sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: unità di misura senesi; area dei quadrilateri; area di un campo; aree dei triangoli; misura dei muri; volume di un pozzo; fornace da calcina; volume di un monte di grano e di una fossa da grano; dimensioni dei mattoni; tenuta di un tino; costruzione di muri

DIONIGI NIGI

Dionigi Gori (Siena 1510 – dopo il 1586) è stato un abacista. Ha scritto almeno tre trattati matematici. Uno di essi è intitolato "*Libro di ragioni e misure in sunto e a mente*", contenuto nel codice L. IX. 30 della Biblioteca Comunale di Siena.

In questo articolo è descritto questo trattato.

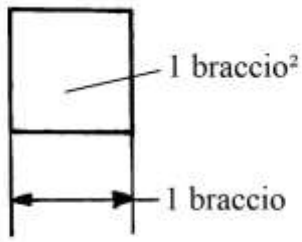
Note

* Alcune figure sono state ridisegnate cercando di realizzarle in scala.
* Nei pochi schemi originali mancano le lettere ai vertici delle figure: qui sono stati apposti ove necessari o utili.
* Altri schemi sono stati aggiunti per chiarire i problemi contenuti nel trattato di Gori.
  I numeri misti, formati da un numero naturale e da una frazione propria, sono quasi sempre racchiusi fra parentesi tonde: (3 + 1/7).
* Per semplificare la scrittura, il simbolo di frazione è reso con la barra "/", anziché con la barra orizzontale.
* Per π è usata la costante 22/7 che è una sua buona approssimazione; 22/7 equivale a (3 + 1/7).
* Alcuni argomenti sono ampliati con appositi riquadri graficamente evidenziati e contrassegnati con la dicitura APPROFONDIMENTO.

Le unità di misura usate a Siena

All'inizio del suo trattato Dionigi Gori fornisce una serie di informazioni sulle unità di misura: l'Autore torna più volte sull'argomento.

Un *braccio quadrato da terra*, o braccio^2, è l'area di un quadrato che ha lati lunghi 1 braccio:



Un multiplo del braccio^2 è lo *staio di terra* che rappresenta l'area di un quadrato con lati lunghi 60 braccia:

L'area definita da uno staio di terra è uguale a:

$60 * 60 = 3600$ braccia^2.

Nel Trattato, l'Autore chiama *superficiali* le unità di misura delle aree: ciò che oggi sarebbe indicato come *braccio^2* o *braccio quadrato* è da lui definito come *braccio superficiale*.

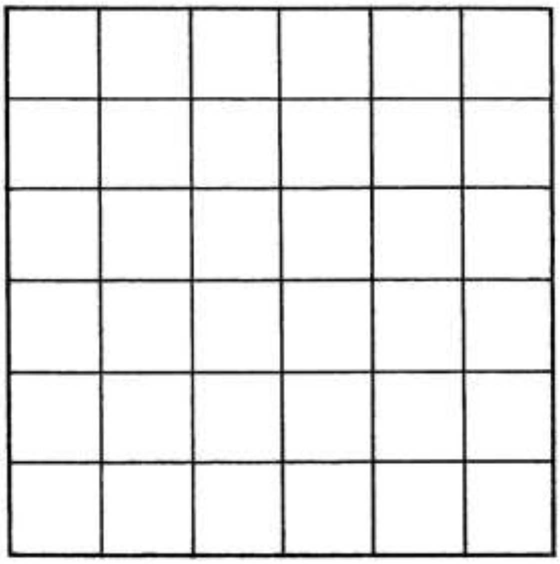
Lo stesso accade a due multipli del braccio superficiale: tavola superficiale e canna superficiale.

La tavola

La tavola lineare, o semplicemente *tavola*, è una misura lunga 6 braccia.

Un quadrato con lati lunghi 6 braccia ha area uguale a 36 braccia^2 che equivalgono a 1 tavola^2 (o 1 tavola superficiale):

36 braccia² = 1 tavola²



6 braccia = 1 tavola

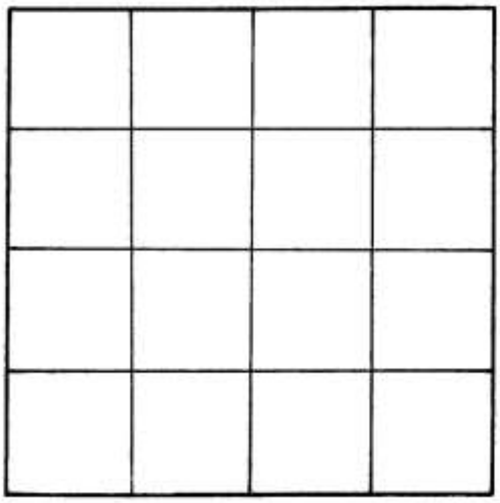
100 tavole^2 equivalgono a 1 staio di terra:

1 staio di terra = 3600 braccia^2 = (3600/36) tavole^2 = 100 tavole^2.

La canna

La canna è una misura lineare lunga 4 braccia. Un quadrato con lati lunghi 4 braccia ha area di 16 braccia^2 che equivalgono a 1 canna^2:

16 braccia² = 1 tavola²



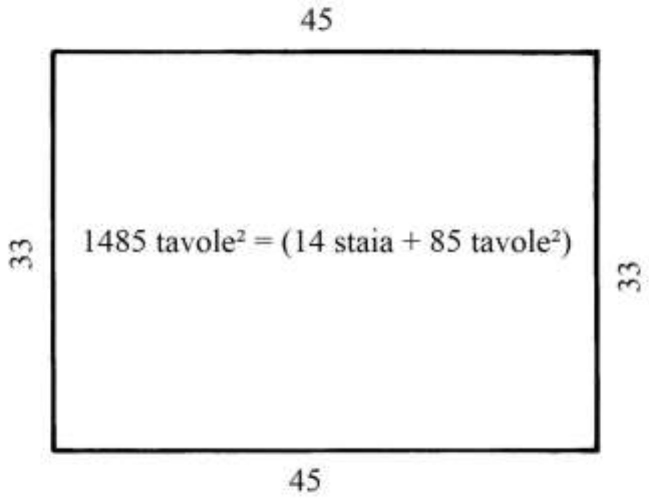
4 braccia = 1 tavola

Uno staio da terra vale:

1 staio da terra = 3600 braccia^2 = (3600/16) canne^2 = 225 canne^2.

Area di un rettangolo

Un rettangolo è lungo 45 *braccia* (poi l'Autore corregge in *tavole*) ed è largo 33 tavole.



dimensioni lineari in tavole

La sua area S è:

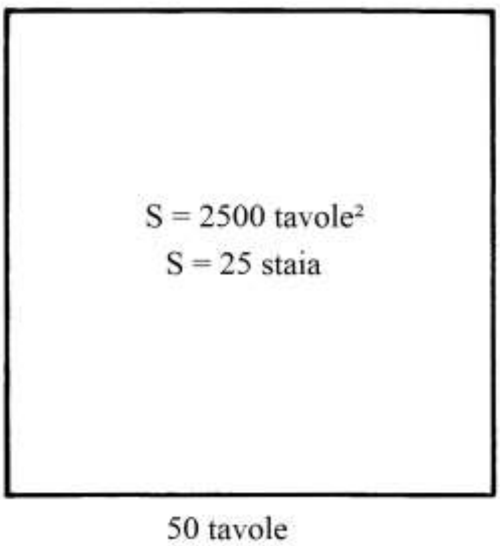
$S = 45 * 33 = 1485$ tavole^2.

Poi converte l'area in staia:

$S = 1485/100$ staia = (14 staia + 85 tavole^2).

Area di un quadrato

Un campo ha la forma di un quadrato con lati lunghi 50 tavole.



L'area S è:

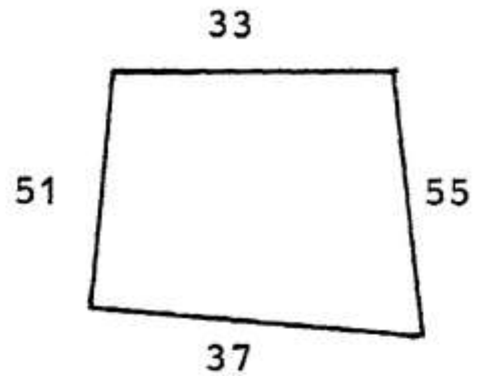
$S = 50 * 50 = 2500$ tavole^2.

Espressa in *staia*, l'area è:

$S = 2500/100$ staia = 25 staia.

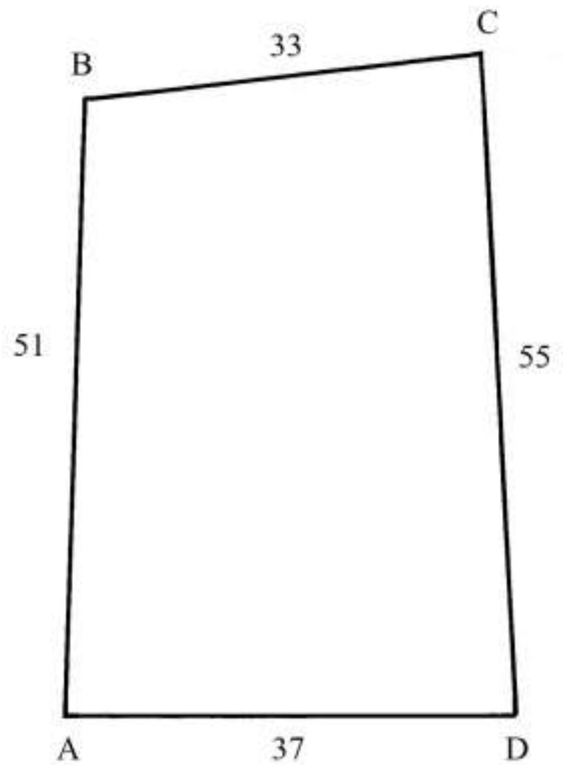
<u>Area di un quadrilatero</u>

Un quadrilatero ha i lati con le dimensioni espresse in *tavole* scritte sui suoi lati:



Lo schema originale è fuori scala.

La figura che segue è disegnata in scala:



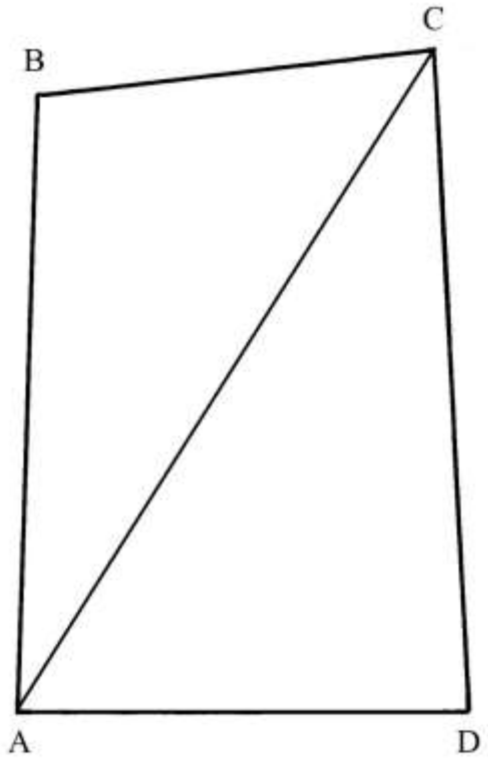
L'Autore calcola l'area applicando – senza citarla espressamente – l'antica ed erronea *formula degli agrimensori*: essa prevede il prevede il prodotto delle semisomme delle lunghezze dei lati opposti.

$S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * [(AD + BC)/2] = [(51 + 55)/2] * [(37 + 33)/2] =$

$= (106/2) * (70/2) = 53 * 35 = 1855$ tavole^2 = (18 staia + 55 tavole^2).

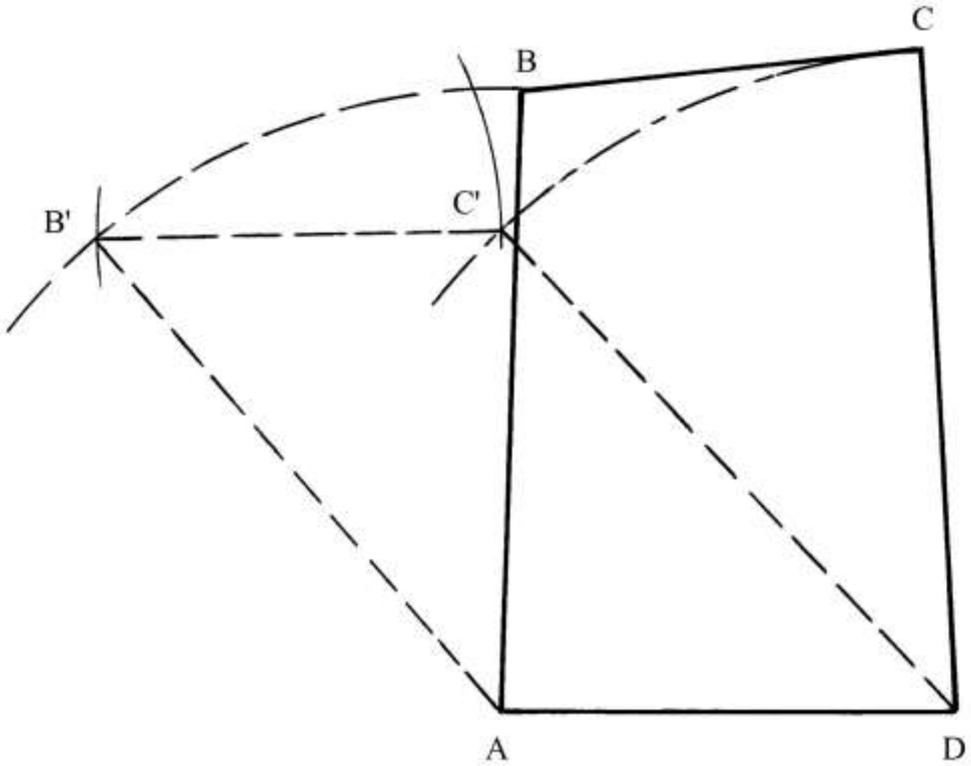
- APPROFONDIMENTO -

Il quadrilatero è una struttura deformabile: solo la presenza di una diagonale rende indeformabile il poligono.



La diagonale AC divide il quadrilatero in due triangoli scaleni: conoscendo la sua lunghezza ed essendo note le lunghezze dei quattro lati è facile calcolare le aree dei due triangoli con l'applicazione della nota formula di Erone di Alessandria.

