sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: De Ludo geometrico, Leonardo da Vinci, costruzioni geometriche, pentagono approssimato, quadrati e cerchi doppi, poligoni inscritti, poligoni di 18, 24 e 30 lati, ottagono, radice quadrata di numeri interi, ettagono approssimato, ennagono approssimato, metodo di Renaldini per i poligoni approssimati inscritti, duplicazione del cubo, triangolo e poligoni di Reuleaux, monete ettagonali, proiezione ottante di Leonardo, Uomo vitruviano, Mario Otto Helbing

IL "DE LUDO GEOMETRICO" DI LEONARDO DA VINCI

In alcuni manoscritti di Leonardo sono contenuti dei riferimenti a un trattato, il *De ludo geometrico*, che egli voleva comporre. Non ne fece di nulla, ma lasciò numerosi spunti disseminati nel Codice Atlantico, nel Codice Arundel, in un Codice Forster (III) e nei Codici A e B di Parigi.

In campo matematico, le preferenze di Leonardo andavano verso gli studi geometrici.

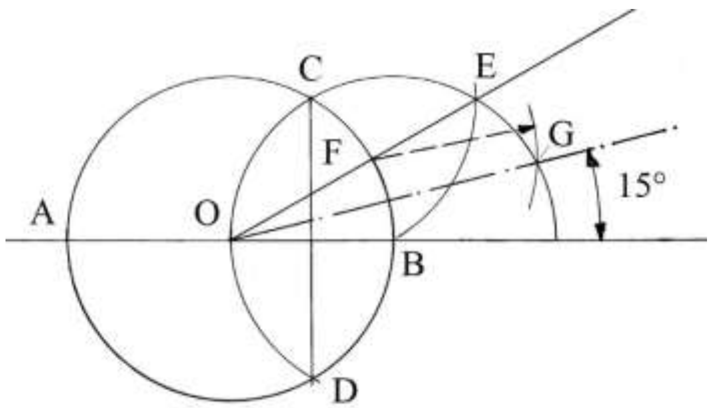
Un'importante mostra dedicata all'opera geometrica di Leonardo con l'eloquente titolo "De ludo geometrico", si è svolta a Milano dal 10 dicembre 2013 al 9 marzo 2014. Nella mostra sono stati esposti 50 fogli di argomento geometrico, tratti dal Codice Atlantico, da opere di Piero della Francesca, di Giorgio Valla, di Luca Pacioli, di Euclide, di Al-Khawarizmi e di Fibonacci.

La mostra è stata documentata con il fascicolo con lo stesso titolo, curato da Furio Rinaldi e pubblicato da De Agostini (vedere la bibliografia).

Costruzione di un angolo di 15°

Leonardo da Vinci trasse sia dalla tradizione greca che, probabilmente per qualche oscuro percorso, dalle opere del matematico Abu'l – Wafa l'idea di eseguire costruzioni geometriche con un compasso ad *apertura fissa*.

La figura che segue mostra la costruzione dell'angolo di 15°:



Disegnare la circonferenza con centro in O: tutti i successivi archi di circonferenza sono tracciati con la stessa apertura (come già detto, *il compasso doveva essere ad apertura fissa*).

Tracciare il diametro AB. Con centro in B, disegnare l'arco CD passante per O e prolungarlo all'esterno della circonferenza: disegnare la corda CD.

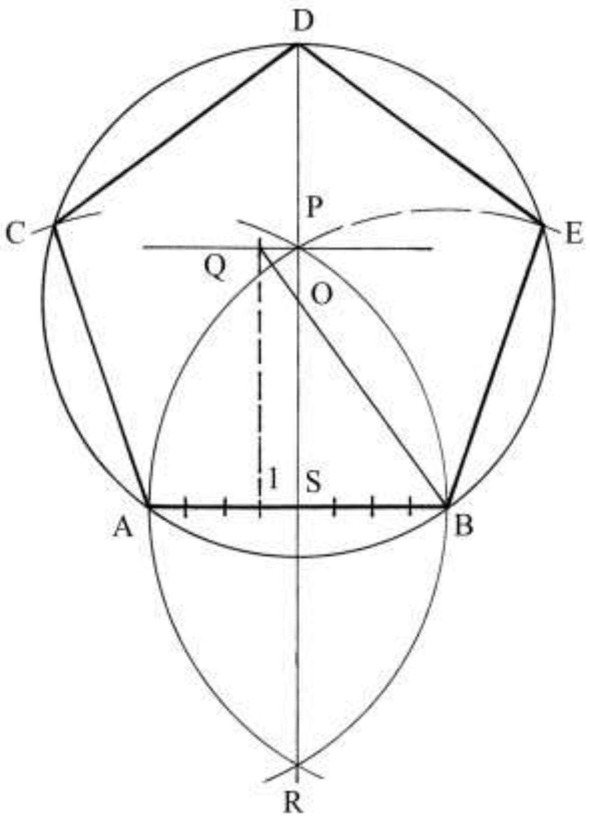
Fare centro nel punto C e tracciare l'arco da B fino a tagliare l'ultimo arco nel punto E. Per i punti O e E passa una semiretta che stabilisce un angolo di 30° (FOB) e fissa il punto F.

Fare centro nel punto F e disegnare un arco che determina il punto G e costruisce l'angolo GOB, ampio 15°.

Costruzione del pentagono dato il lato (metodo di Leonardo da Vinci)

Questo metodo fornisce una costruzione *approssimata*: è contenuto nel foglio 13 *verso* del Codice B.

AB è il lato del pentagono: disegnare due archi di raggio AB e centro in A e in B:



Per i punti P e R tracciare l'asse del segmento AB, che lo interseca nel punto S.

Dividere il segmento AB in *otto* parti uguali e fissare il punto 1.

A partire dal punto P disegnare una linea parallela al lato AB; dal punto 1 innalzare una parallela a PR fino a fissare il punto Q.

Collegare Q a B: il segmento QB taglia l'asse verticale nel punto O, centro del cerchio in cui va inscritto il pentagono.

Con apertura AB, fare centro in A e in B per determinare i punti C, D e E.

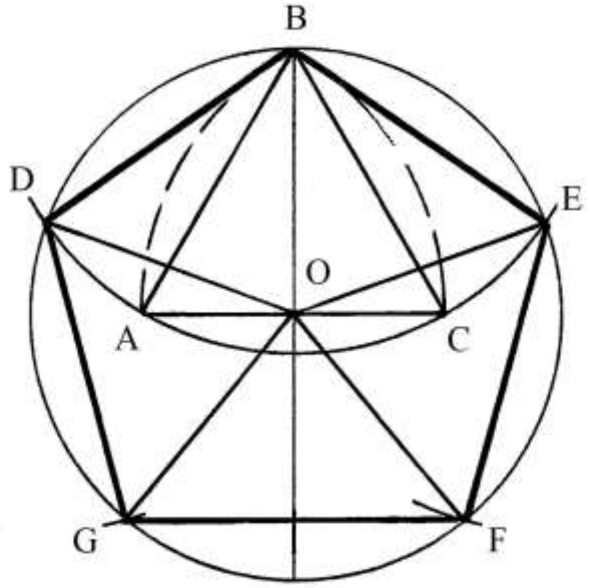
ACDEB è il pentagono inscritto.

La costruzione ha richiesto *due* diverse aperture del compasso.

Pentagoni approssimati secondo Leonardo da Vinci

Nel manoscritto A, conservato a Parigi, sono contenute due costruzioni proposte da Leonardo da Vinci per tracciare il pentagono approssimato, rispettivamente al foglio 13 *verso* e al foglio 17 *verso*.

La prima costruzione procede da un triangolo equilatero che ha lato lungo quanto quello del pentagono:



ABC è il triangolo equilatero e O è il punto medio del lato AC. Tracciare l'altezza BO.

Fare centro in O e con raggio OB disegnare una circonferenza.

Con raggio BA (= BC) fare centro in B e tracciare un arco che taglia la precedente circonferenza nei punti D e E.

Con la stessa apertura fare centro in D e E e determinare i punti F e G.

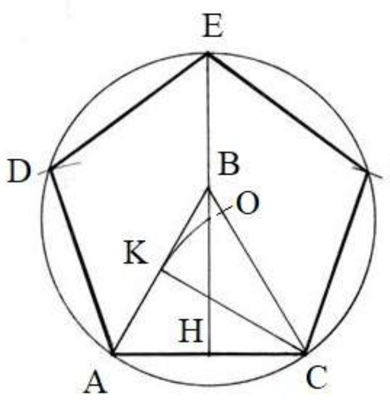
BEFGD è il pentagono approssimato inscritto.

I lati BD, BE, DF e EG hanno la stessa lunghezza, mentre il quinto lato – GF – è più lungo degli altri: l'errore è notevole perché ammonta al 14,29%.

La costruzione non può essere ottenuta con il compasso a apertura fissa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo prende sempre l'avvio da un triangolo equilatero (ABC nella figura che segue) che ha il lato AC comune con il pentagono da costruire:



H è il punto medio di AC e K lo è del lato AB.

BH e CK sono due altezze del triangolo equilatero.

Prolungare verso l'alto l'altezza HB.

Fare centro nel punto C e, con raggio CK, tracciare un arco da K fino a intersecare l'altezza BH in un nuovo punto, O: questo è il centro di una circonferenza sulla quale si troveranno i vertici del pentagono.

Fare centro in O e, con raggio OA (= OC), disegnare una circonferenza.

A partire da A riportare lungo la circonferenza la lunghezza di AC.

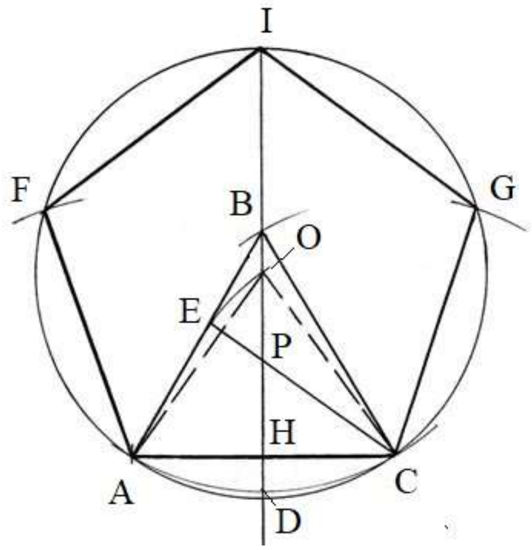
ADEFC è il pentagono approssimato.

La costruzione è più precisa della precedente: i lati AC, AD e FC hanno la stessa lunghezza. I lati DE e EF sono leggermente più lunghi degli altri tre: l'errore non supera il 2%.

Questa costruzione non è ricavabile con un compasso a apertura fissa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del secondo metodo è spiegata con la costruzione che segue:



ABC è il triangolo equilatero di partenza e BH è l'altezza relativa al lato AC. Prolungare BH verso l'alto e verso il basso.

Fare centro nel punto B e, con raggio BA = BC, tracciare un arco che taglia il prolungamento di BH in un punto, D.

Determinare il punto medio di DB: è P.

Disegnare il segmento CP e prolungarlo fino a intersecare il lato AB nel punto E.

Fare centro nel punto C e, con raggio CE, tracciare un arco da E fino a tagliare BH nel punto O.

Con raggio OA = OC, fare centro nel punto O e disegnare una circonferenza. Su questa ultima riportare la lunghezza di AC.

AFIGC è il pentagono inscritto *approssimato*.

Tre lati hanno uguale lunghezza: AC = AF = CG.

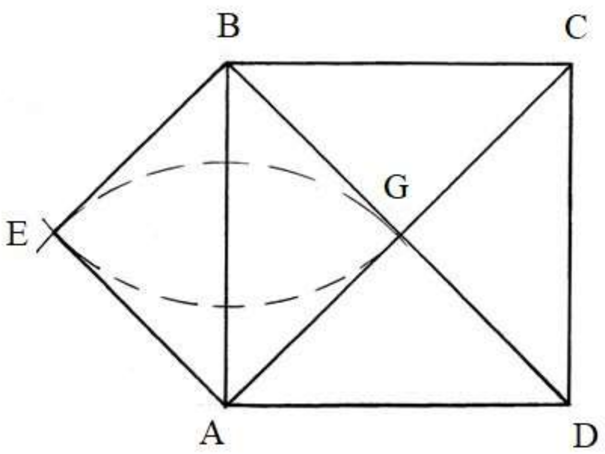
I lati FI e IG hanno uguale lunghezza, che però è maggiore di quella degli altri lati con un errore dell'1,66%.

Questa costruzione usa una pluralità di aperture di compasso.

<u>Codice A – foglio 15 *recto*</u>

Questo foglio contiene alcune semplici costruzioni geometriche.

ABCD è un quadrato: deve esserne costruito uno con superficie uguale a metà.



Le diagonali AC e BD si incontrano nel punto G.

Fare centro nei punti A e B con raggio AG e tracciare due archi da G fino a intersecarsi in un punto esterno, E.

AEBG è il quadrato di superficie metà di quello ABCD.

AEBG ha lati lunghi quanto AG e cioè quanto metà della lunghezza della diagonale AC.

La diagonale AC è lunga:

$$AC = (\sqrt{2}) * AB .$$

Il segmento AG è lungo:

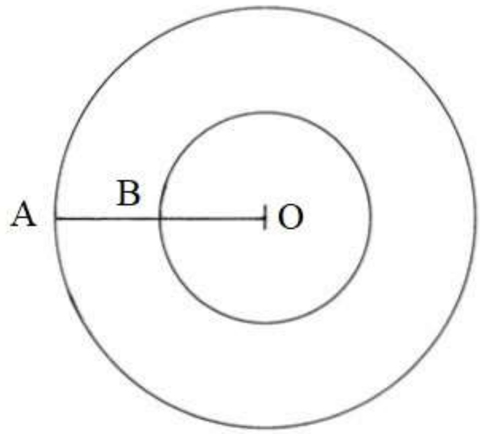
$$AG = AC/2 = (\sqrt{2})/2 * AB .$$

L'area di AEBG è:

$$\text{Area AEBG} = AG^2 = [(\sqrt{2})/2]^2 * AB^2 = AB^2/2 .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

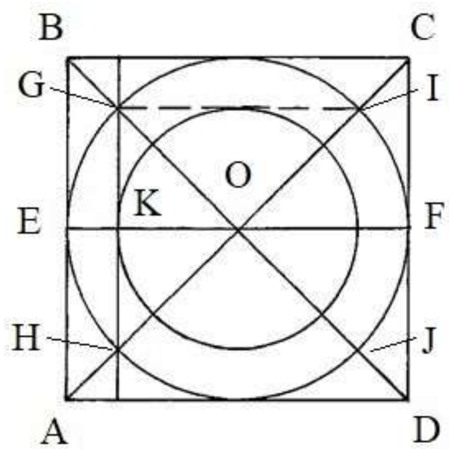
O è il centro di un cerchio di raggio OA:



Dividere a metà il raggio OA: il punto B è il suo medio.
Disegnare la circonferenza di raggio OB e centro O.
L’area di un cerchio è proporzionale al quadrato del suo raggio.
L’area del cerchio interno è $(1/2)^2$ e cioè ¼ di quella del cerchio estermo.
L’area della corona circolare delimitata dalle due circonferenze è uguale alla differenza fra le aree dei due cerchi e vale ¾ di quella del cerchio esterno e 3 volte quella del cerchio interno.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCD è un quadrato e AC e BD sono le sue diagonali, che si incontrano nel punto O:



EF è una delle due *mediane* del quadrato.
Fare centro in O e con raggio OE = OF disegnare una circonferenza che è tangente ai quattro lati del quadrato nei punti medi dei suoi lati.
La circonferenza taglia le diagonali in quattro punti: G, H, I e J.
Tracciare il segmento passante per G e per H: esso incontra la mediana EF nel punto K.
Fare centro in O e con raggio OK disegnare una seconda circonferenza.
Il cerchio di raggio OK ha area uguale a metà di quello di raggio OE:

Area cerchio OE = $\pi * OE^2$

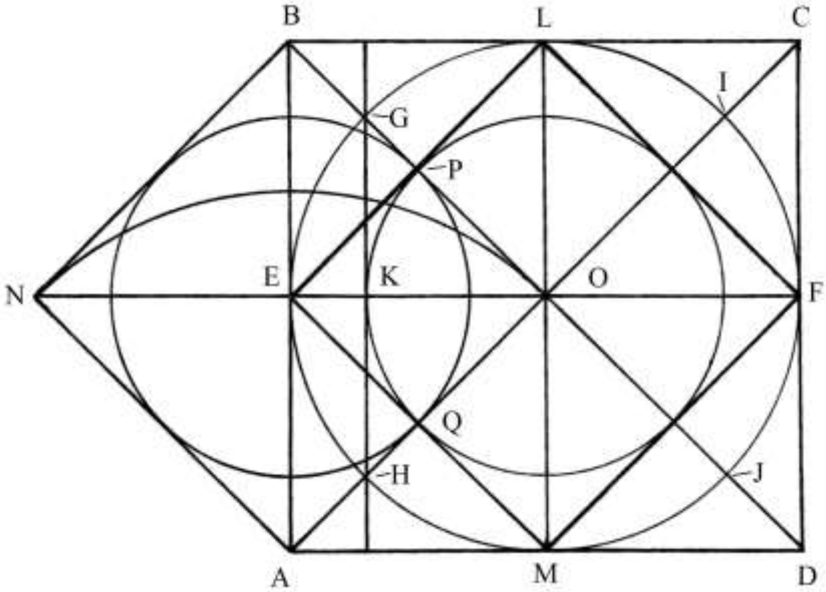
Area cerchio OK = $\pi * OK^2$.

Ne consegue:

Area cerchio OK = (1/2) * Area cerchio OE = $\pi * OE^2/2$.

L'area della corona circolare delimitata dalle due circonferenze concentriche è uguale a quella del cerchio interno.

Leonardo dimostrò i risultati ai quali era pervenuto con la costruzione che segue, senza impiegare dimostrazioni ma soltanto fidandosi della vista e del compasso:



Tracciare la mediana LM.

Disegnare il quadrato inscritto ELFM: esso ha superficie uguale a metà di quella di ABCD.

I due cerchi di raggi OE e OK sono inscritti in quadrati le cui aree, come appena visto, sono nello stesso rapporto – 2:1 – delle aree dei cerchi stessi.

I lati EL e EM intersecano le diagonali BD e AC in due punti, P e Q.

Con centro in O e raggio OP = OQ tracciare una circonferenza tangente ai lati del quadrato ELFM.

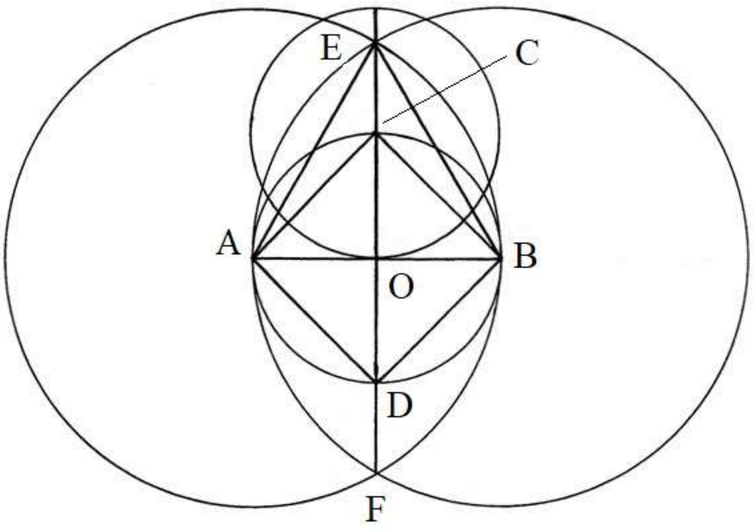
Fare centro nel punto A e con raggio AO disegnare un arco da O fino a intersecare il prolungamento di EF in un nuovo punto, N.

Fare centro nel punto E e con raggio EP tracciare una circonferenza che ha le stesse dimensioni di quella di centro O e raggio OP.

Disegnare il quadrato NBOA che risulta circoscritto all'ultimo cerchio disegnato.

Confronto fra poligoni inscritti

Nel Codice A foglio 18 *recto* è contenuto un grafico che mette a confronto un triangolo equilatero e un quadrato inscritti.



Il punto O è il centro di una circonferenza di raggio OA. AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari: essi si intersecano nel punto O formando *quattro* angoli retti.

ACBD è un quadrato inscritto nel cerchio di centro O.

