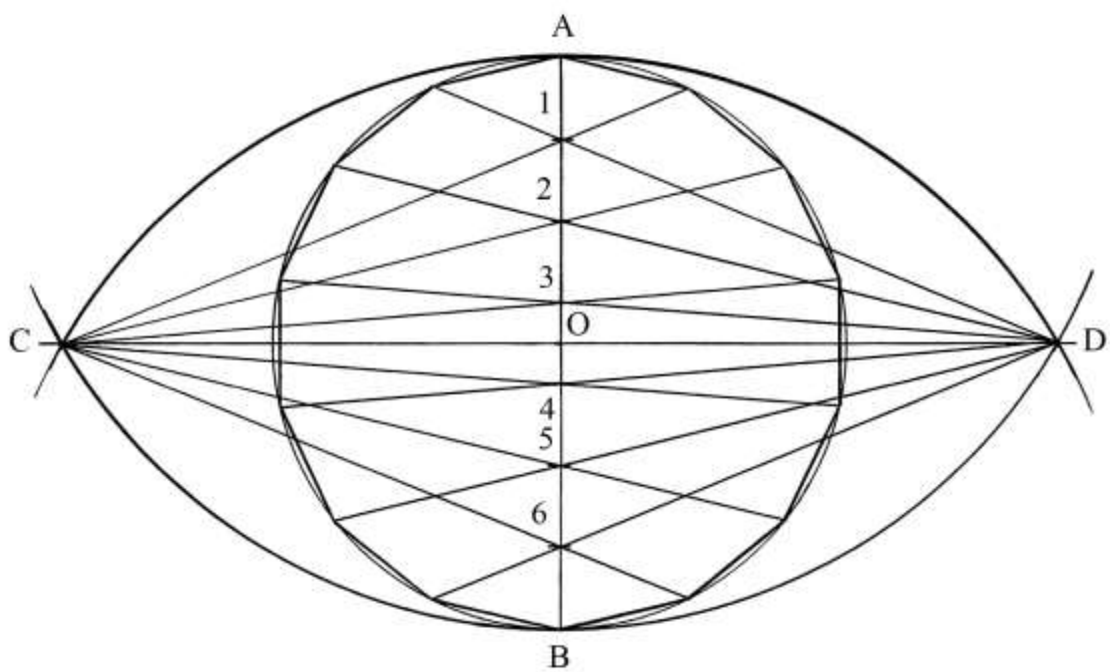
Dai punti C e D tracciare un fascio di segmenti passanti per i punti dispari del diametro AB: 1, 3 e 5:



I segmenti tagliano la circonferenza di centro O nei punti E, F, G, H, I e J.

EFGBHIJ è l’ettagono regolare approssimato inscritto.

Disegnando il fascio di linee uscenti da C e da D per tutti i *sei* punti della divisione di sette parti uguali di AB sono stabiliti i vertici del *tetradecagono*, il poligono che possiede 14 lati:

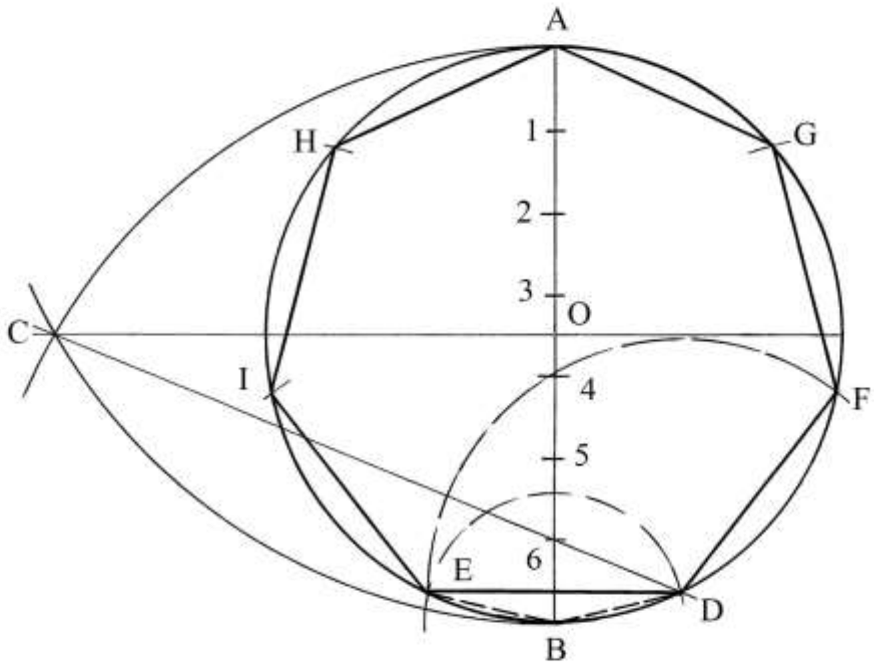


Anche questa costruzione è approssimata.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La costruzione dell'ettagono inscritto che segue è una semplificazione del metodo di Renaldini.

Tracciare il diametro verticale AB e dividerlo in *sette* parti uguali, contrassegnando i punti divisori con i numeri da 1 a 6:



O è il punto medio del diametro AB. Fare centro in O e, con raggio OA, disegnare una circonferenza passante per i punti A e B.

Con raggio AB, fare centro in A e in B e tracciare due archi di circonferenza che si intersecano in un punto, C.

Condurre un segmento da C, passante per il punto 6, fino a tagliare la circonferenza in un punto, D.

La corda BD è un lato del tetradecagono approssimato inscritto.

Fare centro in B e con raggio BD disegnare un arco da D fino a incontrare la circonferenza in un punto, E, che è un vertice dell'ettagono: la corda DE è un suo lato.

Riportare la lunghezza di DE sulla circonferenza.

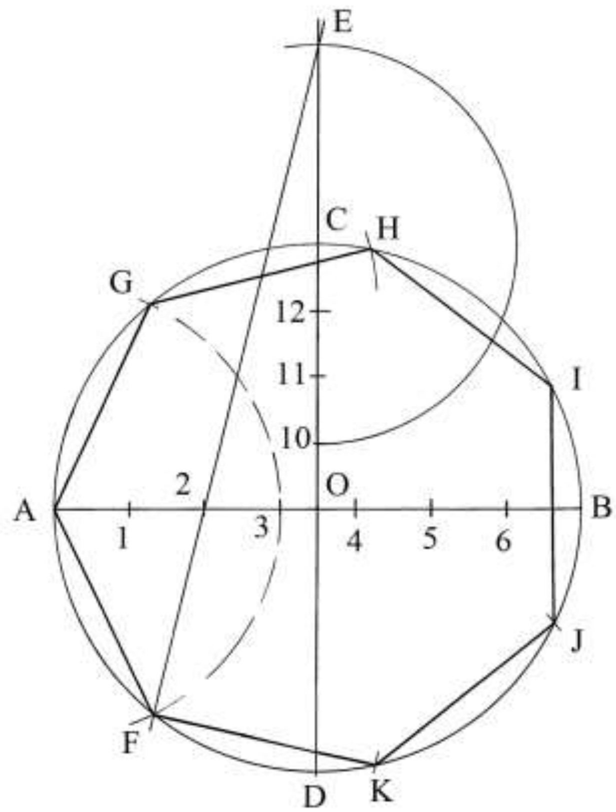
EDFGAHI è l'ettagono approssimato inscritto: i lati GA e AH sono leggermente più corti degli altri cinque.

<u>Ettagono inscritto</u>

La costruzione che viene qui spiegata fornisce un ettagono inscritto, con una buona *approssimazione*. Essa può essere considerata una variante del metodo di Renaldini.

Disegnare una circonferenza con centro in O e due diametri fra loro perpendicolari, AB e CD. Prolungare verso l'alto questo ultimo.

Dividere il diametro AB in *sette* parti uguali: 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sono i punti.
Dividere in *quattro* parti uguali il raggio OC: 10, 11 e 21 sono i punti così determinati.



Fare centro nel punto C e, con raggio C-10, disegnare una semicirconferenza dal punto 10 fino a stabilire il punto E.

Dal punto E condurre una linea passante per il punto 2: essa incontra la circonferenza in un punto, F.

La corda AF è il primo lato dell'ettagono.

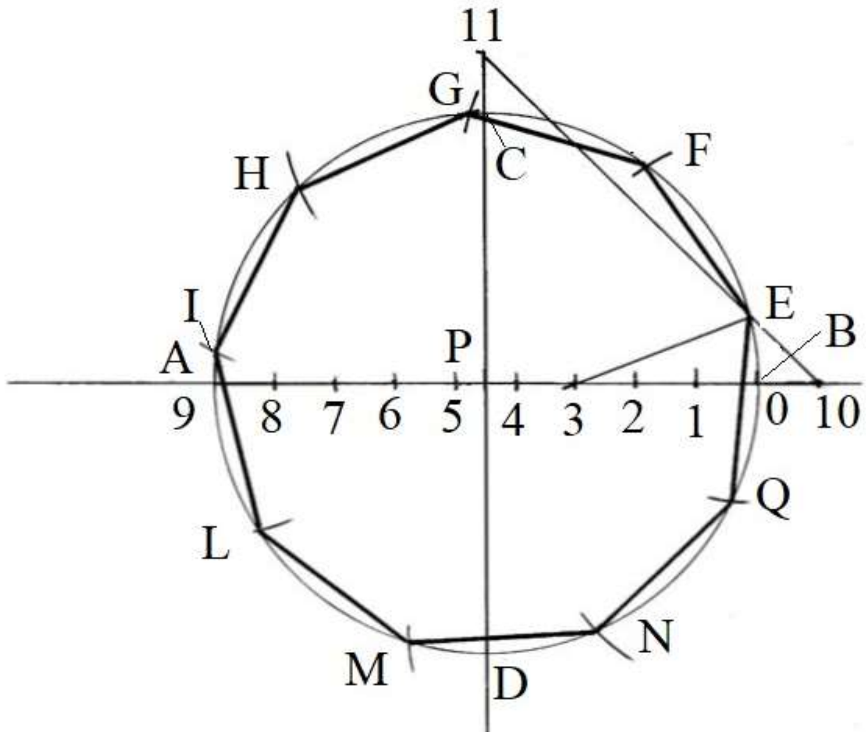
AGHIJKF è il poligono *approssimato* voluto.

Poligoni inscritti – metodo di Bardin

Libre-Irmond Bardin (o Bardin de la Moselle, 1794-1867) è stato un topografo francese, autore di alcuni trattati di geometria descrittiva. La sua conoscenza in Italia si deve a Italo Ghersi.

La sua è una costruzione approssimata che può essere usata solo per poligoni con *numero minimo di lati uguale a 5*. L'esempio che segue presenta l'*ennagono*.

Disegnare una circonferenza con centro in P e i due diametri AB e CD fra loro perpendicolari:



Dividere il diametro AB in un numero di parti uguali, numero uguale a quello dei lati del poligono da inscrivere: nell'esempio della figura, il diametro è diviso in 9 parti uguali, perché deve essere inscritto un poligono di 9 lati e cioè un *ennagono*.

Gli estremi A e B coincidono rispettivamente con i punti 9 e 0.

Sui prolungamenti dei diametri, a partire dai punti 0 (=B) e C riportare la lunghezza del segmento 0-1: sono così individuati i punti 10 e 11.

Tracciare il segmento 10-11: esso interseca la circonferenza in due punti: scegliamone uno e indichiamolo con E.

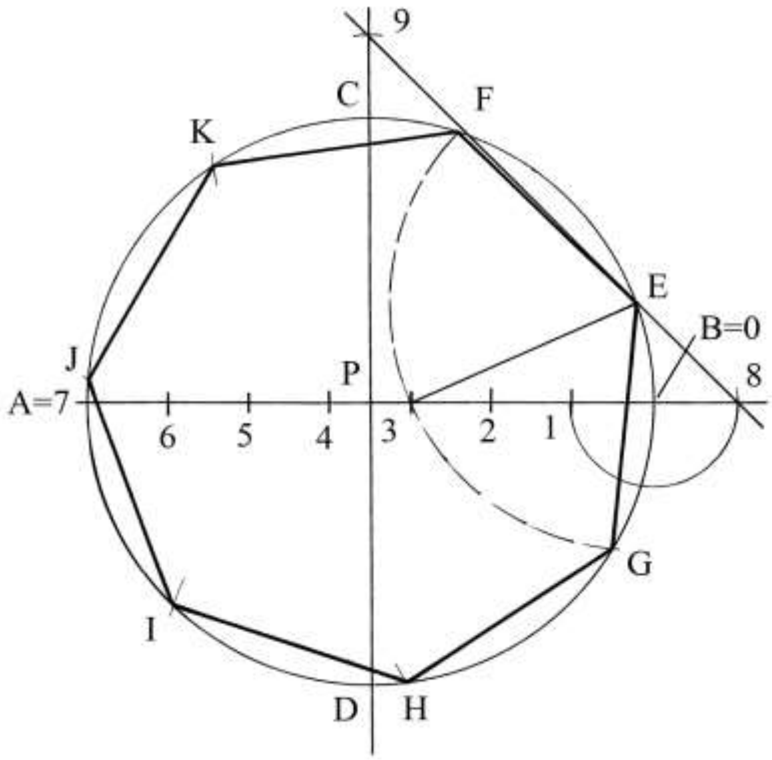
Disegniamo il segmento E-3, scegliendo il *quarto* vertice dei segmenti uguali, a partire da B (compreso) verso sinistra: E-3 è la lunghezza del lato del poligono da inscrivere.

Riportare la lunghezza E-3 lungo la circonferenza.

Il poligono EFGHILMNQ è l'ennagono cercato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il grafico che segue applica il metodo di Bardin al caso dell'ettagono inscritto:



Tracciare i consueti diametri perpendicolari AB e CD, che si incontrano nel punto P, e la circonferenza di centro P e raggio PA.

Dividere AB in *sette* parti uguali: sono fissati i punti B=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e A=7.

Da B riportare verso destra la lunghezza di B-1 e fare lo stesso da C verso l'alto: sono stabiliti i punti 8 e 9.

Collegare 8 e 9: la retta taglia la circonferenza in due punti, uno dei quali – E – è indispensabile per la costruzione.

Il segmento E-3 è la lunghezza del lato dell'ettagono. Fare centro in E e con raggio E-3 disegnare un arco che incontra la circonferenza in due punti, F e G, che sono due vertici del poligono.

Riportare la lunghezza di E-3 sulla circonferenza a partire da F e da G.

EGHIJKF è l'ettagono regolare approssimato.

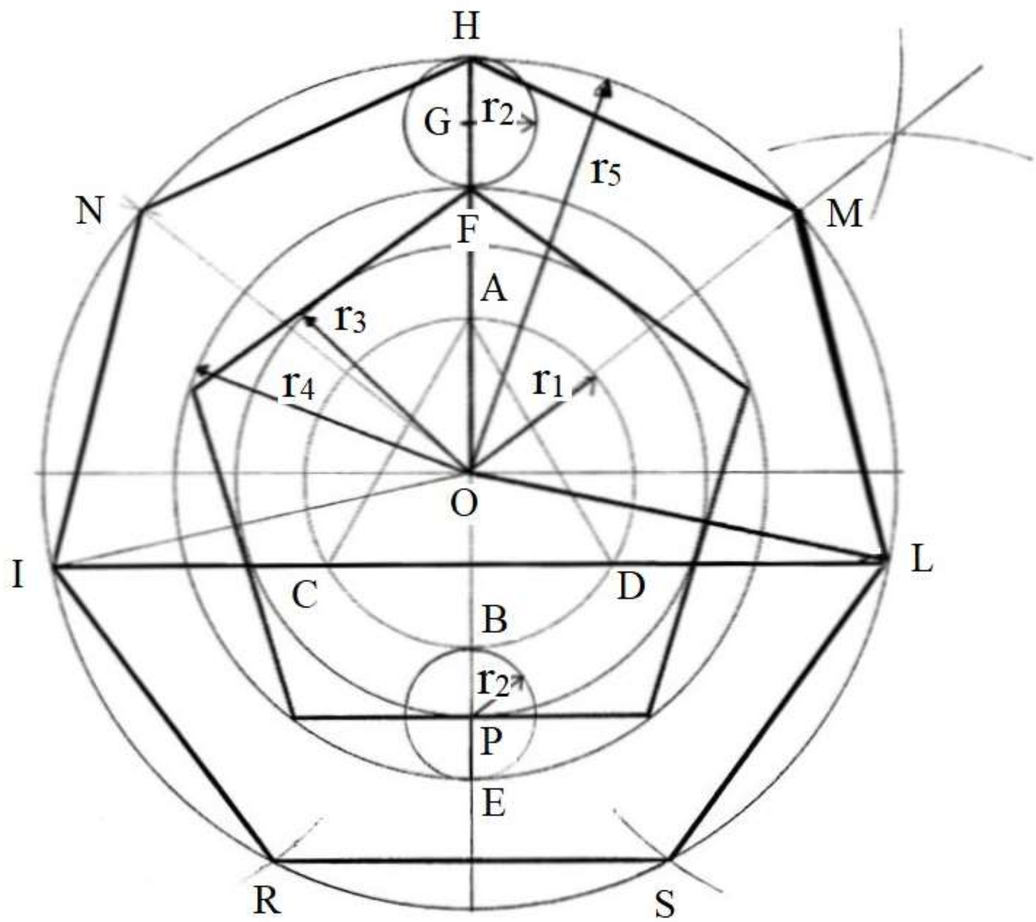
Probabilmente, il metodo di Bardin offre risultati un po' più corretti del metodo di Renaldini.

La costruzione dell'ettagono secondo Röber

La costruzione che viene di seguito descritta è abbastanza complessa, ma è molto precisa perché l'errore relativo al valore dell'angolo al centro di (360/7)° è dell'ordine dello 0,062%.

La costruzione fu proposta dall'architetto tedesco Friedrich Gottlob Röber e fu pubblicata postuma, a Dresda, nel 1854.

Disegnare una retta verticale e fissarvi il punto O:



Scegliere un raggio r_1 e disegnare una circonferenza con centro in O: costruire il triangolo equilatero ACD e prolungare il lato CD verso destra e verso sinistra.

Scegliere una lunghezza r_2 e riportarla a partire da B: viene stabilito il punto P nel quale fare centro con raggio r_2 per disegnare una circonferenza.

Con centro in O tracciare due circonferenze con raggi OP (r_3) e OE (r_4).

Con il metodo tradizionale (risalente a Tolomeo), costruire il pentagono regolare inscritto nel cerchio di raggio OE: i suoi lati risultano tangenti alla circonferenza di raggio OP.

Il punto F è il vertice superiore del pentagono.

A partire da F riportare verso l'alto la lunghezza di r_2: viene fissato il punto G.

Fare centro in G con raggio r_2: il punto H è un vertice dell'ettagono inscritto.

Con centro in O, disegnare la circonferenza di raggio r_5 (OH): essa taglia i prolungamenti di CD nei punti I e L.

H, I e L sono tre vertici: fra H e I (e fra H e L) sono collocati due lati dell'ettagono.

Costruire la bisettrice dell'angolo HOL: essa taglia la circonferenza nel punto M, che è il quarto vertice del poligono.

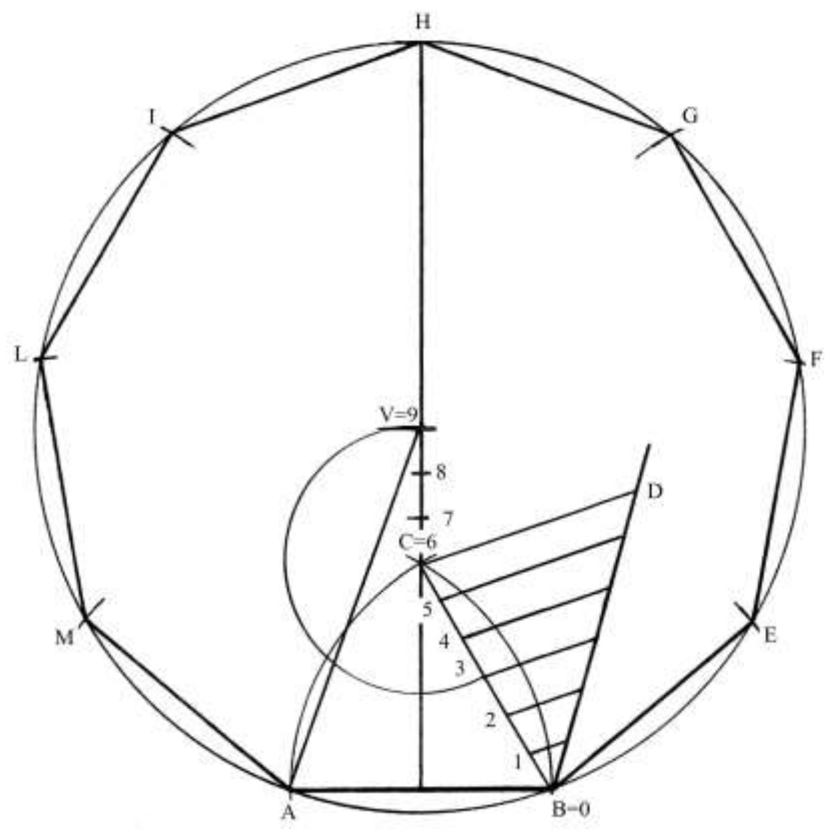
Riportando la lunghezza di HM sulla circonferenza esterna, si traccia il poligono HMLSRIN che è l'ettagono inscritto.