Lo schema che segue presenta un secondo quadrilatero, AB'C'D, che ha lati lunghi quanto quelli di ABCD:



Ruotando ancora verso sinistra i lati, fra loro vincolati, AB-BC e CD, intorno ai nodi A e D, si ottiene un poligono sempre più appiattito rispetto alla base AD: l'area del poligono si riduce sempre di più.

Le stesse considerazioni valgono per la rotazione di AB-BC e CD verso destra.

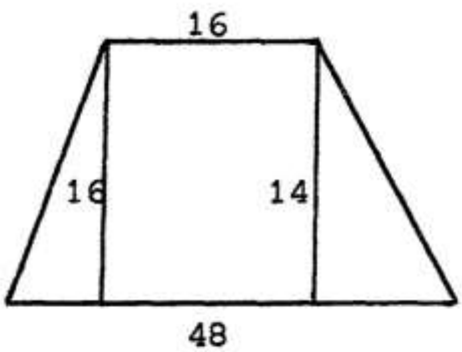
La *formula degli agrimensori* fornisce risultati sempre più errati, e per eccesso, con il progressivo appiattimento dei lati verso la base AD.

- -

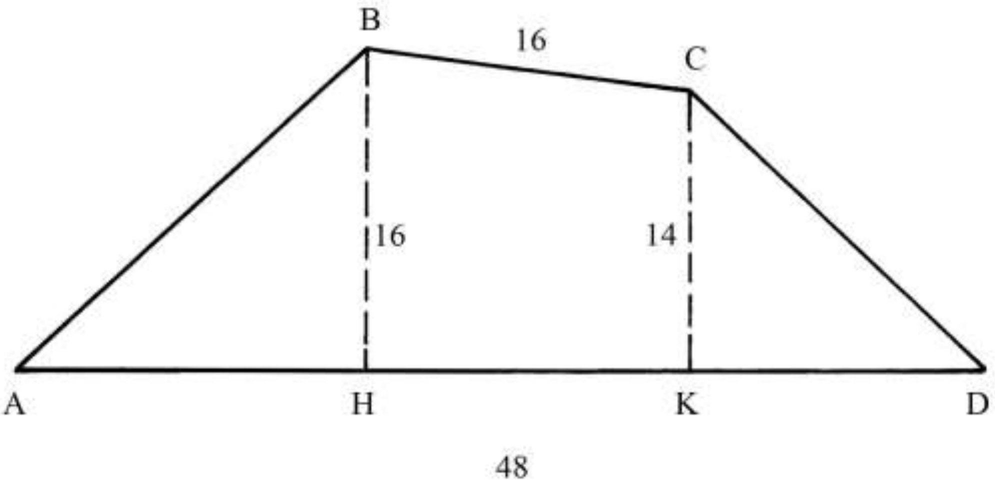
Area di un altro quadrilatero

Il quadrilatero considerato dal Gori si avvicina alla forma di un trapezio scaleno, ma non lo è perché le due basi AD e BC non sono parallele.

Lo schema originale è fuori scala:



Nello schema che segue, BH e CK sono due altezze del quadrilatero:



Le lunghezze sono espresse in tavole.

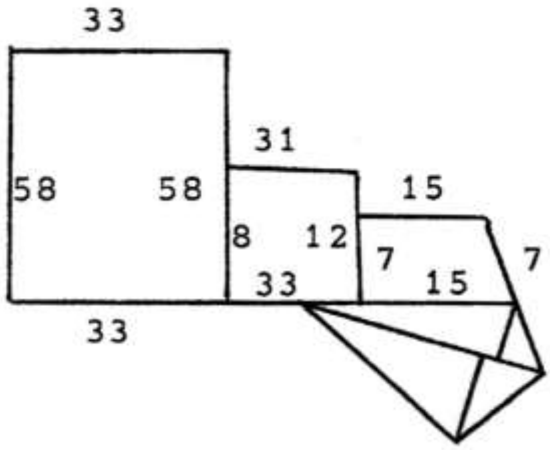
L'Autore calcola l'area applicando una variante della formula degli agrimensori: egli moltiplica la semisomma delle altezze per la semisomma delle basi:

$S_{ABCD} = [(CK + BH)/2] * [(AD + BC)/2] = [(14 + 16)/2] * [48 + 16)/2] =$
$= (30/2) * (64/2) = 15 * 32 = 480 \text{ tavole}^2 = (4 \text{ staia} + 80 \text{ tavole}^2)$.

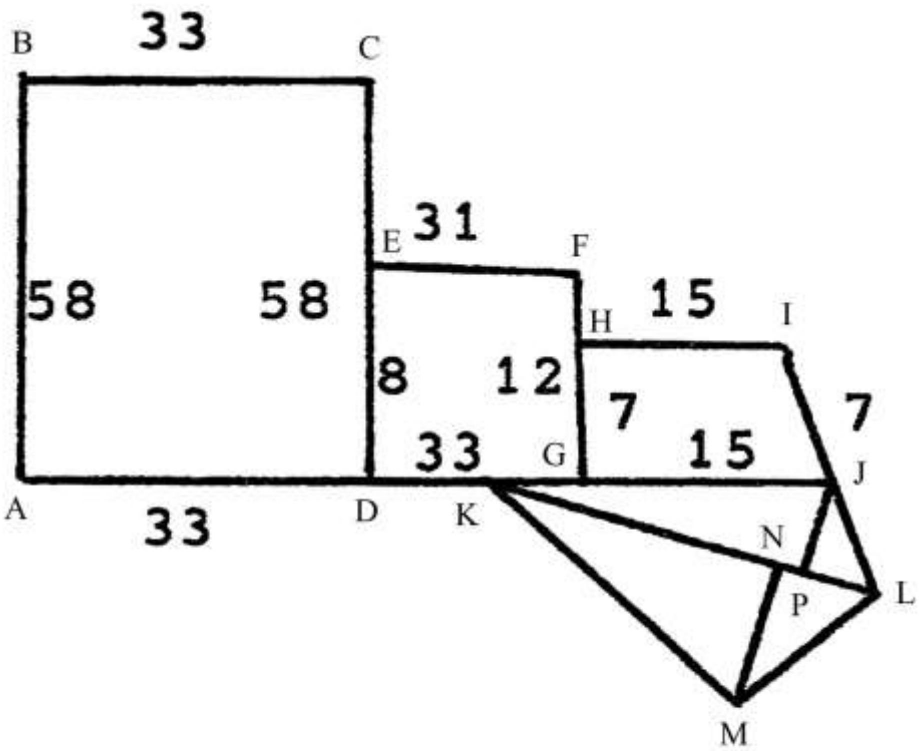
Gori chiama *testa* sia la base maggiore (AD) che quella minore (BC).

Area di un campo

Un campo ha una forma piuttosto complessa:



Lo schema originale è fuori scala e incompleto perché non contiene le dimensioni dei triangoli indicati con JKL e KML nella figura che segue: le lettere sono state aggiunte per semplificare la procedura:



Le dimensioni dei due triangoli sono indirettamente fornite dai successivi calcoli delle aree effettuati da Gori.

Le lunghezze sono tutte espresse in *tavole*.

Benché il quadrilatero GHIJ sia disegnato come un trapezio rettangolo, la sua area è calcolata dall'Autore come se esso fosse un rettangolo con lati lunghi 15 e 7 tavole.

Dionigi Gori procede al calcolo singolarmente di ciascuno dei tre quadrilateri e dei due triangoli.

L'area del rettangolo ABCD è:

$S_{ABCD} = AD * DB = 33 * 58 = 1914$ tavole^2.

L'area di DEFG è calcolata con la *formula degli agrimensori*:

$S_{DEFG} = [(DG + EF)/2] * [(DE + GH)/2] = [(33 + 31)/2] * [(8 + 12)/2] =$
$= [(33 + 31)/2] * [(8 + 12)/2] = 32 * 10 = 320$ tavole^2.

L'area di GHIJ è:

$S_{GHIJ} = GJ * GH = 15 * 7 = 105$ tavole^2.

I triangoli KJL e KML hanno in comune il lato KL che dal testo risulta lungo 48 tavole; sempre secondo il testo, le altezze dei due triangoli hanno le seguenti lunghezze:

* JP = 6 tavole;
* MN = 16 tavole.

Le aree dei due triangoli sono:

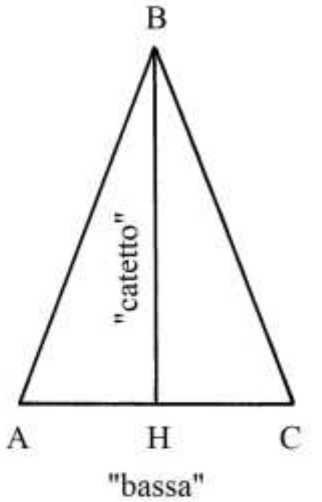
* $S_{KJL} = KL * JP/2 = 48 * 6/3 = 144$ tavole^2;
* $S_{KML} = KL * MN/2 = 48 * 16/2 = 384$ tavole^2.

L'area dell'intero campo è:

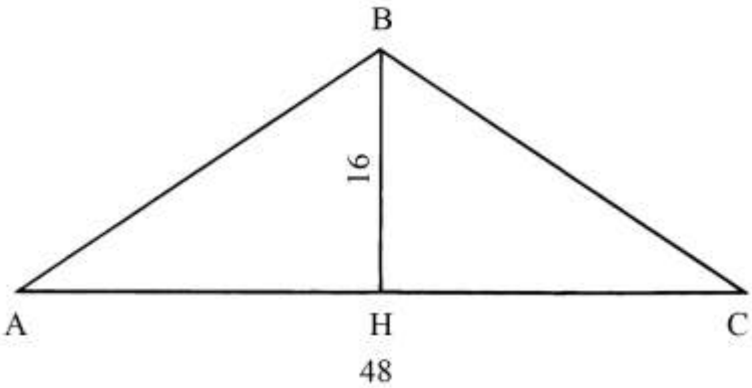
$S_{CAMPO} = S_{ABCD} + S_{DEFG} + S_{GHIJ} + S_{KJL} + S_{KLM} =$
$= 1914 + 320 + 105 + 144 + 384 = 2867$ tavole^2 = (28 staia + 67 tavole^2).

Area dei triangoli

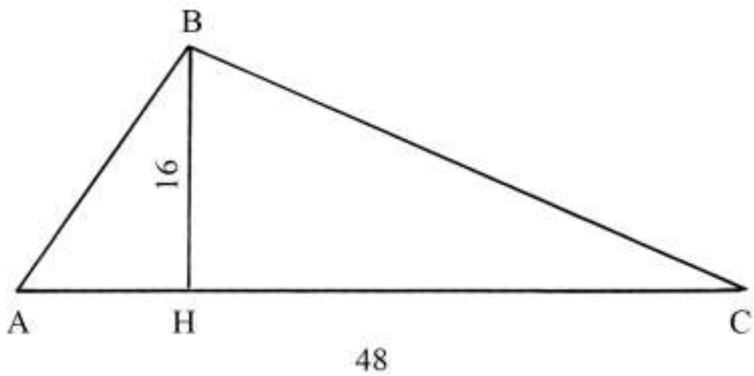
L'Autore chiama *bassa* il lato di base di un triangolo e *catetto* l'altezza ad esso relativa.



Sembra che egli consideri solo due diversi tipi di triangoli: quello *isoscele*



e quello *scaleno*:



I due triangoli hanno basi AC di uguale lunghezza, 48 tavole, e altezze BH anch'esse uguali e lunghe 16 tavole.

Dionigi Gori calcola l'area di un triangolo avente quelle dimensioni in tre modi diversi che conducono allo stesso risultato:

* $S_{ABC} = (BH * AC)/2 = (16 * 48)/2 = 768/2 = 384$ tavole^2;
* $S_{ABC} = (AC/2) * BH = (48/2) * 16 = 24 * 16 = 384$ tavole^2;
* $S_{ABC} = (BH/2) * AC = (16/2) * 48 = 8 * 48 = 384$ tavole^2.

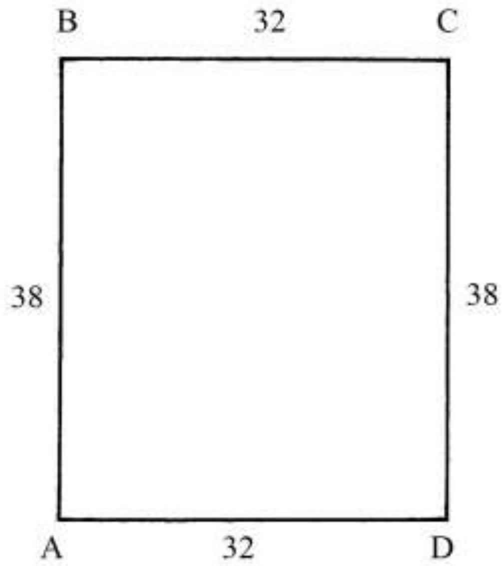
L'area è poi convertita:

$S_{ABC} = 384$ tavole^2 = (3 staia + 84 tavole^2).

L’Autore indica l’area erroneamente in: (3 staia + *48* tavole^2).

<u>Area di un terreno rettangolare</u>

Un terreno è misurato in *canne* da 4 braccia:



dimensioni espresse in canne

La sua area è:

S_{ABCD} = AD * AB = 32 * 38 = 1216 canne^2.

Uno staio contiene 225 canne^2 per cui l’area del rettangolo espressa in staia è:

S_{ABCD} = 1216/225 staia = (5 staia + 91 canne^2).

L’Autore cita il corretto rapporto fra staia e canne^2, ma fornisce un risultato errato:

S_{ABCD} = (4 staia + 216 canne^2) che corrisponde a:

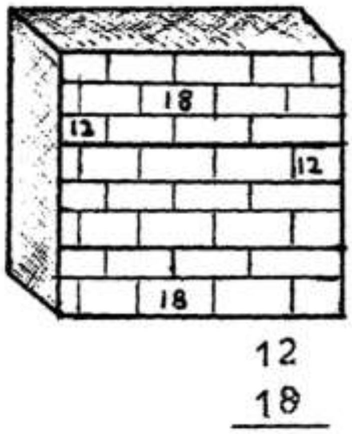
(4 staia + 216 canne^2) = (4 * 225 canne^2 + 216 canne^2) = (900 canne^2 + 216 canne^2) = = *1116* canne^2.