Fare centro nel punto C e con apertura uguale a CO (= OA) tracciare una seconda circonferenza.

Fare centro nei punti A e B e con raggio AB disegnare due circonferenze che si incontrano nei punti E e F, che risultano collocati sui prolungamenti del diametro CD.

Collegare il punto E con A e con B: AEB è un triangolo equilatero con lati lunghi quanto AB.

La costruzione è servita a ricavare gli angoli con le seguenti ampiezze:

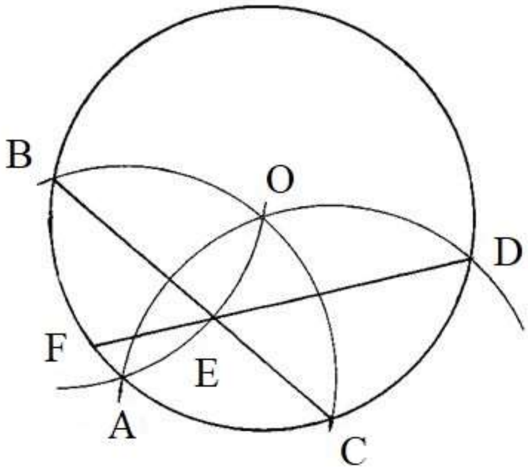
* di 90° (AOC, COB, BOD e AOD) e cioè *un quarto* dell'angolo giro;
* di 60° (EAB, AEB e ABE) e cioè *un sesto* dell'angolo giro.

<u>Triangolo equilatero e pentagono</u>

Una costruzione di Leonardo ha finalità multiple perché permette di disegnare più poligoni. Essa è contenuta nel foglio 27 *verso* del Codice B.

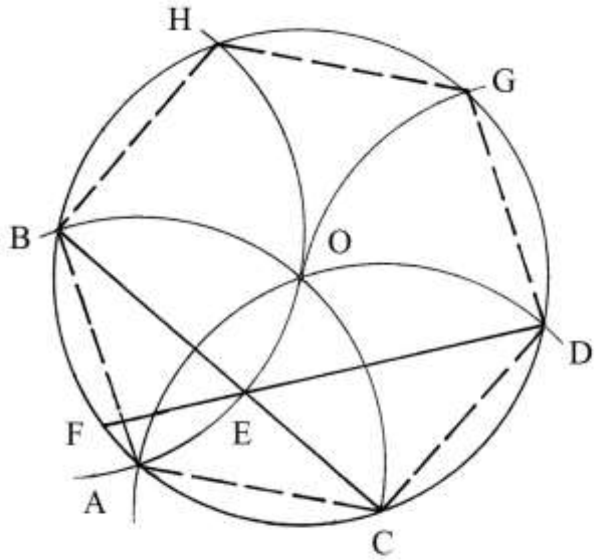
Tracciare una circonferenza con centro in O.

Scegliere un punto sulla circonferenza: è A. Con apertura AO, fare centro in A e disegnare un arco che determina i punti B e C. Senza variare l'apertura, fare centro nei punti B e C e tracciare altri due archi, uno dei quali fissa il punto D.



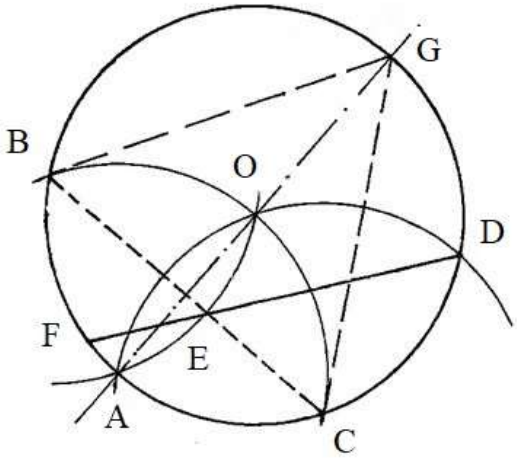
B, A, C e D sono quattro vertici di un esagono regolare inscritto nel cerchio e BA, AC e CD sono tre suoi lati.

ABHGDC è l'esagono completo costruito con un'unica apertura di compasso fisso:



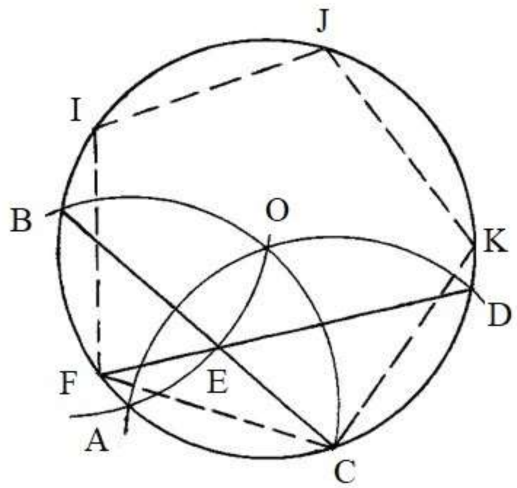
v

La corda BC unisce due vertici non consecutivi ed essa è anche un lato del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio. Tracciare il diametro passante per i punti A e O: esso incontra la circonferenza nel punto G, terzo vertice del triangolo equilatero BGC:

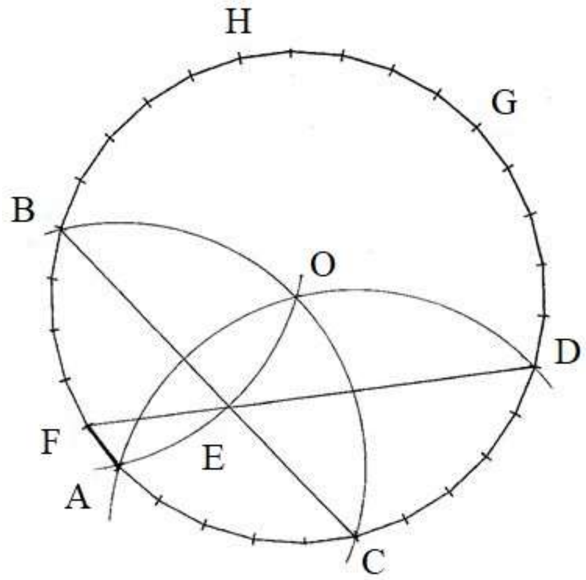


La corda BC interseca l’arco di circonferenza di centro B in un punto, E. Per questo punto tracciare una corda uscente da D fino a tagliare la circonferenza nel punto F.

La corda CF è un lato del pentagono inscritto FIJKC:



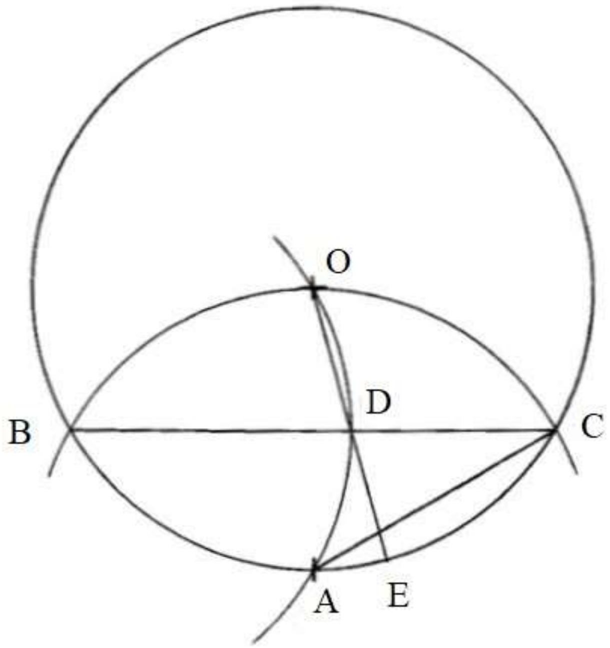
Infine, la corda AF è il lato del *triacontagono*, il poligono regolare con 30 lati:



Nella figura sono indicati pure i punti B, C, D, G e H che sono i vertici del triangolo equilatero e dell'esagono: B, C e G lo sono del triangolo e B, H, G, D, C e A sono quelli dell'esagono.

Divisione di una circonferenza in 3, 4, 8 e 24 parti uguali

Il foglio 40 *recto* del Codice B contiene una costruzione multipla simile a quella del foglio 27 *verso* dello stesso Codice.



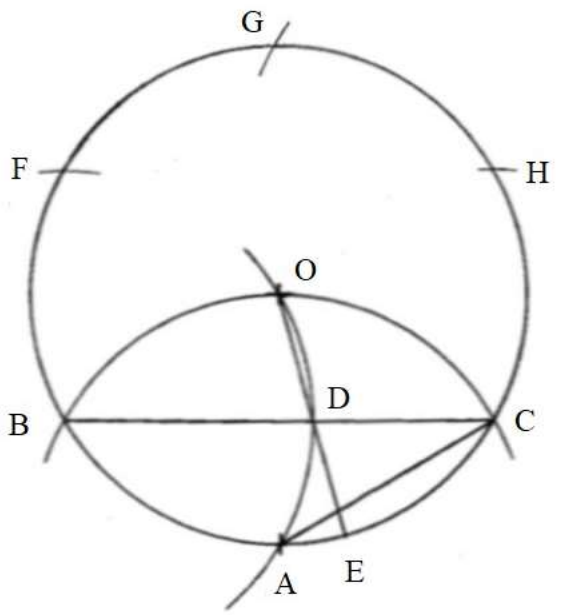
Disegnare la circonferenza di centro O e scegliere un suo punto, A. Con apertura OA, fare centro in A e tracciare un arco che passa per O e taglia la circonferenza nei punti B e C.

La corda AC è il primo lato di un esagono e quella BC è il primo lato di un triangolo equilatero, entrambi inscritti.

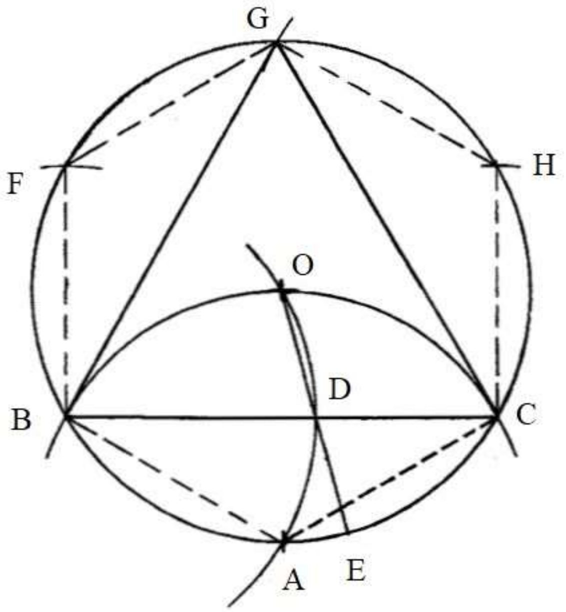
La corda BC incontra l'arco OA in un punto, D.

Per i punti O e D tracciare un raggio, OE.

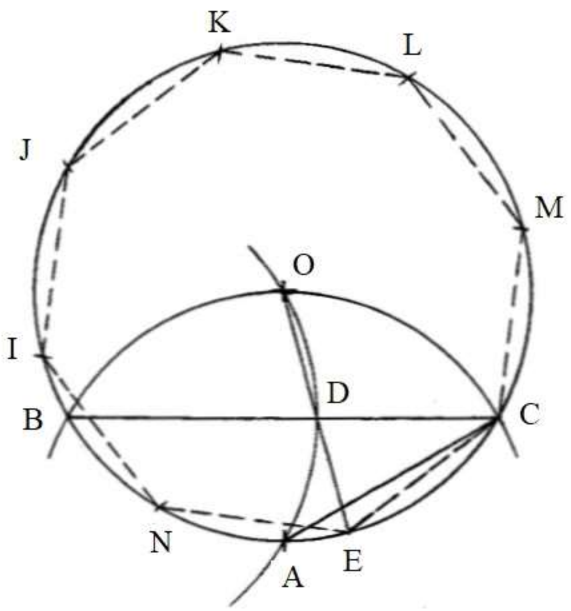
Sempre con la stessa apertura, fare centro nei punti B e C e, in successione, completare la divisione della circonferenza in e in 6 parti uguali con la fissazione dei punti F, G e H:



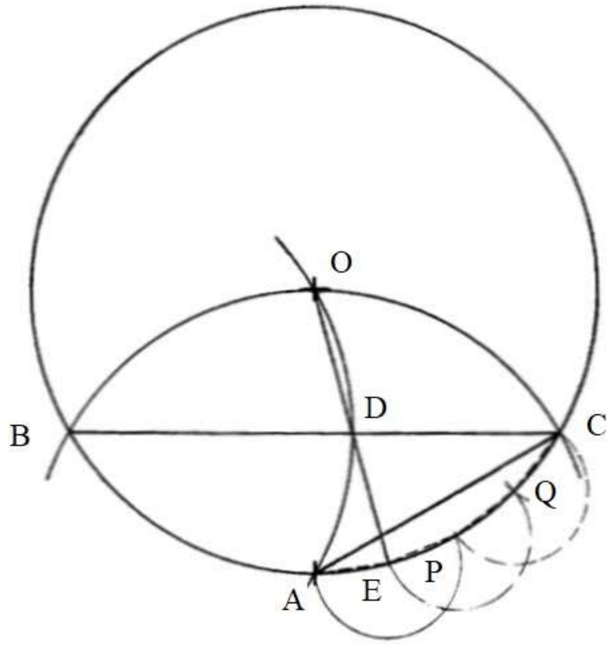
È ora possibile mostrare il triangolo equilatero BGC e l'esagono ABHGHC:



La corda EC è un lato dell'ottagono inscritto ENIJKLMC:

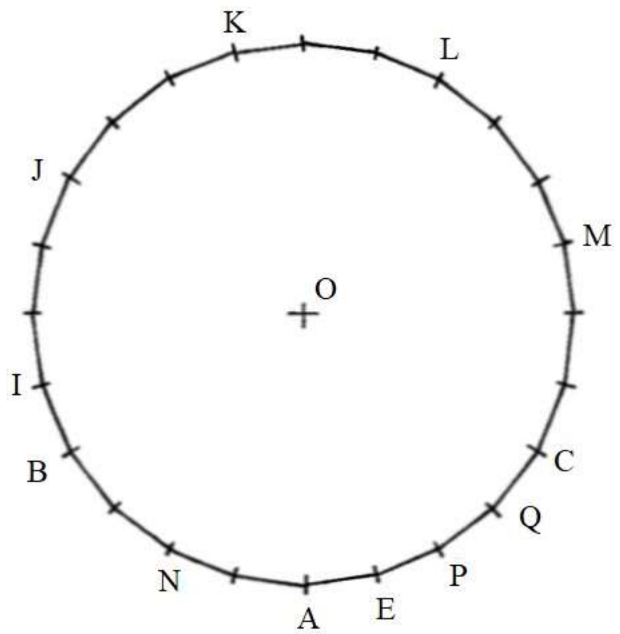


Infine, Leonardo afferma che l'arco AE è lungo 1/24 della circonferenza e che la corda AE è un lato del *tetraicosagono*, il poligono di 24 lati:



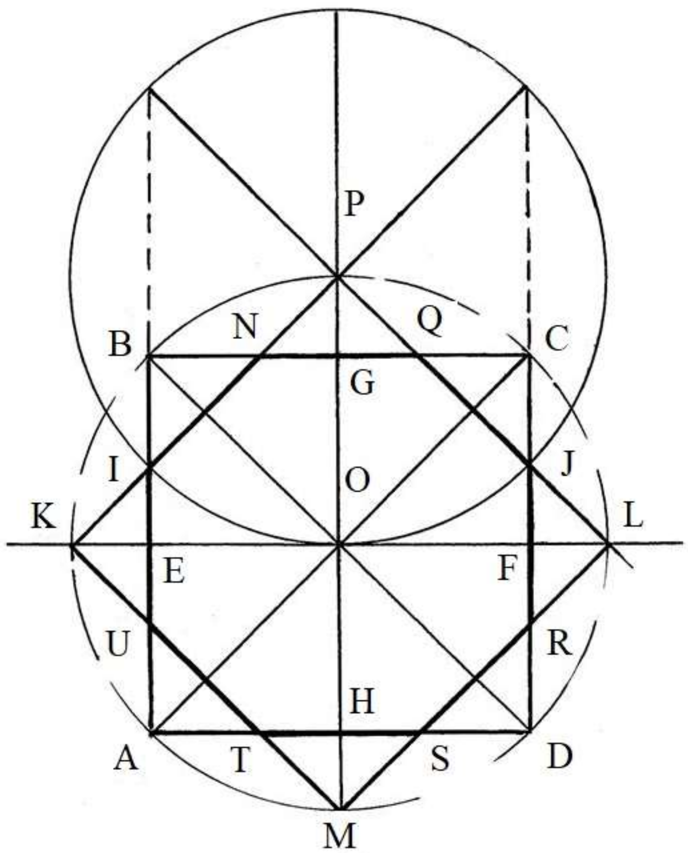
AE, EP, PQ e QC sono i primi quattro lati di questo poligono regolare.

In conclusione, la figura che segue mostra il completo *tetraicosagono*:



<u>Dal quadrato all’ottagono regolare</u>

Nel Codice A al foglio 12 *recto* è contenuta una costruzione dell’ottagono regolare.
ABCD è un quadrato e AC e BD sono le sue diagonali che si incontrano nel punto O.



Tracciare le *mediane* EF e GH e prolungarle verso l'esterno del quadrato.

Fare centro nel punto O e con raggio OA disegnare una circonferenza: essa passa per i vertici A, B, C e D e taglia il prolungamento della mediana verticale nel punto P.

Con la stessa apertura fare centro nel punto P e tracciare una seconda circonferenza che incontra il quadrato nei punti I e J.

Per il punto P condurre i diametri passanti per I e per J: essi incontrano il prolungamento della mediana orizzontale nei punti K e L.

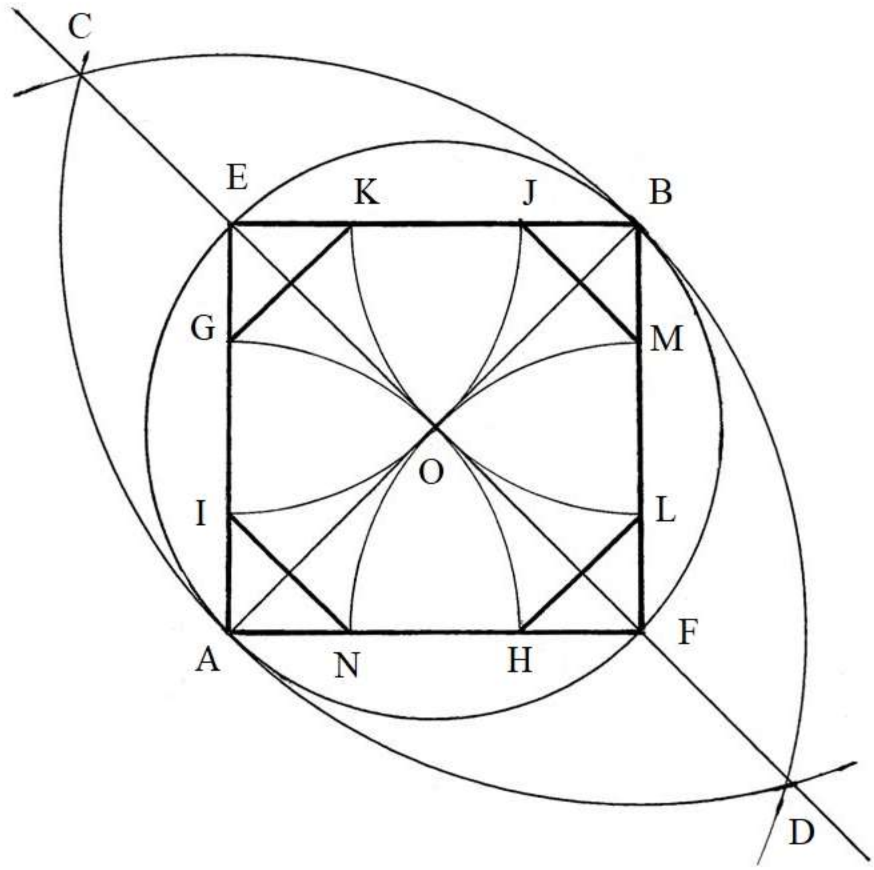
KPLM è un secondo quadrato, ruotato di 45° rispetto a quello ABCD: i due quadrati hanno uguali dimensioni e uguale superficie.