<u>Costruzione approssimata di un poligono qualsiasi dato il lato</u>

Questa costruzione viene impiegata per disegnare poligoni con un numero di lati maggiore di *sei*. La lunghezza del lato è conosciuta: la costruzione si propone di determinare il centro del cerchio in cui va inscritto il poligono.

L'esempio della figura che segue è quello di un *ennagono*, un poligono con *nove* lati. Questo poligono è stato scelto per descrivere in maniera più chiara la regola impiegata.

Disegnare il lato AB e costruire l'asse di questo segmento.



Fare centro in A e in B e, con raggio AB, disegnare due archi che si intersecano nel punto C. Da B tracciare un segmento obliquo BD e dividerlo in *sei parti uguali,* indipendentemente dal numero dei lati del poligono che si vuole ottenere. Con la nota costruzione della divisione di un segmento in un dato numero di parti uguali, proiettare le divisioni sul segmento BC e indicare i punti da 0 (=B) a 6 (=C).

Da C, verso l'alto, riportare tante volte la lunghezza del segmento 5-6 quante ne servono per raggiungere il numero dei lati voluti, sommando le *sei* divisioni contenute nel segmento BC: nel caso dell'ennagono ne occorrono (9 – 6) e cioè 3, che possono essere riportate in un solo passaggio con l'arco di centro C e raggio C-3. Si ottiene il punto V(=9), centro della circonferenza.

Con raggio VA, disegnare la circonferenza e, a partire da A e da B, riportare su di essa la lunghezza di AB.

ABEFGHILM è l'ennagono approssimato.

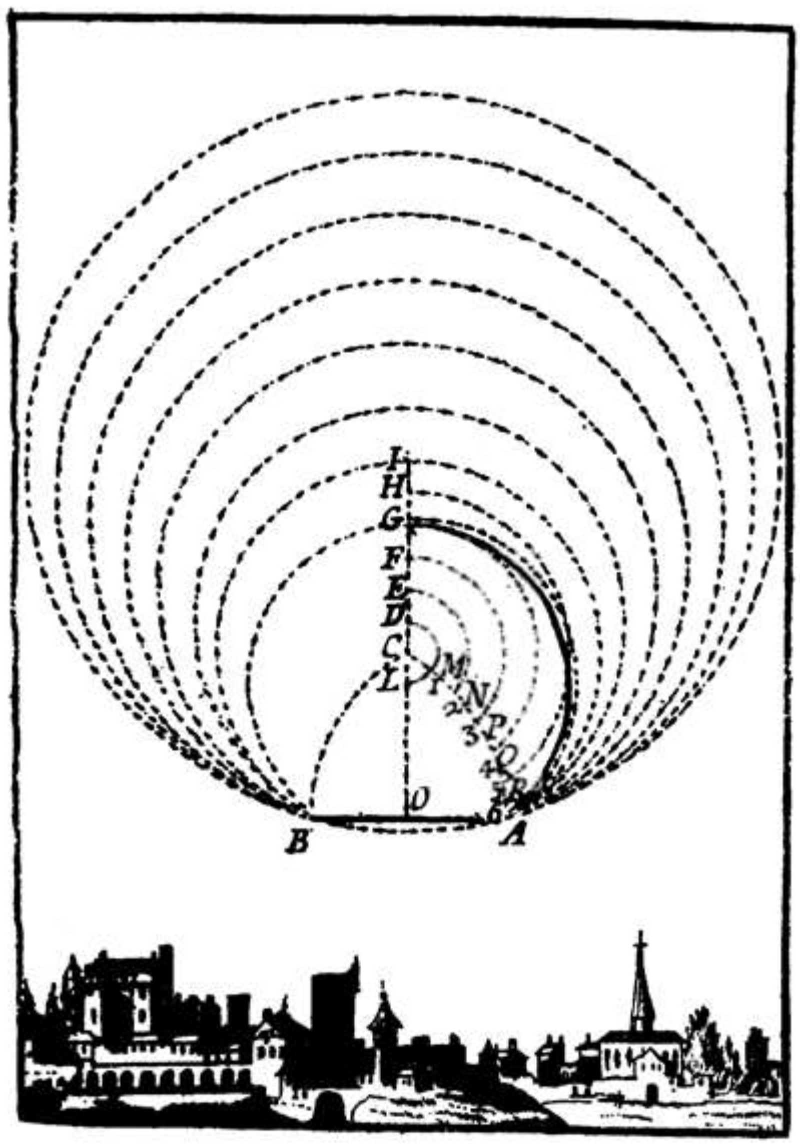
La tabella che segue fornisce ulteriori informazioni sull'applicazione di questo metodo alla costruzione di poligoni con numero di lati *maggiore di sei*.

Numero lati: *n*	Nome del poligono	Quante volte va riportata la lunghezza 5-6 della precedente figura: *n - 6*
7	Ettagono	1
8	Ottagono	2
9	Ennagono	3
10	Decagono	4
11	Endecagono	5
12	Dodecagono	6

La costruzione era nota da secoli, come spiega la figura che segue, tratta dall'edizione italiana del testo di "*Pratica della Geometria sulla Carta e sul Terreno*" di Sébastien Leclerc (Venezia, 1747), che descrisse il metodo per la realizzazione di poligoni fino al *dodecagono*:

LIBRO SECONDO 87

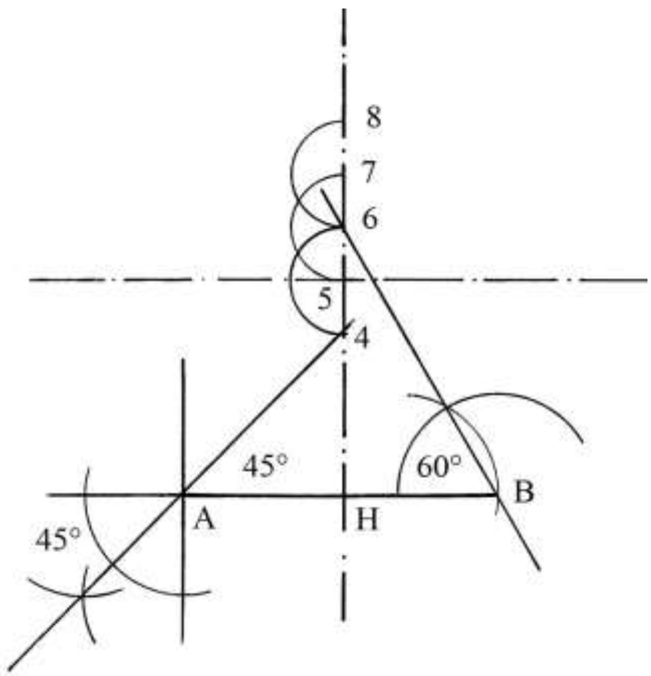
TAVOLA XXXVI



- APPROFONDIMENTO -

Quadrato, pentagono, esagono e ettagono

La costruzione che di seguito è spiegata può essere impiegata per disegnare più poligoni. AB è il primo lato di un generico poligono da costruire:



Disegnare l'asse del segmento AB che lo interseca nel punto medio H.

Dividere l'angolo piatto in A e poi tracciare un angolo di 45°; dal punto A disegnare una semiretta inclinata di 45° che incrocia l'asse di AB in un punto, 4.

Nel vertice B costruire un angolo di 60° e tracciare una semiretta fino a incontrare l'asse di AB in un punto, 6.

Disegnare l'asse del segmento 4-6: esso taglia l'asse di AB nel punto intermedio 5.

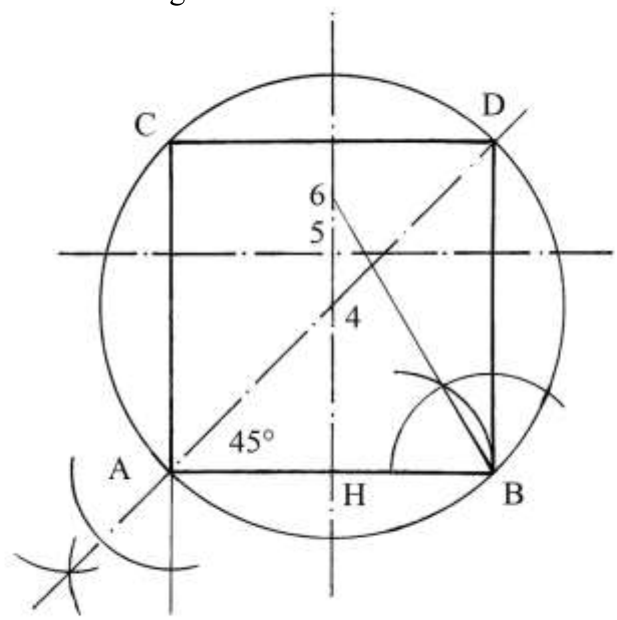
Fare centro nel punto 6 e, con raggio 6-5 = 5-4, tracciare una semicirconferenza da 5 fino a stabilire il punto 7. Con la stessa apertura, fare centro nel punto 7 e disegnare una semicirconferenza da 6 fino a fissare il punto 8.

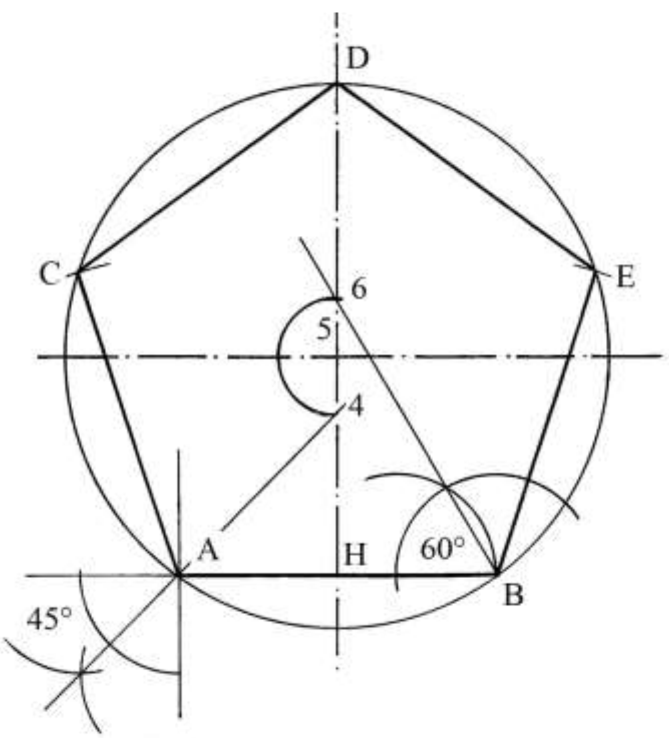
Il significato dei nomi assegnati a questi punti posizionati sull'asse del segmento AB è spiegato nella tabella che segue:

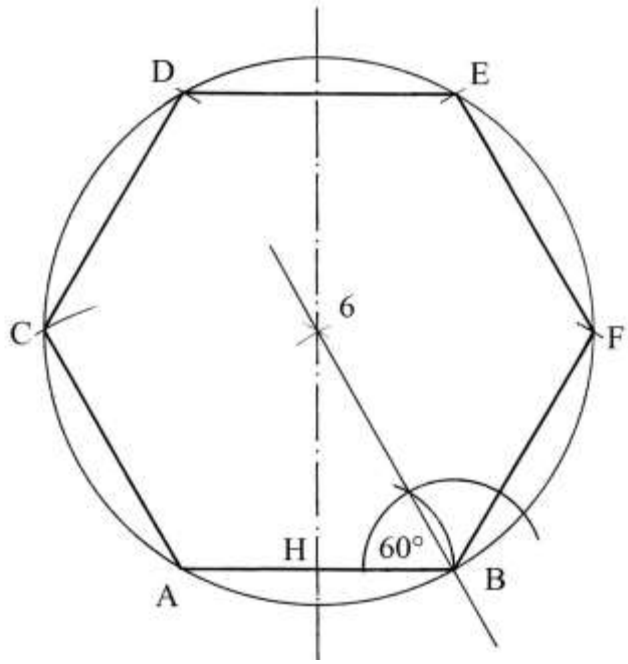
Punti	Centro del cerchio circoscritto a un …	Raggio del cerchio
4	Quadrato	4-A = 4-B
5	Pentagono	5-A = 5-B
6	Esagono	6-A = 6-B
7	Ettagono	7-A = 7-B
8	Ottagono	8-A = 8-B

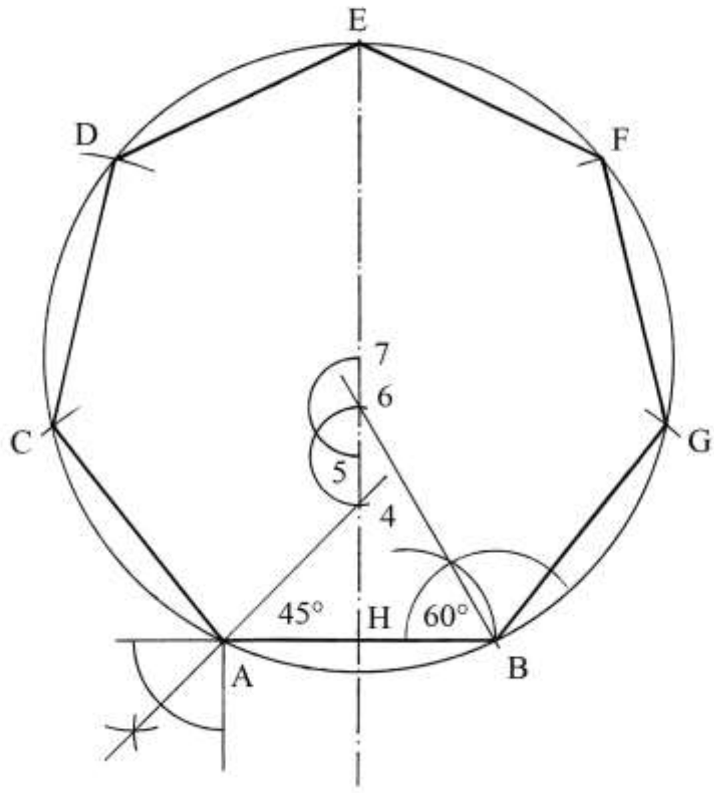
La costruzione può essere impiegata per tracciare, con la stessa tecnica, anche poligoni approssimati con numero di lati maggiore di 8.

Nelle figure che seguono sono presentate, nell'ordine, le costruzioni del quadrato, del pentagono, dell'esagono e dell'ettagono.



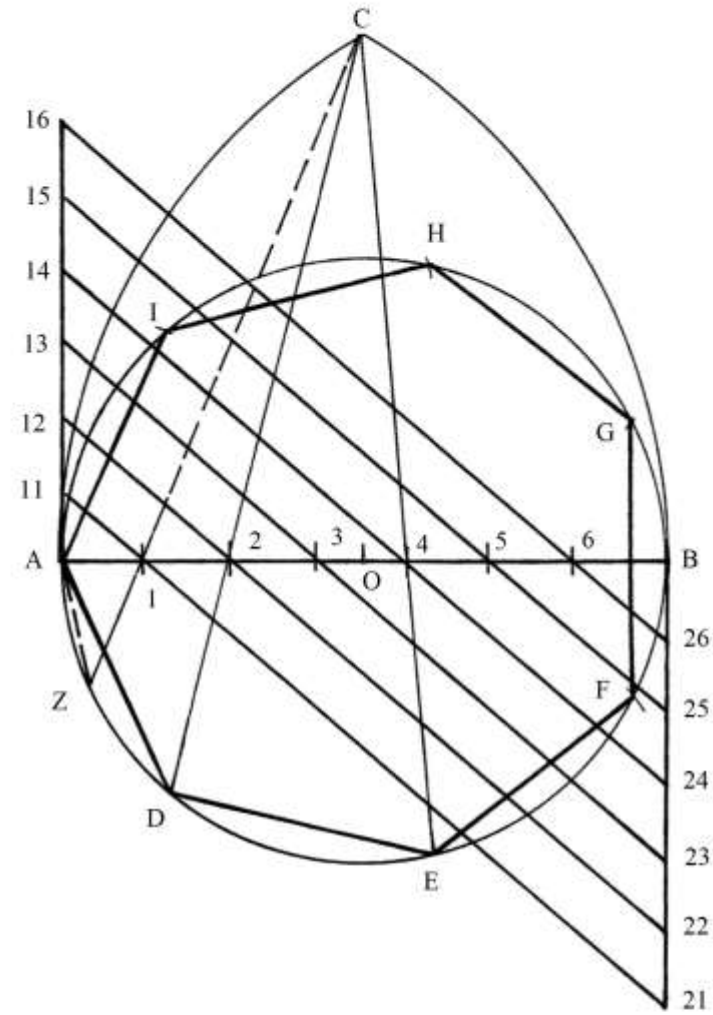



D
E
6
C
F
H
60°
B
A


E
D
F
7
6
C
G
5
4
45°
H
60°
A
B

Ettagono regolare inscritto con il metodo della divisione del diametro

La figura che segue descrive la costruzione di un ettagono regolare, con un’approssimazione accettabile in campo tecnico:



AB è il diametro della circonferenza di centro O. Ai suoi estremi devono disegnate due tangenti alla circonferenza, perpendicolari al diametro. Esse sono orientate in direzioni opposte.

I segmenti a-16 e B-21 devono avere uguale lunghezza e vanno divisi in 6 (7-1) parti uguali.

Collegare le coppie di punti come in figura:

* 11-21;
* 12-22;
* 13-23;
* 14-24;
* 15-25;
* 16-26.

Il fascio di linee parallele taglia il diametro AB in *sei* punti: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. AB è diviso in *sette* parti uguali.

Con centro in A e in B e raggio AB, disegnare i due archi che si intersecano nel punto C. Da questo punto tracciare tre linee passanti per i punti 1, 2 e 4 fino a intersecare la circonferenza nei punti Z, D e E.

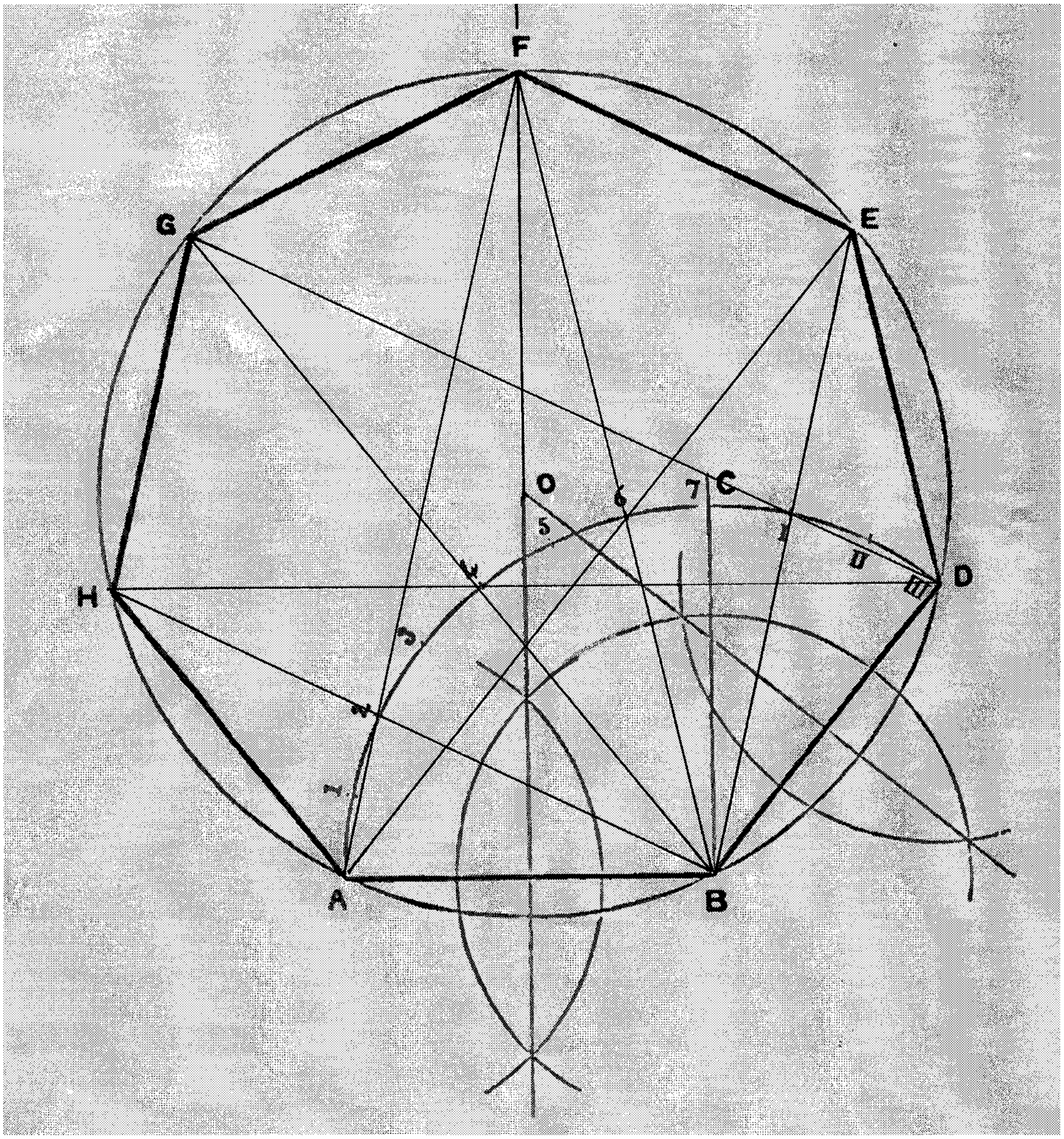
La corda DE è un lato dell'ettagono inscritto. Riportando la sua lunghezza sulla circonferenza si ottiene l'ettagono approssimato ADEFGHI.