<u>Misura dei muri</u>

I muri sono misurati in braccia quadrate e 16 braccia^2 formano una canna^2.

Gli esempi portati da Dionigi Gori sembrano offrire un’ipotesi: i terreni erano misurati in tavole (lineari e superficiali) mentre le dimensioni dei muri venivano espresse con le più piccole unità braccio e canna. La spiegazione pare ovvia: nei terreni erano in gioco lunghezze e superfici assai più estese di quelle reperibili nei muri.

Un muro è lungo 18 braccia ed è largo 12:



La superficie S del muro è:

$S = 18 * 12 = 216$ braccia^2.

Poi l'area è convertita in canne^2:

$S = 216/16$ canne^2 = (13 canne^2 + 8 braccia^2).

Il problema non considera lo spessore del muro ma soltanto la sua superficie: poteva trattarsi di un'area da sistemare, per stuccarla o imbiancarla.

Area di un palco

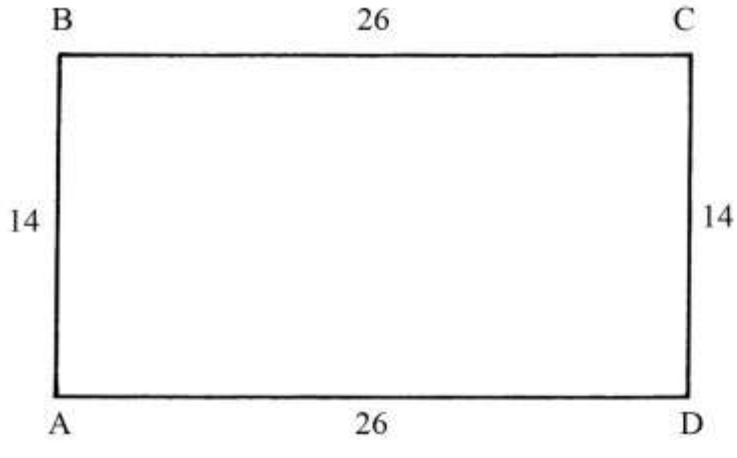
Un palco è lungo 26 braccia ed è largo 14.

La sua area S è:

$S_{ABCD} = 26 * 14 = 364$ braccia^2.

Poi l'area è convertita in canne^2:

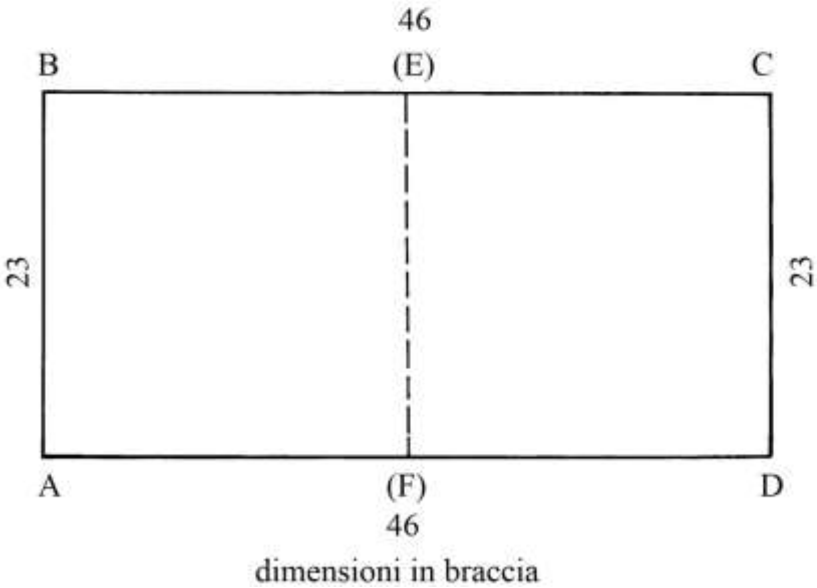
$S_{ABCD} = 364/16$ canne^2 = (22 canne^2 + 12 braccia^2).



dimensioni espresse in braccia

Area di un tetto

Un tetto è lungo 46 braccia ed è largo 23.
È chiesta la sua area.



La forma del tetto è un rettangolo formato da due quadrati di uguali dimensioni uniti lungo un lato [(E)(F)]: i maestri d'abaco toscani chiamavano questo particolare quadrilatero *bislungo*.

I due quadrati uniti sono: AB(E)(F) e (E)CD(F) e hanno lati lunghi 23 braccia.

L'area del tetto è:

$S_{ABCD} = AB * AD = 23 * 46 = 1058$ braccia^2.

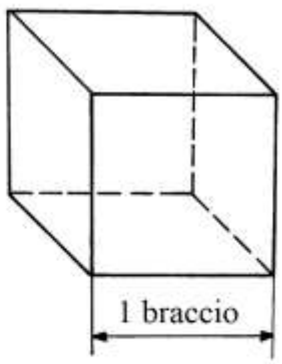
In canne^2 l'area è:

$S_{ABCD} = 1058/16$ canne^2 = (66 canne^2 + 2 braccia^2).

Il braccio quadro corporeo

Il *braccio cubico* in Toscana era indicato con l'espressione *braccio quadro corporeo*: l'aggiunta di *corporeo* lo distingueva dal semplice *braccio quadro* o braccio^2.

Un braccio cubico o braccio^3 è il volume di un cubo che spigoli lunghi 1 braccio lineare:

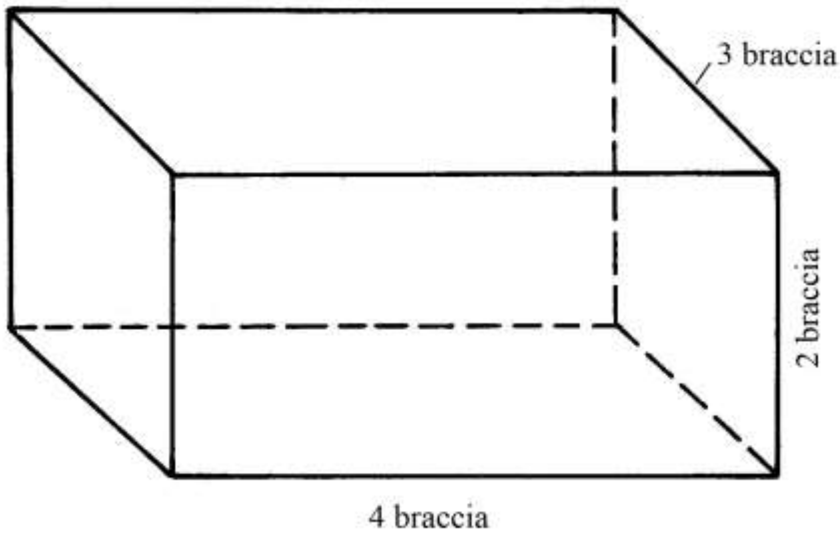


Incidentalmente, Dionigi Gori indica le equivalenze fra unità di misura:

1 braccio^3 vale 10 staia di grano, di acqua o di rena.

È opportuno ricordare che questo staio serviva a misurare i volumi, mentre lo *staio di terra* misurava i terreni.

Un parallelepipedo ha le dimensioni espresse in braccia riportate sullo schema:



Il suo volume V è:

V = 4 * 2 * 3 = 24 braccia^3 = 24 * 10 staia = 240 staia (di acqua, grano o altro materiale).

Volume di un pozzo

Un pozzo ha sezione quadrata con lati lunghi 8 braccia ed è profondo: h = 16 braccia.

La forma del pozzo è quella di un doppio cubo: i due solidi hanno spigoli lunghi 8 braccia e la loro unione porta a creare un prisma alto 16 braccia.

Il problema chiede il volume V dell'acqua che può contenere.

L'area S della sezione trasversale è:

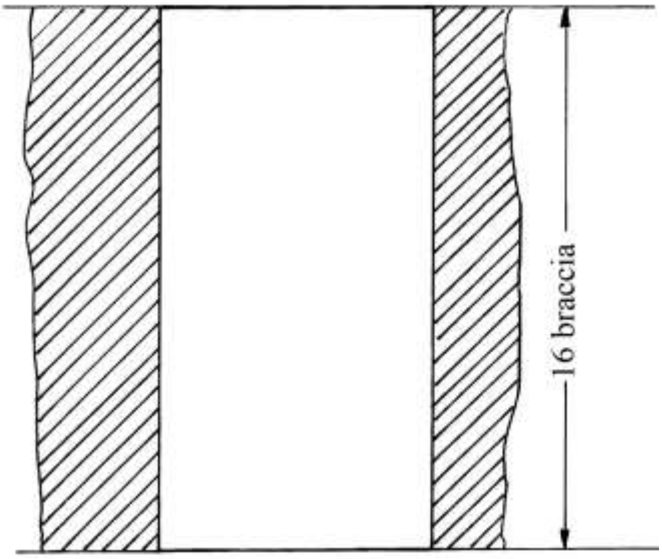
S = 8 * 8 = 64 braccia^2.

Il volume V è:

V = S * h = 64 * 16 = 1024 braccia^3.

In staia, il volume V è:

V = 1024 * 10 staia = 10240 staia.



Volume di una fornace da calcina

Una fornace ha la forma di un cilindro: il suo diametro *d* è 7 braccia (sia alla bocca che al fondo) ed è alta *h* = 8 braccia.

Il volume della fornace è calcolato dal Gori con una procedura che contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 7 * 7 = 49;
* moltiplicare per l'altezza: 49 * 8 = 392;
* dividere per 3: 392/3 = (130 + 2/3) moggia, V, volume della fornace.

Ricordiamo che 1 moggio vale 24 staia:

1 moggio = 24 staia.

La procedura usata dal Gori è riassunta nella formula che segue:

$V = d^2 * h/3$.

Approfondiamo l'origine della procedura e della formula.

La sezione S della fornace è:

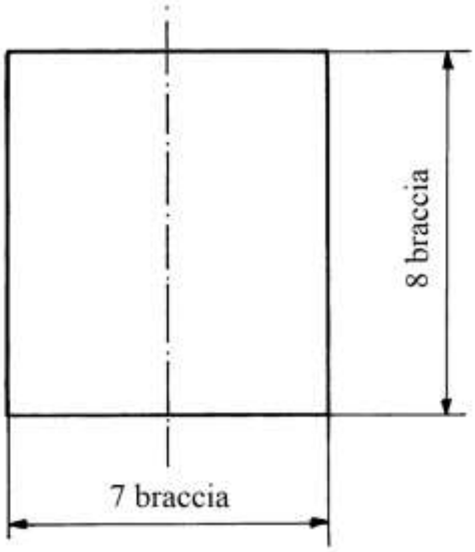
$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 7^2 = 11/14 * 49 = 38,5$ braccia^2.

Il volume V è:

$V = S * h = 38,5 * 8 = 308$ braccia^3.

Il volume è poi convertito:

V = 308 * 10 staia = 3080 staia = 3080/24 moggia = (128 + 1/3) moggia.



La corretta formula per il calcolo diretto del volume in moggia è:

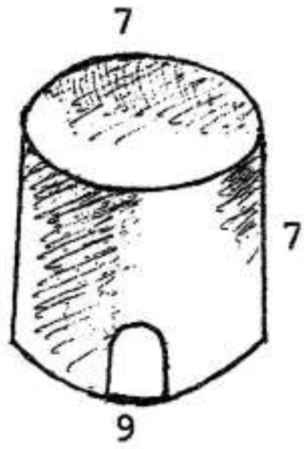
$V = (11/14 * d^2 * h) * 10/24 = 110/336 * d^2 * h = 55/168 * d^2 * h.$

La formula empirica usata da Dionigi Gori fornisce un risultato approssimato per eccesso perché il coefficiente 1/3 è più grande di quello 110/336:

$110/336 = 55/168 \approx 0,32738 < 1/3 = 0,3333\ldots$

<u>Un'altra fornace</u>

Una fornace ha la forma di un tronco di cono ed è alta 7 braccia. La bocca ha diametro di 7 braccia e il fondo è 9 braccia.



Il volume della fornace è ricavato da Dionigi Gori con la seguente procedura:

* sommare le lunghezze dei diametri della bocca e del fondo: 7 + 9 = 16;
* dividere per 2: 16/2 = 8;
* moltiplicare per sé stesso: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare per l'altezza: 64 * 7 = 448;
* dividere per 3: 448/3 = (149 + 1/3) moggia, volume della fornace.

La procedura è riassunta in una formula:

$V = [(d + D)/2]^2 * h/3$ con:

V = volume;

d, diametro della bocca: d = 7;
D, diametro al fondo: D = 9;
h, altezza della fornace: h = 7.

Dato che il rapporto fra $braccio^3$ e moggia è noto ed è la costante 10/24, possiamo ricavare dalle moggia il valore delle $braccia^3$:

$(448/3)/(10/24) = 448 * 24/(3 * 10) = (358 + 2/5)$ $braccia^3$.

La corretta formula per il calcolo del volume di un tronco di cono è:

$V = 1/3 * \pi * (R^2 + R * r + r^2) * h$ dove:
$R = D/2 = 9/2 = 4{,}5$;
$r = d/2 = 7/2 = 3{,}5$.

Il volume è:

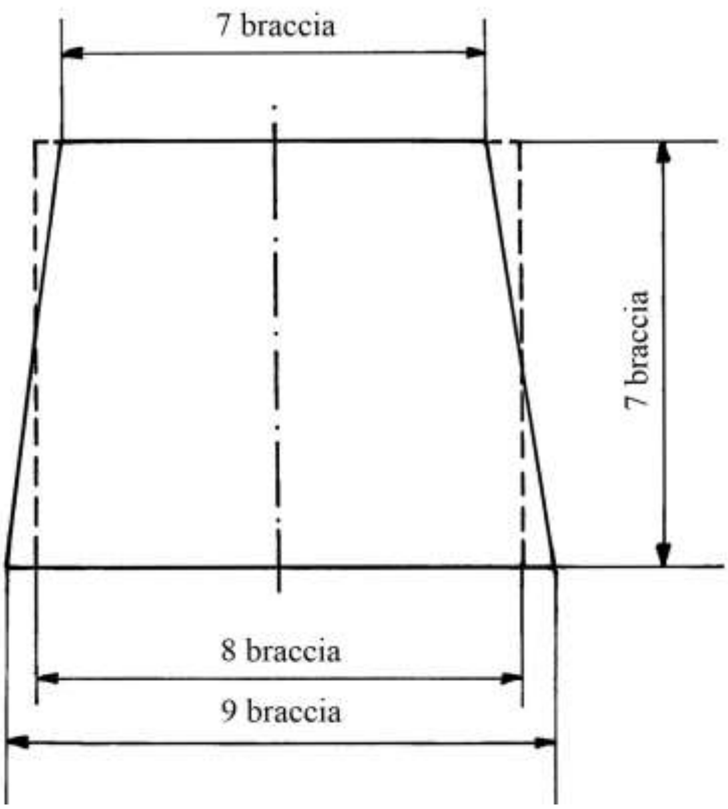
$V = 1/3 * 22/7 * (4{,}5^2 + 4{,}5 * 3{,}5 + 3{,}5^2) * 7 = 22/3 * (20{,}25 + 15{,}75 + 12{,}25) =$
$= 22/3 * 48{,}25 = (353 + 5/6)$ $braccia^3$.