INQJRSTU è l'ottagono regolare cercato.

<u>Costruzione di un quadrato e di un ottagono</u>

Il foglio 12 *verso* del Codice B contiene una costruzione del quadrato e dell'ottagono regolare.

Tracciare AB, che è una *diagonale* del quadrato da costruire:



Fare centro nei punti A e B e con raggio AB disegnare due archi che si intersecano nei punti C e D.

AB e CD si incontrano nel punto O. Fare centro in questo punto e con raggio OA = OB tracciare una circonferenza che taglia CD in due punti, E e F.

AEBF è il quadrato cercato.

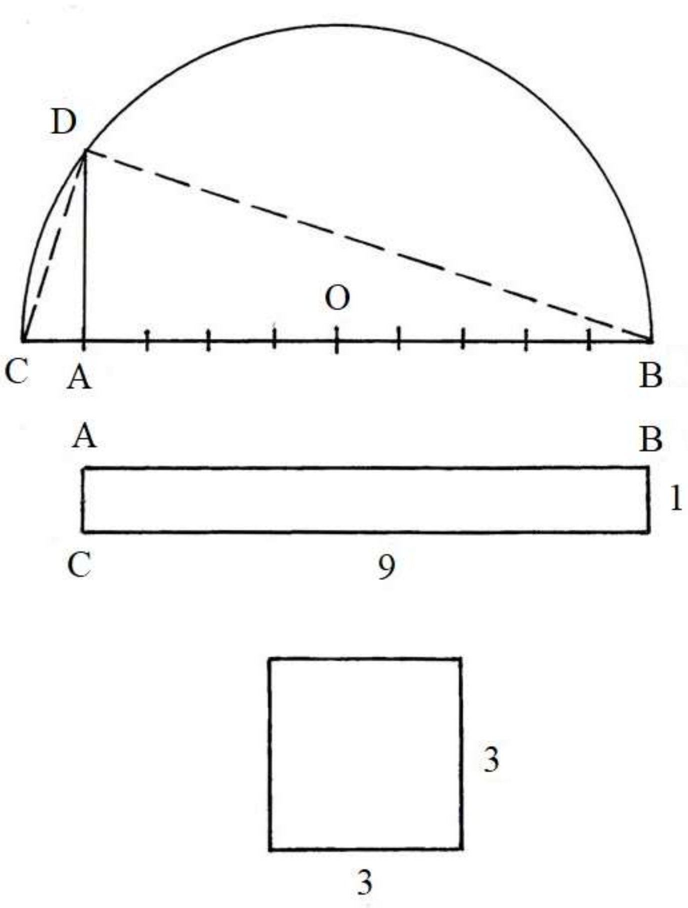
Fare centro nei vertici del quadrato con raggio uguale a metà della lunghezza delle diagonali AB e EF (e cioè AO) e disegnare quattro archi di circonferenza che incontrano i lati del quadrato nei punti G, H, I, J, K, L, M e N.

Il poligono GKJMLHNI è l'ottagono regolare inscritto nel quadrato AEBF.

<u>Radice quadrata</u>

Nel Codice Adi Parigi al foglio 5 *verso*, Leonardo descrisse la costruzione della radice quadrata di un numero, facendo l'esempio di quella del 9.

Egli si limitò a calcolarla con la costruzione che è mostrata nella parte superiore della figura che segue:



AB è un segmento lungo 9 unità e CA è lungo 1. Determinare il punto medio di CB: è O. Esso è a distanza

OC = OB = (CA + AB)/2 = (1 + 9)/2 = 5 unità.

Con centro in O e raggio OC = OB disegnare la semicirconferenza da C a B. Dal punto A elevare la perpendicolare a CB fino a incontrare la semicirconferenza nel punto D.

CDB è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

Senza citarlo espressamente, Leonardo applicò il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti: l'altezza DA è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa CB e cioè

$CA : DA = DA : AB$, da cui $DA^2 = CA * AB$ e

$DA = \sqrt{(CA * AB)} = \sqrt{(1 * 9)} = \sqrt{9} = 3$.

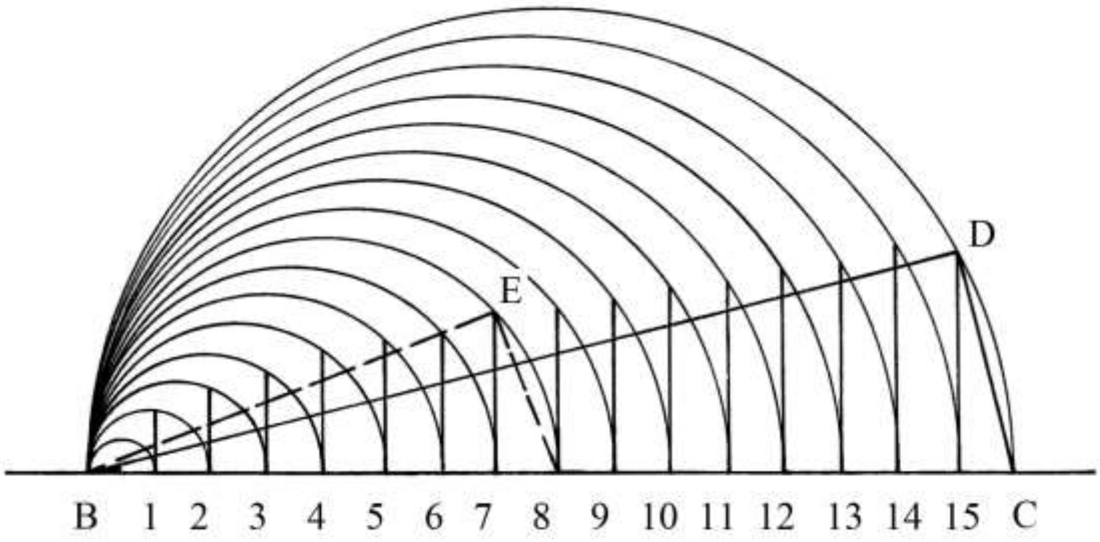
La costruzione è servita a calcolare per via geometrica la radice quadrata di un numero.

L’area di 9 unità^2 è quella di un rettangolo con lati lunghi AB = 9 unità e AC = 1. Esso è equivalente a un quadrato che ha lati lunghi 3 unità.

In generale, il metodo di Leonardo può essere impiegato per calcolare graficamente la lunghezza della radice quadrata della lunghezza di un qualsiasi segmento AB con l’ovvio vincolo di assegnare a CA lunghezza *unitaria*.

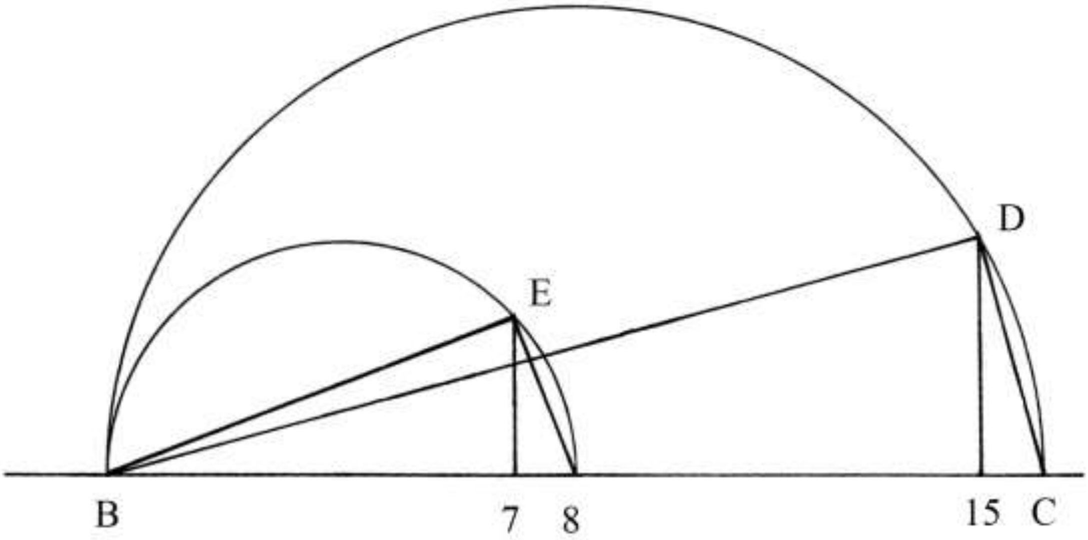
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel foglio 596 *recto* del *Codice Atlantico* Leonardo ha ampliato la precedente costruzione e ha determinato le radici quadrate dei numeri interi da 1 a 15:



Nello schema sono disegnate *sedici* semicirconferenze , tutte con il punto B in comune e con i diametri giacenti sulla retta orizzontale passante per B e per C. Il diametro BC è diviso in sedici parti uguali. Dai punti da 1 a 15 sono tracciati i segmenti verticali che corrispondono alle altezze dei possibili triangoli rettangoli inscrivibili.

A titolo di esempio, nello schema che segue sono disegnati due triangoli rettangoli inscritti: BDC e BE-8:



Nel triangolo BDC, il segmento D-15 è l’altezza relativa all’ipotenusa BC; l’ipotenusa BC è lunga 16 ed essa è scomposta da D-15 in due segmenti che sono lunghi:

* B-15 = 15;
* 15-C = 1.

La lunghezza *convenzionale* di D-15 è data da:

D-15 = √[(B-15) * (15-C)] = √(15 * 1) = √15.

Quindi, il triangolo BDC permette di calcolare per via geometrica la lunghezza di √15.

Nel triangolo rettangolo BE-8, l’ipotenusa è lunga 8 e l’altezza E-7 la divide in due segmenti:

* B-7 = 7;
* 7-8 = 1.

La lunghezza di E-7 è:

E-7 = √[(B-7) * (7-8=] = √(7 * 1) = √7.

Questo secondo triangolo rettangolo offre la possibilità di calcolare la lunghezza convenzionale di √7.

Le lunghezze di D-15 e di E-7 sono state calcolate con l’applicazione del 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio: l’altezza è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei due cateti sull’ipotenusa.

Ottagono approssimato

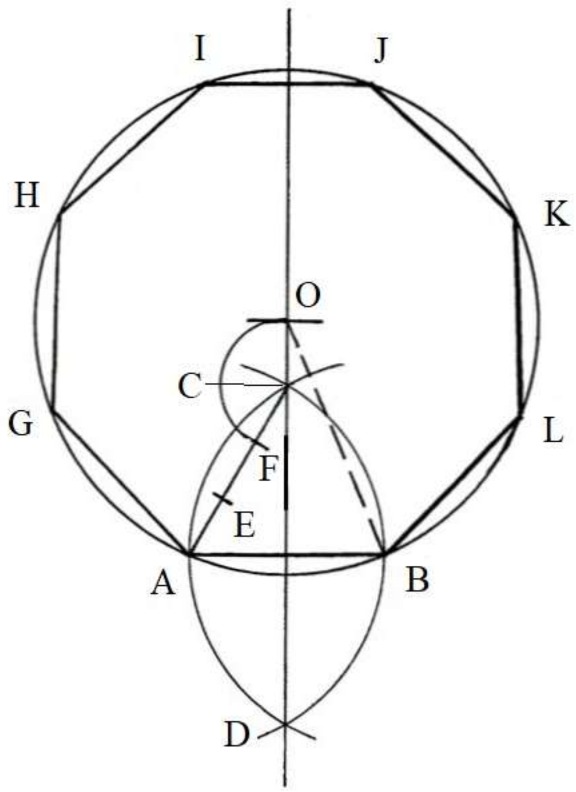
La costruzione che segue è contenuta nel Codice B di Parigi, foglio 17 *recto*.

AB è il primo lato dell’ottagono.

Fare centro nei punti A e B e con raggio AB tracciare due archi che si incontrano nei punti C e D.

Da questi ultimi passa l’asse del segmento AB.

Disegnare la corda AC e dividerla in *tre* parti uguali: AE = EF = FC.



Fare centro in C e, con raggio CF, tracciare un arco che taglia l’asse nel punto O.

Con raggio OA = OB fare centro in O e disegnare una circonferenza: a partire dai vertici A e B riportarvi la lunghezza di AB.

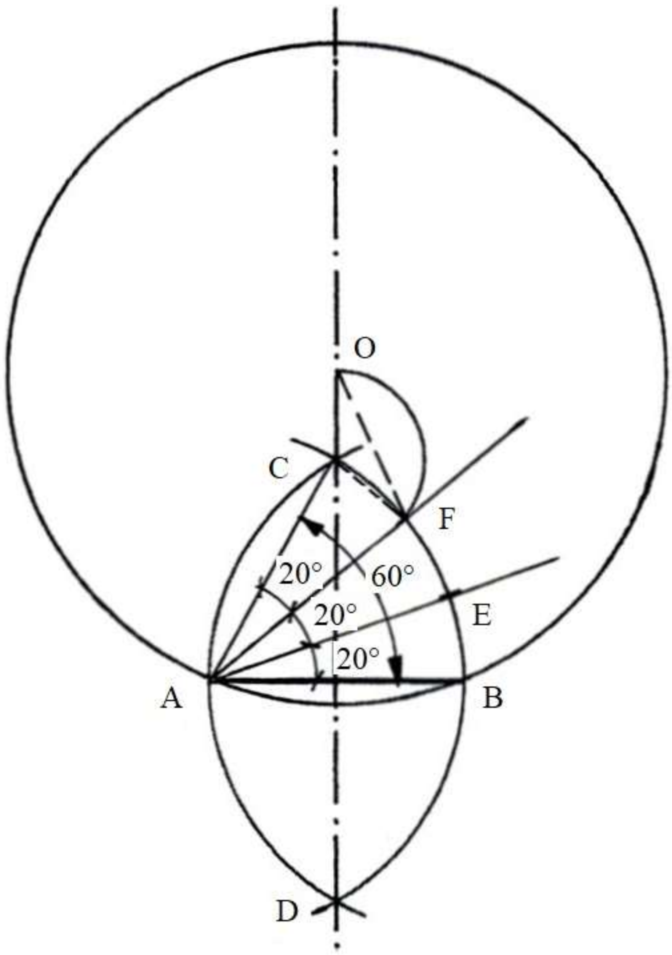
AGHIJKLB è l’ottagono approssimato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il grafico contenuto nel foglio sopra citato può suggerire l’ipotesi qui descritta.

AB è il primo lato dell’ottagono.

Fare centro in A e in B e con raggio AB tracciare due archi che si intersecano nei punti C e D:



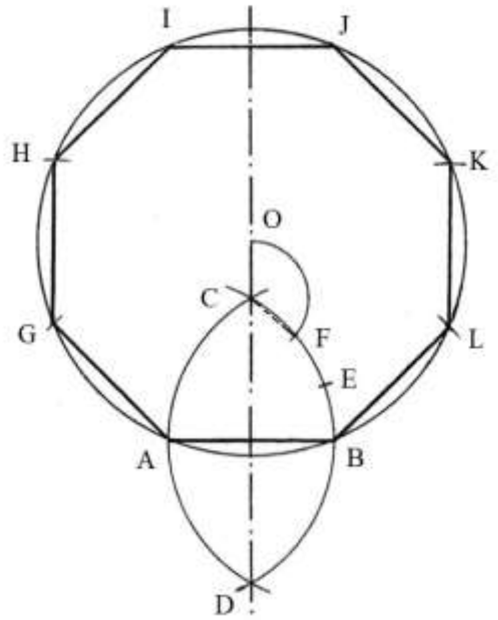
Leonardo potrebbe aver diviso in *tre* parti uguali l'angolo CAB: egli possedeva sicuramente strumenti simili a un moderno goniometro (l'astrolabio, il quadrante e il sestante) recanti scale graduate con archi di circonferenza divisi in parti uguali.

Non essendo possibile effettuare la *trisezione* dell'angolo CAB con metodi geometrici semplici, occorreva usare uno strumento.

L'angolo CAB è diviso in parti di uguale ampiezza, 20°, per mezzo delle due semirette uscenti da A e secanti l'arco CB nei punti E e F.

Facendo centro in C con raggio uguale alla corda CF viene fissato il punto O, centro della circonferenza di raggio OA = OB.

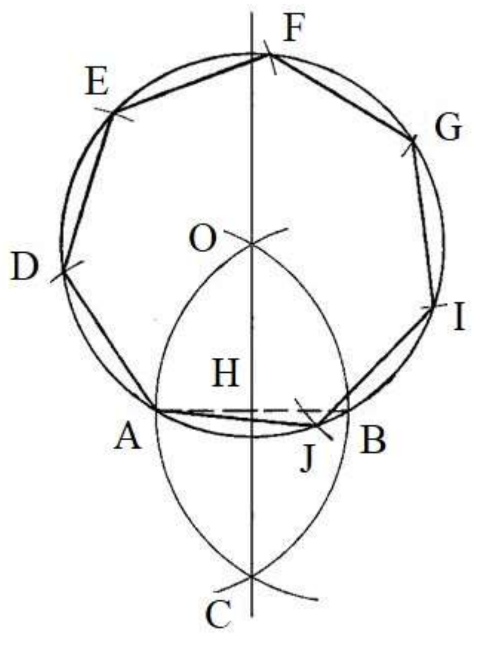
La costruzione prosegue come visto in precedenza e fornisce l'identico risultato con l'ottagono approssimato AGHIJKLB:



Ettagono inscritto

La costruzione che segue è contenuta nel foglio 28 *recto* del Codice B di Parigi.

Leonardo si rifà, senza citare l'Autore, alla costruzione approssimata proposta dal matematico e ingegnere Erone di Alessandria (1° secolo d.C.).



Con centro in O disegnare una circonferenza: scegliere un punto, A, e farvi centro con la stessa apertura per tracciare un arco che fissa il punto B.

Fare centro in B e disegnare un secondo arco passante per O e per A: esso interseca il primo arco nel punto C.

Per i punti O e C passa l'asse della corda AB: essa è tagliata nel suo punto medio H.

Il segmento OH è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono inscritto.

A partire da A, lungo la circonferenza, riportare in senso orario con il compasso la lunghezza di OH.

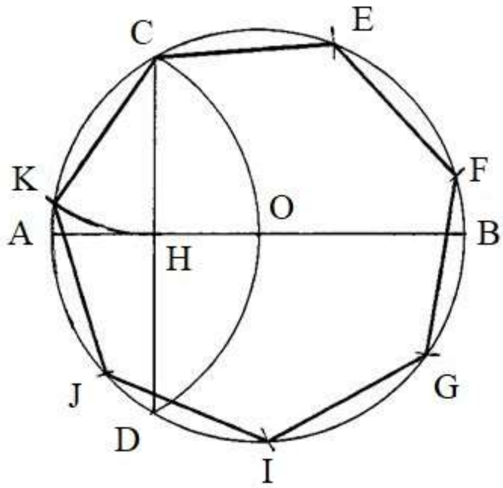
ADEFGIJ è l'ettagono regolare approssimato inscritto nella circonferenza di centro O.

Per costruire questo poligono sono state usate due diverse aperture di compasso, corrispondenti alle lunghezze di AB e di OH.

- APPROFONDIMENTO -

La costruzione di Erone

La costruzione dell'ettagono inscritto data da Erone è mostrata nella figura che segue:



Disegnare la circonferenza di centro O e il diametro AB.

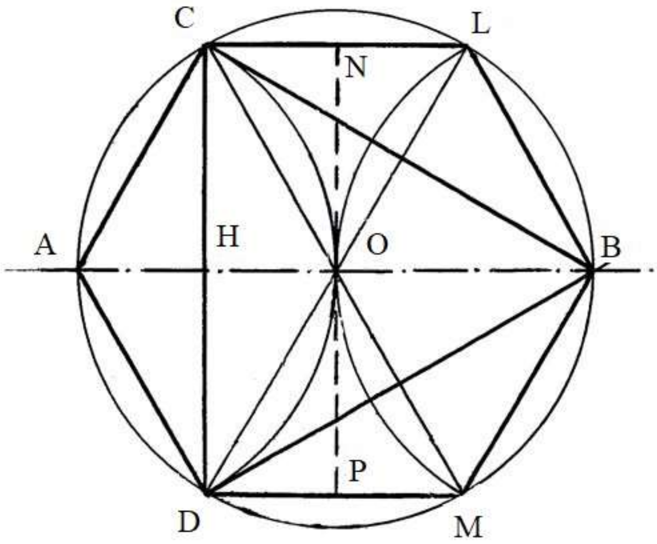
Fare centro in A con apertura di compasso OA e tracciare l'arco CD: la corda CD taglia AB nel punto H.