Questa costruzione può essere impiegata per disegnare il poligono inscritto di 14 lati (*tetradecagono*): la corda AZ è la lunghezza del lato del tetradecagono approssimato.

Ettagono approssimato dato il lato

AB è il lato dell'ettagono da costruire. Con centro in A e in B costruire l'asse del segmento AB e disegnare una linea abbastanza lunga: su di essa si troveranno il centro della circonferenza nella quale sarà inscritto l'ettagono e il vertice superiore del poligono.

Con centro in B e raggio AB disegnare un ampio arco di circonferenza:



A partire dal punto B innalzare la perpendicolare al segmento AB: il punto C è l’intersezione fra l’arco di circonferenza e la perpendicolare.

L’angolo ABC è ampio 90°: l’arco AC deve essere diviso in 7 parti uguali. Ciascun arco piccolo (A-1, 1-2, ecc.) sottende un angolo di 90/7° = 12,86°, valore che può essere approssimato a circa 13°.

Effettuare la divisione con un buon goniometro: i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 (quest’ultimo coincidente con il punto C) sono i divisori.

Sullo stesso arco di circonferenza, a partire da C, riportare per *tre* volte la lunghezza della corda 6-7: si ottengono i punti I, II e III.

Il punto III coincide con il vertice D dell’ettagono.

Con centro in B e in D costruire l’asse del segmento BD: esso taglia l’asse di AB in un punto, O, che è il centro della circonferenza circoscritta all’ettagono.

Con il compasso riportare la lunghezza di AB sulla circonferenza: i vertici mancanti dell’ettagono sono E, F, G e H.

Le diagonali tracciate da sette vertici intersecano i punti 2, 4, 6 e I.

Ettagono inscritto – metodo di Johnson Pimpinelli

La costruzione che è di seguito descritta deriva da uno studio sul sito neolitico di Stonehenge in Gran Bretagna.

Secondo due ricercatori (l’inglese Anthony Johnson e l’italiano Alberto Pimpinelli) la struttura neolitica sarebbe basata su di un poligono di 56 lati: essi hanno riassunto i risultati delle loro indagini in un articolo del 2008 (“Pegs and Ropes: Geometry at Stonehenge”, reperibile all’indirizzo

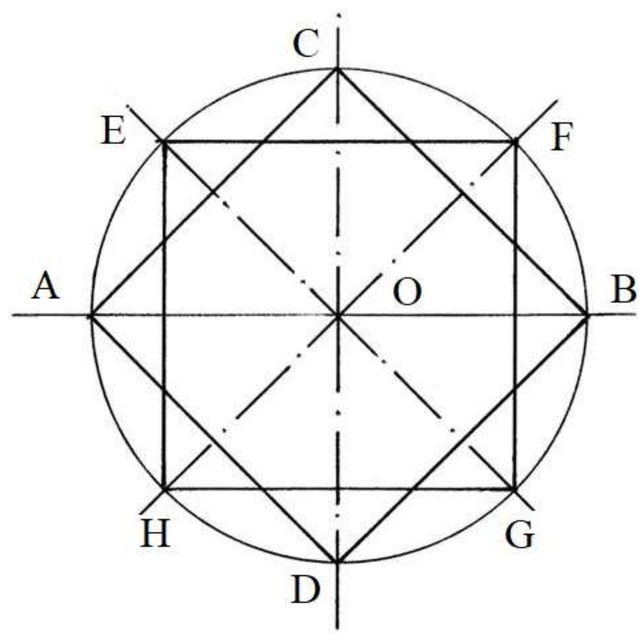
core.kmi.open.ac.uk/download/pdf/287968 come 287968.pdf).

Il poligono di 56 lati può essere costruito facilmente a partire da quello con 7 lati: 56 è un multiplo perfetto di 7.

Johnson e Pimpinelli propongono la costruzione dell’ettagono approssimato qui spiegata.

Tracciare due diametri fra loro perpendicolari che si intersecano nel punto O.

Costruire le bisettrici dei quattro angoli retti in O. Sono così fissati i punti A, B, C, D, E, F, G e H.

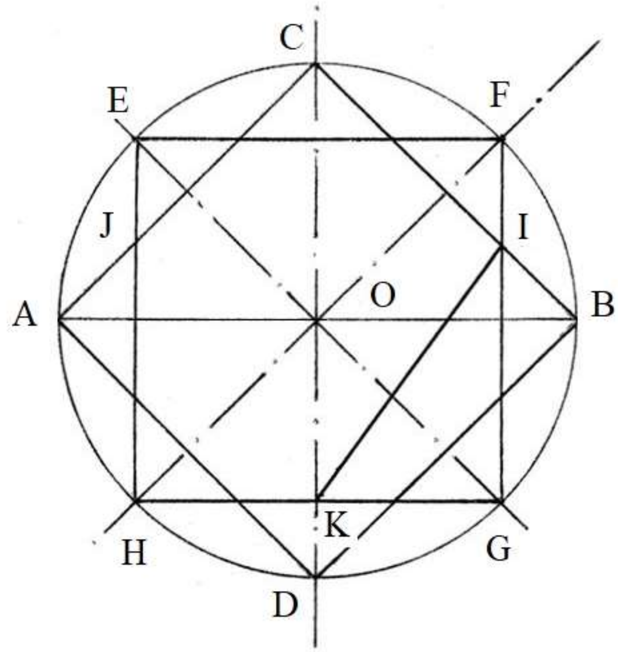


Disegnare i quadrati inscritti ACBD e EFGH.

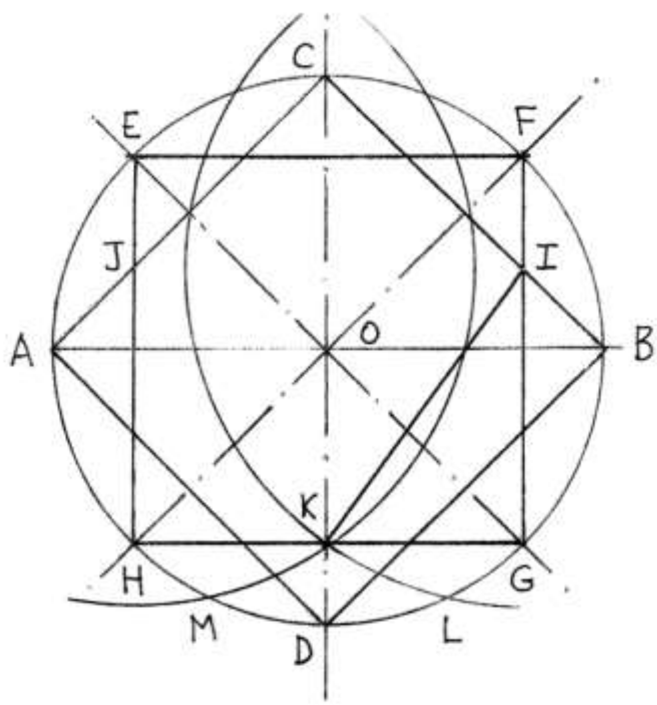
I due quadrati si intersecano in *otto* punti, due dei quali (I e J) sono necessari per la costruzione dell’ettagono.

Il punto K è l’incrocio fra il diametro CD e il lato HG.

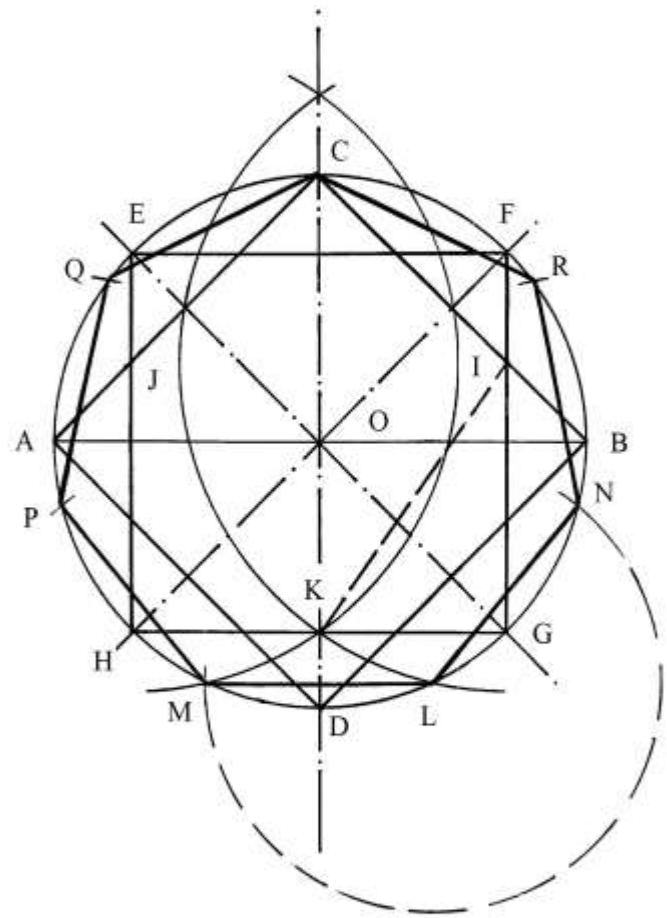
Tracciare il segmento IK:



Fare centro nei punti I e J con apertura IK (= JK) e disegnare due archi che tagliano la circonferenza in *quattro* punti, due dei quali (L e M) servono alla costruzione dell'ettagono:



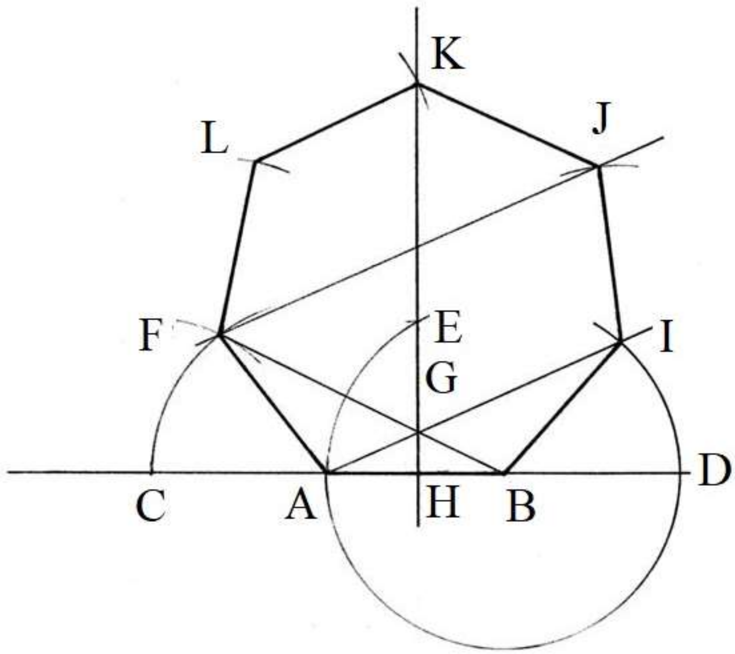
La corda ML è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono inscritto: riportandola sulla circonferenza si ottiene il poligono cercato LMPQCRN.



Altre costruzioni approssimate dell'ettagono

AB è il lato dell'ettagono da costruire: il risultato sarà un poligono *equilatero* (perché avrà i lati di uguale lunghezza) ma non *equiangolo* (perché gli angoli interni saranno leggermente diversi).

Prolungare il segmento AB verso destra e verso sinistra. Fare centro in A e in B e, con raggio AB, tracciare due archi di circonferenza che intersecano la retta orizzontale in due punti, C e D:



Costruire l’asse del segmento AB: esso lo taglia nel punto H e interseca l’arco di centro B in un punto, E.

Con apertura HE, fare centro nel punto C e disegnare un arco che taglia quello di centro A in un nuovo punto, F, che è un altro vertice dell’ettagono.

Collegare i punti F e B: il segmento FB incontra l’asse di AB in un punto, G.

Tracciare una linea passante per A e per G: essa incontra l’arco di centro in B in un punto, I, che è un nuovo vertice dell’ettagono.

Dal punto F condurre una linea parallela a AI. Con apertura AB (= IB), fare centro in I e disegnare un arco che incontra la linea appena tracciata in un punto, J, ulteriore vertice dell’ettagono.

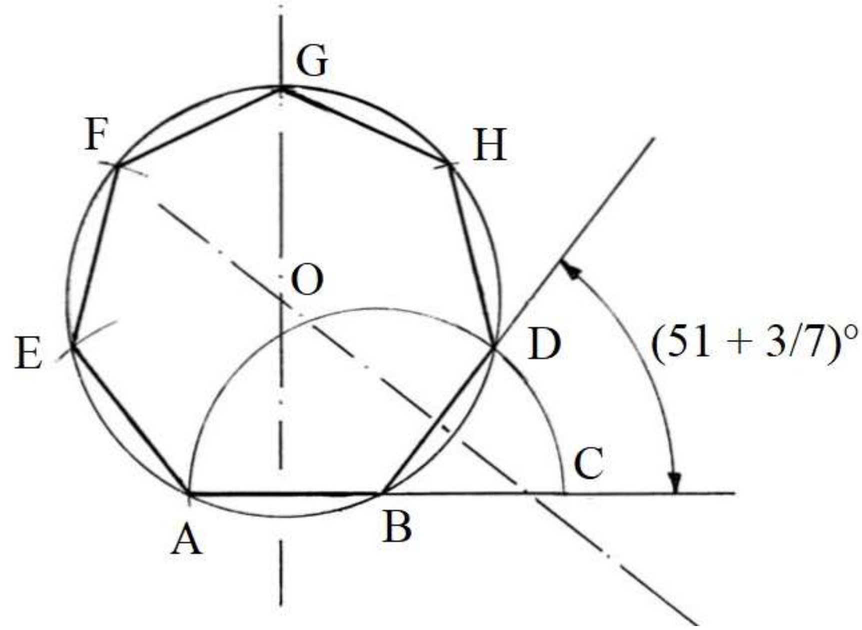
Con la stessa apertura, fare centro in J e disegnare un arco che taglia l’asse di AB in un punto, K.

Sempre con apertura AB, fare centro nei punti F e K e tracciare due archi che si intersecano nel punto L.

Il poligono AFLKJIB è l’ettagono approssimato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

AB è il lato dell’ettagono da costruire. Prolungare AB verso destra.



Fare centro in B e con raggio BA tracciare una semicirconferenza fino a stabilire il punto C.
Costruire l'angolo DBC di ampiezza uguale a:

DBC = 360/7 = (51 + 3/7)° ≈ 51,43°.

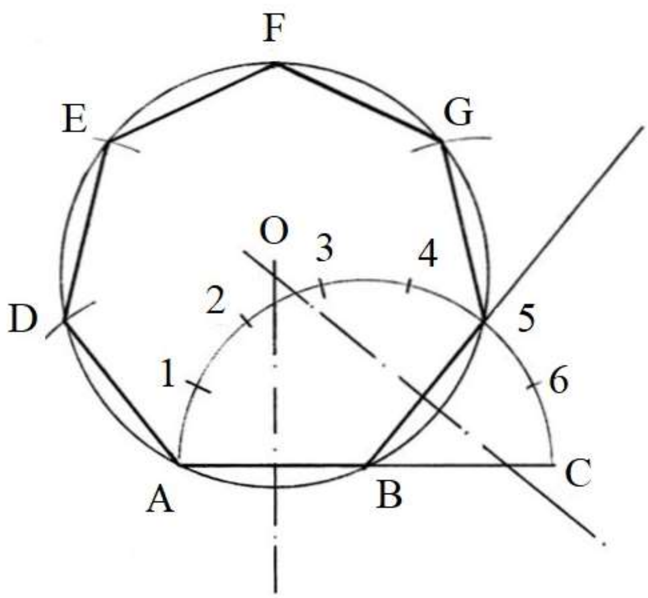
L'angolo ABD è l'angolo interno dell'ettagono e la sua ampiezza è data dalla formula:

ampiezza angolo interno = 180 * (numerolati – 2)/numerolati = 180 * (7 – 2)/7 =
= (900/7)° = (128 + 4/7)° ≈ 128,57°.

L'angolo DBC è *supplementare* di ABD rispetto a 180°.
Il segmento BD è un altro lato dell'ettagono.
Costruire gli assi dei segmenti AB e BD: essi si intersecano in un punto, O, che è il centro della circonferenza circoscritta all'ettagono.
Fare centro in O e con raggio OA = OB = OD tracciare una circonferenza e riportarvi la lunghezza di AB.
Il poligono AEFGHDB è l'ettagono *approssimato*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

AB è il primo lato dell'ettagono da costruire. Prolungare verso destra il segmento AB:



Fare centro nel punto B e, con raggio BA, tracciare una semicirconferenza che fissa il punto C. Risulta AB = BC.

Dividere l'arco AC in *sette* parti uguali: il numero *sette* è lo stesso dei lati del poligono da costruire. I punti A, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e C dividono l'angolo ABC (180°) in sette parti uguali. Ciascun angolo è ampio:

$$(180/7)° = (25 + 5/7)° \approx 25,71°.$$

Disegnare una semiretta uscente da B e passante per il punto 5: il segmento B-5 è il secondo lato dell'ettagono.

Costruire gli assi dei segmenti AB e B-5: essi si intersecano in un punto, O, che è il centro del cerchio circoscritto all'ettagono da tracciare.

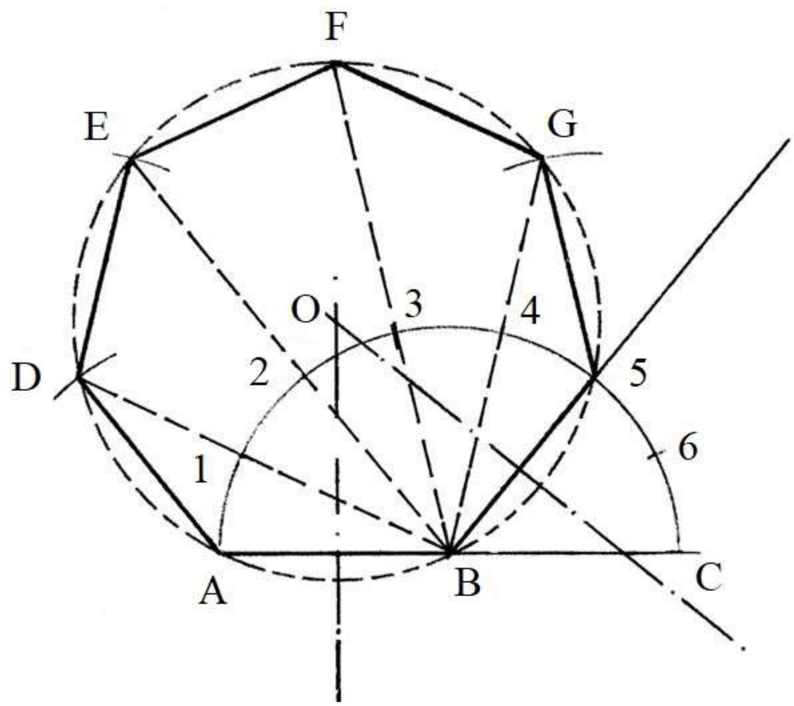
Disegnare la circonferenza di centro O e raggio OA = OB = O-5.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AB. Il poligono ADEFG5B è l'ettagono *approssimato*.

Tracciando una semiretta da O per il punto 6 viene avviata la costruzione del *tetradecagono* approssimato inscritto nello stesso cerchio di centro O.

In generale, il metodo appena descritto può essere impiegato per costruire poligoni con numero di lati maggiore di 7.

Nella precedente costruzione *approssimata* dell'ettagono, il poligono può essere tracciato con una serie di semirette uscenti dal punto B e passanti per i punti 1, 2, 3 e 4 (in figura sono tratteggiate):



Riportando in successione (da A a D, da D a E, da E a F, da F a G) la lunghezza di AB si ottiene il poligono senza la necessità di determinare il punto O e di disegnare la circonferenza di raggio OA = OB (che in figura è tratteggiata, per memoria).