Per convertire da $braccia^3$ a moggia è sufficiente moltiplicare il precedente risultato per il coefficiente 10/24 perché 1 $braccio^3$ equivale a 10 staia e 24 staia valgono 1 moggio, per cui si ha:

$V = (353 + 5/6) * 10/24$ moggia $= (147 + 31/72)$ moggia.

Il risultato ottenuto da Dionigi Gori è approssimato per eccesso.

L'Autore ha assimilato il tronco di cono a un cilindro con diametro lungo 8 braccia, media aritmetica fra le lunghezze dei diametri della bocca e del fondo e conservando inalterata l'altezza:

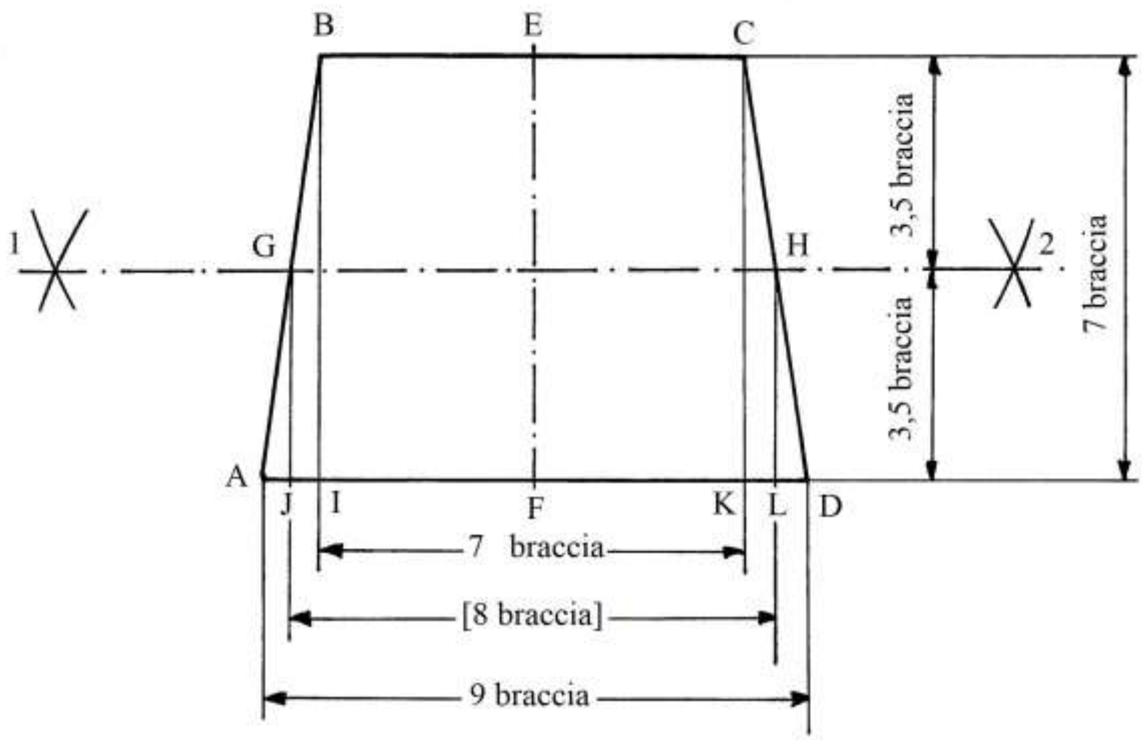


\- APPROFONDIMENTO -

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup in un contributo in italiano, citato in bibliografia, descrive a p. 14 un metodo usato dai geometri Babilonesi:

“Il volume di un tronco di cono veniva trovato come il prodotto dell’altezza per la sezione trasversale tagliate a metà altezza. In un testo si propone di trovare il volume di un tronco di piramide nello stesso modo…”.

Applichiamo quel metodo al caso della fornace considerata da Dionigi Gori.
A, B, C e D sono gli estremi dei due diametri del solido e E e F sono i punti medi.



Fare centro in E e in F con raggio abbastanza grande e tracciare i quattro archi che si intersecano nei punti 1 e 2: per questi ultimi passa l’asse GH che divide in due parti uguali l’altezza EF.

Dai vertici B, G, C e H abbassare le perpendicolari al diametro AD: sono BI, GJ, CK e HL.

AI è lungo KD:

(AI + KD) = (AD – IK) = (9 – 7) = 2 braccia.

AI = KD = (AI + KD)/2 = 2/2 = 1 braccio.

I triangoli AJG e AIB sono rettangoli e simili. Vale la seguente proporzione:

AJ : GJ = AI : BI da cui:

AJ = (GJ * AI)/BI = (3,5 * 1)/7 = 0,5 braccia.

Ne consegue:

JL = AD – (AJ + LD) = 9 – (0,5 + 0,5) = GH = 8 braccia.

Dionigi Gori aveva calcolato il diametro medio fra quello della bocca e quello del fondo e aveva ottenuto lo stesso risultato: 8 braccia.

L’area della sezione circolare che ha diametro GH è:

$S_{GH} = 11/14 * GH^2 = 11/14 * 8^2 = 352/7$ braccia^2.

L’altezza del cilindro equivalente è:

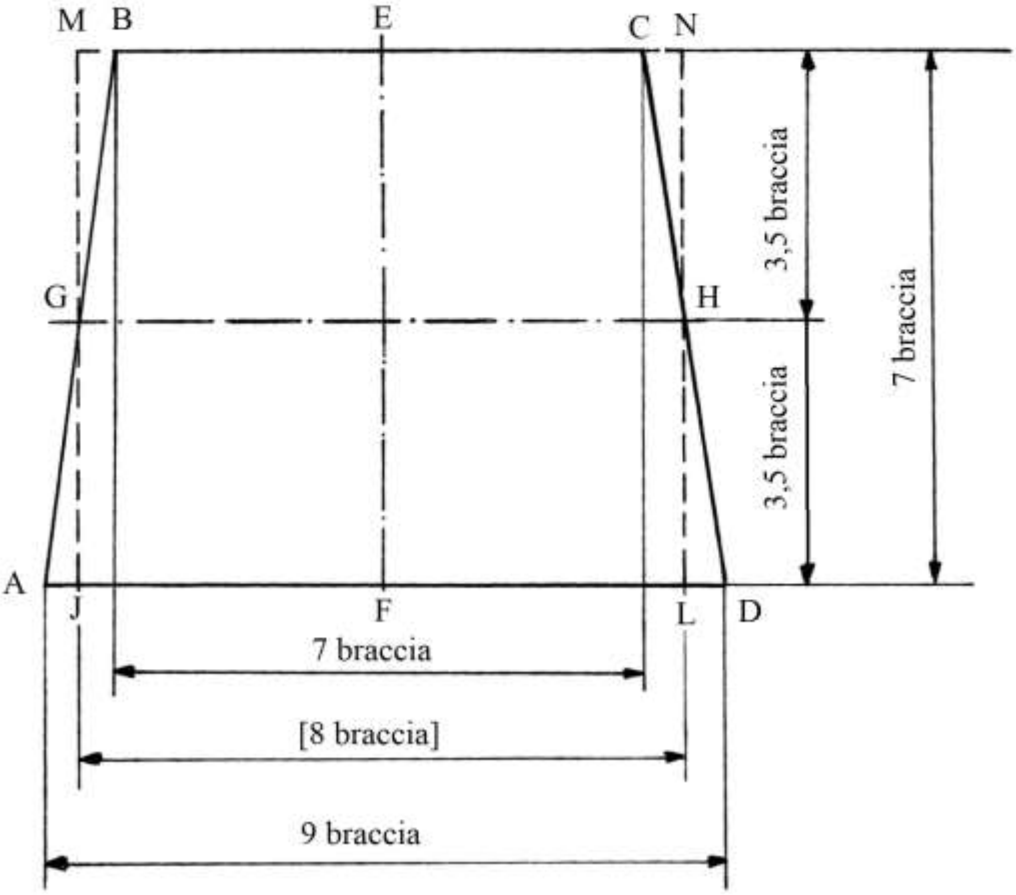
h = 7 braccia.

Il volume V_{GH} è:

$V_{GH} = S_{GH} * h = (352/7) * 7 = 352$ braccia^3.

Con la formula corretta, il volume V del tronco di cono è stato calcolato in (353 + 5/6) braccia^3.

Il risultato ottenuto con il metodo dei Babilonesi è leggermente approssimato per difetto: esso corrisponde al volume del cilindro JMNL che ha diametro MN = JL lungo 8 braccia e altezza EF lunga 7 braccia:



Come scritto in precedenza, il volume calcolato da Dionigi Gori equivale a (358 + 2/5) braccia^3 e, fra i tre risultati, è quello che si allontana di più dal valore corretto e per eccesso.

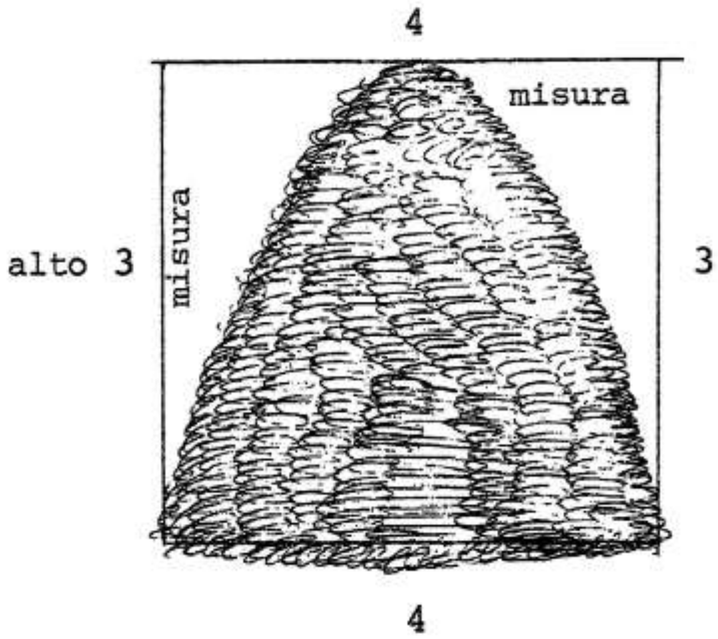
- -

<u>Misura di un monte di grano</u>

Un monte di grano ha la forma di un cono alto 3 braccia e con la base circolare con diametro *d* lungo 4 braccia.

Il volume del monte è calcolato con una procedura simile a quella usata nella soluzione degli ultimi due problemi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro della base per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* moltiplicare per l'altezza: 16 * 3 = 48;
* dividere per 3 [è un *cono*]: 48/3 = 16 moggia, volume del monte di grano.



La formula corretta per il calcolo del volume di un cono è:

V = (S * h)/3   dove *S* è l'area della base e *h* l'altezza.

L'area S vale:

$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 4^2 = 88/7$ braccia^2 [= (12 + 4/7) braccia^2].

Il volume V è:

V = (88/7 * 3)/3 = 88/7 = (12 + 4/7) braccia^3.

Il volume in moggia è calcolabile usando la costante 10/24:

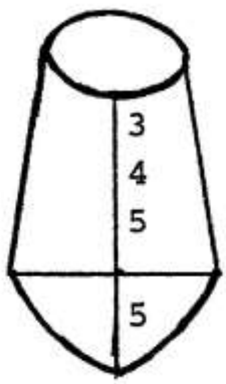
V = (12 + 4/7) * 10/24 moggia = (5 + 5/21) moggia.

Il risultato calcolato da Gori è errato: egli doveva moltiplicare per 1/3 perché il monte di grano non è un cilindro ma un cono, per cui il volume doveva essere ricavato come segue:

$V = (d^2 * h/3)\underline{/3} = [(42 * 3)/3]\underline{/3} = [16 * 3)/3]\underline{/3} = 16/3$ moggia = (5 + 1/3) moggia, anziché 16 moggia.

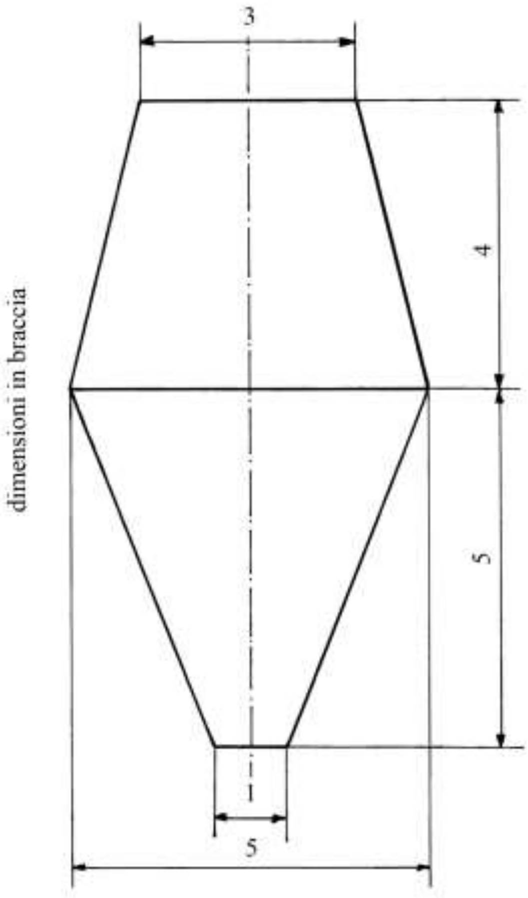
<u>Volume di una fossa di grano</u>

Una buca per il grano ha la forma di un doppio tronco di cono: i due solidi sono uniti lungo le loro comuni basi maggiori.