I segmenti CH e DH sono la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono. A partire da C, riportare sulla circonferenza la lunghezza di CH.

CEFGHIJK è l'ettagono approssimato inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue chiarisce il senso della costruzione di Erone.



Nella circonferenza sono inscritti il triangolo equilatero CBD e l'esagono ACLBMD.

I segmenti ON e OP sono due apotemi dell'esagono: essi hanno la stessa lunghezza dei segmenti CH e HD.

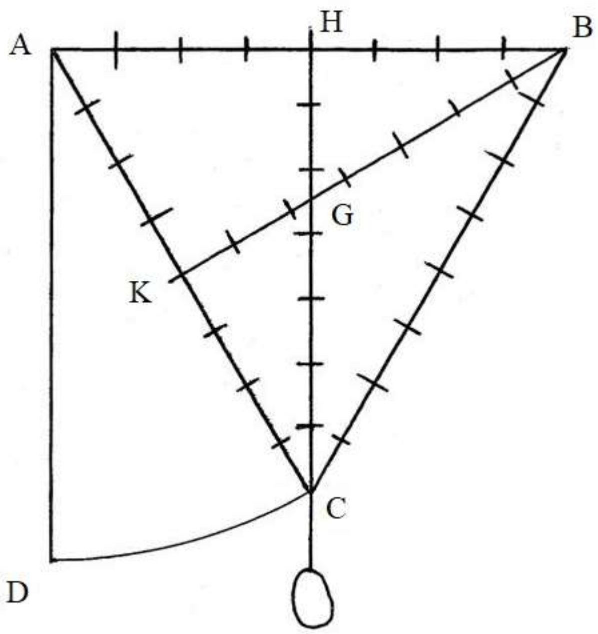
Questi ultimi sono lunghi la metà del lato CD del triangolo equilatero CBD.

In conclusione, il lato dell'ettagono approssimato è lungo quanto l'apotema dell'esagono oppure quanto metà del lato del triangolo equilatero, con l'ovvio vincolo che i tre poligoni siano inscritti nello stesso cerchio.

- -

<u>L'altezza di un triangolo equilatero</u>

Nel Codice Arundel al foglio 11 *recto*, Leonardo studiò un problema relativo ai pesi e rappresentò un triangolo equilatero con lati lunghi 8 unità:



Le altezze HC e BK furono suddivise in *sette* parti uguali, applicando il rapporto

Altezza : lato = 7 : 8 = 0,875 .

Per la precisione, l'altezza h di un triangolo equilatero è lunga:

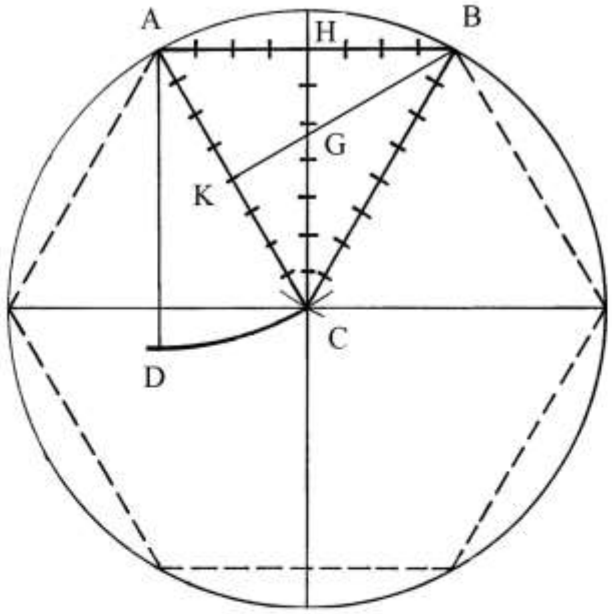
$h = (\sqrt{3})/2 * \text{lato} \approx 0{,}866 * \text{lato}$.

Leonardo ha approssimato 0,866 a 0,875.

Nel caso del triangolo ABC, l'altezza HC è lunga

$HC \approx 0{,}866 * 8 \approx 6{,}928$ unità, approssimate all'intero più vicino, 7 unità.

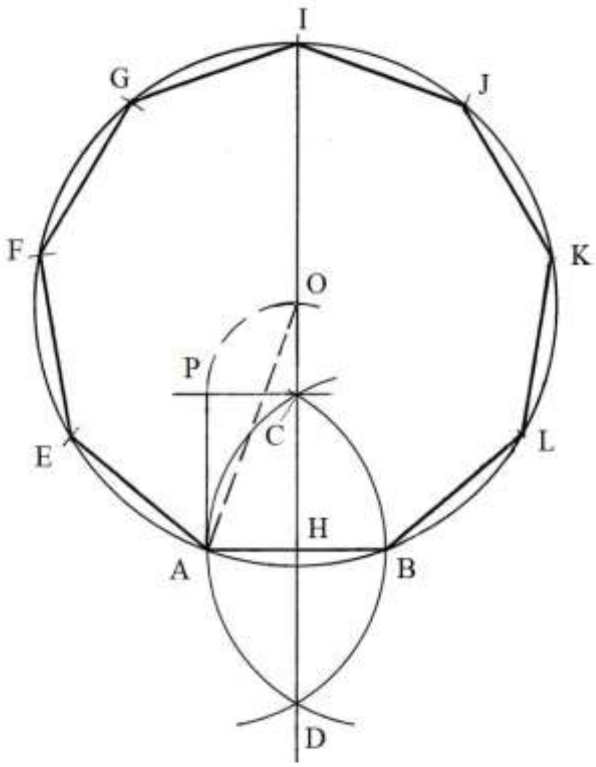
Nel precedente paragrafo si è visto che l'apotema di un esagono con lato lungo quanto quello AB di questo triangolo equilatero ha la stessa lunghezza dell'altezza HC sempre di questo triangolo. In un cerchio di raggio AB=AC e centro in C, il lato dell'ettagono approssimato inscritto è lungo quanto HC:



Ennagono approssimato dato il lato

La costruzione è contenuta nel foglio 29 *recto* del Codice B.

Disegnare il primo lato dell'ennagono, AB, e costruire il suo asse che passa per i punti C e D:



Le due linee si intersecano nel punto medio H.

Dal punto A elevare la perpendicolare a AB e da C tracciare verso sinistra la parallela allo stesso AB: le due linee si incontrano nel punto P. Il segmento CP è lungo quanto AH e HB.

Fare centro nel punto C e con raggio CP disegnare un arco da P fino a tagliare l'asse in un punto, O.

O è il centro della circonferenza di raggio OA = OB.

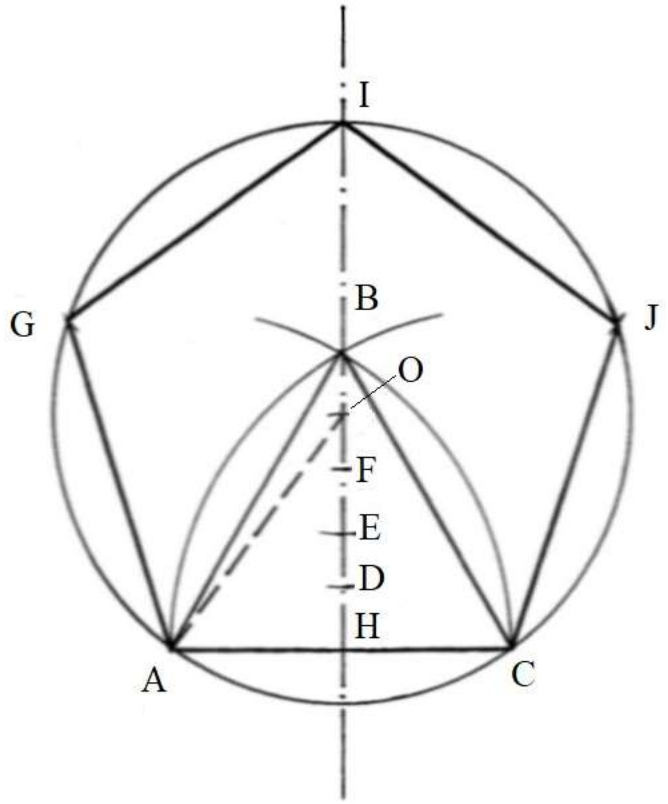
A partire dai vertici A e B, riportare lungo la circonferenza la lunghezza di AB.

AEFGIJKLB è l'ennagono approssimato.

Questa costruzione ha richiesto l'uso di più aperture di compasso e cioè quelle corrispondenti a AB, CP=AH e OA.

<u>Pentagono dato il lato e l'apotema</u>

Nel Codice B foglio 14 *recto*, Leonardo propone una costruzione del pentagono approssimato a partire dalla lunghezza del suo lato AC:



Costruire il triangolo equilatero AB, tracciare l'altezza BH e prolungarla verso l'alto e verso il basso.

Dividere BH in *cinque* parti uguali. Il segmento HO è lungo i 4/5 dell'altezza BH: esso è l'*apotema* del pentagono da costruire.

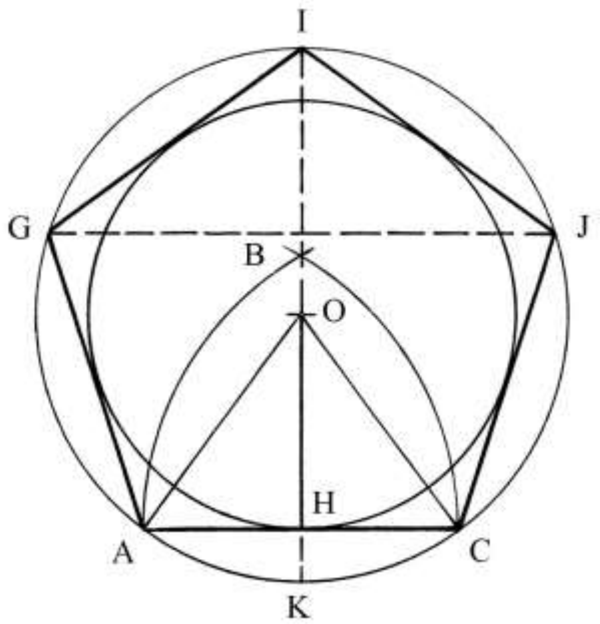
Fare centro in O e con raggio OA = OC disegnare una circonferenza. Su di essa, a partire da A e da C riportare la lunghezza di AC.

AGIJC è il pentagono approssimato.

\- APPROFONDIMENTO -

<u>L'apotema di un poligono regolare</u>

L'apotema di un poligono regolare è il raggio del cerchio inscritto nel poligono:



Nel caso del pentagono, OH è il raggio del cerchio inscritto ed è un apotema: la sua importanza è dovuta al fatto che questo segmento è anche l'altezza dei cinque triangoli isosceli, come quello AOC, nei quali è scomposto il poligono.

OH è sia un apotema del pentagono sia l'altezza del triangolo isoscele AOC rispetto alla base AC.

Il calcolo dell'area di un poligono regolare richiede la conoscenza del valore dell'apotema che viene calcolata in relazione alla lunghezza del raggio *r* del cerchio circoscritto al poligono: nell'esempio è:

$$OA = OC = r.$$

Leonardo ha stimato la lunghezza dell'apotema OH uguale a 4/5 dell'altezza BH del triangolo equilatero ABC, costruito sul lato AC del pentagono: rivedere la penultima figura.

L'esatta formula che determina il rapporto fra le lunghezze dell'apotema *a* e del lato del pentagono, ℓ, è:

$$a/\ell = \sqrt{[(\sqrt{5})/10 + 1/4]} \approx 0{,}68819.$$

La soluzione scelta da Leonardo è:

$a = 4/5 * BH$, ma BH è legata alla lunghezza del lato ℓ:

$BH = AC * (\sqrt{3})/2 = \ell * (\sqrt{3})/2$, per cui:

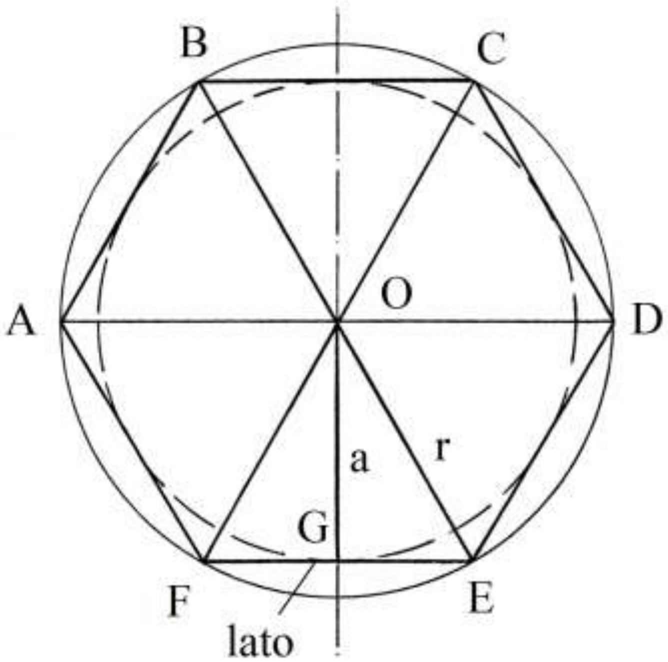
$a = 4/5 * \ell * (\sqrt{3})/2 \approx \ell * 0{,}69282.$

La differenza fra i due coefficienti, quello 0,68819 corretto, e quello calcolato da Leonardo, 0,69282 è molto piccola.

I poligoni regolari e i numeri fissi

Nella geometria pratica accade spesso di dover effettuare calcoli relativi alle lunghezze e alle superfici di poligoni regolari.

In un generico poligono regolare si chiama *apotema* – a – l'altezza del triangolo isoscele che ha per base un lato e per vertice il centro O, centro del poligono e dei due cerchi, circoscritto e inscritto. L'apotema OG è il raggio della circonferenza inscritta e i segmenti OF e OE sono i raggi della circonferenza circoscritta al poligono (in questo caso un *esagono*): nell'esempio, il triangolo OFE è equilatero e OG è una sua altezza.



La lunghezza dell'apotema, *a*, è calcolabile con il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli OGF e OGE:

$$OG = \sqrt{[OE^2 - (FE/2)^2]}$$

$$a = \sqrt{[r^2 - (\ell/2)^2]}$$ dove:

* *a* è l'apotema;
* *ℓ/2* è la lunghezza dei segmenti FG e GE che sono lunghi metà del lato FE.

In un poligono regolare la lunghezza del lato *ℓ* e quella del raggio *r* sono direttamente proporzionali.

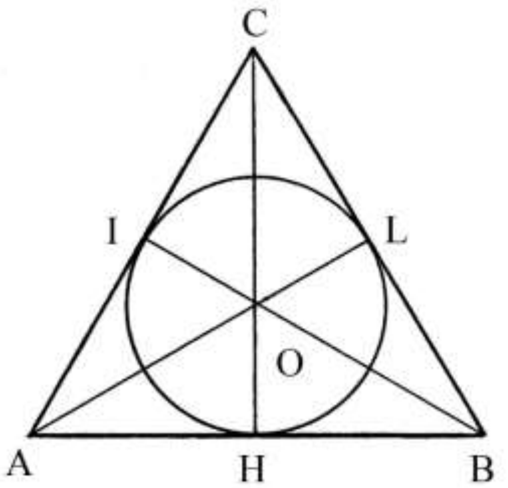
Il rapporto fra la lunghezza dell'apotema e quella del lato è un *numero fisso* *f*:

$$f = a/\ell.$$

f è una costante tipica di un singolo poligono regolare.

L'apotema di un triangolo equilatero

In un triangolo equilatero, le altezze relative ai tre lati si intersecano in un punto, O, che è chiamato *ortocentro*:



Il punto O divide ciascuna delle altezze in due parti di lunghezza differente: nel caso dell'altezza CH, OH è lungo la *metà* di OC e *un terzo* della lunghezza complessiva di CH.

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo CHB, l'altezza CH è così determinata:

$$CH^2 = CB^2 – HB^2$$

Ma HB = ½ * AB = ½ * CB per cui

$$CH^2 = CB^2 – (1/2 * CB)^2 = ¾ * CB^2$$

$$CH = \sqrt{}(3/4 * CB^2) = CB * (\sqrt{}3)/2 \approx CB * 0,866$$

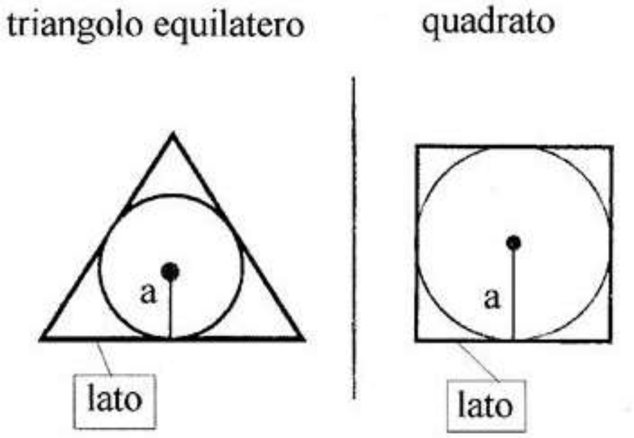
Il segmento OH è lungo:

$$OH = 1/3 * CH = 1/3 * [CB * (\sqrt{}3)/2] = CB * (\sqrt{}3)/(3 * 2) = (\sqrt{}3)/6 * CB =$$
$$= CB * 0,28867 \approx CB * 0,289.$$

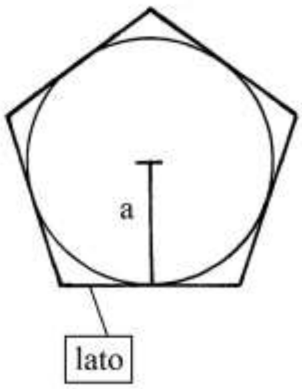
L'apotema del triangolo equilatero è lungo 0,289 volte il lato.

<u>Gli apotemi di alcuni poligoni regolari</u>

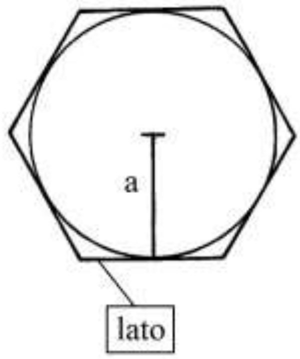
Le figure che seguono descrivo gli apotemi dei sei più comuni poligoni regolari:



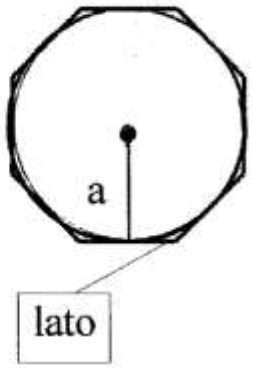
pentagono



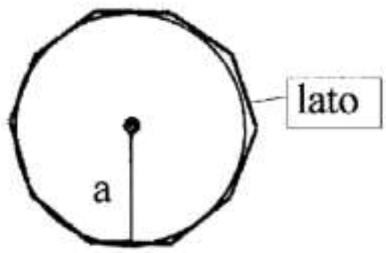
esagono



ottagono



decagono



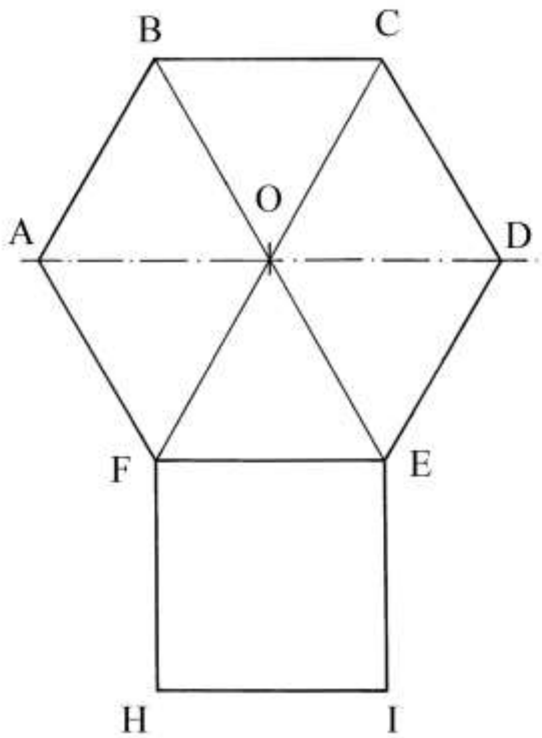
La tabella che segue fornisce i *numeri fissi f* per i più comuni poligoni: conoscendo la lunghezza del lato ℓ essi permettono di calcolare rapidamente il valore di a con la formula:

$$a = f * \ell$$

Poligono regolare	*Numero fisso f*
Triangolo equilatero	0,289
Quadrato	0,5
Pentagono	0,688
Esagono	0,866
Ettagono	1.038
Ottagono	1,207
Ennagono	1,374
Decagono	1,539
Endecagono	1,703
Dodecagono	1,866

In un qualsiasi poligono regolare il rapporto fra la sua area e quella del quadrato costruito su un suo lato (ℓ) è costante ed è un altro *numero fisso*, indicato con la lettera *F* maiuscola, per distinguerlo dall'altro numero fisso (f):

$$\text{Area} = F * \ell^2$$



Il numero *F* è un numero fisso caratteristico di ciascun poligono regolare: esso indica quante volte il quadrato EFHI è contenuto nel poligono regolare ABCDEF.