I sistemi monetari

I tagli delle monete metalliche e quelli delle banconote rispettano la regola nota come *numeri dei soldi*: ciascun valore è ottenuto moltiplicando quello del precedente taglio per 2 o per 2,5.

Questa regola è rispettata sia per le monete sia per banconote emesse in euro. Infatti sono coniate *otto* monete denominate in euro: 1, 2, 5, 10, 20 e 50 centesimi e 1 e 2 euro.

Inoltre sono emesse banconote in *sette* differenti tagli: 5, 10, 20, 50, 100, 200 e 500 euro.

Le monete da 10, 20 e 50 centesimi sono coniate in una lega che è un *ottone*, chiamata *oro nordico*: ovviamente, essa non contiene tracce di oro.

La lega ha la seguente composizione:

* rame 89%;
* alluminio 5%;
* zinco 5%;
* stagno 1%.

La lega è anallergica, antimicotica (protegge da lieviti e muffe) e abbastanza resistente all’ossidazione.

Le dimensioni fisiche delle tre monete realizzate con questa lega sono:

Monete	Diametro in *mm*	Spessore in *mm*	Massa in *grammi*
10 centesimi	19,75	1,93	4,1
20 centesimi	22,25	2,14	5,74
50 centesimi	24,25	2,38	7,8

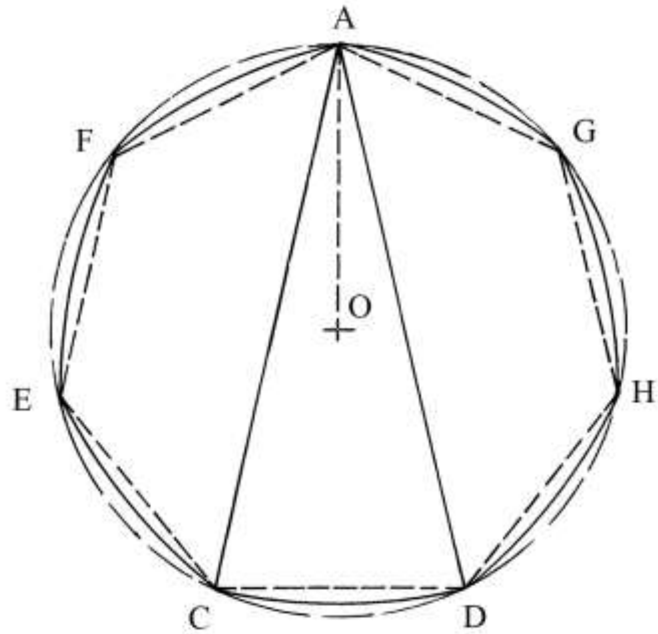
Le tre monete sono facilmente distinguibili: in particolare, quella da 20 centesimi ha la forma di un piccolo cilindro recante *sette* tacche incise sul bordo, quasi a formare i vertici di un ettagono regolare inscritto in un cerchio e a differenza delle monete da 10 e da 50 centesimi non ha il bordo zigrinato.

La Gran Bretagna ha emesso due monete metalliche da 20 e da 50 *penny* (*pence* in inglese), e cioè centesimi di sterlina.

La moneta da 50 penny è stata emessa nel 1969 e quella da 20 penny nel 1982. Entrambe sono coniate in leghe di rame e nichel. La figura che segue riproduce il *recto* e il *verso* di una moneta da 20 penny emessa nel 1983:

Le due monete hanno forma ettagonale sono due poligoni di Reuleaux, dal nome dell'ingegnere tedesco Franz Reuleaux (1829-1905).

Lo schema che segue mostra l'origine di questo poligono:

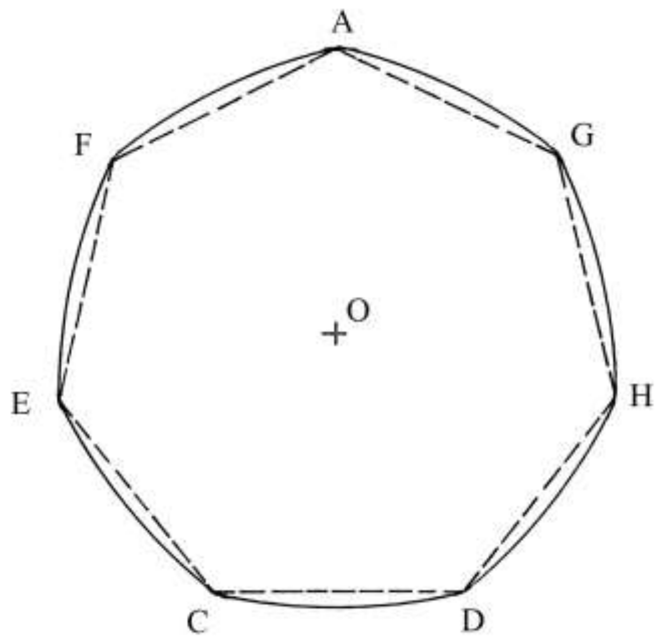


AGHDCEF è un ettagono inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA: sia il poligono che il cerchio sono disegnati *tratteggiati*.

Nel cerchio (e nell'ettagono) è disegnato il triangolo isoscele ACD: la sua base, CD, è un lato dell'ettagono. I due lati obliqui, AC e AD, sono due diagonali del poligono.

Con centro in A e raggio AC = AD tracciare un arco da C a D: con la stessa apertura fare centro negli altri sei vertici dell'ettagono e raccordare le coppie di vertici opposti con altri sei archi. Il risultato è il poligono curvilinee AGHDCEF, rappresentato con tratto continuo nella figura: esso ha una posizione intermedia fra quella del cerchio circoscritto e quella dell'ettagono inscritto ed un ettagono di Reuleaux.

Le monete inglesi da 20 e da 50 penny hanno questa forma:



Da un semplice esame di queste figure si nota che un poligono di Reuleaux ha una superficie più grande di quella del poligono regolare sul quale è costruito, ma è più ridotta rispetto alla superficie del cerchio circoscritto: si ha un risparmio di materiale rispetto alla forma circolare.

Confrontando il poligono ettagonale di Reuleaux con l'ettagono corrispondente si nota l'arrotondamento degli spigoli vivi.

Infine, e la proprietà geometrica che possiede è assai importante: i poligoni di Reuleaux hanno *ampiezza costante* e questo ne facilita l'uso nelle macchine automatiche.

\- APPROFONDIMENTO -

Ecco come Alex Bellos ("Il meraviglioso mondo dei numeri", pp. 213-216) descrive l'introduzione delle monete ettagonali in Gran Bretagna:

"Il millenovecentosessantotto è stato un anno di rivolgimenti culturali in tutto il mondo e la Gran Bretagna non è rimasta immune al subbuglio generazionale. In maggio il Tesoro ha, annunciato l'introduzione di una nuova moneta rivoluzionaria.

Il pezzo da 50 pence doveva sostituire il vecchio biglietto da dieci scellini nell'ambito del passaggio dalla valuta imperiale a quella decimale. Eppure, a distinguere la nuova moneta non era la sua denominazione, bensì la sua forma poco ortodossa.

«Non è una moneta qualunque, - ammoniva il "Daily Mirror". - Diamine, il Decimal Currency Board è arrivato al punto di definirla un "ettagono a lati curvi"». Mai prima d'allora un paese aveva adottato una moneta con sette lati. E mai prima di allora una nazione si era indignata tanto per l'estetica di una forma geometrica …

… Ciò nonostante, il pezzo da 50p entrò in circolazione nell'ottobre del 1969…

Anzi, nel gennaio del 1970, il «Times» riferiva che «l'ettagono curvilineo sembra essersi conquistato un certo affetto». Oggi il pezzo da 50p è un'apprezzata particolarità della storia britannica. Quando, nel 1982, è stato introdotto il pezzo da 20p, era anch'esso ettagonale.

Le monete da 50p e 20p sono, in effetti, dei classici del design. La loro forma a sette lati le rende facilmente distinguibili dalle monete circolari, il che è di particolare utilità ai ciechi e agli ipovedenti. Sono anche le monete più stimolanti tra quelle in circolazione. Il cerchio non è l'unica forma rotonda interessante in matematica …

Hough G. Conway, ex presidente dell'Institution of Mechanical Engineers, membro del Decimal Currency Board del Tesoro britannico … propose una curva non circolare di ampiezza costante per la moneta di 50p perché questa proprietà la rendeva adatta per le macchine a gettone. Queste distinguono le monete misurandone il diametro e il pezzo da 50p aveva la stessa larghezza quale che fosse la sua posizione (una moneta quadrata, sia pure con i lati arrotondati, non può mai avere un'ampiezza costante, ed è per questo che non esistono monete a quattro lati). I setti lati sono stati scelti perché considerati i più gradevoli da un punto di vista estetico …"

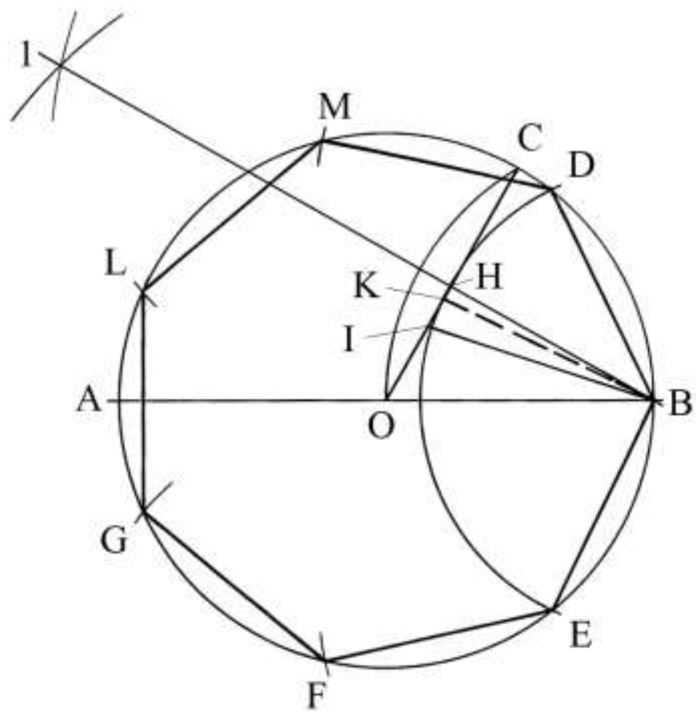
- -

Ettagono inscritto – metodo di Plemelj

La costruzione disegna un ettagono *approssimato*: fu proposta dal matematico sloveno Josip Plemelj (1873-1967).

Tracciare una circonferenza con centro in O e il diametro orizzontale AB.

Con lo stesso raggio OA fare centro in B e disegnare un arco da O a C:



Tracciare il raggio OC.

Costruire la bisettrice dell'angolo OBC che passa per il punto esterno 1.

Il punto H è intermedio fra O e C.

Dividere in *tre* parti uguali il segmento OH: il segmento IH è lungo 1/3 di OH.

L’angolo HBI dovrebbe essere diviso in 3 parti uguali; con una certa approssimazione possiamo semplificare ricorrendo alla divisione in tre parti uguali del segmento HI: il segmento KH è lungo 1/3 di HI.

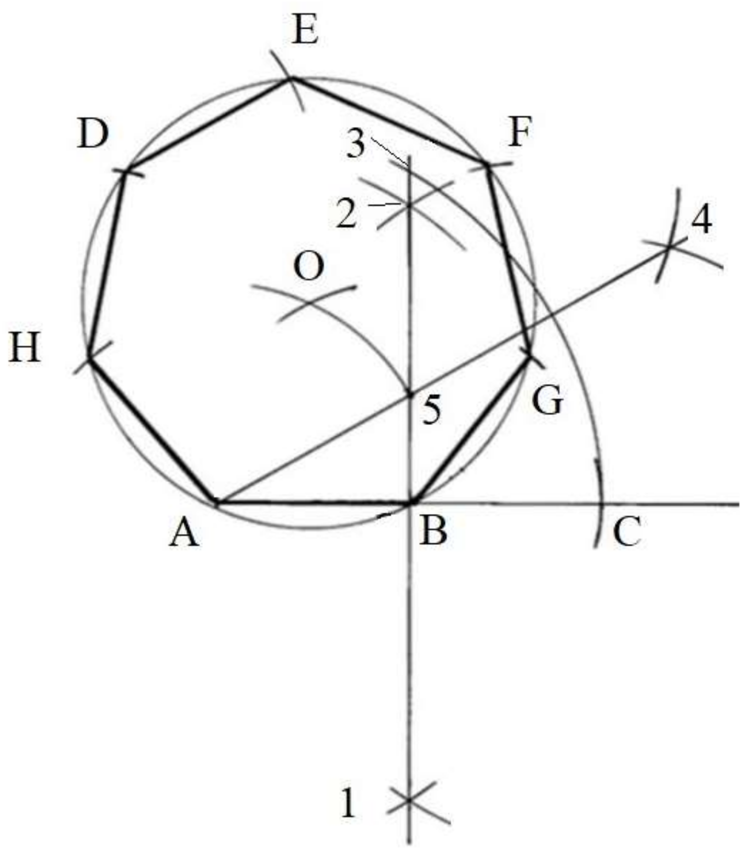
Il segmento BK è lungo quanto il lato del poligono e riportare la sua lunghezza sulla circonferenza.

DBEFGLM è l’ettagono cercato.

<u>Ettagono dato il lato</u>

Anche la costruzione che segue è *approssimata*.

Disegnare il lato orizzontale AB e prolungarlo verso destra; con centro in B e raggio BA, disegnare una semicirconferenza che taglia in C il prolungamento del lato:



Fare centro in A e in C per costruire l’asse del segmento che passa per i punti 1, B e 2.

Con centro in A e raggio AC, disegnare un arco che sale da C fino a incontrare nel punto 3 l’asse del segmento AC.

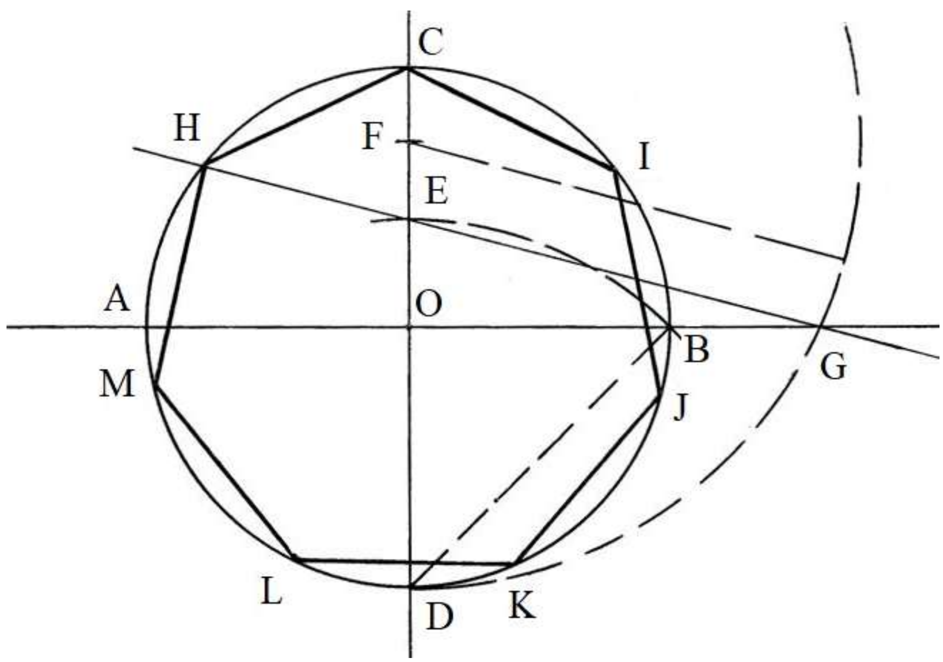
Fare centro in C e in 3 per realizzare la bisettrice dell’angolo 3AC, passante per A e per 4: essa taglia l’asse del segmento nel punto 5.

Con centro in A e in B e raggio A-5 tracciare due archi che si intersecano nel punto O, centro del cerchio circoscritto all'ettagono.

Dopo aver disegnato la circonferenza di raggio OA = OB, a partire da A e da B riportare su di essa la lunghezza del lato AB: il poligono ABGFEDH è l'ettagono cercato.

Un'altra costruzione dell'ettagono approssimato

Disegnare una circonferenza con centro in O e i due diametri perpendicolari AB e CD:



Tracciare la corda DB. Fare centro nel punto D e con raggio DB disegnare un arco da B fino a incontrare CD nel punto E.

Determinare il punto medio di EC: è F.

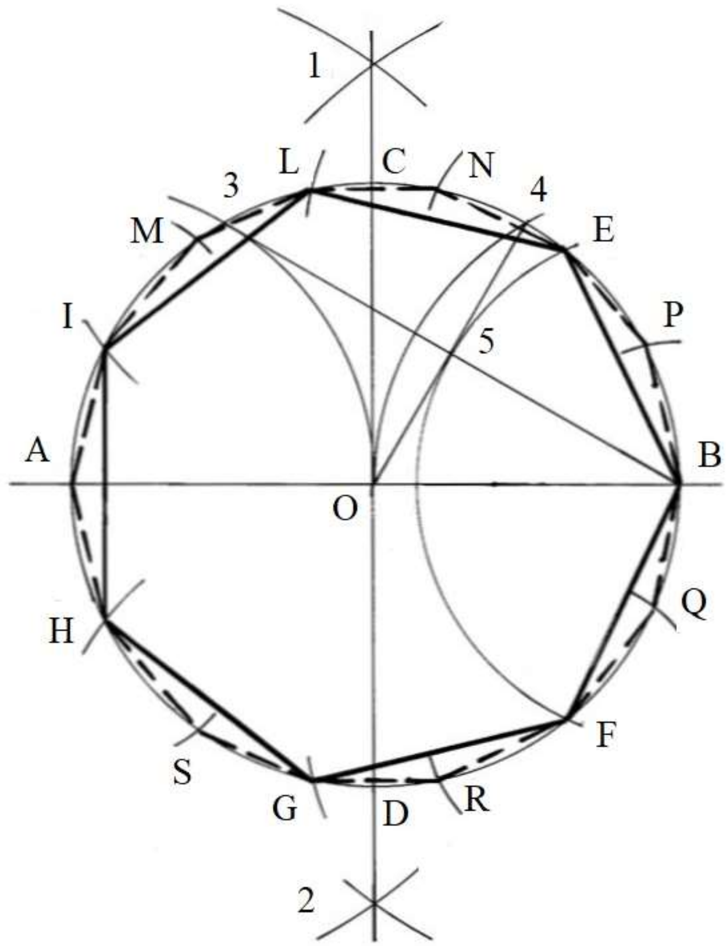
Fare centro nel punto F e con raggio FD tracciare un arco da D fino a tagliare la retta orizzontale nel punto G.

Per i punti E e G condurre una retta che interseca la circonferenza in un punto, H.

La corda CH è un lato dell'ettagono approssimato inscritto CIJKLMH.

Costruzione approssimata dell'ettagono e del tetradecagono inscritti

Disegnare una circonferenza con centro in O e tracciare i due diametri perpendicolari AB e CD:



Con la stessa apertura di compasso, OA=OB, fare centro in A e in B e disegnare gli archi (O-3) e (O-4).

Collegare i punti (3 e B) e (O e 4): le due corde si intersecano nel punto 5. Il segmento B-5 è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono.

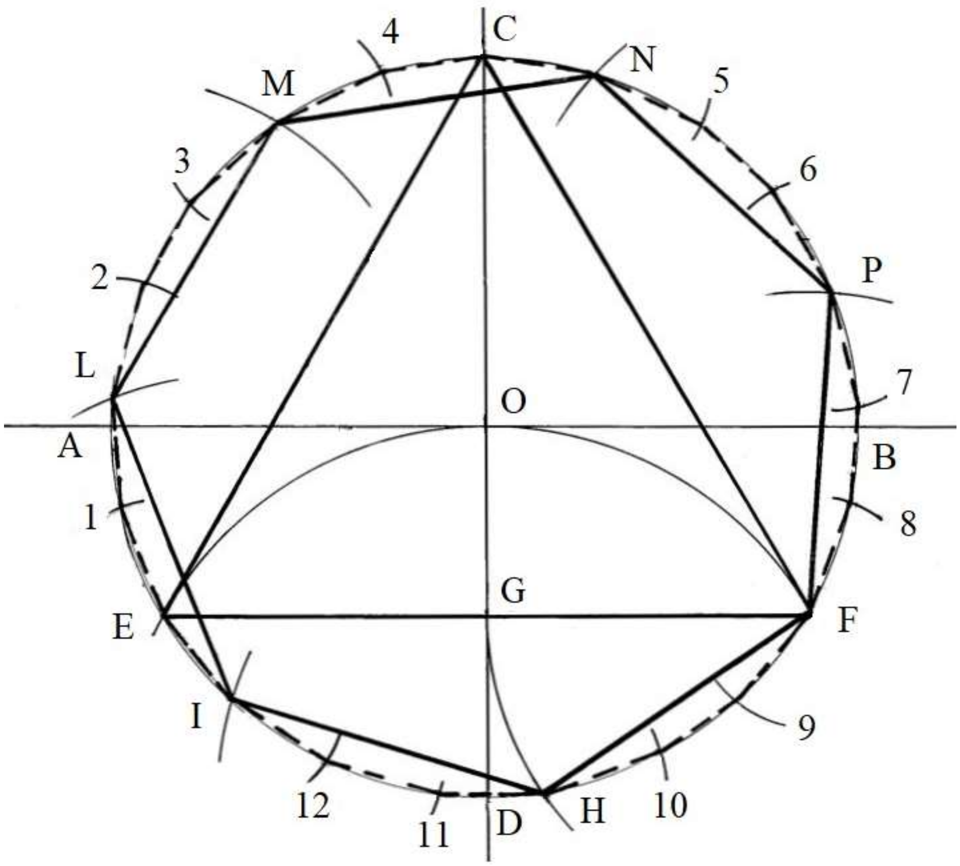
Riportando con il compasso la lunghezza di B-5 si ricavano i punti E, F, G, H, I e L: il poligono BFGHILE è l'ettagono inscritto.