Lo schema originale è un po' primitivo: è disegnato in parte in assonometria e in parte in vista frontale.

Lo schema che segue è la vista frontale disegnata in scala:



L'Autore calcola separatamente i volumi dei due tronchi di cono con la procedura che segue:

* sommare i diametri del tronco di cono superiore: $3 + 5 = 8$;
* dividere per 2: $8/2 = 4$;
* moltiplicare per sé stesso: $4 * 4 = 16$;
* moltiplicare per l'altezza: $16 * 4 = 64$;

* sommare i diametri del tronco di cono inferiore: $5 + 1 = 6$;
* dividere per 2: $6/2 = 3$;
* moltiplicare per sé stesso: $3 * 3 = 9$;
* moltiplicare per l'altezza del tronco di cono inferiore: $9 * 5 = 45$;
* sommare con 64: $45 + 64 = 109$;
* dividere per 3: $109/3 = (36 + 1/3)$ moggia, volume dell'intera buca di grano.

L'Autore ha di nuovo applicato il metodo già usato in precedenza.

- APPROFONDIMENTO -

Calcoliamo il volume dei due tronchi di cono applicando la formula corretta, già incontrata:

$$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + R * r + r^2).$$

Il tronco di cono superiore ha volume V_1. I suoi dati sono:

* $h = 4$;
* $R = 3/2 = 1{,}5$;
* $r = 5/2 = 2{,}5$.

$V_1 = 1/3 * 22/7 * 4 * (1,5^2 + 1,5 * 2,5 + 2,5^2) = 88/21 * (2,25 + 3,75 + 6,25) =$
$= 88/21 * 12,25 = 1078/21$ braccia^3.

Il tronco di cono inferiore ha volume V_2. I suoi dati sono:

* h = 5;
* R = 5/2 = 2,5;
* r = ½ = 0,5.

Il volume è:

$V_2 = 1/3 * 22/7 * 5 * (2,5^2 + 2,5 * 0,5 + 0,5^2) =$
$= 110/21 * (6,25 + 1,25 + 0,25) = 110/21 * 7,75 = 852,5/21$ braccia^3.

Il volume V dell'intera fossa è:

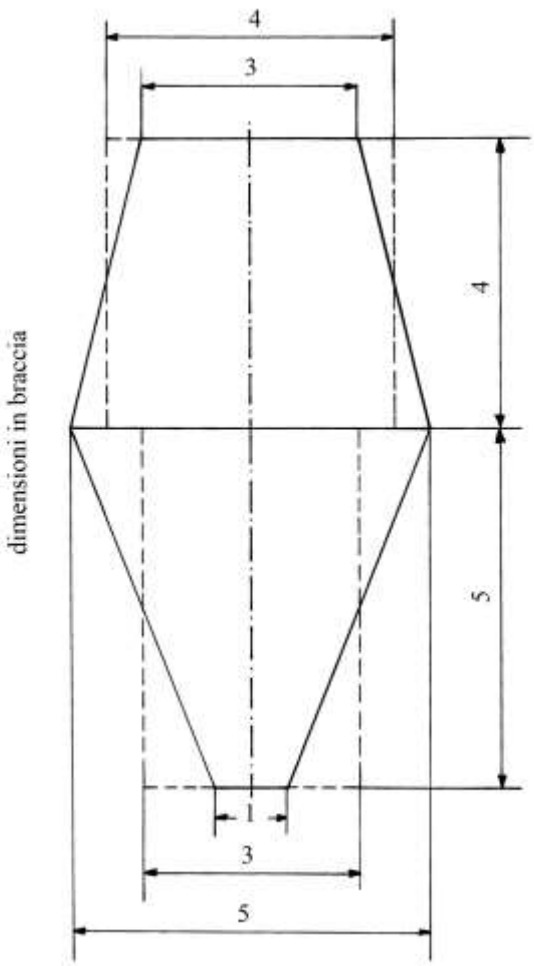
$V = V_1 + V_2 = 1078/21 + 852,5/21 = 1930,5/21$ braccia^3.

In moggia, il volume V è:

V = 1930,5/21 * 10/24 moggia = (38 + 17/56) moggia.

Il risultato ottenuto da Dionigi Gori è approssimato per difetto: il suo impiego è accettabile solo per la misura di volumi di materiali di scarso valore.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%



La soluzione adottata da Dionigi Gori ha trasformato i due tronchi di cono in altrettanti cilindri che hanno conservato le rispettive altezze:

* il tronco di cono superiore è divenuto un cilindro con diametro medio dato da:

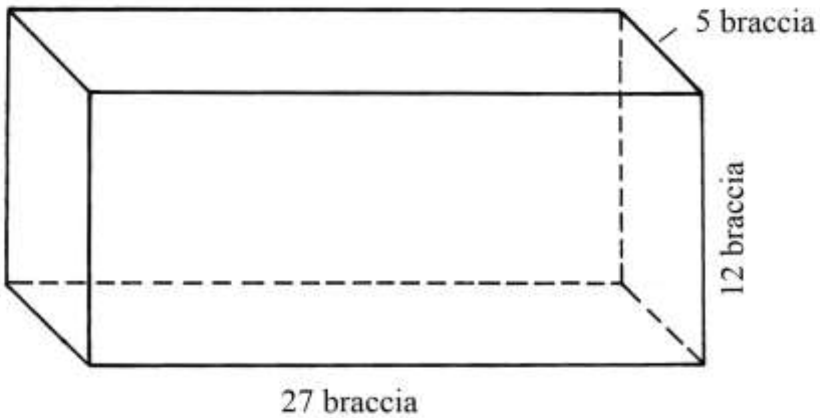
(3 + 5)/2 = 4 braccia;

* il tronco di cono inferiore è stato trasformato in un cilindro con diametro medio dato da:
  $(1 + 5)/2 = 3$ braccia.

- -

Costruzione di un muro

Un muro è lungo 27 braccia, è alto 12 e spesso 5 braccia.



Deve esse calcolato il suo volume, V, in braccia^3 e poi in canne^3.

$V = (12 * 5) * 27 = 60 * 27 = 1620$ braccia^3 = 1620/64 canne^3 =
= (25 canne^3 + 20 braccia^3).

Gori divide il volume di 1620 braccia^3 per 16 (invece che per 64) e ottiene:

$V_{GORI} = 1620/16$ = (101 canne^3 + 4 braccia^3).

Una canna lineare è lunga 4 braccia lineari: di conseguenza, 1 canna cubica vale:

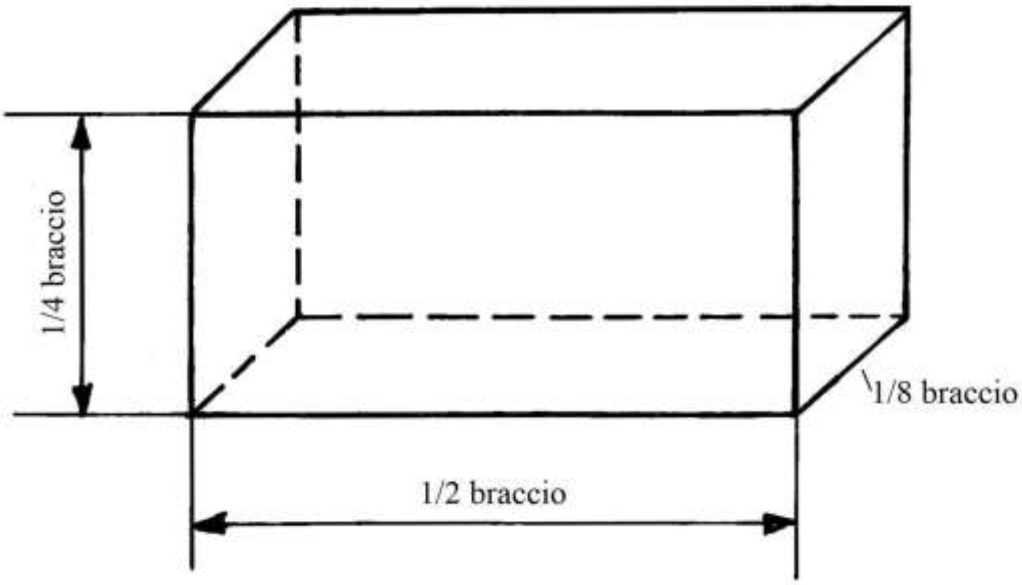
1 canna^3 = 4^3 braccia^3 = 64 braccia^3.

Il problema chiede poi il numero N dei mattoni occorrenti per costruire il muro; Gori indica in 64 il numero dei mattoni che entrano in 1 braccio^3. *N* vale:

$N = V * 64 = 1620 * 64 = 103680$.

Pietro Cataneo, nel suo trattato “Le pratiche delle due prime matematiche” pubblicato nel 1567, fornisce alcune informazioni sulle dimensioni dei mattoni usati a Siena:

* lunghezza: ½ braccio;
* larghezza: ¼ braccio;
* spessore: 1/8 braccio.



Il volume di un singolo mattone è:

$V_{\text{MATTONE}} = ½ * ¼ * 1/8 = 1/64$ braccia^3.

Ne consegue che 1 braccio^3 contiene:

1/(1/64) = 64 mattoni.

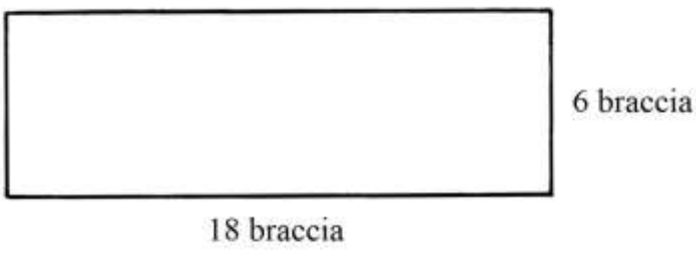
Fra le tre dimensioni dei mattoni esistono delle proporzioni:

$½ : ¼ : 1/8 = ½ : (1/2)^2 : (1/2)^3 = 4 : 2 : 1$.

È probabile che nel corso dei secoli le dimensioni dei mattoni siano cambiate: il rapporto fra le loro dimensioni può essere variato poco perché rispondenti a esigenze ergonomiche e costruttive.

<u>Costruzione di un palco</u>

Un palco è lungo 18 braccia ed è largo 6 braccia:



Il problema chiede il numero dei mattoni necessari per costruirlo.

La soluzione del problema suggerisce in maniera implicita che lo spessore del palco sia uguale a 1/8 di braccio, come lo spessore di un singolo mattone: l'Autore considera solo la superficie di un mattone e tralascia il suo spessore.

$S_{\text{MATTONE}} = ½ * ¼ = 1/8$ braccia^2.

L'area del palco è:

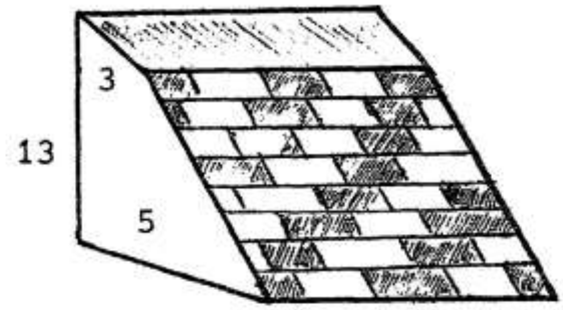
$S_{\text{PALCO}} = 18 * 6 = 108$ braccia^2.

Il numero N dei mattoni occorrenti è:

$N = S_{\text{PALCO}}/S_{\text{MATTONE}} = 108/(1/8) = 108 * 8 = 864$.

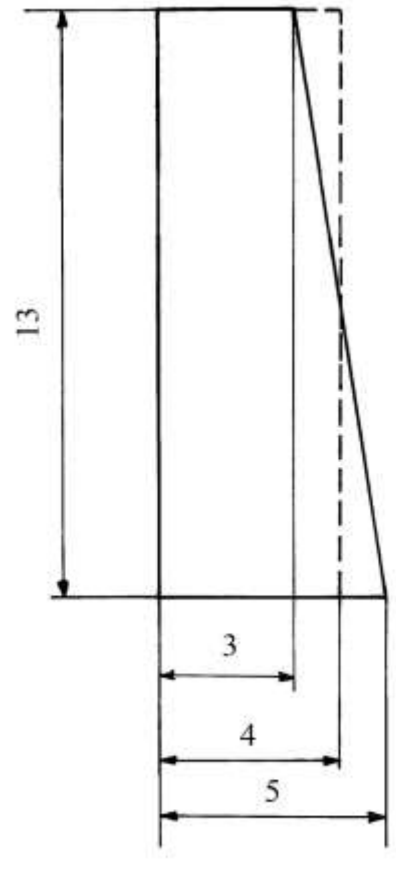
Muro a scarpa

Un muro a scarpa ha la forma e le dimensioni mostrate nello schema originale:



Il volume del muro è calcolato con la procedura che segue:

* sommare la lunghezza al capo con quella al fondo: 3 + 5 = 8;
* dividere per 2: 8/2 = 4 [Gori assimila il solido a un parallelepipedo che visto di profilo ha spessore medio di 4 braccia];



dimensioni in braccia

* moltiplicare per l’altezza del muro: 4 * 13 = 52 [braccia^2, area della base del solido equivalente];
* moltiplicare per la lunghezza del muro: 52 * 27 = 1404 braccia^3;
* dividere per 16: 1404/16 = (87 canne^3 + 12 braccia^3), volume del muro.

Le cifre fornite da Gori riguardo al volume espresso in *canne^3* destano perplessità. Come già ricordato, una canna cubica rappresenta il volume di un cubo che ha spigoli lunghi 4 braccia:

$1\ canna^3 = (4\ braccia)^3 = 64\ braccia^3$.

Il corretto volume del muro è:

$V = 1404/64\ canne^3 = (21\ canne^3 + 60\ braccia^3)$.

Infine, l'autore calcola il numero N dei mattoni occorrenti, utilizzando il solito rapporto di 64 mattoni per ogni $braccio^3$:

N = V * 64 = 1404 * 64 = 89856.

- APPROFONDIMENTO -

La perplessità sopra accennata richiede un'ulteriore spiegazione. Sembra che Dionigi Gori assegni al *braccio quadro corporeo* un valore che può essere confuso con quello del braccio quadro e di conseguenza questo fatto porti a conseguenze anche per ila canna cubica e la tavola cubica.

La canna vale 4 braccia e la canna quadrata equivale a:

1 canna quadrata (o $canna^2$) = 4^2 braccia quadrate = 16 braccia quadrate.