La regola vale per tutti i poligoni regolari.

La tabella che segue riporta i valori di *F* per i più comuni poligoni:

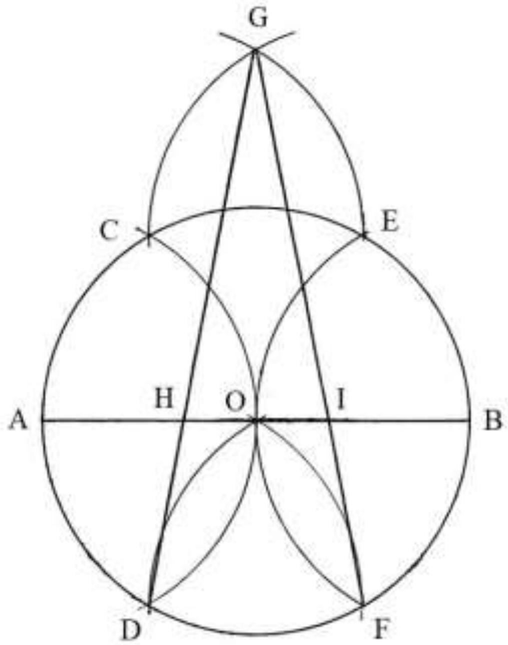
Poligono regolare	*Numero fisso F*
Triangolo equilatero	0,433
Quadrato	1
Pentagono	1,72
Esagono	2,598
Ettagono	3,634
Ottagono	4,828
Ennagono	6,182
Decagono	7,694
Endecagono	9,366
Dodecagono	11,196

- -

<u>Esagono, ennagono e ottadecagono inscritti</u>

Il foglio 13 *recto* del Codice B contiene una costruzione di tre poligoni inscritti nello stesso cerchio: l'esagono, l'ennagono e l'ottadecagono (il poligono con 18 lati).

Tracciare la circonferenza con centro O e il diametro orizzontale AB. Con apertura di compasso OA, fare centro in A e in B e disegnare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti C. D, E e F:



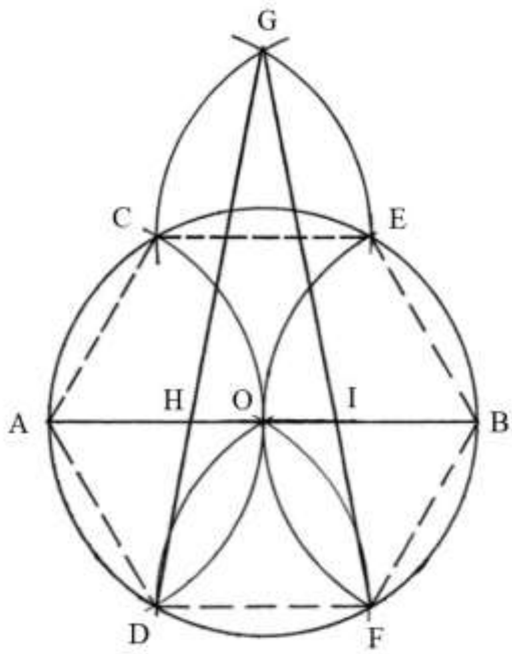
Sempre con apertura OA, fare centro in D e in F e tracciare due archi a partire da O. Ancora con la stessa apertura fare centro nei punti C e E e disegnare due archi che si incontrano in G.

Collegare G con D e F: i due segmenti incrociano AB in H e in I.

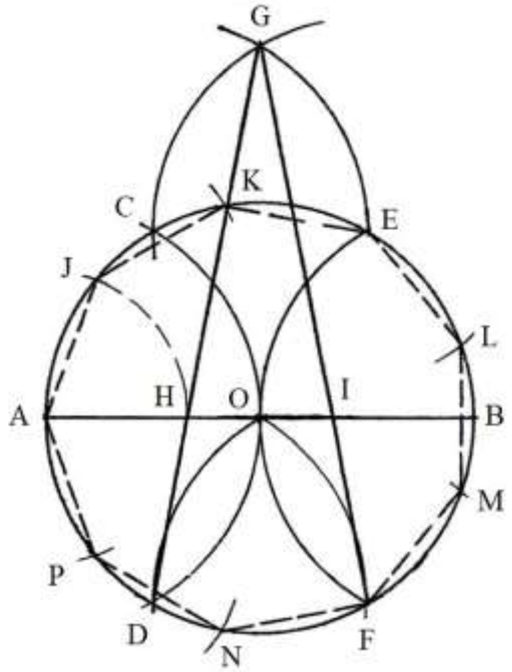
Il diametro AB è ora suddiviso in tre parti uguali:

AH = HI = IB.

ACEBFD è un esagono regolare inscritto:



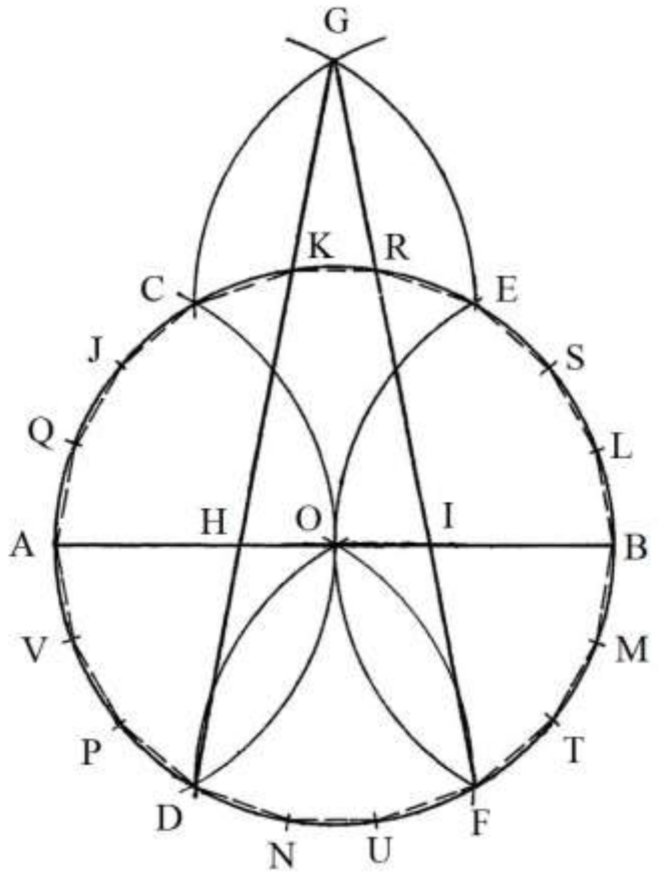
I segmenti AH, HI e IB sono la lunghezza *approssimata* del lato dell’ennagono inscritto; fare centro in A e con raggio AH tracciare l’arco HJ: la corda AJ è il primo lato dell’ennagono inscritto. A partire da J riportare sulla circonferenza la lunghezza della corda AJ:



AJKELMFNP è l’ennagono approssimato inscritto.

Il punto O divide in due parti uguali il segmento HI: OH = OI.

I segmenti OH e OI sono lunghi quanto il lato dell’ottadecagono approssimato inscritto: il poligono che ha 18 lati è mostrato nella figura che segue:

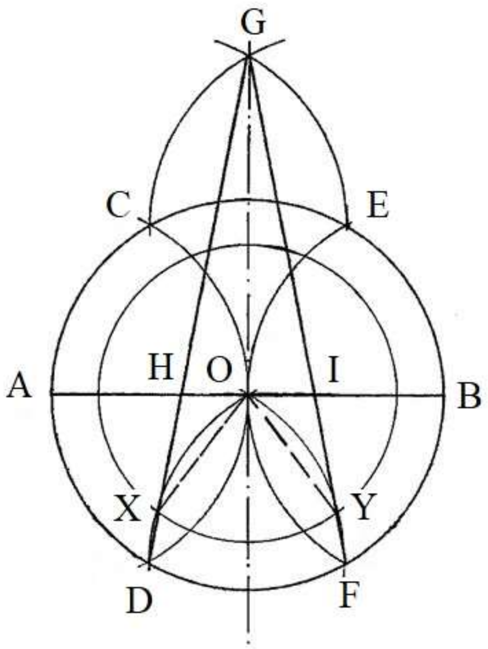


AQJCKRESLBMTFUNDPV è l'ottadecagono approssimato inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Stando a quanto accennato da Leonardo nella didascalia che accompagna il suo disegno, la costruzione potrebbe essere stata usata anche per ricavare l'*ottagono* inscritto.

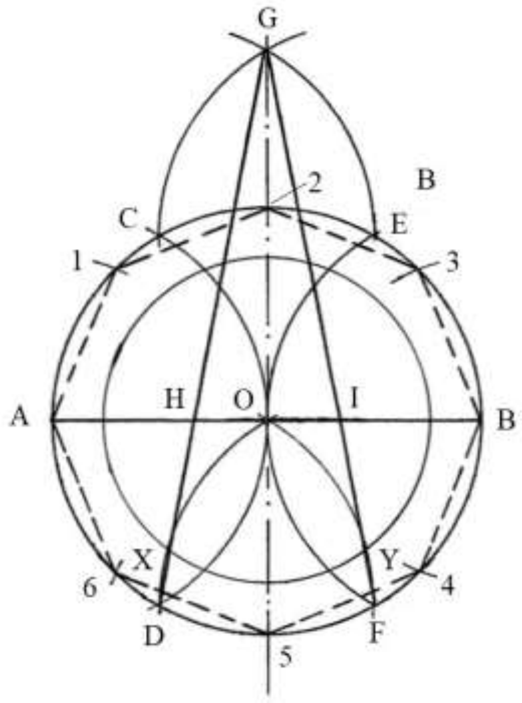
I segmenti GD e GF intersecano gli archi di centro D e F in due punti, X e Y:



Tracciare la retta passante per G e per O.

I segmenti OX e OY sono due raggi di una circonferenza di centro O e quindi concentrica alla prima.

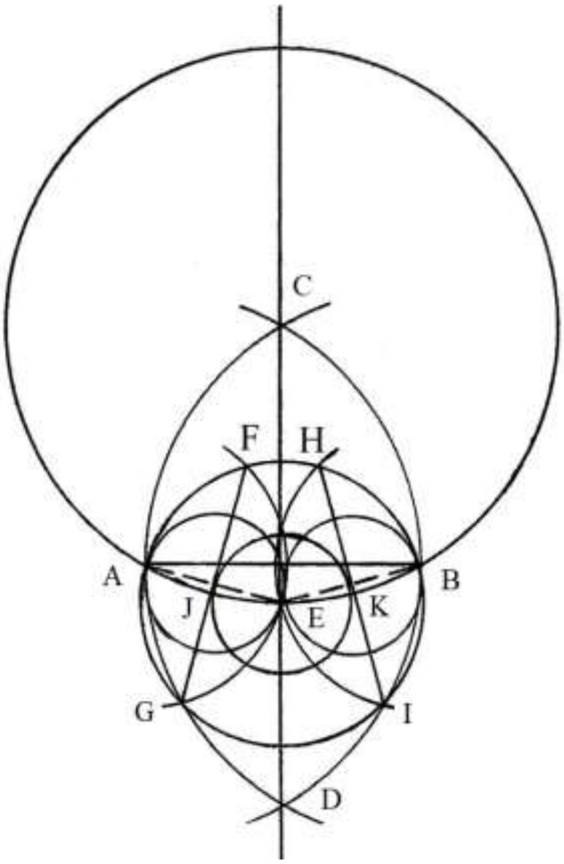
OX e OY hanno la lunghezza dei lati di un ottagono inscritto nel cerchio esterno. A partire dal vertice A riportare la lunghezza di OX = OY:



A123B456 è l’ottagono inscritto.

Poligoni inscritti con numeri di lati multipli di 3

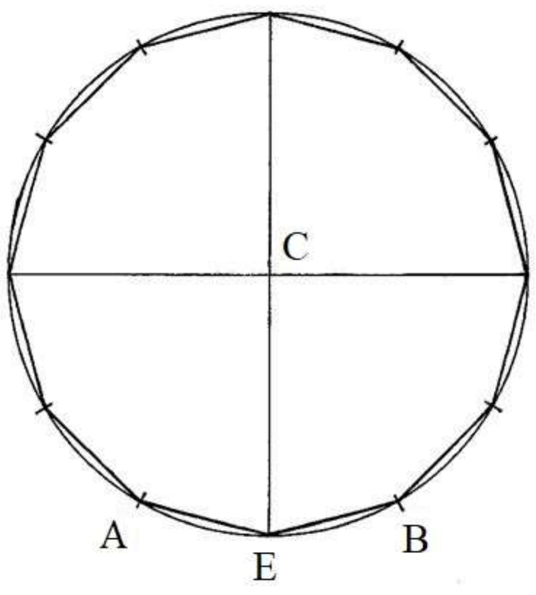
Il foglio 11 *verso* del Codice A contiene la costruzione dei poligoni di 3, 6, 12 e 24 lati, inscritti nello stesso cerchio.



Tracciare il segmento AB, primo lato dell’esagono. Con raggio AB fare centro nei punti A e B e disegnare due archi che si intersecano in C e in D: la linea passante per questi ultimi è l’asse del segmento AB.

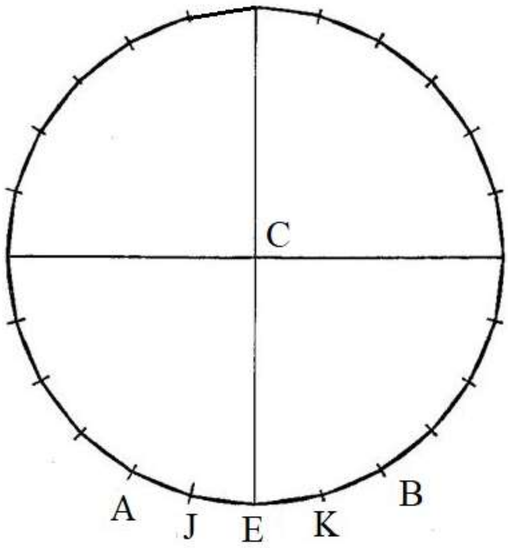
Fare centro in C e, con la stessa apertura di compasso, tracciare una circonferenza che taglia l’asse del segmento nel punto E.

Disegnare le corde AE e EB: esse sono due lati del dodecagono regolare inscritto:



Fare centro in E con raggio EA = EB e tracciare una circonferenza. Con la stessa apertura fare centro in A e in B e disegnare due archi che determinano i punti F, G, H e I. Le corde FG e HI incontrano la prima circonferenza nei punti J e K.

La corda AJ è un lato del tetraicosagono regolare inscritto, il poligono di 24 lati:



Infine, Leonardo traccia tre circonferenze con centri nei punti J, E e K e raggio JA: non sembra che essere siano strettamente indispensabili alla costruzione dei tre poligoni.

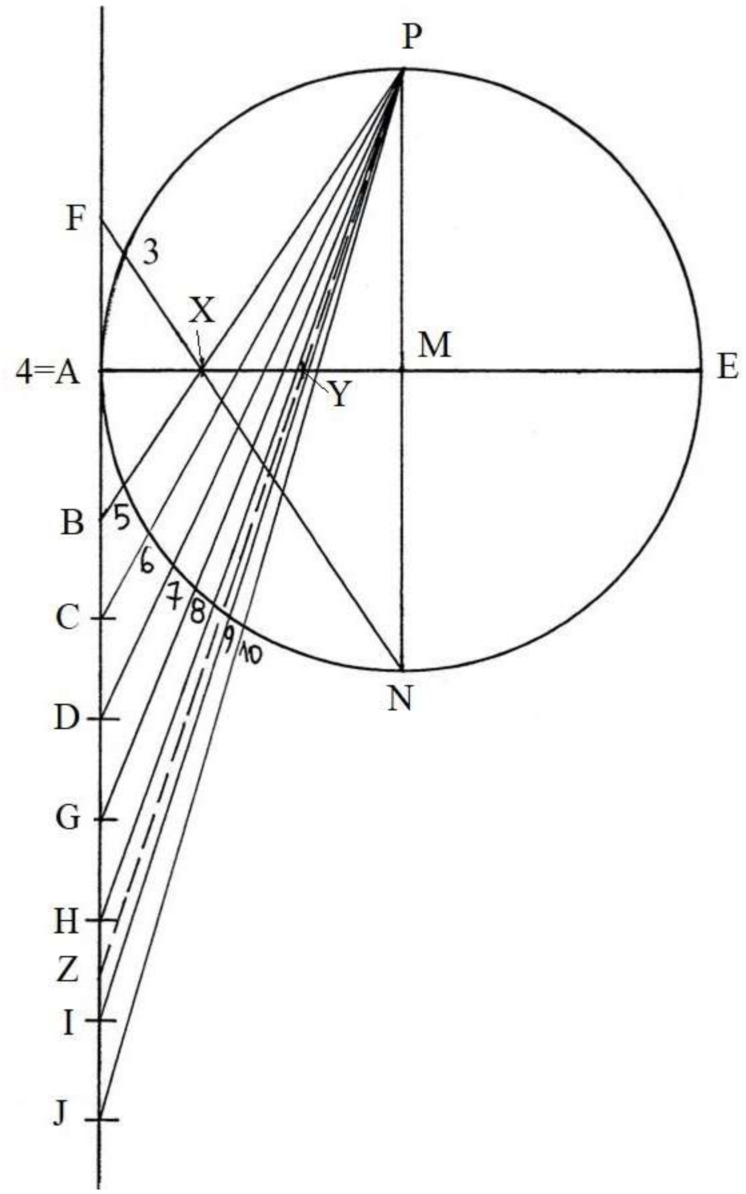
Codice A foglio 11 *verso*

Il Codice A di Parigi contiene nella parte inferiore del foglio 11 *verso* una complessa costruzione che sembrerebbe essere stata ideata da Leonardo per disegnare una serie di poligoni approssimati con numero crescente di lati, tutti inscrivibili in un cerchio.

Il disegno del Codice non è completo e anche la didascalia in calce non è del tutto esauriente.

Qui di seguito viene proposta un'ipotesi ricostruttiva.

Per indicare i punti della costruzione nelle figure che seguono sono usate le stesse lettere dell'alfabeto usate da Leonardo con una differenza: Leonardo impiega quasi sempre lettere *minuscole* mentre qui sono sempre utilizzate le *maiuscole*. Alcuni punti non contrassegnati da Leonardo sono indicati con i *numeri*.



Tracciare la circonferenza di centro M e di raggio MA e i diametri fra loro perpendicolari AE e PN.

Per il punto A disegnare la tangente alla circonferenza, perpendicolare al diametro AE.

Dividere in *tre* parti uguali il raggio AM: sono così stabiliti i punti X e Y.

Dal punto N condurre una linea passante per X fino a intersecare la tangente nel punto F: essa taglia la circonferenza nel punto 3.

Il vertice A coincide con il punto 4.

Dal punto P disegnare una linea *tratteggiata* passante per Y, fino a incontrare la retta tangente in un punto intermedio, Z.

Sempre dal punto P, tracciare una linea passante per X fino a tagliare la tangente nel punto B: essa incontra la circonferenza nel punto 5.

Con il compasso misurare la lunghezza di AX e riportarla sulla retta tangente a partire da B verso il basso: in successione sono stabiliti i punti C, D, G, H, I e J.

Da punto P disegnare una serie di linee che lo collegano con i punti C, D, G, H, I e J.