I segmenti AI = AH corrispondono a due lati del tetradecagono inscritto. Riportando la loro lunghezza a partire dai vertici dell'ettagono si ottengono i punti M, N, P, Q, R e S che sono i vertici mancanti del tetradecagono e i cui lati sono disegnati tratteggiati.

Poligono di 21 lati

È possibile disegnare questo poligono inscritto (*endeicosagono*) usando le costruzioni del triangolo equilatero e dell'ettagono inscritti nello stesso cerchio.

Disegnare una circonferenza con centro in O e tracciare i diametri perpendicolari AB e CD:



Con lo stesso raggio OA, facendo centro in D, disegnare l'arco che passa per O e che taglia la circonferenza nei punti E e F; tracciare la corda EF: essa interseca il diametro verticale nel punto G.

Come insegnato da Erone, il segmento EG (= GF) è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono.

Il poligono FHILMNP è l'ettagono.

EFC è il triangolo equilatero che ha il vertice F in comune con l'ettagono.

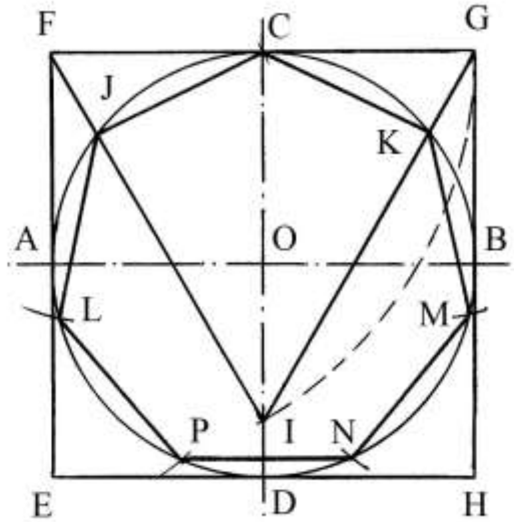
Il segmento IE è la lunghezza *approssimata* del lato del poligono di 21 lati. Riportandola lungo la circonferenza e collegando con segmenti tratteggiati i vari punti, si ottiene il poligono F-9-10-H-11-12-I-E-1-L-2-3-M-4-C-N-5-6-P-7-8, formato da 21 lati.

È evidente come il triangolo equilatero abbia i suoi tre vertici, E – F – C, comuni con il poligono di 21 lati.

Tre costruzioni dell'ettagono inscritto di Jon Allen

Nel suo libro "*Drawing geometry*", Jon Allen propone tre costruzioni approssimate dell'ettagono inscritto.

Il primo metodo è presentato nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA e i due diametri perpendicolari AB e CD.

Tracciare il quadrato EFGH circoscritto alla circonferenza.

Con raggio FG fare centro in F e disegnare un arco da G fino a tagliare CD nel punto I.

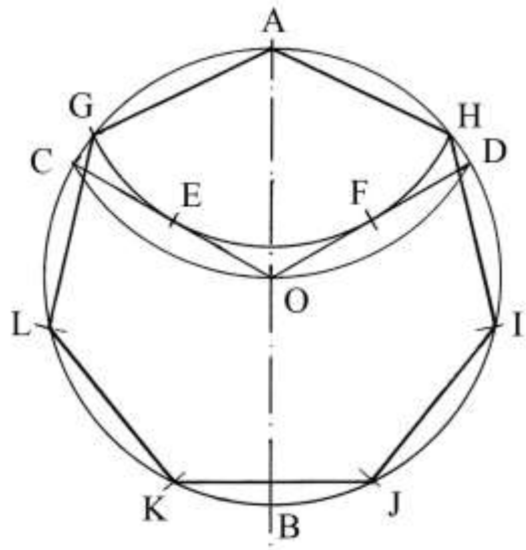
FGI è un triangolo equilatero: i suoi lati FI e GI tagliano la circonferenza in due punti, J e K, che sono due vertici dell'ettagono.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di CJ = CK.

CKMNPLJ è l'ettagono inscritto approssimato: il lato PN è leggermente più corto degli altri sei.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo è spiegato con lo schema che segue:



Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA e il diametro verticale AB.

Con raggio OA fare centro in A e tracciare l'arco CD e i raggi OC e CD.

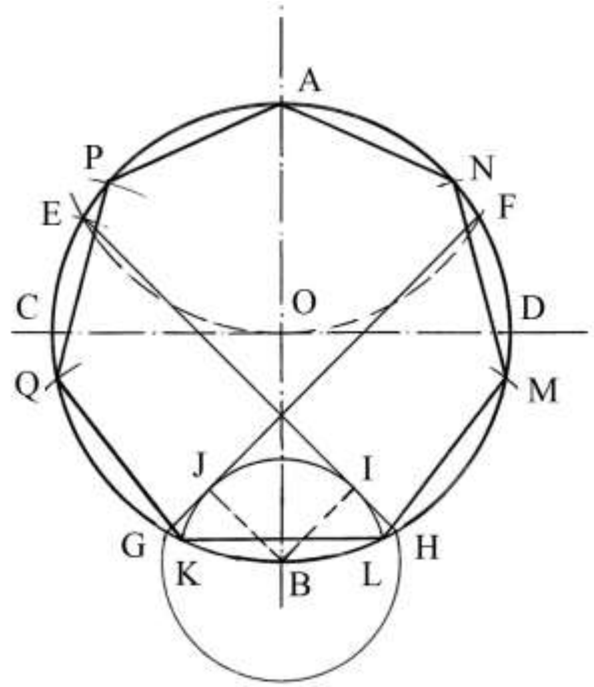
Fare centro in A e disegnare un arco tangente ai raggi OC e OD nei punti E e F. L'arco taglia la circonferenza in G e in H: AG e AH sono i primi due lati dell'ettagono.

Riportare la lunghezza di AG sulla circonferenza: AHIJKLG è l'ettagono regolare approssimato inscritto.

La soluzione è simile ad una attribuita a Abu'l – Wafa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il terzo metodo è descritto con il grafico che segue:



Disegnare una circonferenza con centro in O e raggio OA e i due diametri perpendicolari AB e CD.

Fare centro in A e, con raggio AO, tracciare l'arco che taglia la circonferenza in E e in F. Con il compasso misurare la lunghezza della corda CE = DF.

Con raggio uguale alla corda CE fare centro in B e disegnare un arco che incontra la circonferenza nei punti G e H.

Collegare le coppie di punti E-H e F-G.

Dal punto B condurre le perpendicolari alle corde EH e GF: sono fissati i punti I e J.

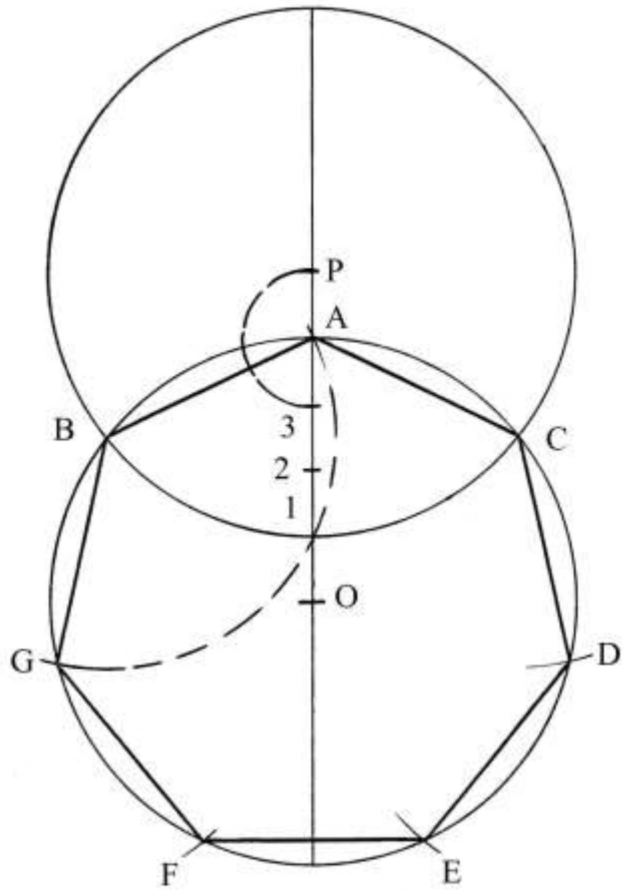
Fare centro in B e con raggio BI = BJ tracciare un arco che taglia la circonferenza in K e in L: la corda KL è il primo lato dell'ettagono inscritto KLMNAPQ.

Le costruzioni di Miranda Lundy

Nel volume colletivo *Quadrivium*, citato in bibliografia, sono tradotti dall'inglese diversi libri: due di essi sono di Miranda Lundy. Il secondo è un piccolo libro dedicato alla "*Geometria sacra*": si tratta della traduzione di un libro, "*Sacred Geometry*", pubblicato da questa Autrice nel 1998 a New York presso l'editore Wooden Books/Walker & Company.

L'autrice dedica due pagine alle costruzioni dell'ettagono e presenta quattro diversi metodi. Il primo è un'applicazione *neusis*, il secondo è descritto nel primo schema che segue, il terzo è un'applicazione del metodo della corda dei Druidi e il quarto è anch'esso di seguito spiegato.

Il secondo metodo della Lundy muove da un cerchio di centro O e raggio OA:



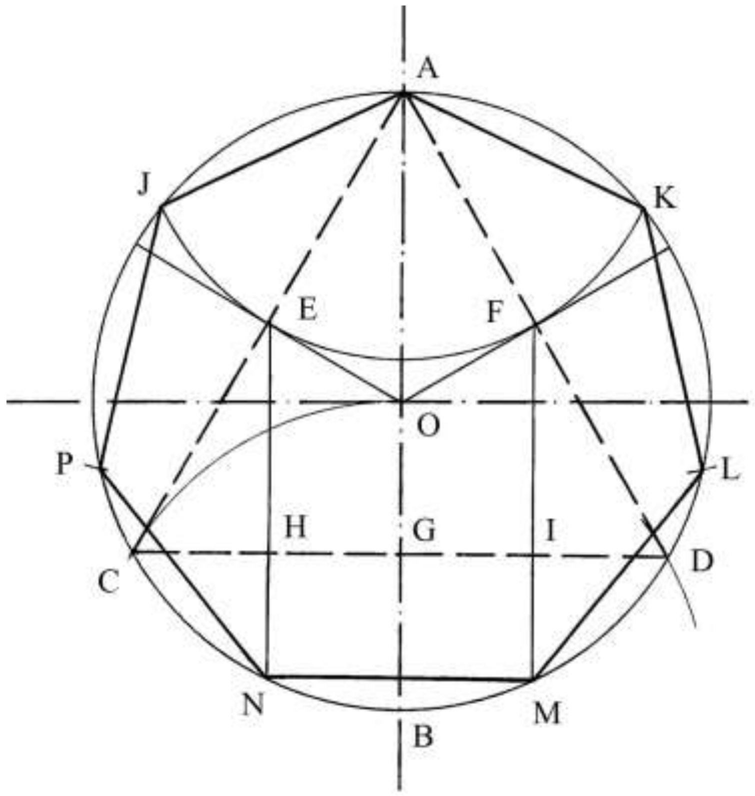
Tracciare il diametro verticale passante per O e per A.

Dividere il raggio OA in *quattro* parti uguali. Fare centro in A e con raggio A-3 disegnare una semicirconferenza che fissa il punto P. Con raggio P-1, che è lungo quanto il raggio OA, tracciare una seconda circonferenza che interseca la prima nei punti B e C: le corde AB e AC sono due lati dell'ettagono.

Riportare la lunghezza di AB sulla prima circonferenza: BACDEFG è l'ettagono approssimato inscritto nel cerchio di centro O.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La quarta costruzione della Lundy è derivata da quella di Erone:



Disegnare la circonferenza di centro O e il diametro verticale AB. Con apertura BO fare centro in B e tracciare l'arco che fissa i punti C e D:

ACD è un triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

Fissare i punti medi dei lati del triangolo: sono E, F e G. Dividere i segmenti CG e GD in due parti uguali: sono stabiliti i punti H e I.

Disegnare i segmenti EH e FI e prolungarli fino a incontrare la circonferenza nei punti N e M: la corda NM è un lato dell'ettagono.

Fare centro in A e con raggio AE=AF tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti J e K.

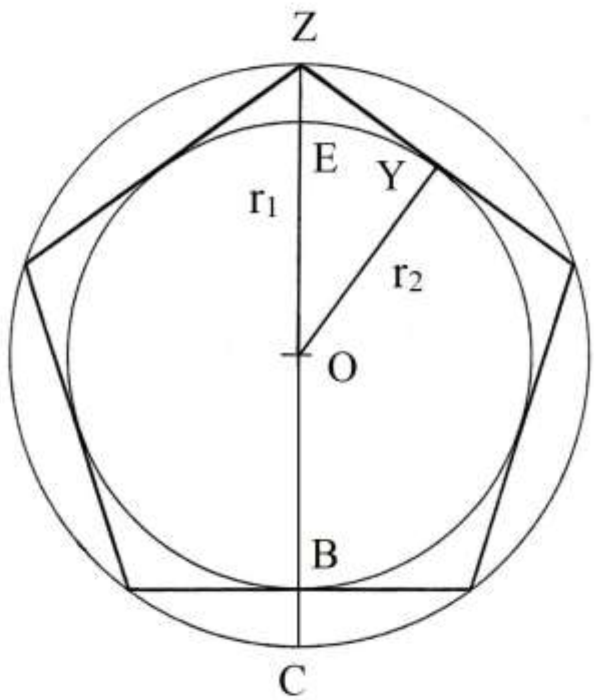
I segmenti AE, EC, AF, FD, CG, GI e HI hanno uguale lunghezza che è pari a quella del lato dell'ettagono.

Riportare la lunghezza di AJ sulla circonferenza: AKLMNPJ è l'ettagono regolare approssimato inscritto.

Costruzione dell'ettagono approssimato – metodo di Reynolds

Il geometra e grafico americano Mark A. Reynolds (che talvolta si firma *Marcus the Marinite*) in un suo articolo citato in bibliografia ha proposto una complessa costruzione dell'ettagono approssimato che, come basi di partenza, utilizza un pentagono regolare e un triangolo equilatero concentrici.

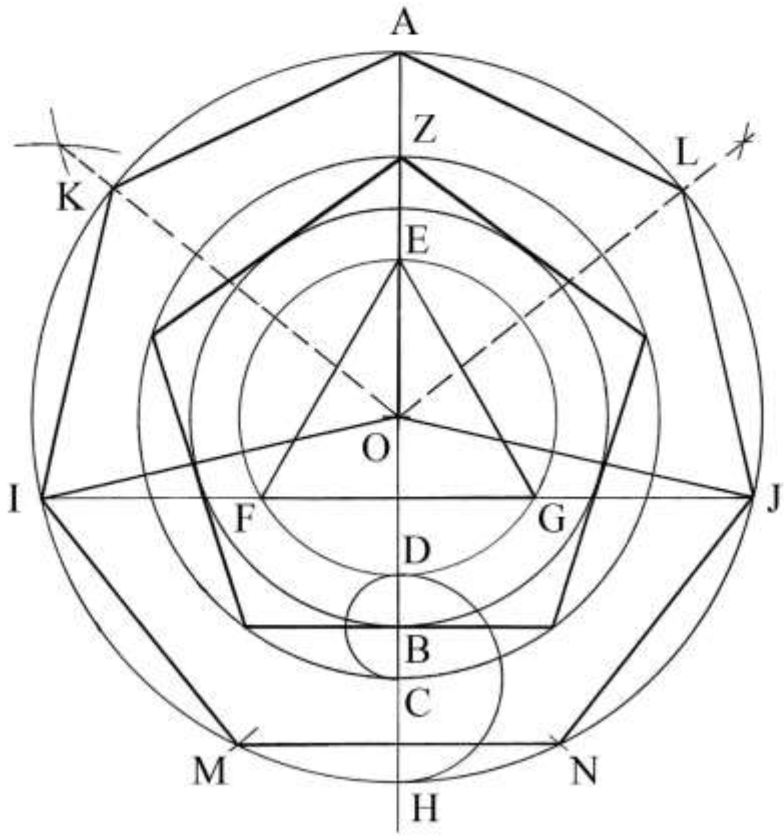
Disegnare un pentagono regolare con centro in O, le circonferenze *circoscritta* (passante per i cinque vertici) e *inscritta* (tangente nel punto Y). Disegnare i due raggi r_1 (OZ) e r_2 (OY).



Le lunghezze dei raggi delle due circonferenze concentriche sono legate da una precisa relazione:

$$OZ : OY = 2 : \phi.$$

Con centro in B e raggio BC disegnare una semicirconferenza che taglia in D il diametro verticale:



Facendo centro in O, con raggio OD, tracciare una circonferenza; con la stessa apertura di compasso fare centro in D e disegnare due archi che tagliano l’ultima circonferenza nei punti F e G. Tracciare i lati del triangolo equilatero EFG.

Prolungare verso destra e verso sinistra FG:

Con centro in C e raggio CD disegnare una semicirconferenza che intercetta in H il diametro verticale.

Fare centro in O e con raggio OH disegnare una circonferenza: essa determina i punti A, I e J.

Costruire la bisettrice dell’angolo AOJ: essa taglia la circonferenza esterna nel punto L.

Il segmento AL (= LJ) è la lunghezza del lato dell’ettagono approssimato.

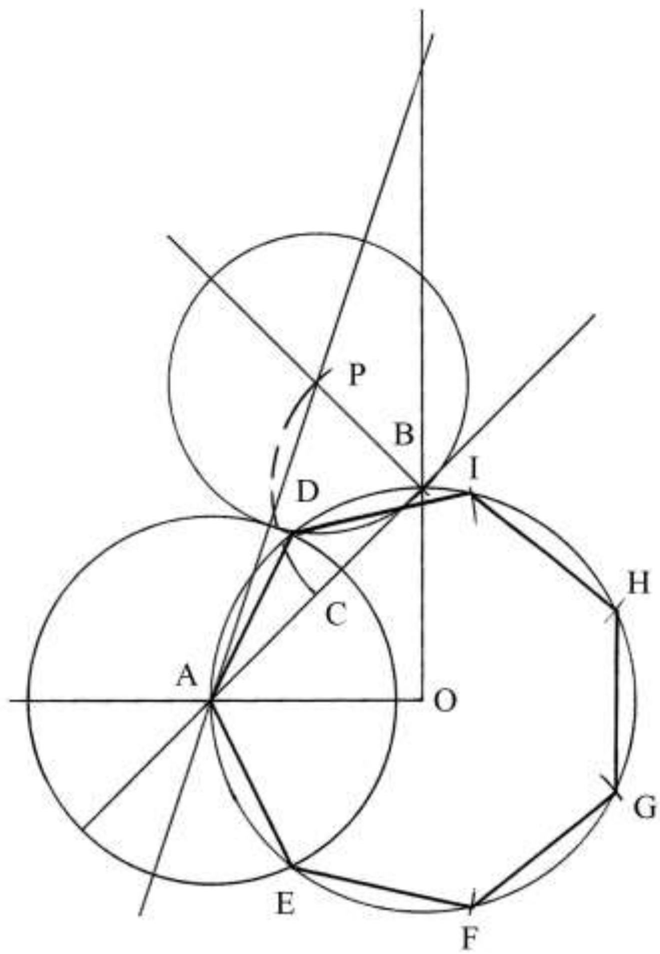
Riportando sulla circonferenza esterna, con il compasso, la lunghezza di AL si ottiene il poligono ALJNMIK.

Benché si tratti di una costruzione approssimata, il metodo di Reynolds fornisce un risultato molto preciso.

Le costruzioni di Robin Hu dell’ettagono regolare

Nel suo sito https://hptgn.tripod.com (visitato il 9 giugno 2021), il geometra cinese Robin Hu propone alcune costruzioni dell’ettagono, oltre a quelle di altri poligoni. Ne riproduciamo due.