L'ipotetica unità di misura canna cubica dovrebbe valere:

1 canna cubica = 1 canna * 1 canna quadrata = 1 canna quadra corporea =
= 4 braccia * 16 braccia quadrate = 64 $braccia^3$.

Analoghe considerazioni valgono per le ipotetiche unità di misura *tavola quadrata* e *tavola cubica*.

Sembra che per Gori la canna cubica valga solo 16 braccia quadre corporee.

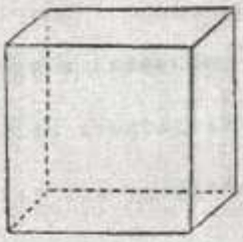
All'epoca in cui Gori insegnava, lavorava come consulente e scriveva non era ancora in uso il sistema metrico decimale, ma il concetto di "cubo" doveva essere ben presente.

Pietro [o Pier] Maria Calandri (1457 – 1508) scrisse un piccolo trattato geometrico dal titolo "*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*" che fu pubblicato da Giovan Vettorio Soderini (1526 – 1596) nel suo volume di agricoltura. A parte il titolo, il testo geometrico è scritto in italiano.

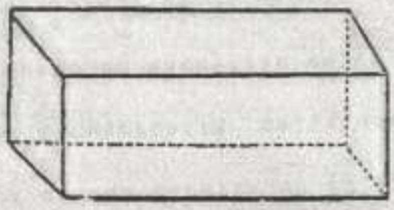
Calandri apparteneva a un'importante famiglia di abacisti fiorentini.

A p. 328 del suo trattato, Calandri definisce le unità di misura basato sul braccio con queste affermazioni:

Dicemmo che braccio quadro superficiale era una superficie quadrata che per ogni verso era un braccio; e dicendo superficie s' intende piana e dicendo quadrata s' intende d' angoli retti. Adunque braccio quadro superficiale è una figura quadrata piana di angoli retti, che per ogni lato è un braccio lunga; ma il braccio quadro corporeo è un corpo che dai Greci è chiamato cubo e dai volgari dado, il quale è per ogni suo verso un braccio lineale, che volgarmente è detto un braccio andante. Adunque



braccio quadro corporeo è un cubo che è lungo un braccio, largo un braccio et alto un braccio, come questa figura quadrilatera; e quando diciamo questo braccio corporeo è quadro tante



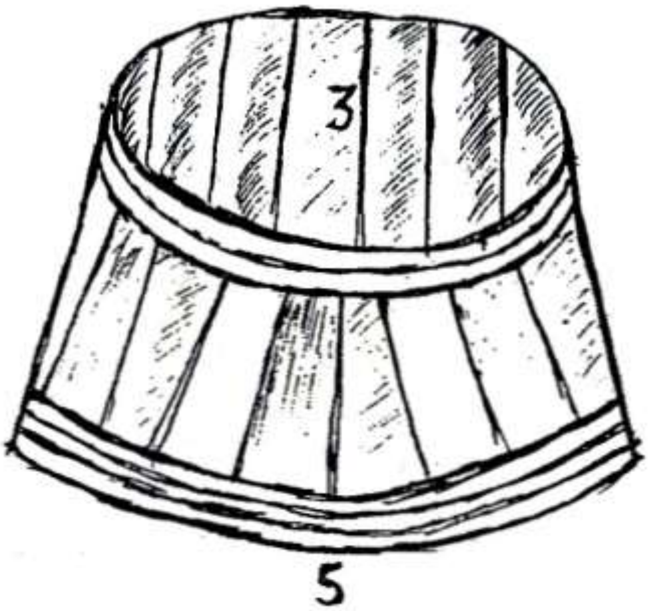
braccia, s' intende che tanti dei sopraddetti cubi siano in quel corpo, quante sono quelle braccia quadre che diciamo che egli è. E debbiamo sapere che uno di questi bracci quadri corporei sieno 9 staia di grano, ovvero cinque barili di

- -

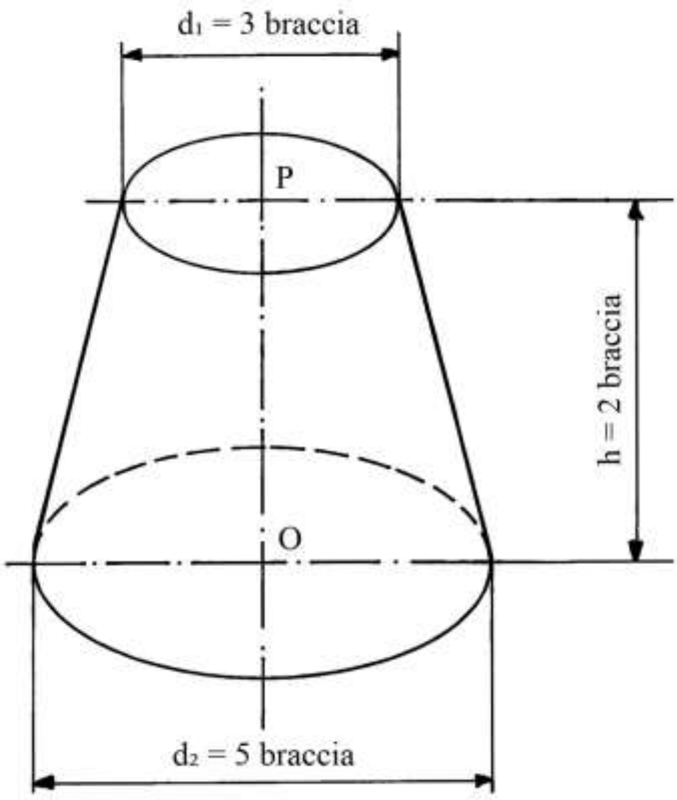
<u>Tenuta di un tino</u>

Riguardo al volume del contenuto di un tino, l'Autore offre una stima: un terzo sarebbe costituito dalla vinaccia e il vino rappresenterebbe i restanti due terzi.

Un tino ha diametro lungo 3 braccia alla bocca e diametro di 5 braccia al fondo; la sua altezza è di 2 braccia.



Lo schema che segue ripropone il tino, con l’avvertenza che, per semplificare, l’altezza è incrementata e fuori scala:



N.B. La figura è ingrandita in senso verticale

La procedura impiegata da Dionigi Gori per determinare il volume del tino contiene i seguenti passi:

* sommare il diametro della bocca e quello del fondo: $3 + 5 = 8$;

* dividere per 2: $8/2 = 4$;
* moltiplicare per sé stesso: $4 * 4 = 16$;
* moltiplicare per l'altezza: $16 * 2 = 32$;
* dividere per 3: $32/3 = (10 + 2/3)$ moggia volume del tino.

La procedura è condensata in una formula:

$$V = [(d_1 + d_2)/2]^2 * h/3.$$

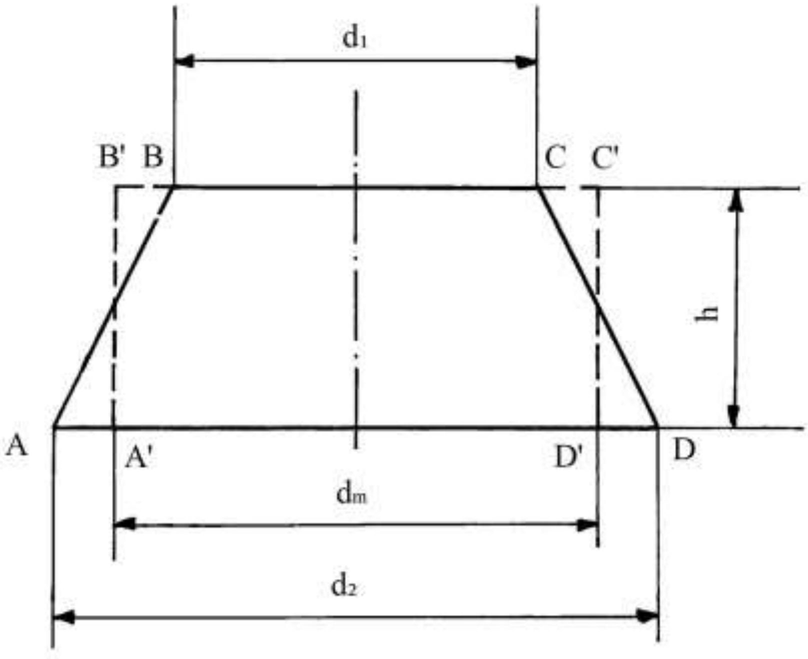
Il metodo usato dall'Autore per calcolare il volume di questo tronco di cono è quello già incontrato più volte nella soluzione di precedenti problemi.

Il vino che viene ricavato è uguale ai due terzi del volume del tino:

$$V_{VINO} = 2/3 * (10 + 2/3) = (7 + 1/9) \text{ moggia}.$$

L'Autore ha assimilato il tronco di cono a un cilindro di uguale altezza, *h* 0 2 braccia, e con diametro d_m uguale alla media aritmetica dei due diametri, alla bocca d_1 e al fondo d_2:

$$d_m = (d_1 + d_2)/2 = (3 + 5)/2 = 4 \text{ braccia}.$$



- APPROFONDIMENTO -

Applichiamo la formula corretta:

$$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + R * r + r^2).$$

I valori sono:

* $h = 2$ braccia;
* $R = d_2/2 = 5/2 = 2{,}5$ braccia;
* $r = d_1/2 = 3/2 = 1{,}5$ braccia.

$$V = 1/3 * 22/7 * 2 * (2{,}5^2 + 2{,}5 * 1{,}5 + 1{,}5^2) = 44/21 * (6{,}25 + 3{,}75 + 2{,}25) =$$
$$= 44/21 * 12{,}25 = 539/21 = 77/3 \text{ braccia}^3.$$

Il volume in moggia è:

$$V = (77/3) * (10/24) = 770/72 = 385/36 = (10 + 25/36) \text{ moggia}.$$

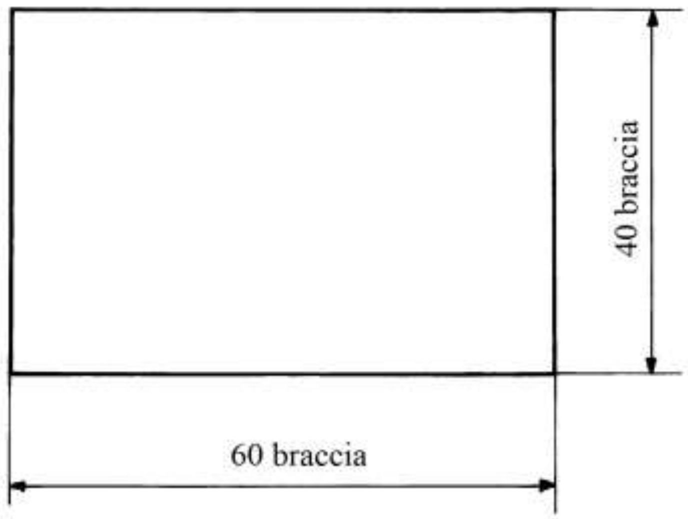
Il risultato ottenuto da Gori per il volume del tino – $V = (10 + 2/3)$ moggia – è leggermente approssimato per difetto: la differenza è minima:

$$(10 + 25/36) – (10 + 2/3) = 25/36 – 2/3 = 1/36 \text{ moggia}.$$

- -

<u>Viti piantate in un campo</u>

Un campo rettangolare ha dimensioni di 60 per 40 braccia:



Vi possono essere piantate delle viti in *tre* modi differenti:

* a distanza di 2 braccia;
* a distanza di 2 braccia in un verso e di (1 + ½) braccia in un altro;
* a distanza di (1 + ½) braccia in entrambi i versi.

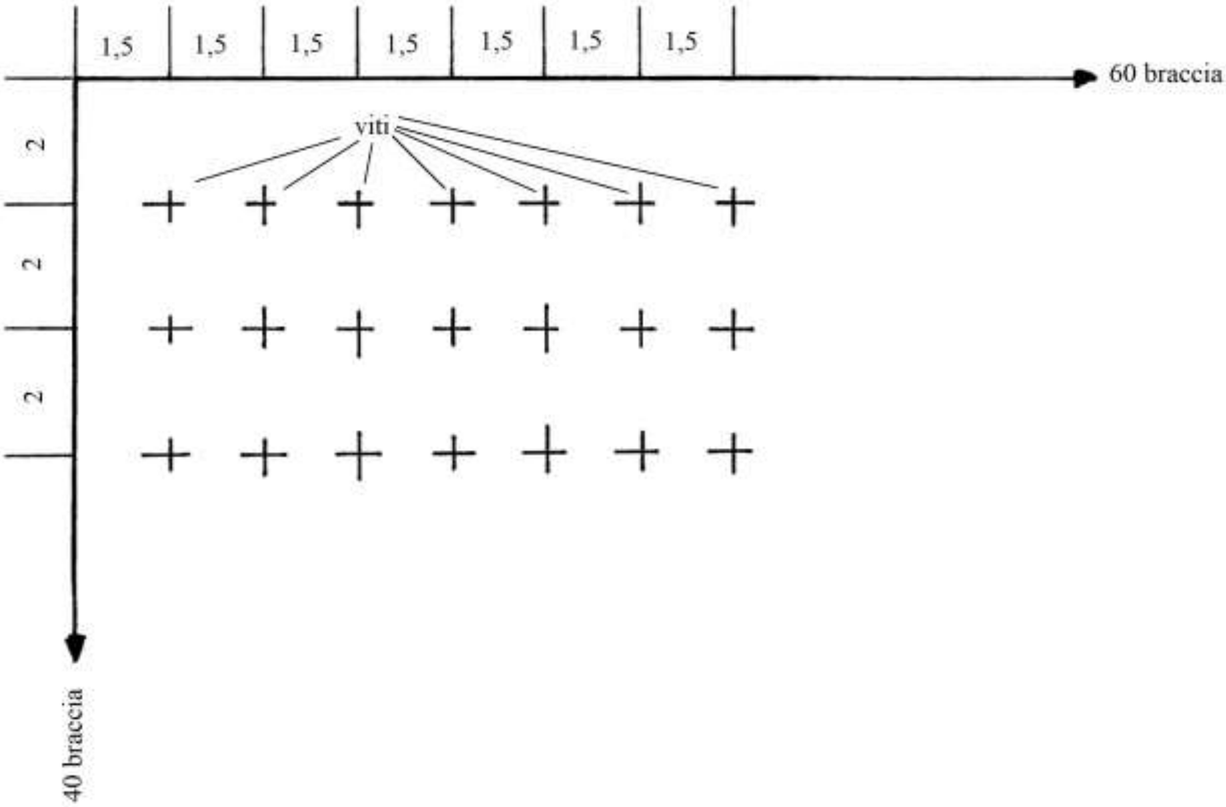
Nel caso della soluzione mista – 2 per (1 + ½) – con una distanza di 1,5 braccia nel senso della lunghezza (60 braccia) e di 2 braccia nel senso della larghezza (40 braccia) si ha:

60/1,5 = 40 viti: viene aggiunta un'unità: 40 + 1 = 41 viti;

40/2 = 20 viti: viene aggiunta un'unità: 20 + 1 = 21.