Le linee PB, PC, PD, PG, PH, PI e PJ incrociano la circonferenza in una serie di punti progressivamente più vicini fra loro: sono 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Valgono le seguenti relazioni:

5-6 > 6-7 > 7-8 > 8-9 > 9-10 e via di seguito.

Secondo Leonardo questi punti sulla circonferenza sono legati alle lunghezze dei lati dei poligoni da inscrivere.

Il senso della numerazione è: il numero del singolo punto è collegato al numero dei lati del poligono inscritto da costruire.

Nei grafici che accompagnano la descrizione dell'ipotesi i numeri 1 e 2 sono omessi: la ragione è ovvia, dato che non esistono poligoni con *uno* o *due* lati.

Uno dei massimi studiosi dei Codici di Leonardo è stato Augusto Marinoni. Nel suo studio "La matematica di Leonardo da Vinci", alla pagina 56 così spiega il significato di questa costruzione:

"… *Nella metà inferiore della pagina è disegnato un altro cerchio ortogonalmente diviso in quattro quadranti. La metà destra [sinistra] del diametro orizzontale [AMI] è divisa in tre parti uguali. Dall'estremità superiore del diametro verticale discende obliquamente un fascio di sette linee ognuna delle quali va a toccare la tangente al cerchio parallela al diametro verticale in punti esattamente separati colla misura di 1/3 del raggio.*

"*Nel loro percorso le linee tagliano nel quadrante inferiore destro [sinistro] la circonferenza in spazi sempre più ravvicinati determinando la misura di ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 della circonferenza.*

"*Manca nella pagina lo spazio per condurre a termine le ultime due linee, né è tracciata una prima linea, che pure è nominata e che determina 1/3 della circonferenza. Questa ingegnosa trovata è data come spiegazione del precedente disegno, che già si spiegava da sé, ma richiederebbe a sua volta una spiegazione che invece manca…*".

- APPROFONDIMENTO -

Augusto Marinoni (1911 – 1997) è stato un grande studioso ed esperto di Leonardo di cui ha curato la trascrizione e la pubblicazione a stampa di diversi Codici.

L'interpretazione che Augusto Marinoni ha dato della costruzione descritta in questo capitolo merita di essere verificata con la sua concreta esecuzione con il compasso e con la riga, ma Marinoni non l'ha fatto.

Sono note le severe critiche che l'Autore rivolge a Leonardo (ad esempio nel volume citato in bibliografia): non lo considera un matematico. Leonardo ha certamente incontrato seri problemi con l'aritmetica e con l'algebra, come attestano i suoi numerosi errori di procedura e di calcolo contenuti nei Codici: ma la matematica non si riduce a aritmetica e algebra.

Leonardo fu un grande geometra pratico: la meccanica era ed è strettamente legata alla geometria pratica. Nel corso del Medioevo e del Rinascimento la "geometria con gli strumenti" e cioè la *geometria pratica*, servì a artigiani, mercanti e costruttori.

Le critiche di Marinoni a Leonardo geometra sono eccessive. Particolarmente severo è stato Marinoni nei confronti degli studi vinciani pubblicati dal matematico e storico della meccanica Roberto Marcolongo (1862 – 1943) che forse peccò per eccessiva ammirazione nei confronti di Leonardo, da lui elevato a livello di grande matematico.

Per meglio comprendere la geometria di Leonardo, una metodologia utile chiederebbe la riproduzione con compasso e riga delle sue costruzioni, metodo che è stato applicato allo studio dei disegni geometrici contenuti nei trattati dell'altro grande del Rinascimento: Piero della Francesca. In particolare due autorevoli studiosi italiani, Francesco Paolo Di Teodoro e Vladimiro Valerio hanno dato notevoli contributi su questo tema.

Nella monumentale edizione del *Codice Atlantico* pubblicata dall'Editore Giunti a Firenze (e nella successiva coedizione "Il Sole – 24 ORE" e "la Repubblica"), i fogli sono stati riprodotti con grande cura fotografica.

Di ciascun foglio sono state descritte le caratteristiche fisiche: formato della carta, eventuale filigrana, tipo della carta, natura e colore degli inchiostri usati da Leonardo, strumenti usati (compasso, punta secca, matite, penna a inchiostro, righe).

Ma i disegni non sono stati rieseguiti come è avvenuto nel caso dei trattati di Piero della Francesca: l'immensa mole dei disegni di Leonardo rende difficile sottoporli allo stesso trattamento effettuato su quelli di Piero.

Le recenti edizioni nazionali di due trattati di Piero della Francesca (il *Libellus de quinque corporibus regularibus* e il *Trattato d'Abaco*) sono esemplari: i disegni sono stati studiati in maniera approfondita e riprodotti uno per uno. È utile ricordare che quei disegni sono *autografi* di Piero della Francesca.

Dall'*Introduzione* di Vladimiro Valerio nel volume II del *Trattato d'Abaco*, sono riprodotti alcuni passi essenziali (alle pp. XVII-XIX):

"La presente edizione dell'*Abaco* di Piero della Francesca si avvale dell'esecuzione di due tipi di disegni, uno *diplomatico*, l'altro *critico*, per ciascuna delle figure delineate dall'artista, secondo le scelte e i criteri seguiti nell'edizione nazionale del *Libellus de quinque corporibus regularibus*. Anche per l'*Abaco* il modello metodologico seguito è quello della filologia testuale…

"Il *disegno diplomatico* presenta la trascrizione delle particolarità formali dell'originale, migliorandone la leggibilità. Si è evitato di riproporre le sbavature dovute allo scorrimento del righello, o le doppie linee, o quelle divergenti per erroneo calcolo della direzione, così come non si è tenuto conto delle differenze di intensità del segno, dovute al maggiore o minore afflusso di inchiostro…

"A differenza della scelta che si era operata per l'edizione del *Libellus*, si è deciso di riprodurre il disegno diplomatico nella stessa dimensione dell'originale di Piero e di adottare la stessa dimensione anche per il disegno critico, per un'esigenza di fedeltà al testo tràdito e di rigore storico-filologico, ma anche nella convinzione che la dimensione sia tra gli elementi caratterizzanti la figura…

"Un'altra caratteristica peculiare di questa edizione, diversa dalla scelta operata per le figure del *Libellus*, riguarda i tratti a secco, di cui Piero fa largo uso in corso d'opera. Tali segni, ottenuti con punta metallica, sono visibili soltanto a luce radente e si è deciso di rilevarli e fotografarli per proporli come parte integrante del disegno diplomatico…

"…, nel disegno diplomatico sono stati evidenziati con un leggero puntinato i pentimenti e le linee erase, …

"Per concludere, il disegno autografo è stato continuamente interrogato affinché rivelasse quanti più indizi possibile sulla sua natura e sul procedimento esecutivo, per trasporli nel disegno diplomatico, senza mai intervenire né con integrazioni né con espunzioni, anche laddove la figura non seguisse tutte le prescrizioni del problema di riferimento.

"Il *disegno critico* riproduce il disegno diplomatico emendato degli errori e senza le tracce a secco, integrato con le linee e le lettere menzionate nella proposizione, ma omesse nella figura del manoscritto. Tali integrazioni sono state evidenziate in colore rosso. Viceversa, a differenza dell'edizione nazionale del *Libellus*, sono stati espunti i segni ritenuti pleonastici o non citati espressamente nel testo. Questi criteri rispondono all'esigenza di rispettare rigorosamente il dettato dei problemi, ma al tempo stesso di porre in evidenza, attraverso la comparazione con il disegno diplomatico, le mutevoli relazioni istituite da Piero tra il testo matematico e la sua trasposizione grafica. Come già detto, il disegno critico è eseguito nella stessa dimensione dell'originale e del disegno diplomatico, per facilitare un confronto diretto tra il disegno di Piero e la restituzione critica di esso…".

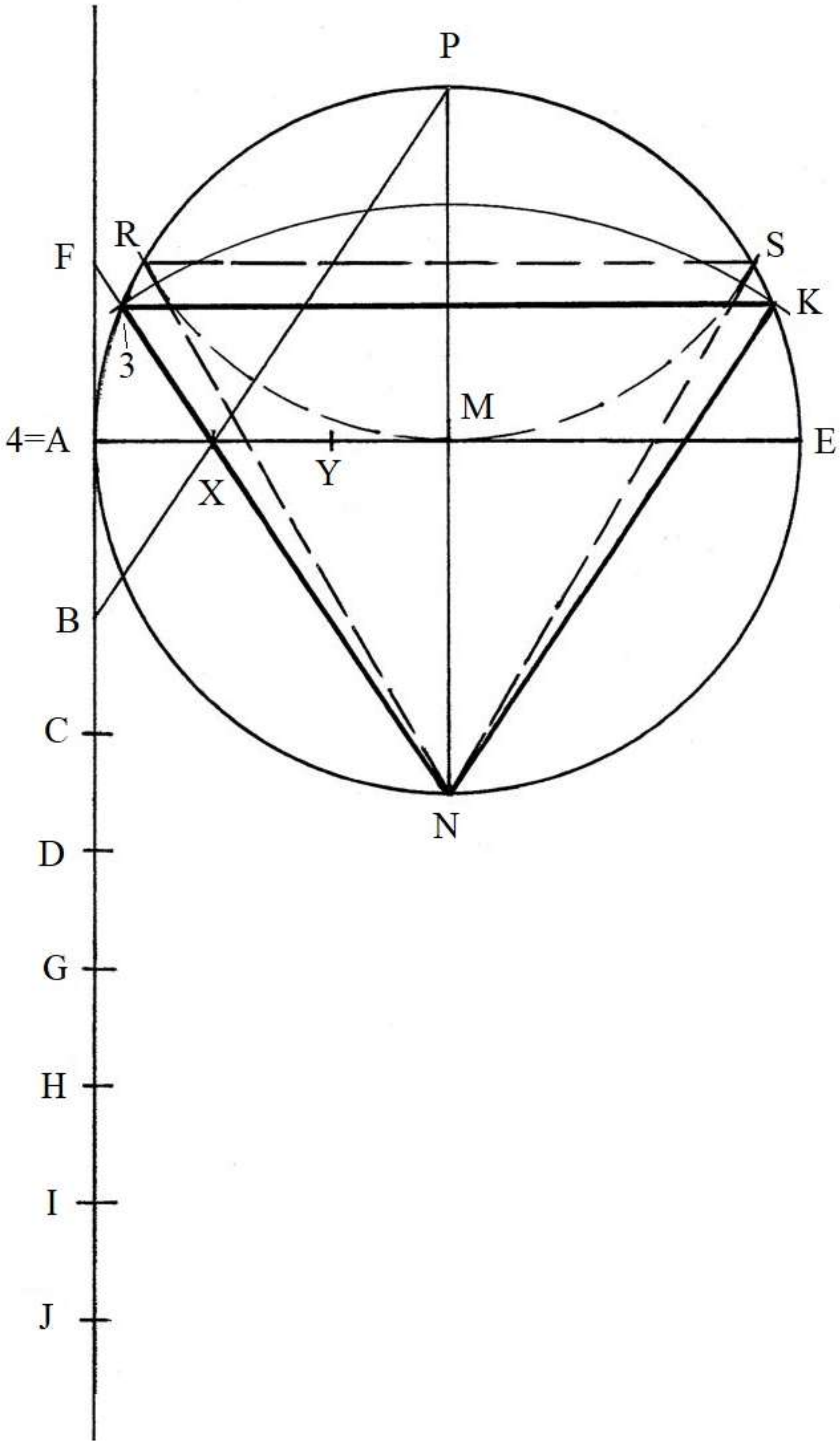
- -

Nei paragrafi che seguono sono descritte le costruzioni dei poligoni regolari, dal triangolo equilatero all'ennagono, tutte basate sul disegno di Leonardo.

Il triangolo equilatero

Fare centro nel punto N e con raggio N-3 tracciare un arco dal punto 3 fino a tagliare la circonferenza in un punto, K.

Collegare i punti 3, K e N: essi formano un triangolo che in teoria dovrebbe essere equilatero (ma è soltanto *isoscele*):



Per verificare l'esattezza della costruzione, fare centro in P e con raggio PM disegnare un arco passante per M e secante la circonferenza in due punti, R e S.

NRS è un triangolo equilatero e non coincide con quello 3KN.

La costruzione di Leonardo è approssimata.

Quadrato inscritto

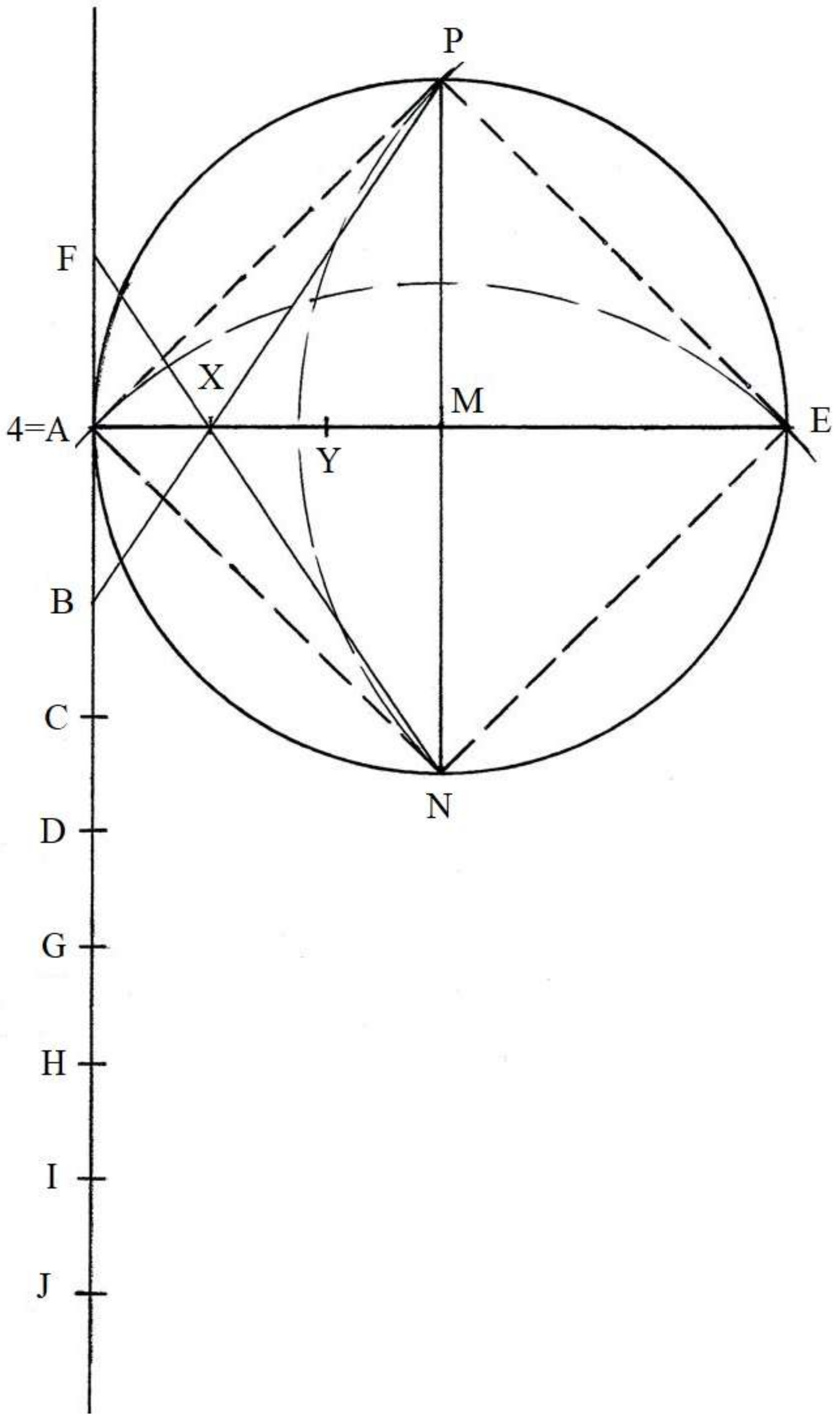
Il segmento NA (o N-4) è un lato del quadrato inscritto.

Collegare i vertici A, N, E e P: ANEP è un quadrato.

Per verificare la sua esattezza fare centro in N con raggio NA e disegnare un arco da A fino a incontrare la circonferenza nel punto E.

Ripetere la stessa operazione facendo centro in E.

La costruzione è corretta.



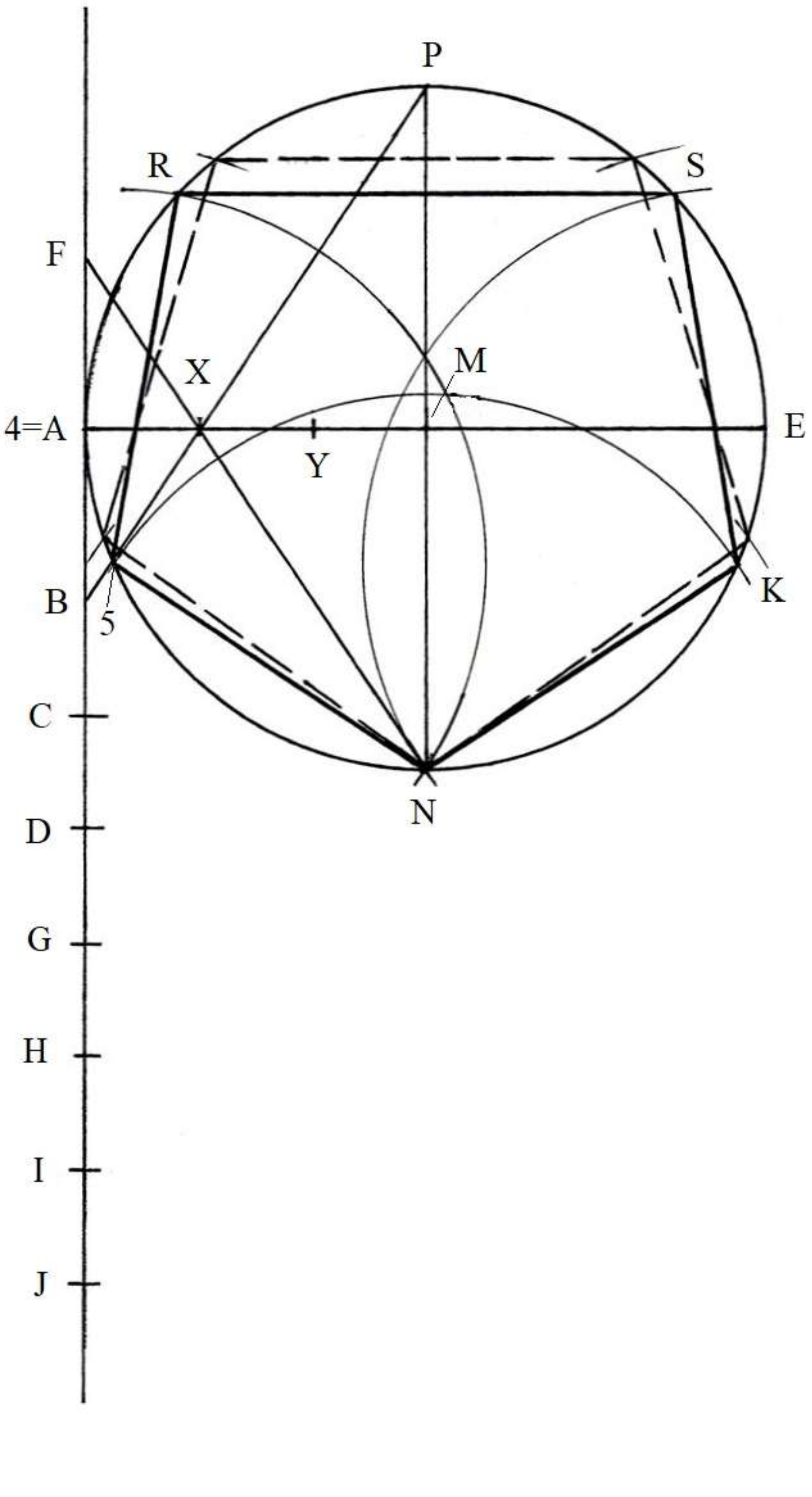
Pentagono

Tracciare la corda 5-N: essa è il primo lato del pentagono inscritto.

A partire dal vertice N riportare lungo la circonferenza la lunghezza di 5-N.

Il poligono 5NKSR è il pentagono: risulta evidente che il lato RS è assai più lungo degli altri quattro. La costruzione di Leonardo è eccessivamente approssimata.