La prima utilizza *tre* circonferenze:



La circonferenza iniziale ha centro in O e raggio OA=OB: i due raggi sono fra loro perpendicolari.

Tracciare la corda AB che è l’ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ABO. Determinare il punto medio di AB: è C.

Dal punto B condurre la perpendicolare alla retta passante per A e per B. Fare centro in B e, con raggio BC, disegnare un arco che sulla perpendicolare fissa il punto P.

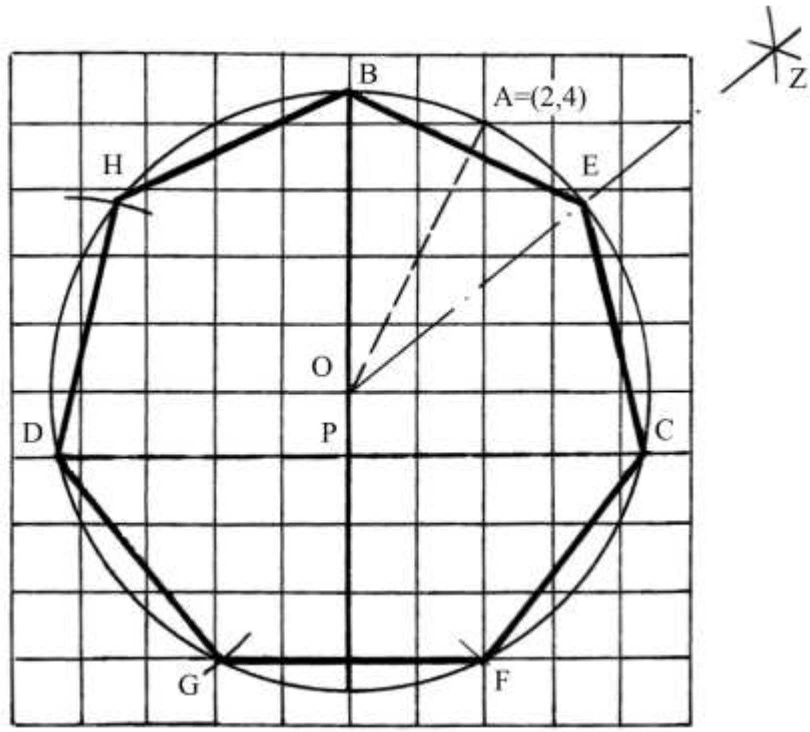
Con raggio PB fare centro in P e tracciare la seconda circonferenza che taglia la prima in D: la corda AD è il primo lato dell’ettagono.

Infine, fare centro in A e con raggio AD disegnare la terza circonferenza che incontra la prima in E: la corda AE è il secondo lato del poligono. Riportare la sua lunghezza sulla prima circonferenza: AEFGHID è l’ettagono inscritto nel cerchio di centro O.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo richiede l'uso di una griglia quadrata basata sul piano cartesiano e contenente 10 righe di 10 quadrati.

Il punto O è l'origine degli assi.



Fissare il punto di coordinate (2, 4): è A.

Tracciare il segmento OA: è il raggio del cerchio in cui sarà inscritto l'ettagono.

Disegnare la circonferenza di centro O: essa taglia l'asse delle ordinate in un punto, B, che è un vertice del poligono.

Per il punto P, che ha coordinate (0, -1) tracciare una linea orizzontale: essa incontra la circonferenza in due punti, C e D, che sono altri due vertici dell'ettagono.

Costruire la bisettrice dell'angolo BOC: essa passa per il punto Z e interseca la circonferenza in un punto, E. Le corde BE e EC sono due lati dell'ettagono. Riportare la loro lunghezza sulla circonferenza: BECFGDH è l'ettagono.

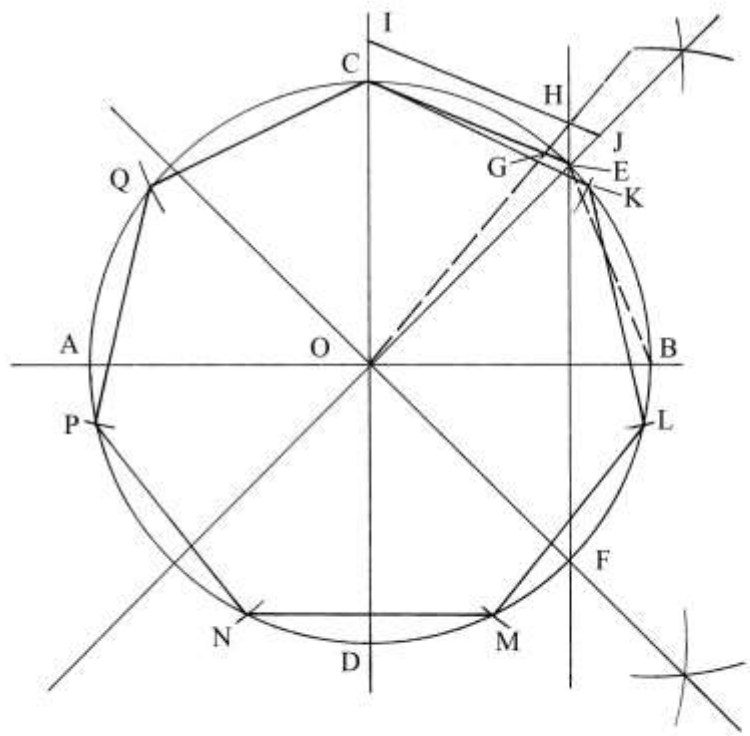
Il raggio del cerchio in cui è inscritto il poligono è convenzionalmente lungo:

$$OA = \sqrt{(2^2 + 4^2)} = \sqrt{(4 + 16)} = \sqrt{20} = 2*\sqrt{5}.$$

I due metodi di García-Salgado

In un articolo citato in bibliografia, il ricercatore messicano Tomás García-Salgado propone due costruzioni approssimate dell'ettagono inscritto.

La prima è presentata nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA e i due diametri fra loro perpendicolari AB e CD.

Costruire le bisettrici degli angoli COB e BOD.

CE e EB sono due lati dell'*ottagono* inscritto, non completato.

Per il punto E tracciare una parallela a CD: è EF.

Dividere il lato CE in *sette* parti uguali: il segmento GE è lungo 1/7 di CE.

Per il punto G disegnare una semiretta uscente da O: essa incontra il prolungamento di EF nel punto H.

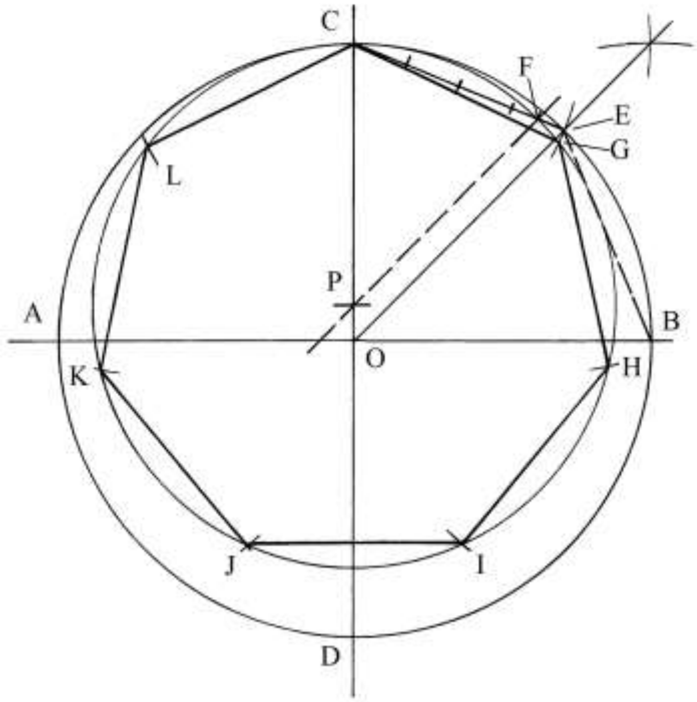
Per H tracciare la parallela al lato CE: il segmento è IJ.

IJ è la lunghezza del lato dell'ettagono approssimato inscritto che va riportata sulla circonferenza.

CKLMNPQ è l'ettagono regolare approssimato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo è inizialmente uguale al primo: vanno disegnati una circonferenza di centro O e i diametri perpendicolari AB e CD.



Costruire la bisettrice dell'angolo COB: la semiretta uscente da O taglia la circonferenza nel punto E. CE e EB sono due lati dell'*ottagono* inscritto, anche in questo caso non completato.

Dividere in *otto* parti uguali il lato CE: il segmento FE è lungo 1/8 di CE.

Per il punto F tracciare una parallela alla semiretta OE: essa incontra CD nel punto P, centro del cerchio in cui va inscritto l'ettagono.

Fare centro in P e con raggio PF=PC disegnare una seconda circonferenza che è tangente alla prima nel punto C.

Fare centro in C e con raggio CE tracciare un arco che incrocia la seconda circonferenza in G: CG è il primo lato dell'ettagono e riportando la sua lunghezza sulla circonferenza interna sono stabiliti gli altri vertici del poligono.

CGHIJKL è l'ettagono regolare approssimato inscritto.

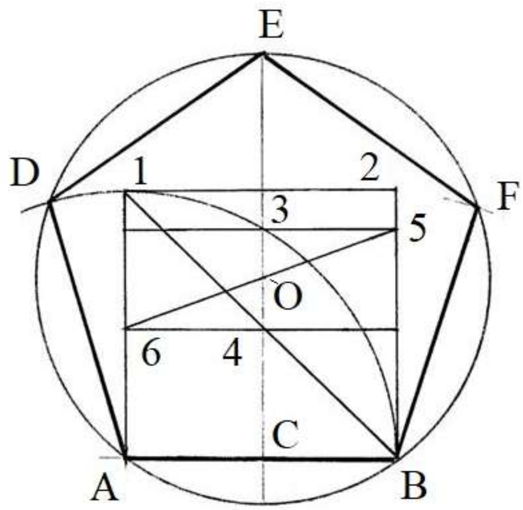
La costruzione è basata su di un principio: i lati dell'ottagono inscritto nel cerchio di centro O hanno la stessa lunghezza dei lati dell'ettagono inscritto nel cerchio di centro P: per rispettare questa condizione, il raggio PC deve essere più corto di quello OC.

Nel caso precedente, i lati dell'ettagono sono *più lunghi* di quelli dell'ottagono: entrambi i poligoni sono inscritti nello stesso cerchio.

Le costruzioni di Shah e Rana

Le costruzioni che seguono sono tratte dal testo di M. B. Shah e B. C. Rana, "Engineering Drawing" (Pearson Education, Singapore, 2005), pagina 16.

AB è un lato di un pentagono regolare da costruire:



Tracciare l’asse del segmento AB: esso lo taglia nel punto medio C. Dai punti A e B innalzare le perpendicolari al lato AB.

Fare centro nel punto A, con raggio AB: l’arco determina i punti 1 e 3.

Costruire il quadrato A-1-2-B e tracciare la diagonale 1-B: essa interseca l’asse del segmento in un punto, 4.

Per i punti 3 e 4 disegnare due segmenti paralleli al lato AB: sono fissati i punti 5 e 6.

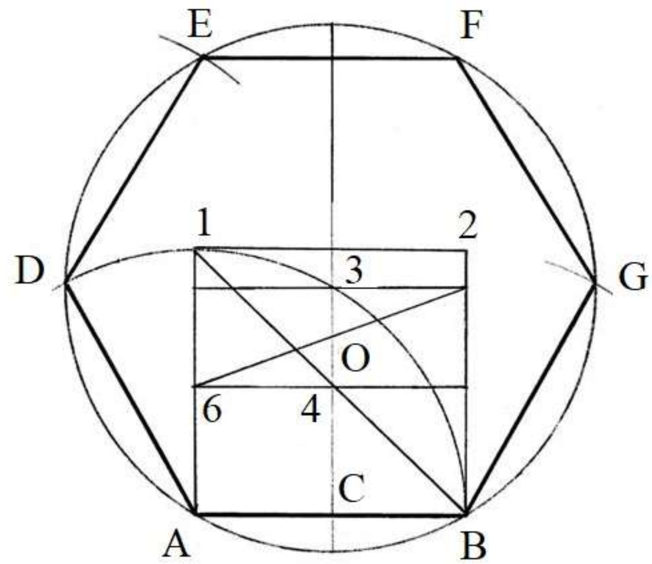
Tracciare il segmento 5-6: esso taglia il segmento 3-4 in *due* parti uguali. Il punto O è l’intersezione dei due segmenti ed è il centro della circonferenza di raggio OA = OB nella quale deve essere inscritto il pentagono.

Fare centro in O e, con raggio OA, disegnare una circonferenza e su di essa riportarvi la lunghezza di AB.

ADEFG è il pentagono.

La costruzione può essere impiegata per ottenere poligoni con un numero di lati maggiore di 5.

Ecco il caso dell’esagono:

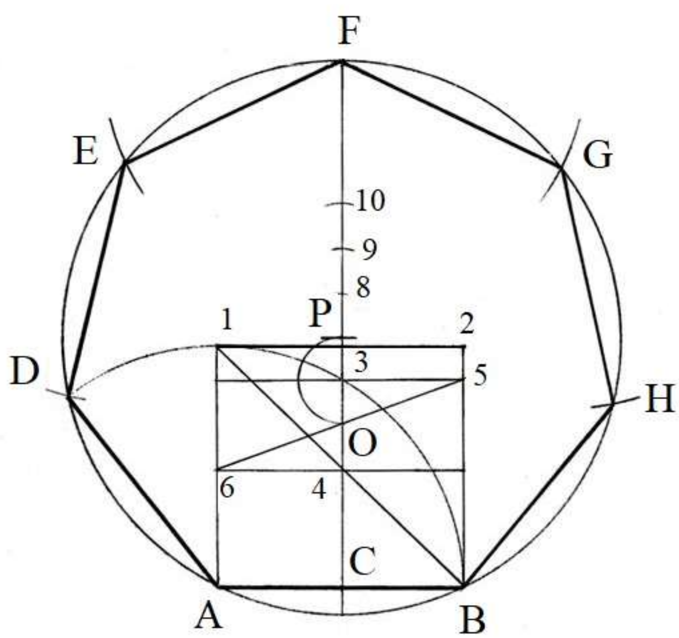


Facendo centro nel punto 3, con raggio 3-A = 3-B, disegnare una circonferenza e riportarvi la lunghezza di AB. Si ottiene l'esagono regolare ADEFGB.

La costruzione dell'esagono viene comunemente ottenuta con un metodo più semplice.

Il metodo di Shah Rana offre notevoli vantaggi quando si tratta di costruire poligoni più difficili e non ricavabili con riga e compasso, ma solo con metodi *approssimati*, come è il caso dei poligoni con 7, 9, 11, 13 lati.

La costruzione dell'*ettagono* è descritta nella figura che segue:

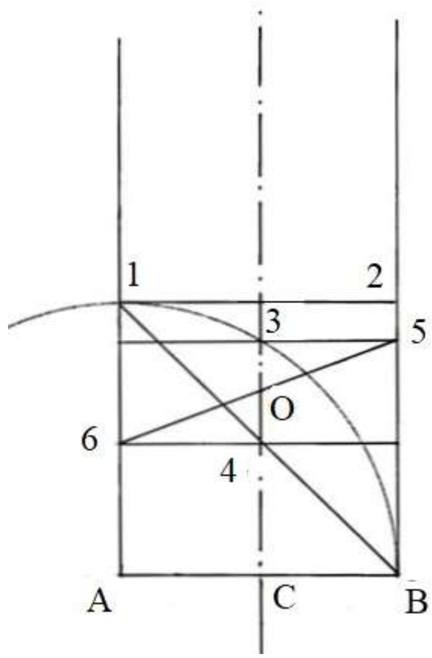


La parte iniziale è identica a quella del pentagono e dell'esagono. Riportare la lunghezza di O-3, verso l'alto, a partire dal punto 3: sono così fissati, in successione, i punti P, 8, 9, 10, …

Fare centro nel punto P e, con raggio PA = PB, disegnare una circonferenza sulla quale riportare la lunghezza di AB.

ADEFGHB è l'*ettagono approssimato*.

Tutte queste costruzioni sono basate sullo schema mostrato nella figura che segue:



La tabella che segue descrive gli ulteriori sviluppi della costruzione:

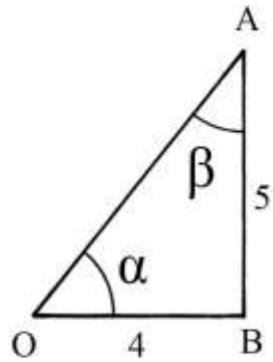
Centro della circonferenza	Raggio della circonferenza	Poligono
O	OA = OB	Pentagono
3	3-A = 3-B	Esagono
P	PA = PB	Ettagono
8	8-A = 8-B	Ottagono
9	9-A = 9-B	Ennagono
10	10-A = 10-B	Decagono

Le costruzioni di McBurney

Nell'articolo citato in bibliografia, la ricercatrice americana Susan McBurney ha descritto alcuni metodi relativi a costruzioni approssimate dell'ettagono. In questo paragrafo ne presentiamo tre.

Uno dei metodi qui non riprodotti deriva dal trattato geometrico di Albrecht Dürer.

Il metodo descritto qui sotto è basato sull'impiego di un triangolo rettangolo con cateti lunghi 4 e 5 unità:



Il triangolo OAB ha cateti lunghi:

* AB = 5;
* OB = 4.

L'ipotenusa OA è lunga:

$OA^2 = AB^2 + OB^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$ e

$OA = \sqrt{41}$.

La tangente dell'angolo α vale:

tg α = AB/OB = 5/4 = 1,25. Ad essa corrisponde un angolo ampio

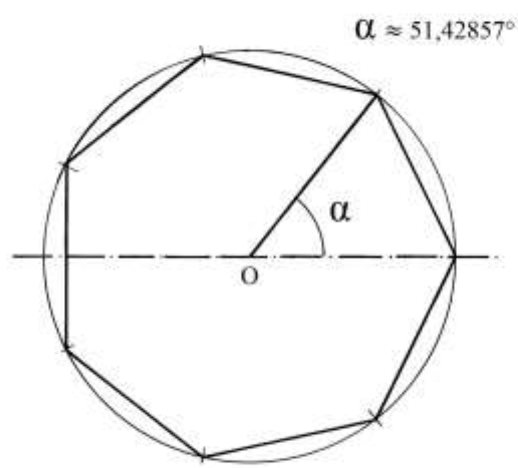
α ≈ 51,3402°.

L'angolo complementare β è:

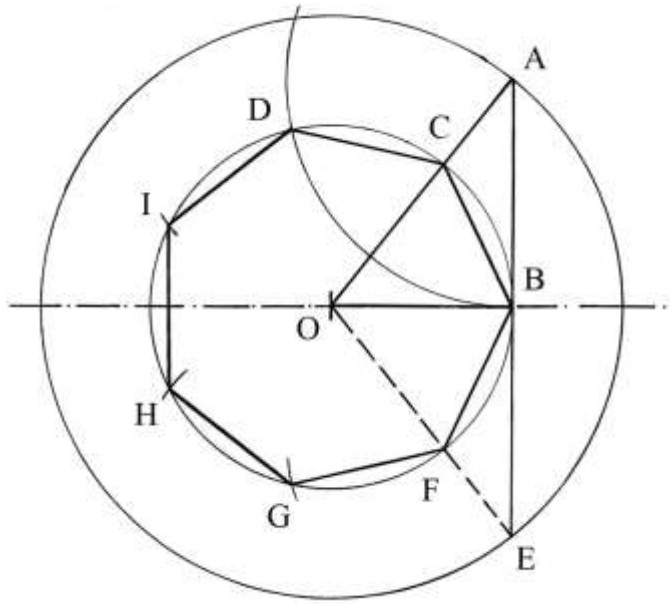
β ≈ 90° – α ≈ 90° – 51,3402° ≈ 38,6598°.

In un ettagono l'angolo al centro è:

α = 360°/7 ≈ 51,42857 e la su ampiezza si avvicina a quella dell'angolo AOB del triangolo rettangolo precedente:



Riprodurre il triangolo OAB e prolungare il cateto OB verso destra e verso sinistra:



Fare centro in O e con raggi OA e OB disegnare due circonferenze concentriche: quella più interna taglia l'ipotenusa OA nel punto C.