Il numero N delle viti piantate è:

N = 41 * 21 = 861.



Alcune unità di misura usate a Siena

Le carte da 30 *recto* a 35 *recto* del trattato di Dionigi Gori contengono alcune informazioni sulle monete e sulle unità di misura sia ponderali che lineari e superficiali.

Ecco riprodotte alcune equivalenze:

* 1 moggio = 24 staia di grano;
* 1 staio = 50 libbre di grano o di farina;
* 1 staio di vino pesa 64 libbre;
* 1 staio = 16 boccali;
* 1 staio di olio pesa 56 libbre;
* 1 staio di rena pesa 80 libbre;
* 1 staio di calcina pesa 50 libbre;
* 1 staio di calcina *nera* pesa 55 libbre;
* 1 staio di gesso pesa 80 libbre.

APPENDICE
==========

Il trattato 15 di Dionigi Gori

Le carte dalla 36 *recto* alla 41 *recto* del trattato sono state inserite da un Anonimo che afferma di averle copiate da un manoscritto di Dionigi Gori.

Vi sono contenute ulteriori informazioni sulle unità di misura usate a Siena:

* 1 dito = 4 grani d'orzo;
* 1 palmo = 4 dita;
* 1 piede = 4 palmi = 16 dita;
* 1 cubito = 1,5 piedi = 6 palmi = 24 dita;
* 1 braccio da canna senese = 8 palmi = 32 dita;
* 1 braccio a passetto = 10 palmi = 40 dita [= 5/4 di braccio da canna senese].

\- APPROFONDIMENTO -

Il rapporto fra la lunghezza del braccio a passetto e quella del braccio da canna senese espresso in dita, all'epoca in scriveva Dionigi Gori (prima metà del XVI secolo) espresse entrambe in *dita* è:

braccio a passetto/braccio da canna senese = 10/8 = 5/4 = 1,25.

Le *Tavole di Ragguaglio* pubblicate nel 1782 a seguito della riforma metrologica voluta dal Granduca Pietro Leopoldo forniscono le seguenti equivalenze:

* 1 braccio da canna senese = 1 braccio da panno fiorentino + (7 + 2/12) denari =
  = (247 + 1/6) denari di braccio da panno fiorentino;
* 1 [braccio a] passetto senese = 1 braccio da panno fiorentino + 5 soldi + 9 denari =
  = 240 + 60 + 9 denari = 309 denari di braccio da panno fiorentino.

Stando ai dati della tabella del Ragguaglio, qui di seguito riprodotta dalla p. 553, il rapporto fra le lunghezze del *passetto* e del *braccio senese* espresse in *denari* era:

309/(247 + 16) ≈ 1,25 = 10/8 = 5/4.

Un braccio era diviso in 20 soldi e ciascun soldo in 12 denari:

1 braccio = 20 soldi = 240 denari   e
1 soldo = 12 denari.

Il rapporto non era cambiato dall'epoca nella quale Dionigi Gori componeva il suo trattato.

SIENA

LA Libbra di Siena corrisponde a Once 11. Denari 15. Grani 15. del Peso di Firenze.

Lo Stajo del Grano dividesi in Boccali 16., e corrisponde a Staja — Quarti 3. Quartucci 11. e $\frac{76}{100}$ della Misura da Grano di Firenze.

Il Barile del Vino dividesi in Staja 2., lo Stajo in Boccali 16., ed il Boccale in Quartucci 4., e secondo la Misura da Vino di Firenze contiene Fiaschi 18. Quartucci 5. $\frac{12}{100}$.

Il Barile dell' Olio è composto di due Staja, e lo Stajo dividesi in Boccali 16., il Boccale in Quartucci 4. La sua tenuta a Misura Fiorentina è di Barili 1. Fiaschi 3. Quartucci 6. e $\frac{14}{100}$.

Il Braccio dividesi in Once 24., ed è lungo Braccia 1. Sol. — Den. 7. $\frac{2}{12}$.

Il Passetto è di lunghezza Braccia 1. Soldi 5. Denari 9.

Lo Stajo di Terra è composto di Tavole 100., la Tavola di Pertiche 6., e la Pertica di Braccia □ 6., e secondo la nuova Misura corrisponde a Quadrati — Tavole 3. Pertiche 8. Deche 1. Braccia □ 9. $\frac{2400}{10000}$.

Il Miglio Statutario è di lunghezza Braccia 3600. Senesi, e corrisponde a Miglia 1. Passi 236.

Il Miglio moderno è di lunghezza Braccia 2500., e corrisponde a Miglia — Passi 858. Braccia 1.

aaaa

Equivalenze delle unità di misura di Firenze e di Siena espresse in metri

A titolo indicativo, forniamo le equivalenze di metri e metri quadrati di alcune unità di misura:

* 1 braccio da panno di Firenze = 0,583626 m;
* 1 braccio di Siena = (247 + 1/6)/240 * 0,583626 ≈ 0,6011 m, arrotondato per eccesso;
* 1 canna = 4 braccia di Siena = 0,6011 * 4 = 2,4042 m;
* 1 tavola di Siena = 6 braccia di Siena = 6 * 0,6011 = 3,6063 m;
* 1 braccio^2 di Siena = $0,6011^2$ = 0,3613 m^2;
* 1 canna^2 = 16 braccia^2 di Siena = 5,78 m^2;
* 1 tavola^2 = 36 braccia^2 di Siena = 13,005 m^2;
* 1 staio di terra = 100 tavole2 = 1300,5 m^2.

Staio di terra

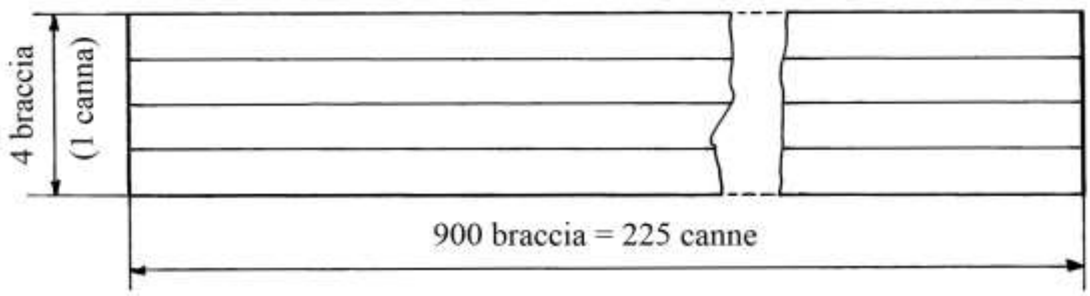
L'Anonimo estensore delle carte finali del trattato di Dionigi Gori presenta due esempi di superfici rettangolari, con le seguenti espressioni (carte 36 *verso* – 37 *recto*):

"*900 Canne andanti*
sono uno staio, e una
canna andante e la-
rga un braccio e longa 4.
600 Tavole andanti sono
uno staio larghe uno e
longhe 6 braccia a canna."

Un rettangolo lungo 900 canne e largo 1 canna ha area S:

S = 900 * 1 = (900 * 4) braccia * 4 braccia = 14400 braccia^2: il testo è impreciso perché 14400 braccia^2 valgono *4 staia*. Invece di scrivere "*900 Canne andanti*" l'Anonimo avrebbe dovuto scrivere "*225 Canne andanti*".

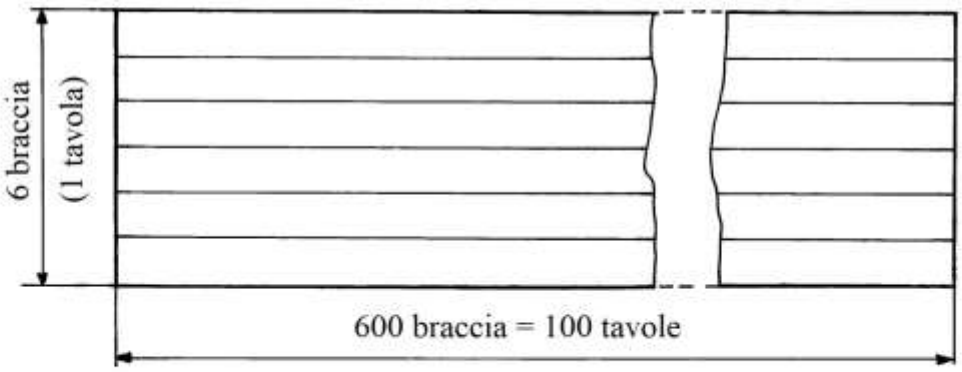
Lo schema che segue riporta le corrette dimensioni del rettangolo che ha area di 1 staio:



Si tratta di un rettangolo largo 1 canna e lungo 225 canne:

S = 1 * 225 = 225 canne^2 = 225 * 16 braccia^2 = 3600 braccia^2 = 1 staio.

La seconda superficie è larga 6 braccia, e cioè una tavola, e lunga 100 tavole (e non "*600 Tavole andanti*):



La sua area è:

$$S = 1 * 100 \text{ tavole}^2 = 3600 \text{ braccia}^2 = 1 \text{ staio}.$$

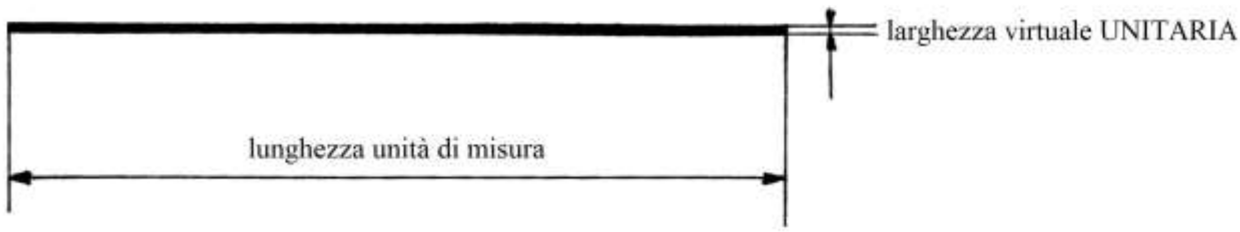
I due rettangoli sembrano richiamare il concetto di "*linee larghe*", argomento largamente studiato dallo storico della matematica danese Jens Høyrup.

- APPROFONDIMENTO -

Le "linee larghe"

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup, fra l'altro profondo conoscitore della matematica medievale italiana – argomento al quale ha dedicati diversi studi fra i quali un volume su Jacopo da Firenze –, ha messo in evidenza un particolare metodo geometrico e aritmetico nella definizione delle unità di superficie, metodo impiegato perfino presso popoli antichi quali i Babilonesi e gli Egizi, che egli ha definito con l'espressione *linee larghe*, da lui tradotta in inglese con *broad lines*.

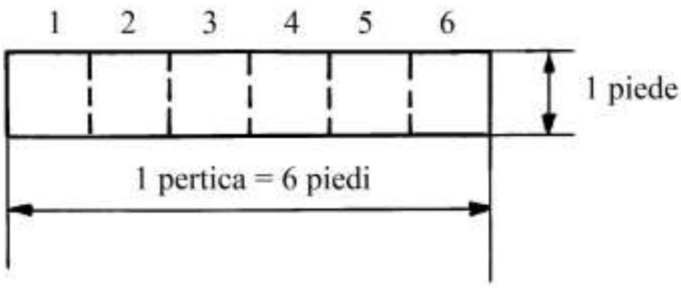
Le *linee larghe* erano delle strisce rettangolari larghe soltanto un'unità di misura e lunghe un multiplo di essa:



Alcune unità di misura di superficie usate nel Medioevo a Pisa seguivano questo metodo.

Nella *Practica geometrie* di Leonardo da Pisa (Fibonacci, circa 1170 – dopo il 1240)), compilata negli anni 1220-1221, sono descritte le unità di misura lineari e superficiali usate nel Medioevo a Pisa. In questa Repubblica le unità superficiali erano basate sull'applicazione del metodo delle *linee larghe*, come è il caso dell'esempio che segue.

Una *pertica superficiale* era rappresentata da un rettangolo lungo 1 pertica lineare e largo 1 piede lineare:



Oggi diremmo che quel rettangolo ha un'area di 6 piedi^2.

Il "*Libro di ragioni e misure in sunto e a mente*" di Dionigi Gori potrebbe essere un'ulteriore prova dell'esistenza della pratica delle unità di misura a "linee larghe" nella metrologia Toscana.

Il commercio delle stoffe

Høyrup fa notare come il metodo delle *linee larghe* sia tuttora usato nel commercio delle stoffe (e lo era nel Medioevo quando le stoffe erano misurate e vendute a *braccia da panno*).

Una *pezza di stoffa* è una striscia di tessuto prodotta da un telaio e priva di orli o finiture: essa viene avvolta intorno a un'anima di robusto cartone o di plastica.

La lunghezza di una pezza è variabile a seconda delle fibre tessili con le quali è stata prodotta e può partire da 30-40 m per le pezze destinate alla vendita al dettaglio.

La larghezza di una pezza è chiamata *altezza*: le misure più usate sono 90, 150 e 240 cm.

Una volta scelta la pezza con una data altezza, l'acquirente compra la lunghezza in metri che gli occorre.

Il metodo delle *linee larghe* non è poi così insensato.