Applicando il metodo di Tolomeo, il pentagono regolare che viene ottenuto è disegnato con linee tratteggiate: il confronto fra i due pentagoni è chiaro.

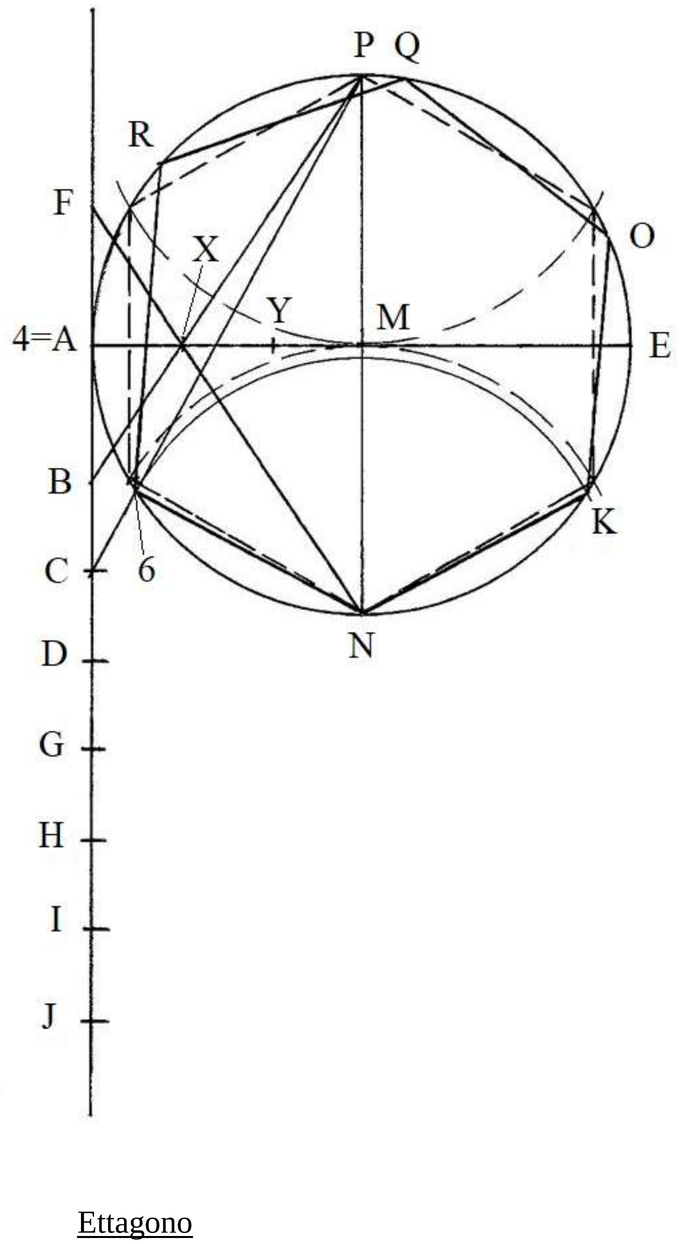


Esagono

Disegnare la corda 6-N che è il primo lato dell'esagono.

A partire dal vertice N riportare lungo la circonferenza, in senso antiorario, la lunghezza di N-6. Il poligono 6NKOPR è un esagono *non regolare* perché il lato R-6 è più lungo degli altri cinque.

Nella figura è disegnato, *tratteggiato*, l'esagono regolare: la differenza fra i due esagoni è evidente.



Ettagono

La corda N-7 è il primo lato dell'ettagono inscritto.

Riportando lungo la circonferenza, in senso antiorario, la lunghezza di N-7 a partire dal vertice N, sono determinati in successione i punti O, Q, R, S e T.

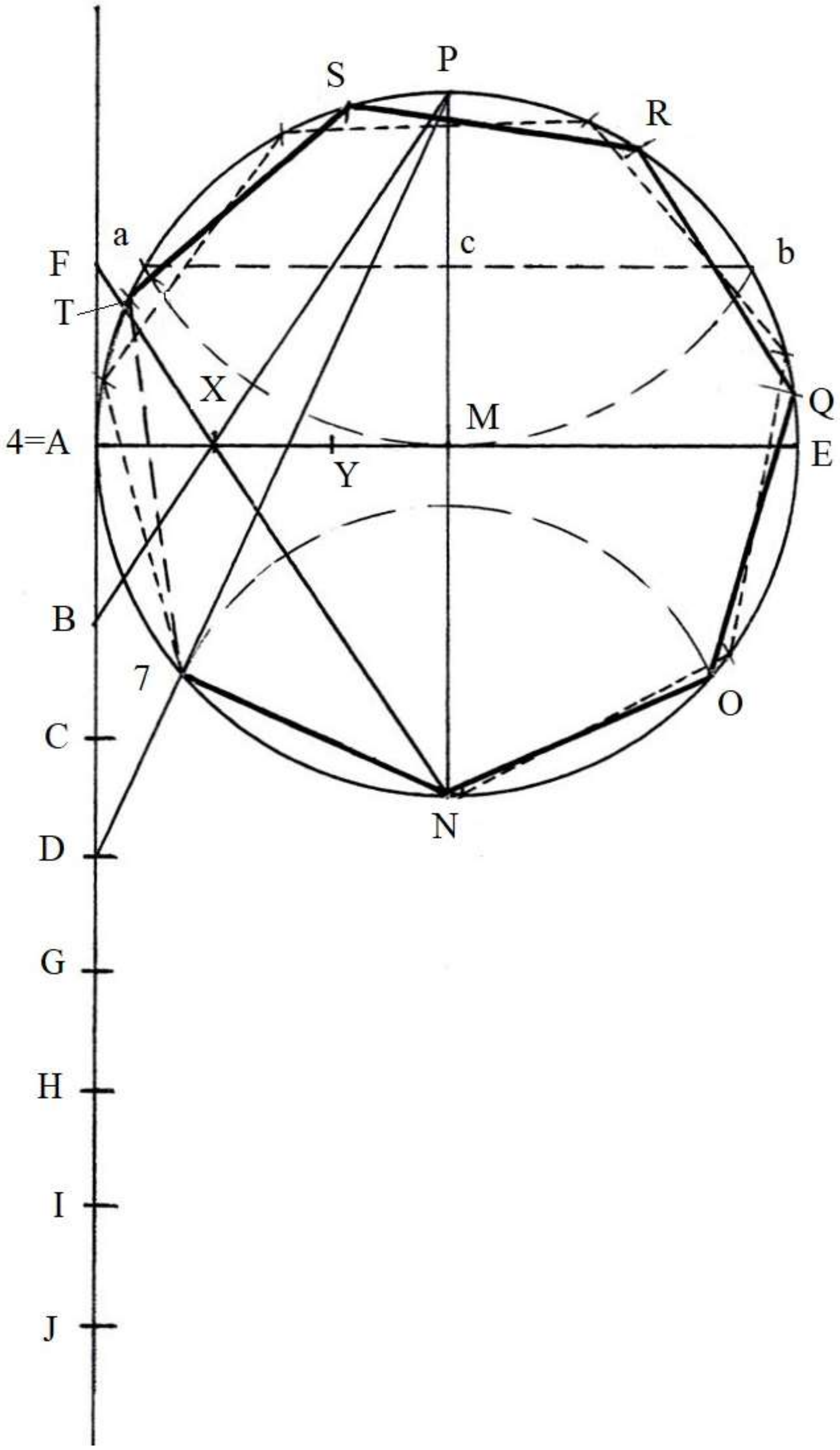
La corda T-7 è più lunga delle altre sei corde e il poligono 7NOQRST non è un ettagono regolare: il metodo di Leonardo offre un risultato troppo approssimato.

Richiamando la costruzione approssimata dell'ettagono risalente a Erone, la lunghezza del lato di questo poligono è uguale a quella dell'*apotema* dell'esagono o alla metà della lunghezza del lato del triangolo equilatero inscritti entrambi nello stesso cerchio.

Fare centro in P e con raggio PM disegnare la semicirconferenza passante per M; essa taglia la circonferenza in due punti, *a* e *b*: la corda *ab* incontra il diametro PN nel punto *c*.

I segmenti *ac* e *cb* sono le lunghezze di due lati dell'ettagono inscritto secondo il metodo approssimato di Erone.

Riportando lungo la circonferenza, sempre a partire dal vertice 7, la lunghezza di *ac* si ottiene l'ettagono approssimato corretto, i cui lati sono qui disegnati tratteggiati.



Ottagono

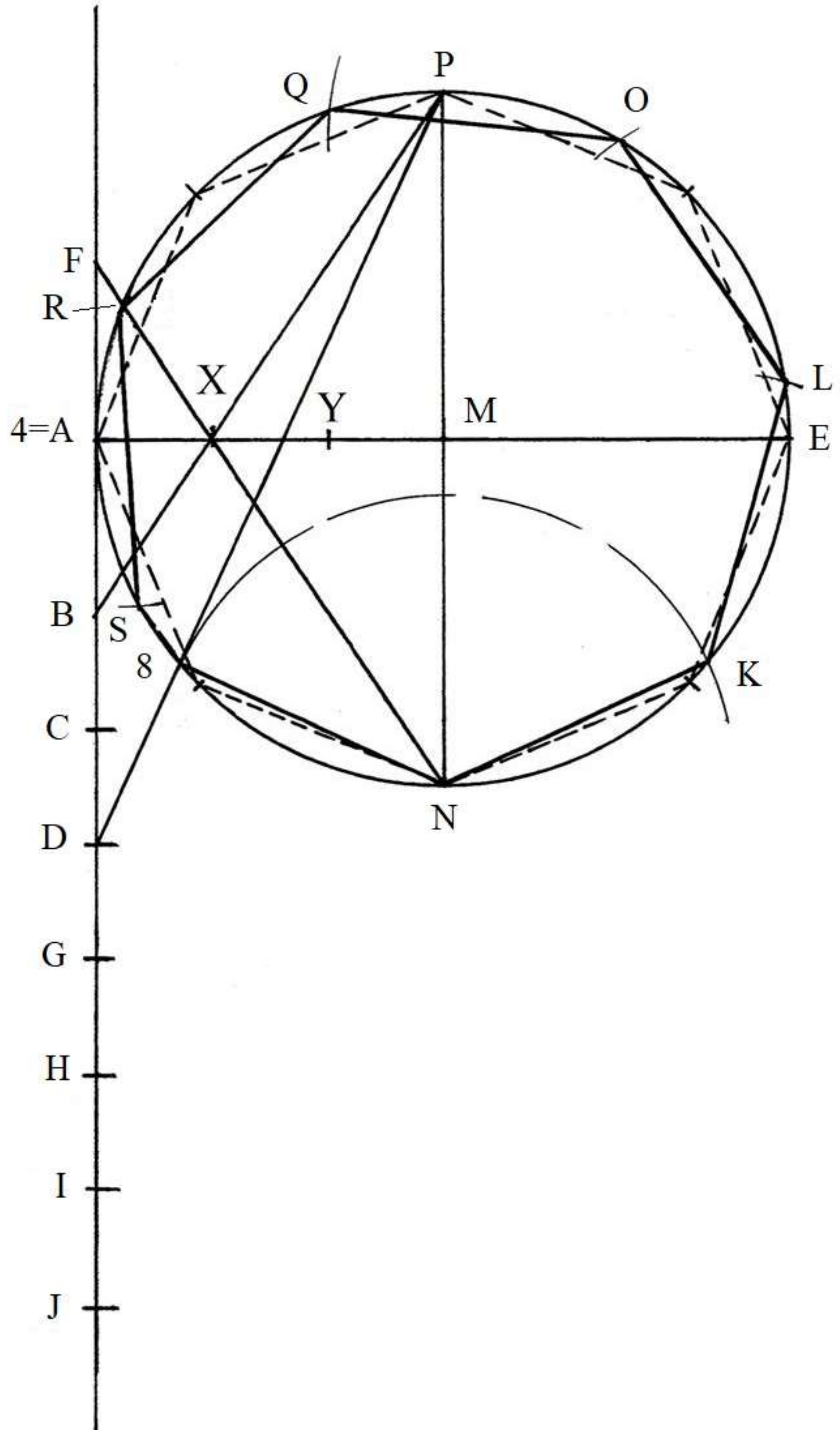
Disegnare la corda 8-N che è il primo lato dell'ottagono inscritto secondo il metodo di Leonardo.

Riportare la lunghezza di N-8 a partire da N: il risultato è il poligono non regolare 8NKLOQRS che possiede certamente *otto* lati, ma l'ultimo – quello S8 – è incredibilmente più corto. Il poligono è un ottagono non regolare.

La conclusione è ovvia: la costruzione di Leonardo è errata perché il lato 8-N è più lungo del dovuto.

La costruzione dell'ottagono regolare è assai più semplice e non richiede che la tracciatura delle bisettrici dei quattro angoli retti generati nel punto M dall'intersezione dei diametri AE e PN. Le bisettrici tagliano la circonferenza in quattro punti che formano altrettanti vertici dell'ottagono inscritto: gli altri quattro vertici sono A, P, E e N.

In figura è disegnato con lati tratteggiati l'ottagono regolare inscritto.

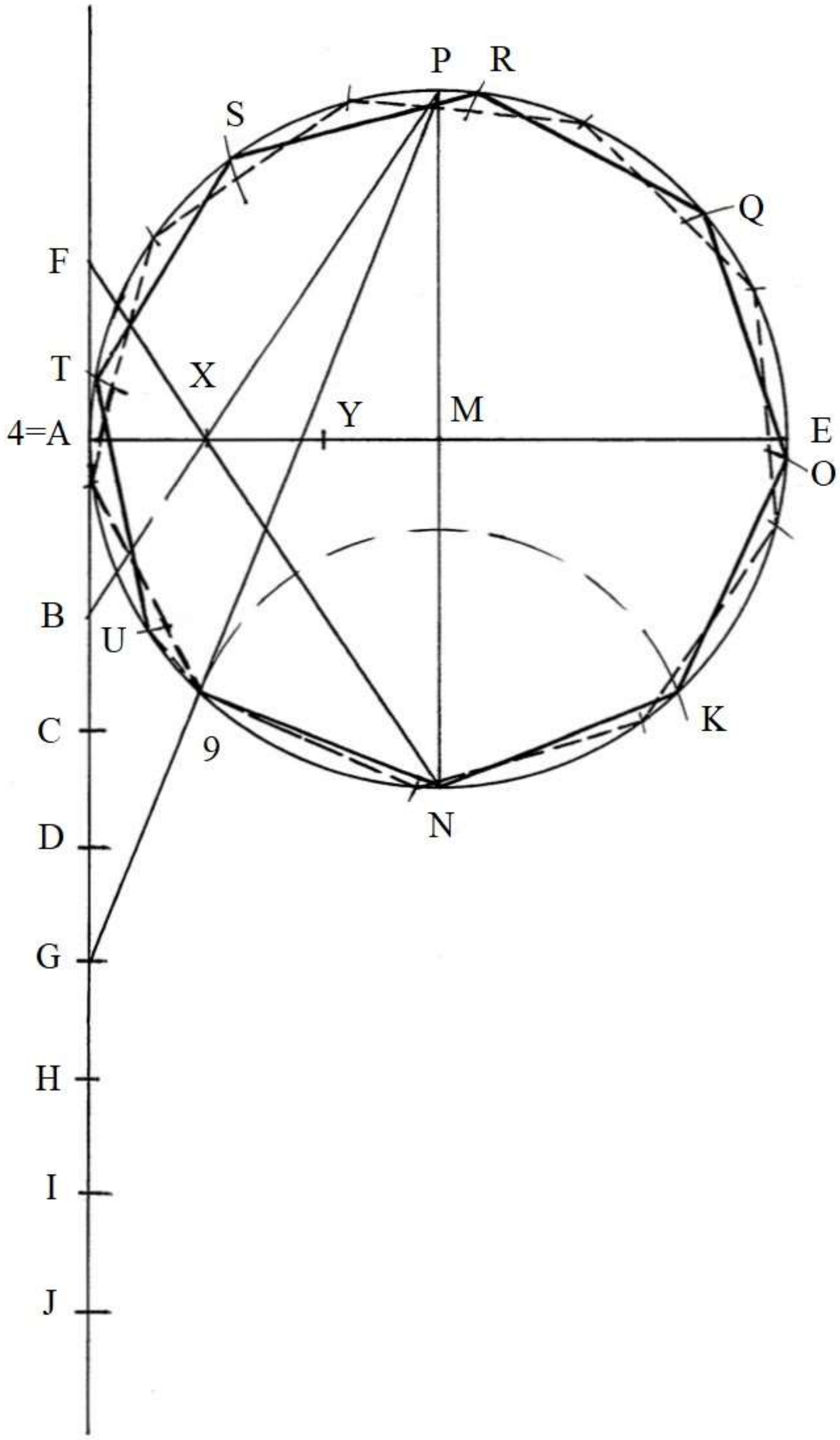


Ennagono

Disegnare la corda 9-N: essa è il primo lato dell'ennagono inscritto.

È bene ricordare che non esiste una costruzione dell'ennagono regolare inscritto esatta, con riga e compasso: i metodi proposti da tanti geometri sono sempre approssimati.

A partire da N, lungo la circonferenza riportare in senso antiorario la lunghezza di N-9.



Il poligono 9NKOQRSTU non è un ennagono regolare perché l'ultimo lato tracciato, la corda U-9, è assai più corto degli altri otto lati.

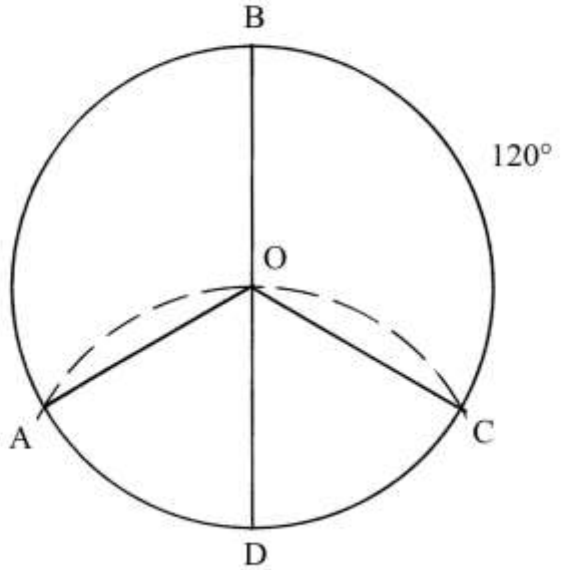
La costruzione dell'ennagono contenuta nel foglio 13 *recto* del Codice B, descritta nelle precedenti pagine 32-33, è assai più precisa di questa.

- APPROFONDIMENTO -

La costruibilità dell'ennagono regolare

L'ennagono regolare inscritto non è costruibile con i due strumenti dell'antica geometria: riga e compasso.

La costruzione del triangolo equilatero inscritto in un cerchio è la base di partenza:

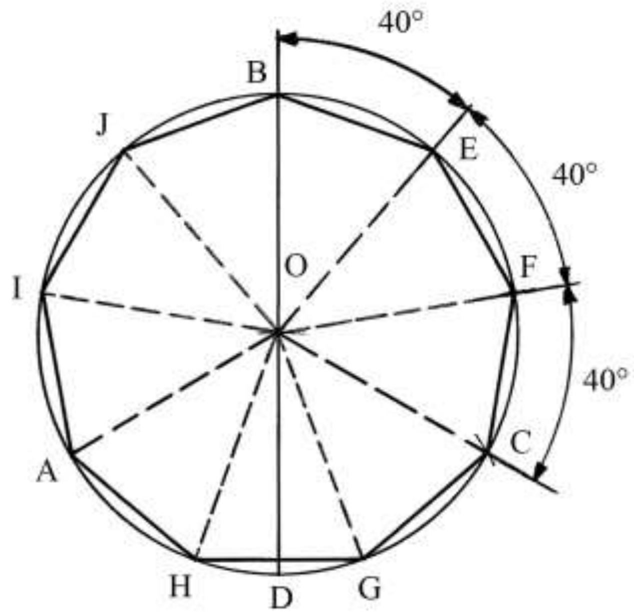


BD è il diametro verticale di un cerchio di centro O: facendo centro in D con raggio DO tracciare l'arco passante per O che taglia la circonferenza nei punti A e C. OA e OC sono altri due raggi.

A, B e C sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto.

I raggi OA, OB e OC dividono l'angolo giro in O in tre angoli di uguale ampiezza: 120°.