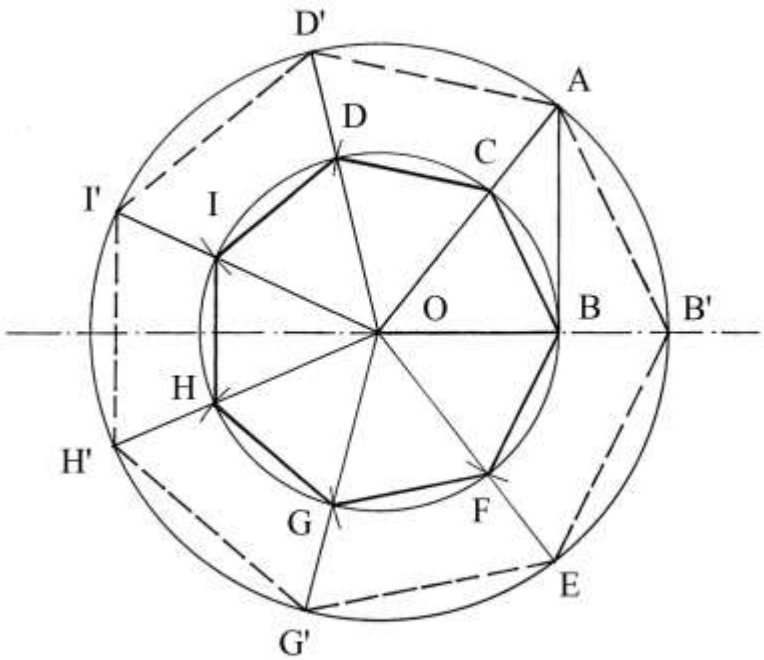
Con raggio AB fare centro in A e tracciare un arco che incontra la circonferenza interna nel punto D: B, C e D sono tre vertici dell'ettagono inscritto nel cerchio di raggio OB.

Costruire il triangolo OBE, simmetrico a quello OBA, rispetto al cateto OB: il punto F è il quarto vertice dell'ettagono.

Riportando sulla circonferenza interna la lunghezza di BC si ottengono i vertici mancanti dell'ettagono approssimato CBFGHID.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

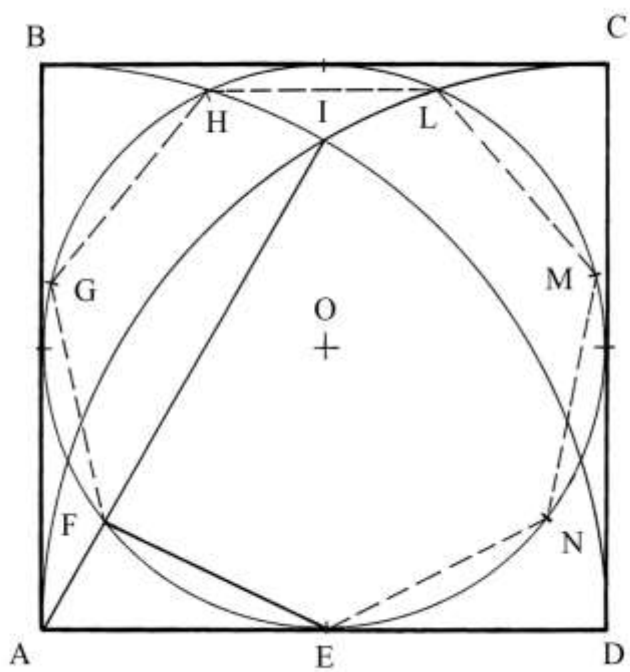
La precedente costruzione può essere utilizzata per disegnare un secondo ettagono concentrico al primo e con i vertici collocati sulla circonferenza esterna:



Dal centro O tracciare i raggi passanti per i vertici C, B, F, G, H, I e D. Essi tagliano la circonferenza nei vertici dell'ettagono esterno che è AB'EC'H'I'D'.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCD è un quadrato con centro nel punto O:



Fissare i punti medi dei quattro lati: E è un vertice dell'ettagono.

Tracciare una circonferenza inscritta nel quadrato, con centro in O e raggio OE.

Con raggio AB fare centro in A e in D e disegnare due archi di circonferenza che si intersecano nel punto I.

Tracciare la corda AI: essa è un lato del triangolo equilatero AID, peraltro non completato.

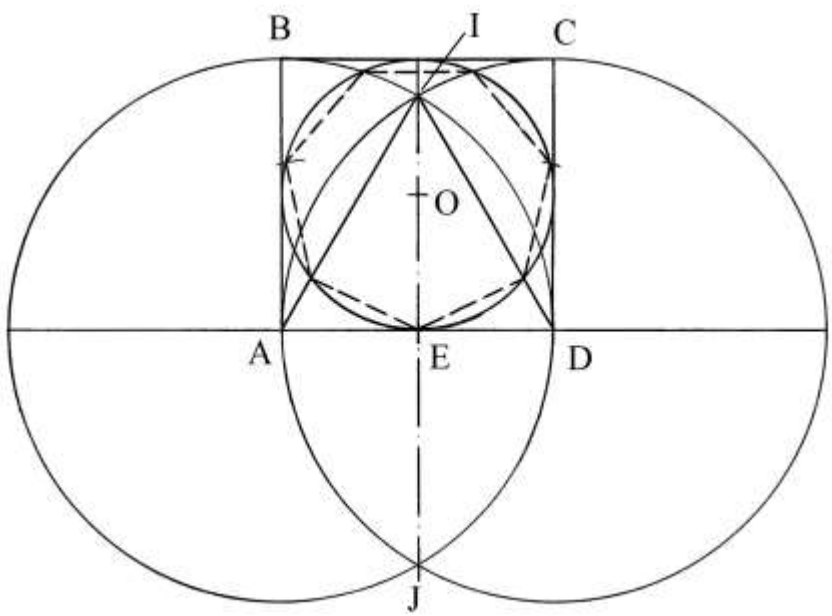
Il segmento AI incontra la circonferenza inscritta nel punto F: la corda EF è il primo lato dell'ettagono inscritto.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di EF.

EFGHLMN è l'ettagono inscritto. La costruzione è approssimata: il lato HL è leggermente più corto degli altri sei.

- APPROFONDIMENTO -

Questa costruzione è una parte di una più ampia, fondata sulla *vesica piscis*:



Due cerchi di raggio uguale, AD, hanno i rispettivi centri – A e D – collocati rispettivamente sull'altra circonferenza.

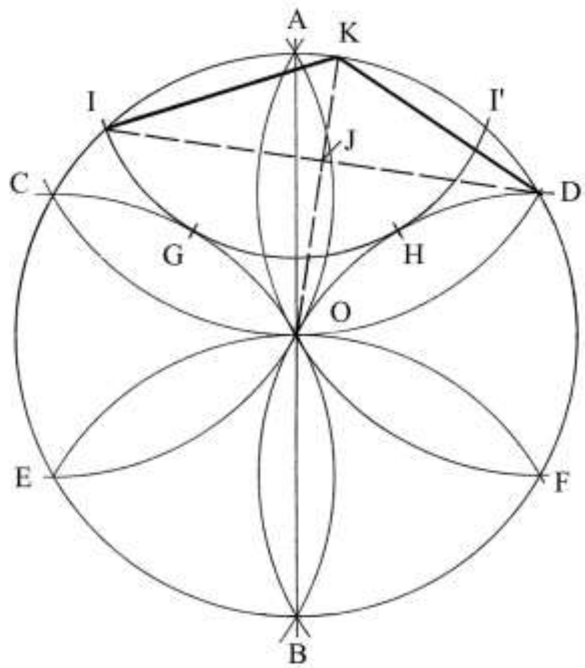
L'area delimitata dagli archi IAJ e IDJ è una superficie curva chiamata *vesica piscis*.

Nel quadrato ABCD è contenuta la costruzione dell'ettagono.

- -

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L’ultima delle costruzioni della McBurney qui riprodotta è un’interessante rielaborazione dei metodi basati su quello di Erone:



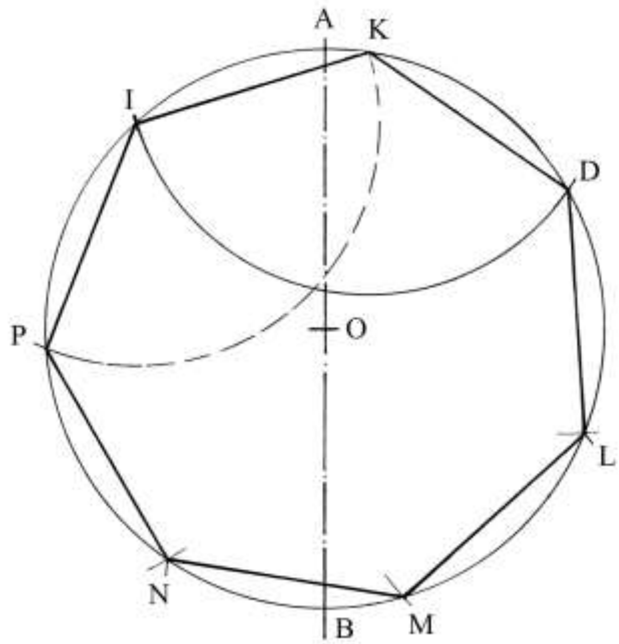
Facendo centro in O, disegnare una circonferenza di raggio OA = OB e il diametro verticale AB.

Con raggio OA fare centro nei punti A e B e tracciare due archi che tagliano la circonferenza nei punti C, D, E e F: fare centro in questi ultimi e, sempre con raggio OA, disegnare altri archi che formano sei petali di una corolla.

Fare centro in A e tracciare un arco che risulti tangente nei punti G e H ai due archi OC e OD: G e H sono i punti medi dei lati AE e AF di un triangolo equilatero inscritto, non disegnati per semplificare la costruzione. Questo ultimo arco taglia la circonferenza in due punti: I e I’.

Tracciare la corda ID e e dal centro O condurre il raggio ad essa perpendicolare OK: il punto J è il medio di ID.

Le corde AK e KD sono i primi due lati dell’ettagono. Riportare la loro lunghezza sulla circonferenza:



IKDLMNP è l’ettagono regolare approssimato inscritto.

- APPROFONDIMENTO -

Le ricerche di Lluís i Ginovart e collaboratori

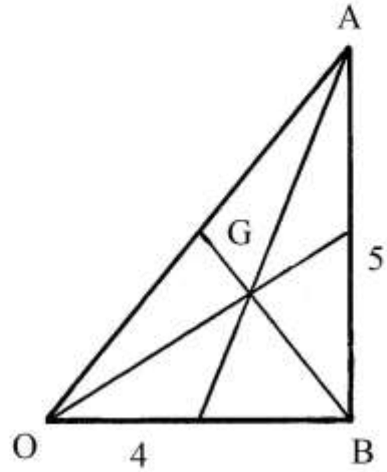
Josep Lluís i Ginovart è un ricercatore catalano, professore di architettura a Tarragona, in Catalogna.

La sua tesi di dottorato del 2002 e numerosi successivi articoli (pubblicati in collaborazione con altri studiosi catalani) sono stati dedicati allo studio dell’architettura medievale, dei progetti e degli strumenti usati dai progettisti e dai costruttori europei, fra i quali assume particolare importanza la *squadra*. Questo utensile era preferito al compasso perché durante l’uso forniva una maggiore stabilità.

Diversi studiosi europei hanno pubblicato interessanti ricerche sulla forma e sull’uso delle squadre, grazie alle incisioni di questi strumenti fatte su lastre tombali e su muri. In alcuni casi esse sono state disegnate in manoscritti.

Pochissimi studi sull’argomento sono stati pubblicati in Italia: è da segnalare al riguardo il grosso e dettagliatissimo lavoro di Renzo Chiovelli, citato in bibliografia.

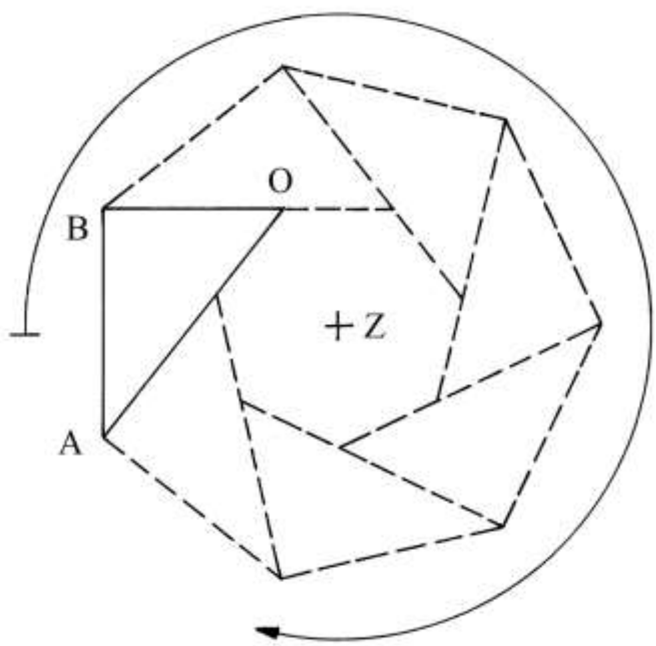
Nell’articolo del 2016 Lluís i Ginovart e collaboratori mostrano l’impiego di una squadra formata da un triangolo rettangolo con cateti lunghi 4 e 5 unità, triangolo già utilizzato dall’americana Susan McBurney:



Come già visto in precedenza, l'ipotenusa (reale o immaginaria dato che certe squadre medievali ne erano prive) è lunga: $OA = \sqrt{41}$.

Il punto G è il baricentro che è collocato nell'intersezione delle tre mediane del triangolo.

Il triangolo OAB (o l'angolo retto ABO) viene fatto ruotare *sette* volte in senso orario, come mostrato nello schema che segue con le successive posizioni tratteggiate:



La seconda posizione porta l'ipotenusa sul cateto più corto, a partire dal vertice B.

Se venisse effettuata un'*ottava* rotazione, il triangolo tornerebbe nella posizione iniziale.

La rotazione genera almeno due ettagoni concentrici rispetto al punto Z: un poligono è esterno e ha lati lunghi quanto il cateto AB e cioè 5 unità. L'ettagono interno ha i vertici definiti dalle varie posizioni che assume il punto O nel corso delle rotazioni: i suoi lati sono lunghi quanto la differenza

$OA - OB = \sqrt{41} - 4$.

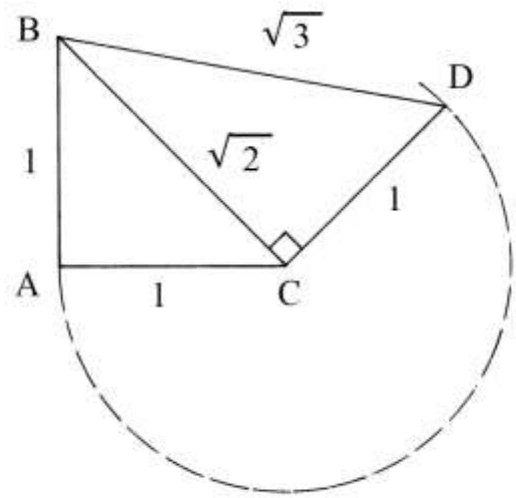
Se fossero rilevate le sette posizioni assunte dal baricentro G nel corso della rotazione, esse sarebbero i vertici di un terzo ettagono di dimensioni intermedie fra quello più esterno e quello più interno e anch'esso concentrico rispetto ai primi due.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le considerazioni che seguono sono basate sul contenuto della Fig. 17.2 a pagina 406 del testo della tesi di Lluís i Ginovart, citata in bibliografia.

Una squadra medievale può essere impiegata per la costruzione di un ettagono regolare approssimato.

Lo schema che segue spiega la costruzione geometrica di √3:



ABC è un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti hanno lunghezza convenzionale "1". L'ipotenusa BC è lunga √2.

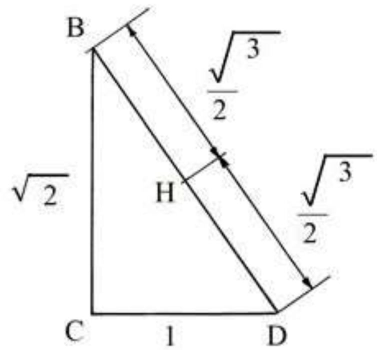
A partire dal vertice C tracciare la perpendicolare a BC e, poi, fare centro in C per disegnare un arco di circonferenza di raggio CA, dal punto A fino a intersecare la perpendicolare in D. BCD è un nuovo triangolo rettangolo i cui lati hanno le seguenti lunghezze:

* il cateto BC è √2;
* il cateto CD è lungo 1;
* l'ipotenusa BD è lunga:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$ e

$BD = \sqrt{3}$.

Riprodurre il triangolo rettangolo BCD e fissare il punto medio, H, della sua ipotenusa:

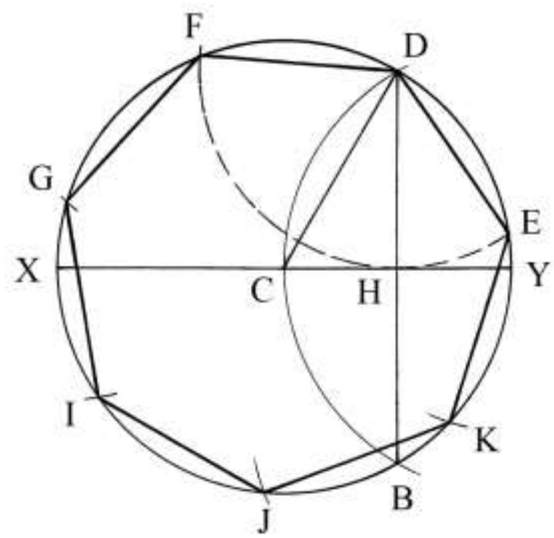


I segmenti BH e HD hanno lunghezza uguale a (√3)/2.

Il metodo di Erone per la costruzione dell'ettagono inscritto seguono una semplice regola: il lato dell'ettagono è lungo (√3)/2 volte il raggio del cerchio circoscritto.

I segmenti BH e HD sono lunghi quanto i lati di un ettagono

Utilizziamo il triangolo BCD e tracciamo una circonferenza di centro C e raggio CD: XY è il diametro orizzontale.



Con apertura uguale al raggio fare centro in Y e disegnare l'arco DCB: la corda DB ha le dimensioni dell'ipotenusa BD del triangolo contenuto nella precedente figura: H è il suo punto medio e CD è un raggio.

DH e HB sono due segmenti lunghi quanto il lato dell'ettagono inscritto.

A partire dal vertice D riportare sulla circonferenza la lunghezza di DH: DFGIJKE è l'ettagono approssimato inscritto nel cerchio di raggio CD.

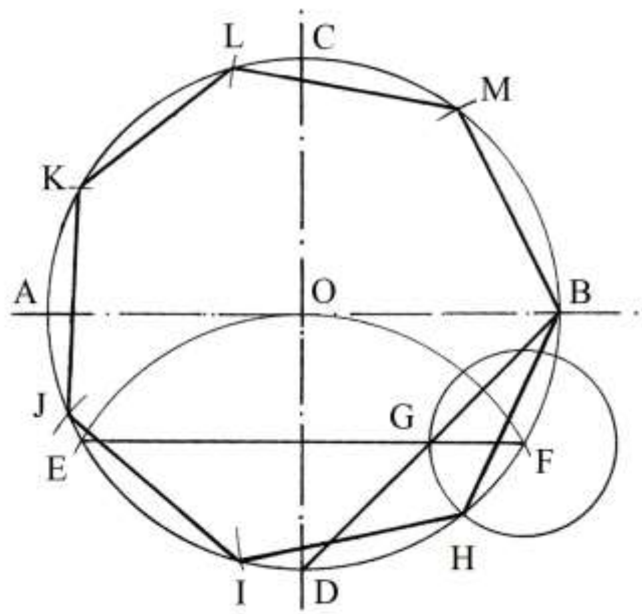
- -

Le costruzioni di Dobre

L'ingegnere romeno Daniel Dobre ha pubblicato un articolo, citato in bibliografia, nel quale propone diversi metodi grafici per la costruzione di poligoni regolari con numero di lati dispari: 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19.

L'Autore propone tre diversi metodi per la costruzione dell'ettagono inscritto: di seguito sono descritti i primi due e il terzo non viene riprodotto perché basato interamente sul metodo di Erone.

Il primo metodo è mostrato nella figura che segue:



Tracciare una circonferenza con centro in O e i due diametri fra loro perpendicolari AB e CD.

Fare centro in D e con raggio DO disegnare un arco che taglia la circonferenza in E e in F. EF è una corda.

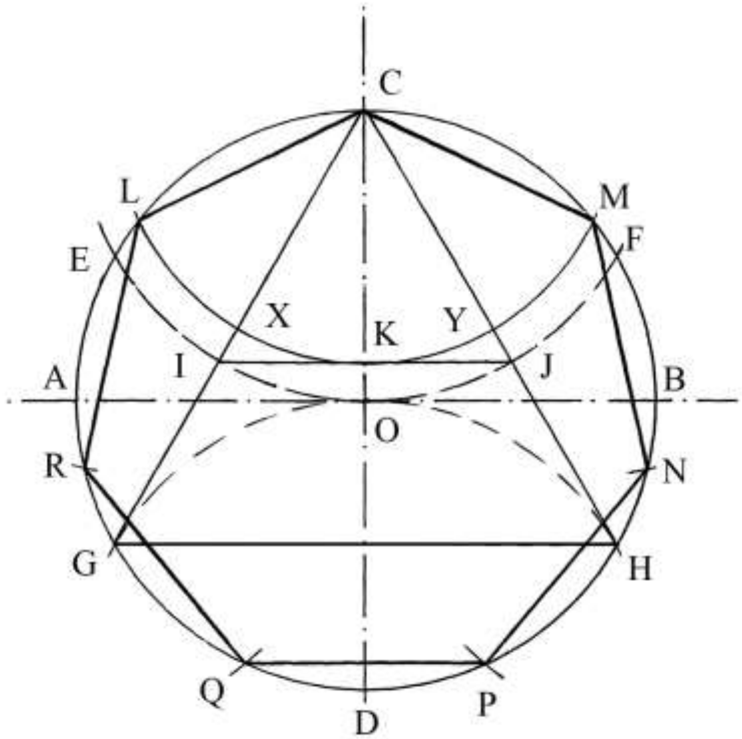
Tracciare la corda BD: essa taglia EF nel punto G.