I rotoli di nastri e di carta

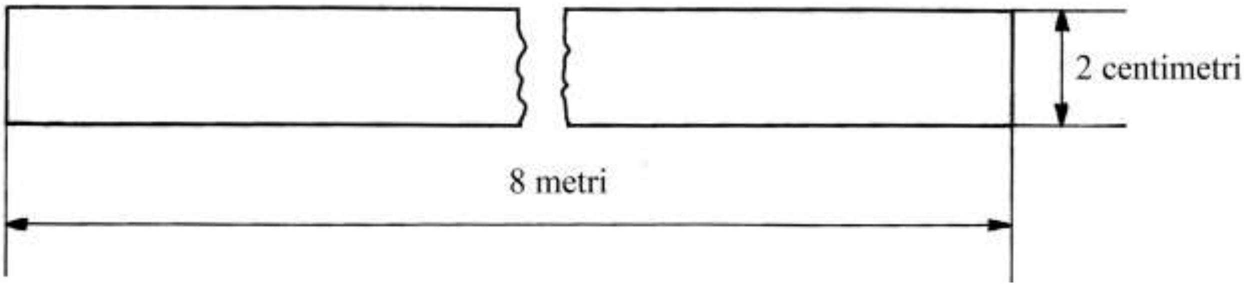
L'applicazione ai nostri giorni del metodo delle *linee larghe* può essere individuata in alcuni prodotti di larghissimo uso, tutti caratterizzati dall'essere *nastri* di spessore sottile, di notevole lunghezza e di ridotta larghezza, usati nelle più varie applicazioni.

Tutti questi prodotti sono avvolti intorno a un'anima a forma di cilindro cavo, di cartone rigido o prevalentemente di materiale plastico.

La lunghezza è sempre indicata in *metri* e la larghezza in *centimetri* o in *millimetri*: non è mai indicata l'area di m^2 dell'intero rotolo.

Facciamo alcuni esempi:

* nastro adesivo, usato per riparazioni, è lungo 8 metri e largo 2 centimetri:



*	nastro adesivo trasparente: 19 mm * 7,5 m;
*	nastro adesivo in alluminio: 10 cm * 50 m;
*	rotoli carta per plotter: 914 mm * 50 m;
*	nastro segnaletico: 48 mm * 33 m;
*	cerotto di fissaggio: 5 m * 1,25 cm;
*	nastro da imballaggio: 48 mm * 66 m.

La carta assorbente usata in cucina è avvolta intorno a un’anima di cartoncino e viene venduta in rotoli la cui lunghezza è misurata con il numero degli *strappi*.

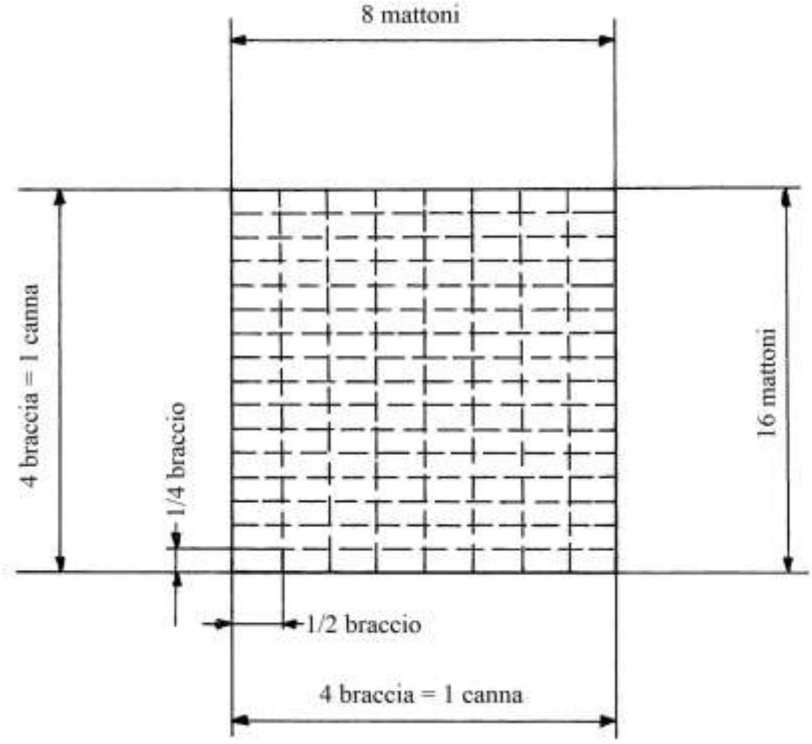
- -

<u>Altre informazioni sulle unità di misura senesi</u>

La canna quadrata era usata per misurare le muraglie e le loro superfici.
La tavola quadrata era impiegata per misurare i terreni.
Sempre per misurare terreni e distanze era usato il *miglio*:
1 miglio = 1000 passi;
1 passo = 5 piedi = 20 palmi.
Quindi 1 miglio valeva:
1 miglio = 5000 passi = 20000 palmi.

<u>Numero di mattoni occorrenti per costruire un muro</u>

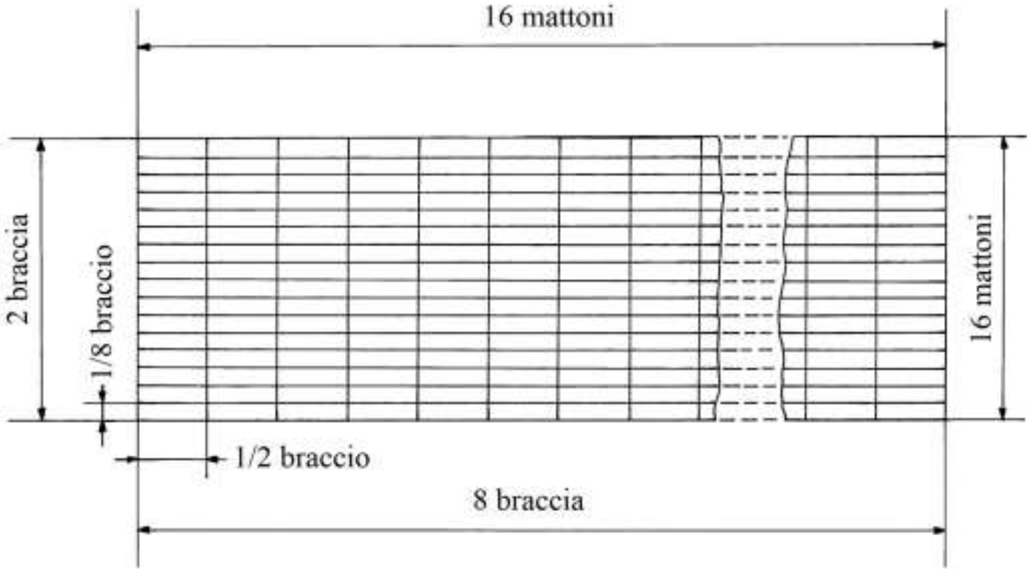
In una canna quadrata entrano 128 mattoni disposti *di coltello*.



Il muro *di coltello* (o *in foglio* o *in costa*) è una parete che ha un piccolo spessore: nel caso dei muri costruiti con i mattoni senesi lo spessore è 1/8 di braccio: i mattoni hanno la superficie maggiore – un rettangolo di dimensioni di ½ * ¼ di braccio – disposta in senso verticale come mostra lo schema qui sopra che è una vista frontale.

Questo tipo di muro era poco stabile.

Il secondo esempio che presenta il manoscritto è quello di una canna quadrata nella quale i mattoni sono disposti *in piano*; la soluzione più semplice è mostrata nello schema che segue:



Il muro è lungo 8 braccia ed è alto 2; la sua superficie S è:

$S = 8 * 2 = 16$ braccia^2 = 1 canna^2.

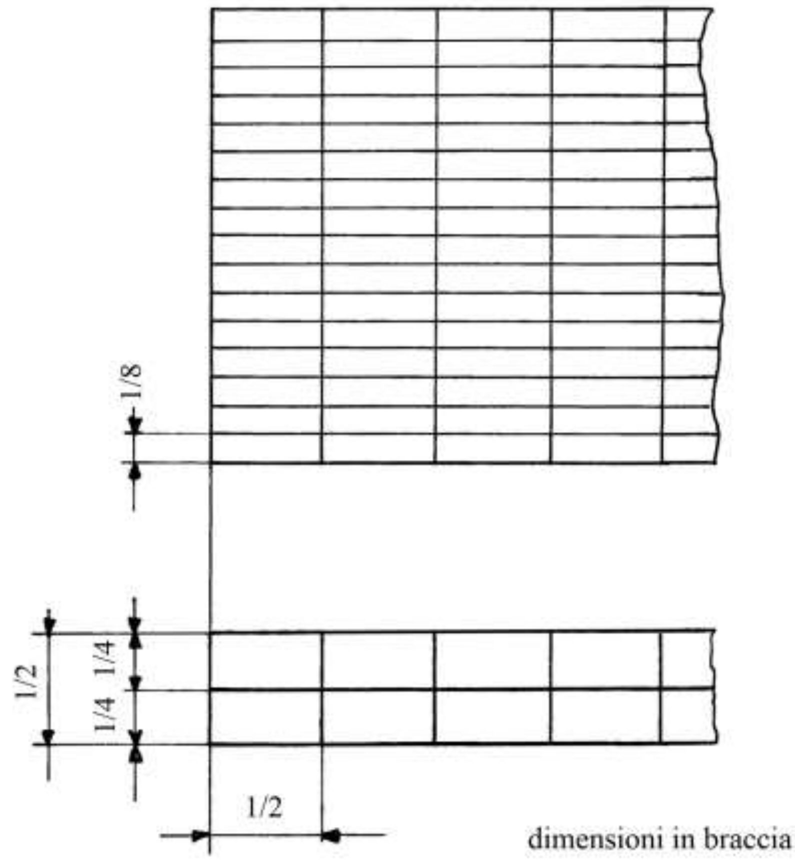
I mattoni sono distribuiti su 16 colonne verticali e 16 righe orizzontali: in totale sono 256; essi sono disposti con la lunghezza di ½ braccio disposta in senso orizzontale e l'altezza di 1/8 di braccio in senso verticale.

La terza dimensione del muro è lo spessore ed è uguale a ¼ di braccio.

Un terzo esempio di muro ha spessore di *mezzo braccio*: esso è realizzato unendo due muri come quello della precedente figura in modo raddoppiare il suo spessore:

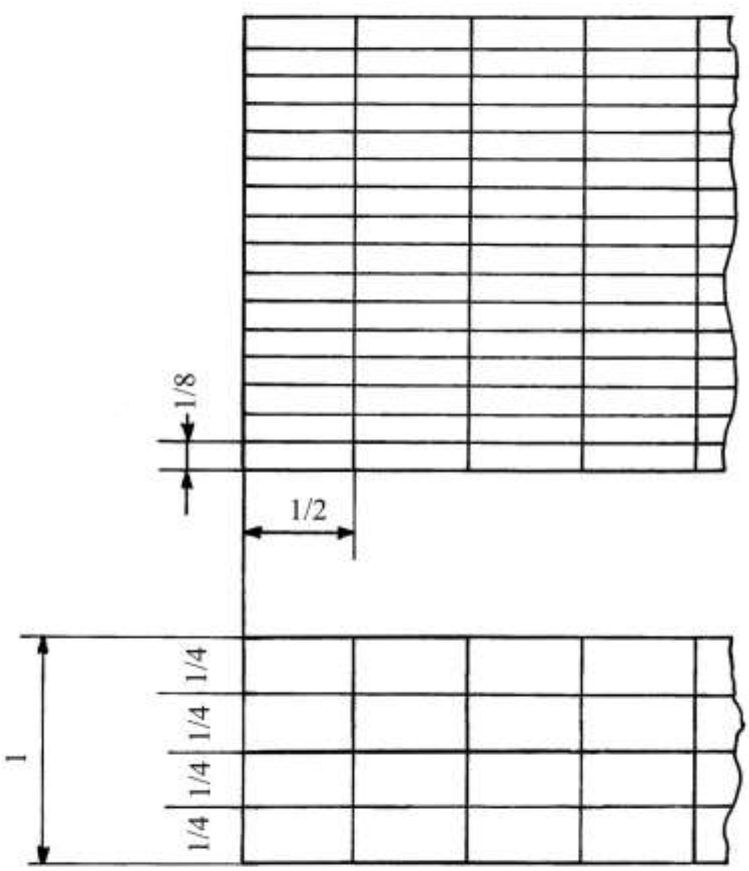
¼ * 2 = ½ braccio.

Lo schema mostra una doppia proiezione ortogonale di parte del muro:



In alto è la vista frontale e in basso la vista dall'alto.
Il muro ha le dimensioni di (8 * 2) braccia^2 = 16 braccia^2 = 1 canna^2 ed è realizzato con
2 * (16 * 16) = 2 * 256 = 512 mattoni.

Infine, il quarto esempio di muro ha lo spessore di *1 braccio*: sono stati usati quattro strati di mattoni, come spiega la doppia proiezione:



dimensioni in braccia

Lo spessore è:

¼ * 4 = 1 braccio.

Il muro ha le dimensioni di (8 * 2) $braccia^2$ = 16 $braccia^2$ = 1 $canna^2$ ed è realizzato con

4 * (16 * 16) = 4 * 256 = 1024 mattoni.

Bibliografia

1. Calandri Pietro Maria, “Compendium de agrorum corporumque dimensione”, in “I due trattati dell’Agricoltura e della Coltivazione delle Viti”, di Giovanvettorio Soderini, a cura di Alberto Bacchi Della Lega, Bologna, Romagnoli Dall’Acqua, 1902, pp. da 291 a 346.
2. Cataneo Pietro, “Le pratiche delle due prime matematiche”, Venezia, Giuseppe Griffio, 1567, pp. 88.
3. Franci R.(affaella) – Toti Rigatelli L.(aura), “La trattatistica matematica del Rinascimento Senese”, “Gli Atti dell’Accademia delle Scienze di Siena detta de’ Fisiocritici”, serie XIV – tomo XIII, 1981, pp. 71.
4. Franci Raffaella – Toti Rigatelli Laura, “Introduzione all’aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento”, Urbino, Quattro Venti, 1982, pp. 126.
5. Gori Dionigi, “Libro e trattato della praticha d’alcibra”, a cura di Laura Toti Rigatelli, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale n. 9, Siena, 1984, pp. 33.
6. Gori Dionigi, “Libro di ragioni e misure in sunto e a mente”, a cura di Raffaella Franci, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale n. 12, Siena, 1984, pp. xvi + pagine non numerate.
7. Høyrup Jens, “Linee larghe. Un’ambiguità geometrica dimenticata”, “Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche”, XV, 1995, n. 1, pp. 3-14
8. Høyrup Jens “Le origini”, 2007, pp. 30, http://webhotel4.ruc.dk/~jensh/Publications/2007%7Bf%7D_Origini_MS.PDF.
9. “Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze”, Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.