Fare centro in F e con raggio FG disegnare una circonferenza che incontra la prima circonferenza nel punto H: BH è il primo lato dell'ettagono la cui lunghezza va riportata sulla prima circonferenza.

BHIJKLM è l'ettagono inscritto approssimato: sei lati hanno uguale lunghezza e il settimo è leggermente più corto (in questo caso KL).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo è presentato nel grafico che segue:



Come nel caso precedente, disegnare un circonferenza con centro in O e i due diametri perpendicolari AB e CD.

Con raggio OA fare centro in C e in D e tracciare due archi che tagliano la circonferenza nei punti E, F, G e H.

CGH è un triangolo equilatero inscritto: i suoi lati obliqui incontrano l'arco di centro C nei punti I e J che sono collegati con un segmento, IJ, parallelo a AB: esso incrocia CD nel punto K.

Fare centro in C e con raggio CK disegnare un arco che fissa i punti L e M: CL e CM sono due lati dell'ettagono inscritto.

Riportare la lunghezza di CL sulla circonferenza.

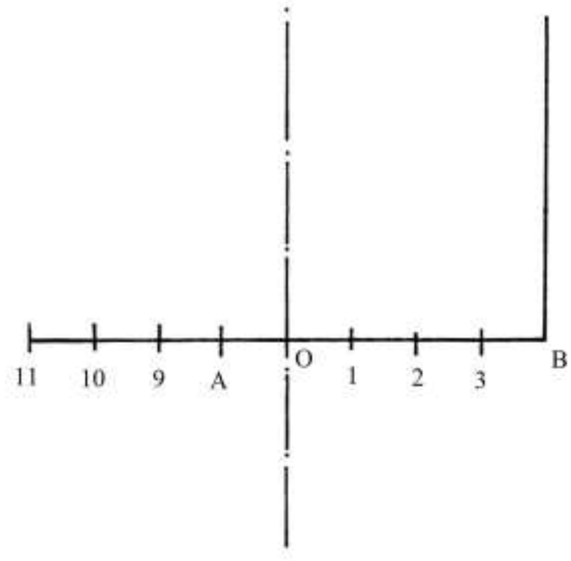
CMNPQRL è l'ettagono inscritto.

X e Y sono i punti medi dei lati CG e CH.

La costruzione può essere considerata alla stregua di una variante del metodo di Erone.

Ettagono inscritto con un angolo retto

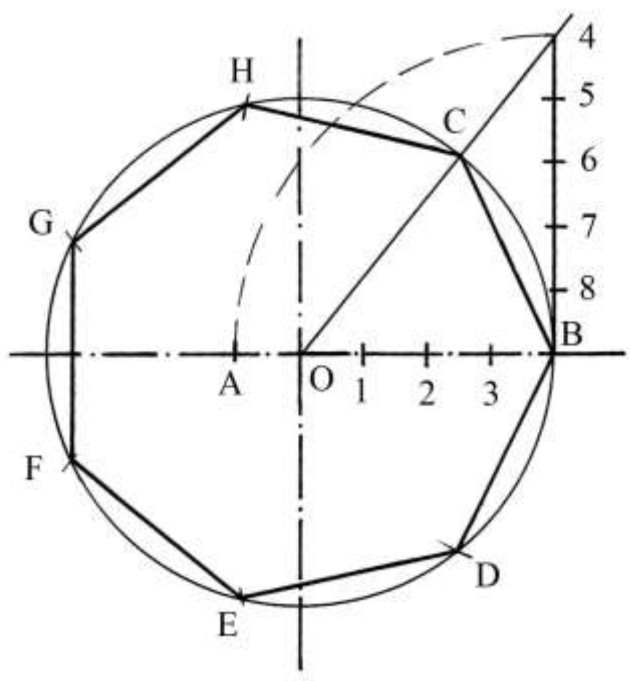
La costruzione che segue è piuttosto semplice. Essa richiede la tracciatura di un angolo retto:



Tracciare un segmento orizzontale, AB, e dividerlo in *cinque* parti uguali: sono stabiliti i punti O, 1, 2 e 3.

Dal punto B elevare la perpendicolare a AB.

Fare centro in B e con raggio BA disegnare un arco da A fino a fissare il punto 4:



Dividere 4-B in *cinque* parti uguali: sono determinati i punti 5, 6, 7 e 8.

Con centro in O e raggio OB tracciare una circonferenza. Collegare i punti O e 4: il segmento taglia la circonferenza nel punto C.

La corda BC è il primo lato dell’ettagono inscritto approssimato: riportare la sua lunghezza sulla circonferenza.

CBDEFGH è il poligono cercato.

- APPENDICE -

Una regola empirica di Vincenzo Flauti

Vincenzo Flauti (1782-1863) è stato un importante matematico italiano.

Ha pubblicato diverse opere di natura geometrica.

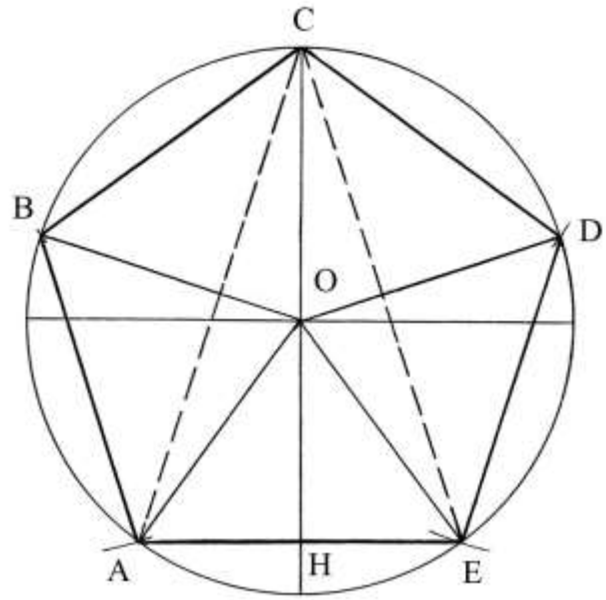
Nella XVIIesima edizione degli “Elementi di geometria di Euclide”, edita a Napoli nel 1843, alle pp. 598-599, è enunciata un’interessante regola: un triangolo inscritto in un cerchio in cui è contenuto un poligono regolare collegato a quel triangolo possiede angoli la cui ampiezza è determinata da rapporti costanti. Il triangolo ha come base un lato del poligono e il vertice opposto alla base giace sull’asse del lato.

Ecco qui riprodotto il passo di Flauti:

“…Or il presente problema , che, come vedesi nel seguente, l’è quello di riduzione dell' altro *d’ iscrivere un pentagono regolare nel cerchio*, diviene, diversamente modificato, il principio di riduzione per tutti'i poligoni regolari da iscriversi nel cerchio. In fatti, a cominciar dal quadrato, si vede l'iscrizione di esso corrispondere a quella di un triangolo in cui ciascun degli angoli alla base fosse metà del verticale ; per l’ esagono regolare a quella di un triangolo di cui ciascun angolo alla base pareggiasse il verticale, cioè fosse equilatero. Pel pentagono l'è il proposto , e risoluto da Euclide. E se ciascun degli angoli alla base fosse triplo del verticale si otterrebbe per mezzo di esso l'iscrizione dell'ettagono nel cerchio ; se quadruplo quella d ell’enneagono; e così in appresso…”

Per chiarire i concetti, facciamo l’esempio del pentagono regolare inscritto, dell’ettagono regolare e dell’ennagono regolare.

ABCDE è un pentagono regolare inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA:



Il poligono è scomposto in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni. Nel cerchio è pure inscritto il triangolo isoscele ACE che ha per base il lato AE e altezza CH: i suoi tre vertici giacciono sulla circonferenza.

L’altezza CH è data da:

CH = CO + OH = raggio cerchio circoscritto + apotema pentagono.

Consideriamo il triangolo isoscele AOE. L’angolo al vertice è:

AOE = 1/5 * 360° = 72°.

Gli angoli alla base, OAE e OEA, hanno uguale ampiezza:

OAE = OEA = (180° - AOE)/2 = (180° - 72°)/2 = 108°/2 = 54°.

Passiamo al triangolo ACE. L’angolo al vertice, ACE, è ampio la *metà* dell’angolo al centro supportato dal lato AE:

ACE = ½ * AOE = ½ * 72° = 36°.

Gli angoli alla base del triangolo ACE hanno uguale ampiezza:

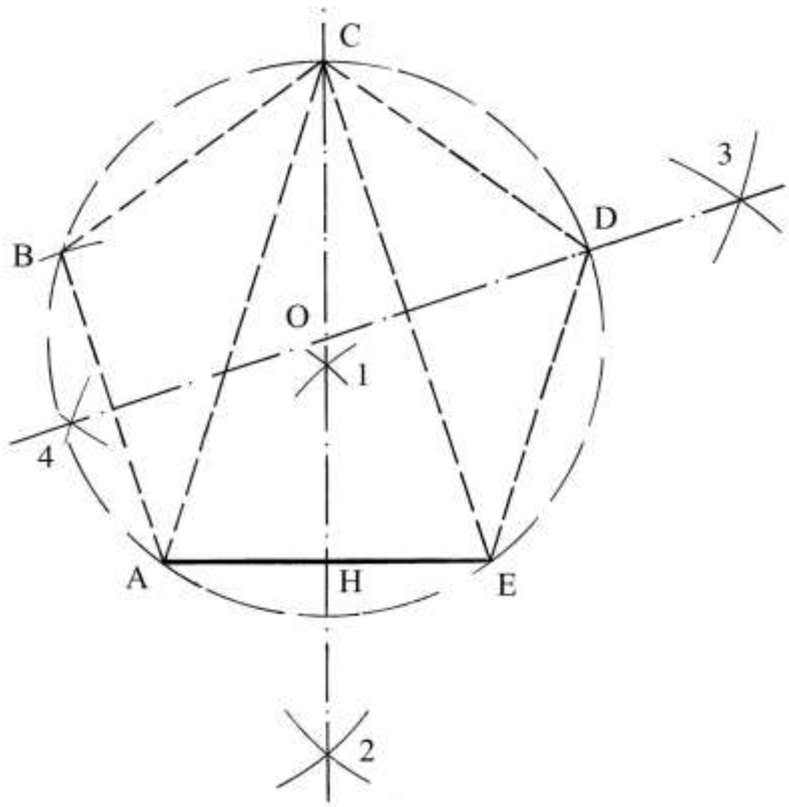
CAE = CEA = (180° - ACE)/2 = (180° - 36°)/2 = 144°/2 = 72°.

Gli angoli alla base di ACE hanno la stessa ampiezza dell’angolo AOE e cioè 72°.

Nel triangolo ACE il rapporto *k* fra l’ampiezza di un angolo alla base (CAE o CEA) e quello al vertice ACE) vale:

k = 72°/36° = 2.

ACE è un *triangolo aureo*: possiamo disegnare un pentagono regolare a partire da questo triangolo, come spiega lo schema che segue:



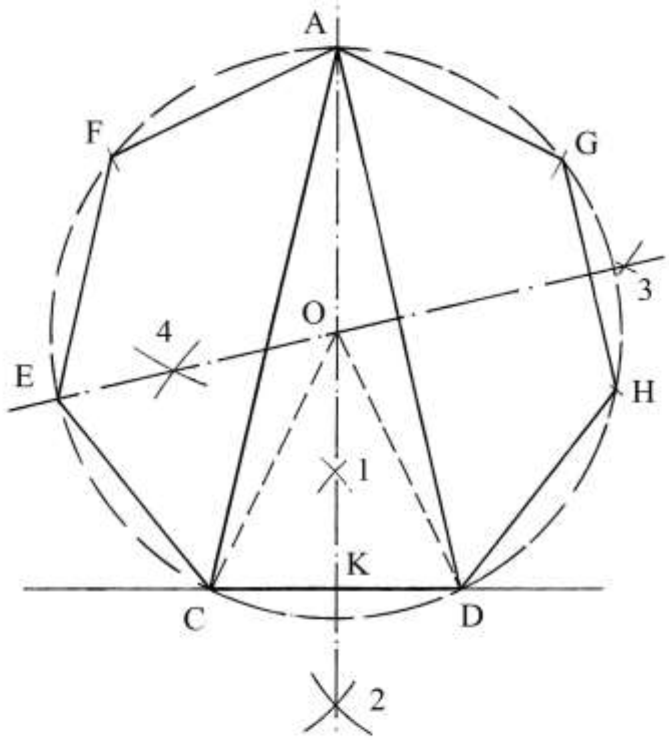
Costruire gli assi di due dei tre lati del triangolo, ad esempio la base AE e il lato CE: i due assi passano per le coppie di punti 1-2 e 3-4. Gli assi si incontrano in un punto, O, che è il centro del cerchio circoscritto al pentagono.

Sulla circonferenza riportare la lunghezza di AE: ABCDE è il pentagono regolare inscritto.

L’asse 3-4 taglia esattamente la circonferenza nel vertice D: questa retta è anche l’asse del lato AB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Passiamo al caso dell’ettagono regolare.



ACD è un triangolo isoscele i cui angoli interni sono legati da un preciso rapporto:

* CAD = 180°/7;
* ACD = CDA = 3/7 * 180°.

Gli angoli alla base del triangolo hanno ampiezze uguali a *tre* volte quella dell'angolo al vertice e la costante *k* che esprime questo rapporto vale:

k = (ACD)/(CAD) = (3/7 * 180°)/(180°/7) = 3.

Usando il metodo impiegato per il pentagono, possiamo costruire l'ettagono regolare approssimato a partire dal triangolo isoscele ACD.

Costruire gli assi di due dei tre lati: 1-2 è l'asse di CD e 3-4 è quello del lato AD. I due assi si intersecano in O, centro del cerchio circoscritto all'ettagono.

Con centro in O e raggio OA = OC = OD disegnare la circonferenza e riportarvi la lunghezza di CD. Il punto E è dato dall'intersezione della circonferenza con l'asse di AD ed è un vertice dell'ettagono come lo è A.

AGHDCEF è l'ettagono inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Con il caso dell'ennagono si conclude la serie dei poligoni utilizzati per verificare l'ipotesi di Flauti.

ABC è un triangolo isoscele che ha gli angoli con le seguenti ampiezze:

* ABC = 20°;
* BAC = ACB = 80°.

Il rapporto fra le ampiezze degli angoli è:

k = (BAC)/(ABC) = 80°/20° = 4.

Utilizzando il metodo già applicato ai casi del pentagono e dell'ettagono, costruire gli assi di due lati, AC e BC. Essi passano per le consuete coppie di punti 1-2 e 3-4: la loro intersezione è il punto O, centro del cerchio circoscritto all'ennagono.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AC: ADEFBGHIC è l'ennagono inscritto. Il vertice H è fissato dall'intersezione della circonferenza con l'asse 3-4.

Il poligono è scomponibile in *nove* triangoli isosceli con il vertice in comune in O: OAC è uno di essi.

L'angolo AOC è ampio:

AOC = 360°/9 = 40°. Esso è ampio il *doppio* dell'angolo al vertice ABC.

La regola ipotizzata vale anche per l'ennagono.

Il triangolo "generatore" ABC è facilmente disegnabile con l'aiuto di un buon *goniometro*: i suoi angoli hanno valori interi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le considerazioni di Flauti sembrerebbero applicabili ai poligoni regolari con numeri di lati *dispari*, a partire dal pentagono.

Non sappiamo se esse siano state approfondite da altri geometri e ne sia derivata una qualche regola di valore generale.

In modo empirico pare possibile riassumere in una tabella alcuni dati.

La costante *k* è il rapporto fra l'ampiezza dell'angolo alla base e quella dell'angolo al vertice del triangolo tipico del singolo poligono regolare.

Poligoni	Numero lati: *n*	Ampiezza angolo al vertice	Ampiezza angoli alla base	Costante k
Pentagono	5	36°	72°	2
Ettagono	7	180°/7	3/7 * 180°	3
Ennagono	9	180°/9 = 20°	4/9 * 180° = 80°	4
Endecagono	11	180°/11	180° * 5/11	5

Sembra potersi dedurre una regola: il valore della costante *k* è legata al numero dei lati *n* dalla seguente relazione:

$k = (n - 1)/2$.

Dato che il numero dei lati di quei poligoni è *dispari*, sottraendo un'unità da *n* si ha per *k* un risultato espresso da un numero *intero e pari*.

- -

Bibliografia

1. AA.VV., "Quadrivium". Numero, geometria, musica, astronomia, trad. it., Milano, Alpha Test, 2011, pp. 409.
2. Allen Jon, "Drawing geometry", Edimburgo, Floris Book, 2007, pp. 87.
3. Bellos Alex, "Il meraviglioso mondo dei numeri", trad. it., Torino, Einaudi, 2011, pp. XIII-580.
4. Calzolani Sergio, "Neusis tomahawk.pdf", in www.geometriapratica.it.
5. Chiovelli Renzo, "Tecniche costruttive murarie medievali. La Tuscia", Roma, "L'Erma" di Bretschneider, 2007, pp. 496.
6. Cundy H. M. e Rollett A. P., "I modelli matematici", trad. it., Milano, Feltrinelli, 1974, pp. 292.
7. Dobre Daniel, "Methods for construction of odd number pointed polygons", "Journal of Industrial design and Engineering graphics", volume 11, issue 1, july 2016, pp. 9-14.
8. Flauti Vincenzo (anche *Vincenzio*), "Elementi di Geometria di Euclide emendati, e restituiti al loro pristino stato", Napoli, decimasettima edizione, 1843, pp. 672.
9. Fletcher Rachel, "Squaring the Circle: Marriage of Heaven and Earth", Torino, Nexus Network Journal, Kim Williams Book, n. 9 (2007), pp. 119-144.
10. Fletcher Rachel, "Infinite Measure", Staunton (Virginia, USA), George F. Tompson Publishing, 2013, pp. 399.
11. García-Salgado Tomás, "The Heptagonal Layout of the Pantheon's Vault", www.perspectivegeometry.com (visitato il 26 giugno 2021).
12. Ghersi Italo, "Matematica dilettevole e curiosa", Milano, Hoepli, 5.a ed., 1988, pp. VIII-778.
13. Hogendijk Jan P., "Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon", "Archives for History of Exact Sciences", Berlin, 1984, volume 30, numbers 3-4, pp. 197-330.
14. Lluís i Ginovart Josep, "Tesis doctoral. Geometría y diseňo medieval en la Catedral de Tortosa. La Catedral no construida", Barcellona, 2002, pp. 598.
15. Lluís i Ginovart Josep et Alii, "Gothic Construction and the Traça of a Eptagonal Apse: The Problem of The Heptagon", Nexus Network Journal, 15 n. 2 (2013), Torino, Kim Williams Books, pp. 325-348.
16. Lluís i Ginovart Josep et Alii, "Geometry of the Isosikaidigon in Orvieto Cathedral", Nexus Network Journal, 18, (2016), Torino, Kim Williams Books, pp. 419-438.
17. Mallett Ian, "Approximate Construcion of Regular Polygons", https://geometrian.com/research/RegularPolygons.php (sito visitato il 18 maggio 2021).
18. Martin George E., "Geometric Constructions", New Yok, Springer, 1998, pp. xi+203.
19. McBurney Susan, "Mathematical Secrets of Seven", Bridges, 2008, pp. 417-420.
20. Necipoğlu Gülru (a cura di), "The Arts of Ornamental Geometry. A persian compendium on similar and complementary interlocking figures – A Volume Commemorating Alpay Özdural, Lediden-Boston, Brill, 2017, pp. 374.
21. Pacioli Luca, "De Viribus Quantitatis", Milano, Castello Sforzesco, 1997, pp. XXXIII+458.
22. Reynolds Mark A., "From Pentagon to Heptagon: A Discovery on the Generation of the Regular Heptagon fron the Equilateral Triangle and Pentagon", "Nexus Network Journal", vol. 3, no 2, 2001, pp. 139-145.
23. Richeson David S., "Tales of Impossibility. The 2000-Year Quest to Solve the

Mathematical Problems of Antiquity", Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2019, pp. xii+436.
24. Sutton Andrew, "Ruler & Compass. Practical Geometric Constructions", Glastonbury, Wooden Books, 2009, pp. 58.

INDICE