La costruzione dell'ennagono richiede la divisione dell'angolo di 120° in *tre* angoli di ampiezza uguale a 40°: l'operazione è possibile con l'aiuto di un goniometro, strumento ignorato dalla geometria classica, per la quale era impossibile la trisezione di un angolo.



BEFCGHAIJ è l’ennagono regolare inscritto nel cerchio di centro O.

Nei tempi moderni, altri metodi e strumenti consentono la costruzione dell’ennagono regolare: il *neusis*, la geometria degli origami e gli strumenti trisettori che consentono di dividere in tre parti uguali un angolo qualsiasi e in particolare quello di 120°.

- -

Conclusioni

Le costruzioni derivate dallo schema contenuto nella parte inferiore del foglio 11 *verso* del Codice A di Parigi di Leonardo sembrano soffrire di un errore comune: un lato dei diversi poligoni risulta notevolmente sempre notevolmente più lungo o più corto rispetto agli altri. Leonardo correggeva l’errore per tentativi usando il compasso?

Oppure aumentando il numerto dei lati del poligono l’errore tende a diminuire?

Il metodo di Leonardo è stata una delle fonti del metodo di Renaldini?

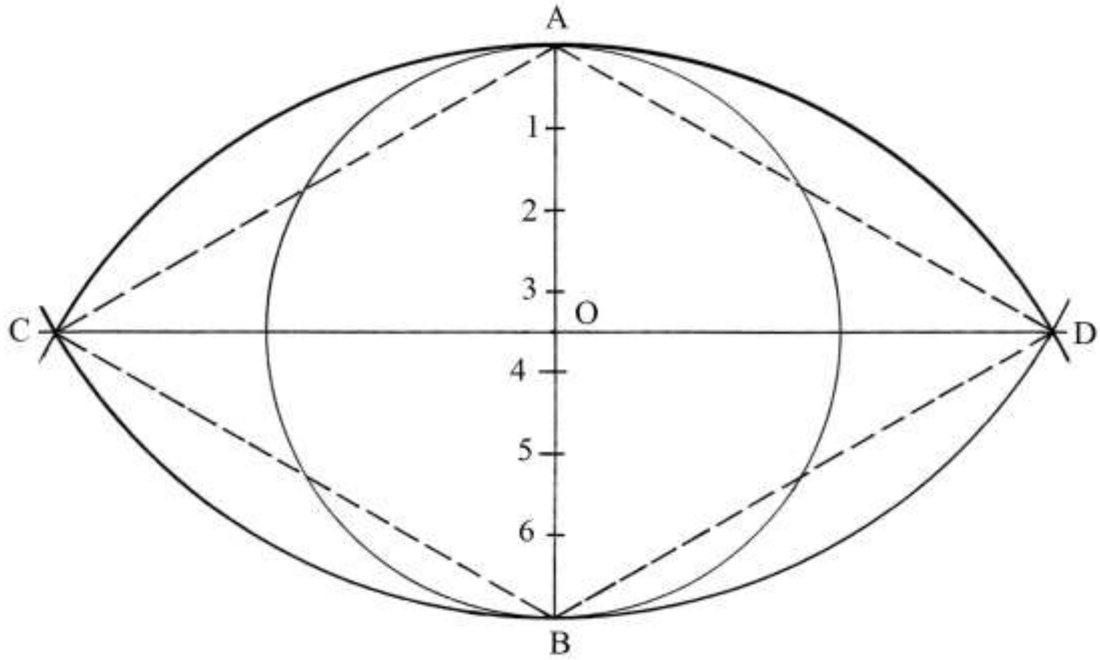
- APPROFONDIMENTO -

Le costruzioni approssimate di Carlo Renaldini

Carlo Renaldini (1615-1679) è stato un matematico e geometra italiano. A lui si deve una costruzione geometrica *approssimata* per i poligoni non ricavabili con riga non graduata e compasso ad apertura fissa: essa è descritta nel suo trattato “*Geometra promotus*” pubblicato a Padova nel 1670.

Il metodo di Renaldini è qui applicato al caso dell’ettagono, ma esso ha validità generale.

Disegnare il diametro verticale AB e dividerlo in *sette* parti uguali: 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sono i punti separatori.



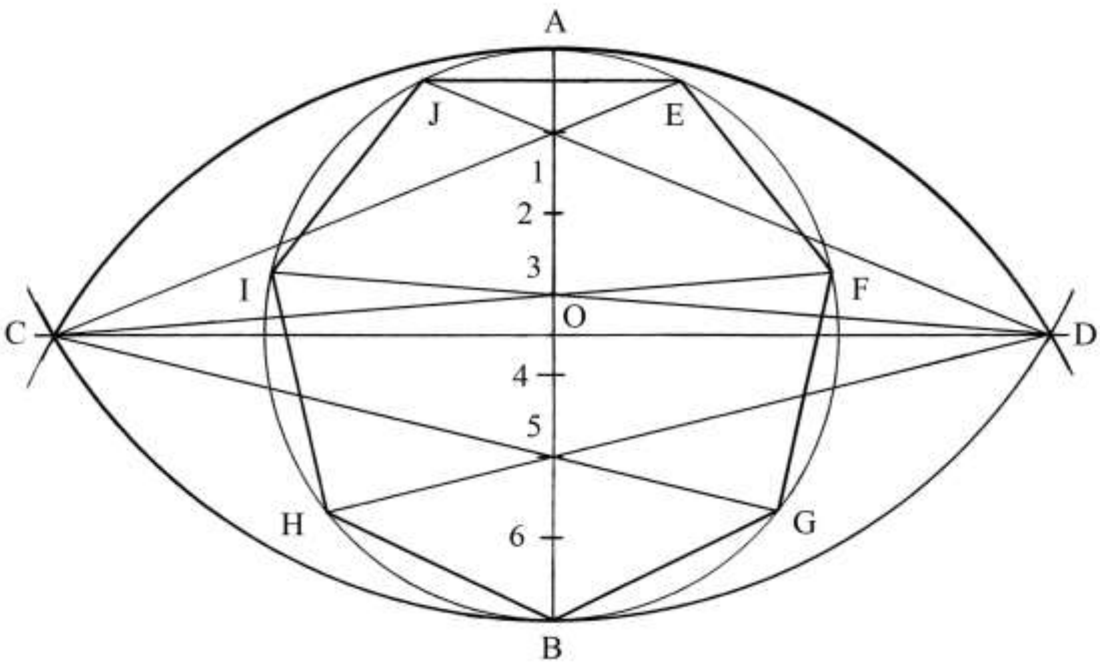
Tracciare la circonferenza con centro in O e raggio OA = OB.

Con raggio AB fare centro in A e in B e disegnare due archi che si intersecano nei punti C e D. Tracciare la retta passante per C e D e le corde CA, CB, DA e DB.

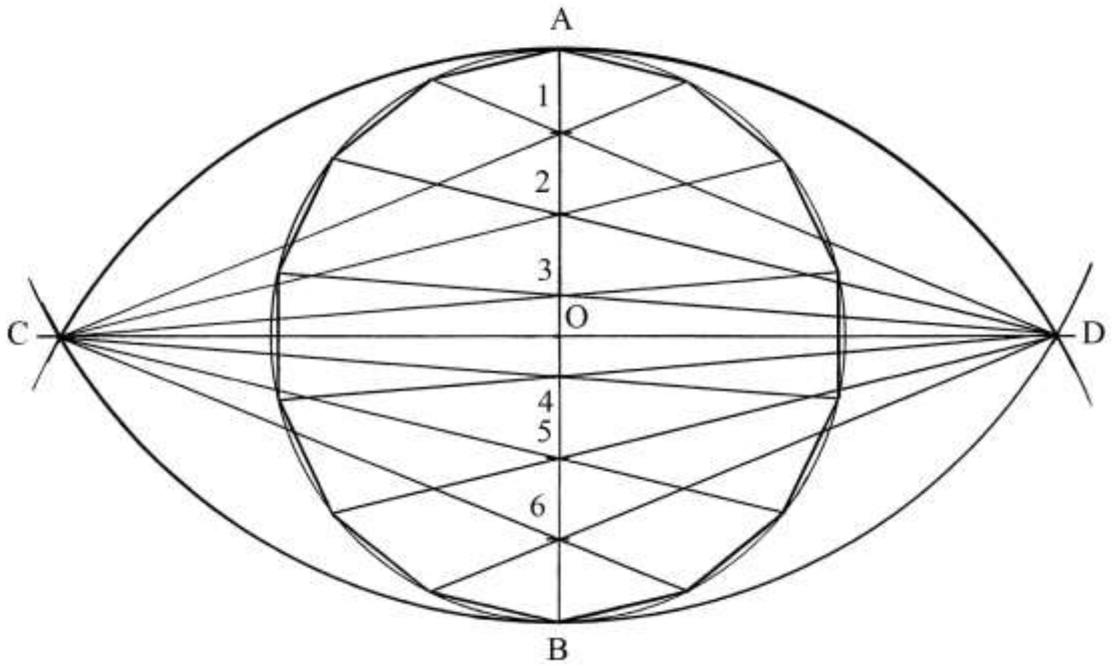
ABC e ABD sono due triangoli equilateri uniti lungo il lato verticale AB: CADB è un *rombo* che possiede la diagonale minore, AB, lunga quanto i suoi lati. La diagonale maggiore CD è lunga quanto la doppia altezza di un triangolo equilatero di lato AB:

$$CD = AB * \sqrt{3}.$$

Dai punti C e D tracciare un fascio di segmenti passanti per i punti dispari del diametro AB: 1, 3 e 5:



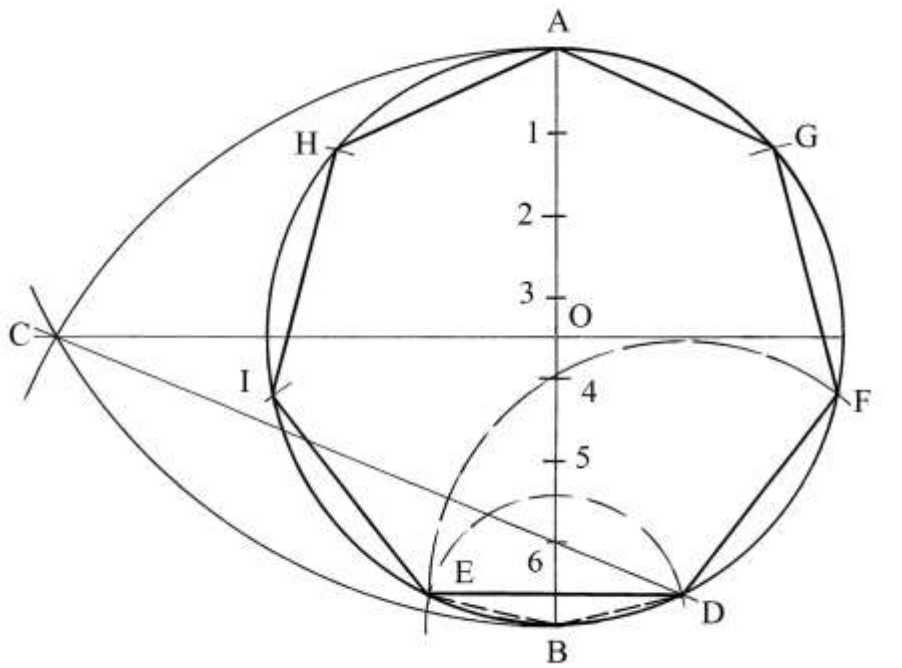
I segmenti tagliano la circonferenza di centro O nei punti E, F, G, H, I e J.
EFGBHIJ è l'ettagono regolare approssimato inscritto.
Disegnando il fascio di linee uscenti da C e da D per tutti i *sei* punti della divisione di sette parti uguali di AB sono stabiliti i vertici del *tetradecagono*, il poligono che possiede 14 lati:



Anche questa costruzione è approssimata.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La costruzione dell'ettagono inscritto che segue è una semplificazione del metodo di Renaldini.
Tracciare il diametro verticale AB e dividerlo in *sette* parti uguali, contrassegnando i punti divisori con i numeri da 1 a 6:



O è il punto medio del diametro AB. Fare centro in O e, con raggio OA, disegnare una circonferenza passante per i punti A e B.

Con raggio AB, fare centro in A e in B e tracciare due archi di circonferenza che si intersecano in un punto, C.

Condurre un segmento da C, passante per il punto 6, fino a tagliare la circonferenza in un punto, D.

La corda BD è un lato del tetradecagono approssimato inscritto.

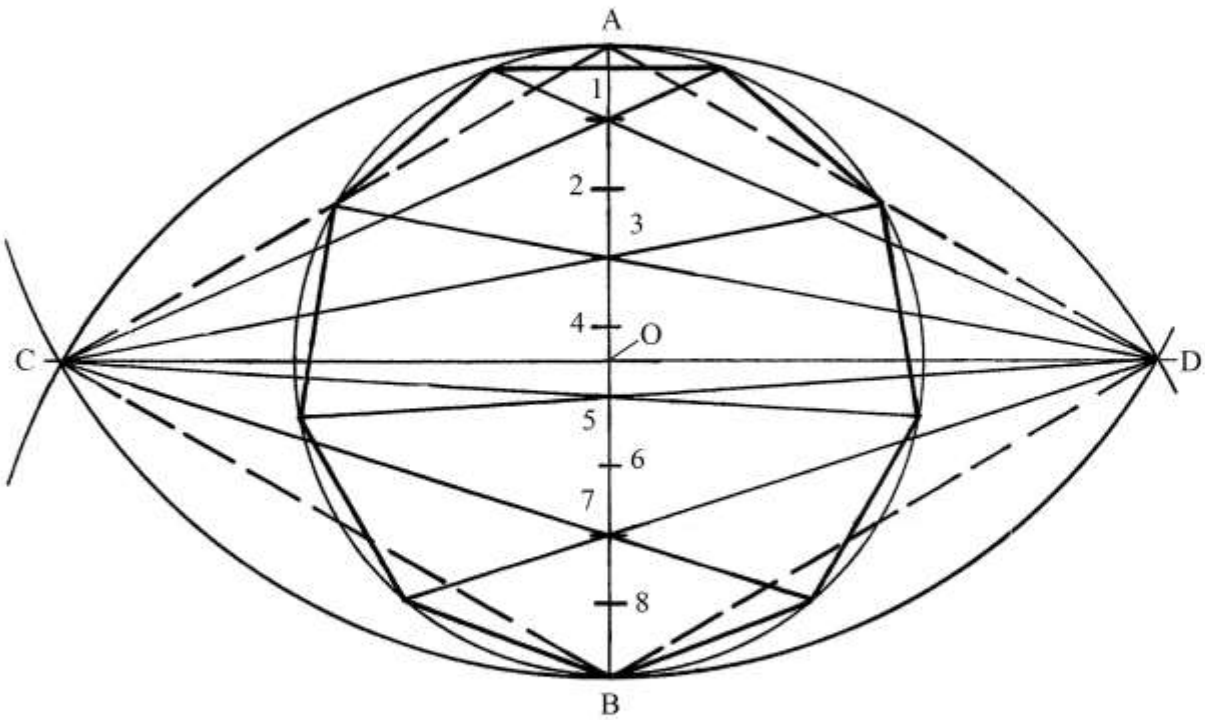
Fare centro in B e con raggio BD disegnare un arco da D fino a incontrare la circonferenza in un punto, E, che è un vertice dell'ettagono: la corda DE è un suo lato.

Riportare la lunghezza di DE sulla circonferenza.

EDFGAHI è l'ettagono approssimato inscritto: i lati GA e AH sono leggermente più corti degli altri cinque.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue presenta l'*ennagono* tracciato con il metodo di Renaldini:



Disegnare il diametro verticale AB e dividerlo in 9 parti uguali: per facilitare l'operazione è sufficiente scegliere una lunghezza multipla di 9. I punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 sono i separatori.

Tracciare la circonferenza con centro in O e raggio OA = OB.

Con raggio AB fare centro in A e in B e disegnare due archi che si intersecano nei punti C e D.

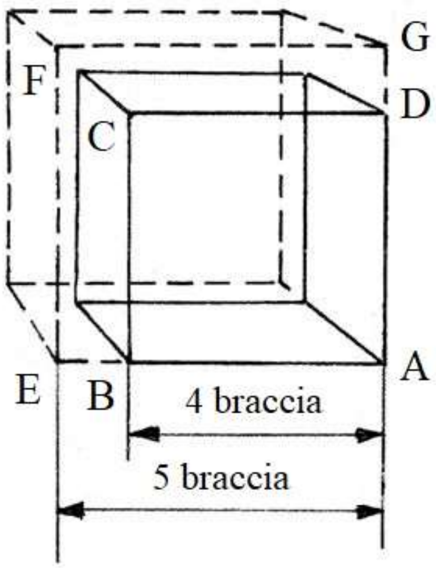
Tutte le costruzioni di Renaldini richiedono l'uso di due triangoli equilateri di lato AB, simmetrici rispetto allo stesso lato AB: in questo esempio sono CAB e ADB.

Dai punti C e D tracciare le linee passanti per i punti 1, 3, 5 e 7: esse incontrano la circonferenza nei punti che sono i vertici dell'ennagono.

- -

La duplicazione del cubo secondo Leonardo da Vinci

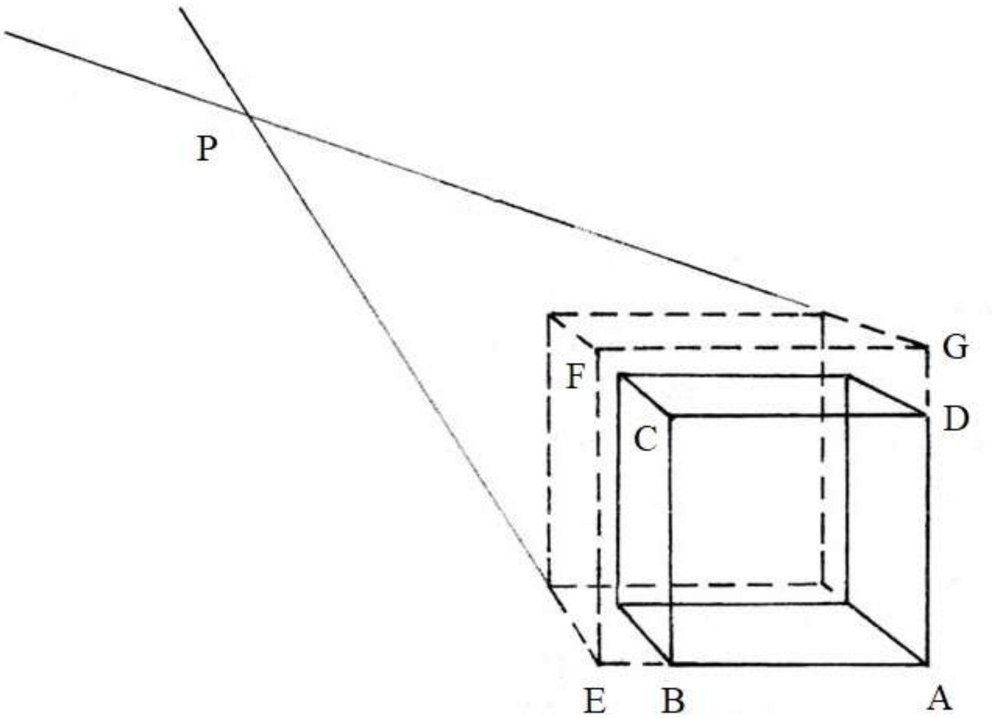
Nel foglio 161 *recto* del *Codice Atlantico*, Leonardo propose un metodo approssimato ma assai semplice per costruire un cubo di volume doppio di uno dato.



I due cubi sono disegnati con il vertice A in comune e sono costruiti in *prospettiva*.

ABCD è la faccia anteriore del cubo da duplicare e AEFG è la faccia anteriore del cubo doppio. Per distinguerli graficamente, gli spigoli del primo sono tracciati con segno continuo e quelli del cubo doppio sono tratteggiati.

Il punto di fuga degli spigoli obliqui dei due cubi è P, che nello schema è posizionato in alto a sinistra:



Lo spigolo AB è lungo 4 *braccia* (1 braccio fiorentino da panno era equivalente a 0,583626 m) e quello AE è lungo 5 *braccia*.

Il volume del cubo da duplicare è:

$V_1 = AB^3 = 4^3 = 64$

Il volume del cubo doppio di Leonardo è:

$V_2 = AE^3 = 5^3 = 125 \approx 2*V_1$

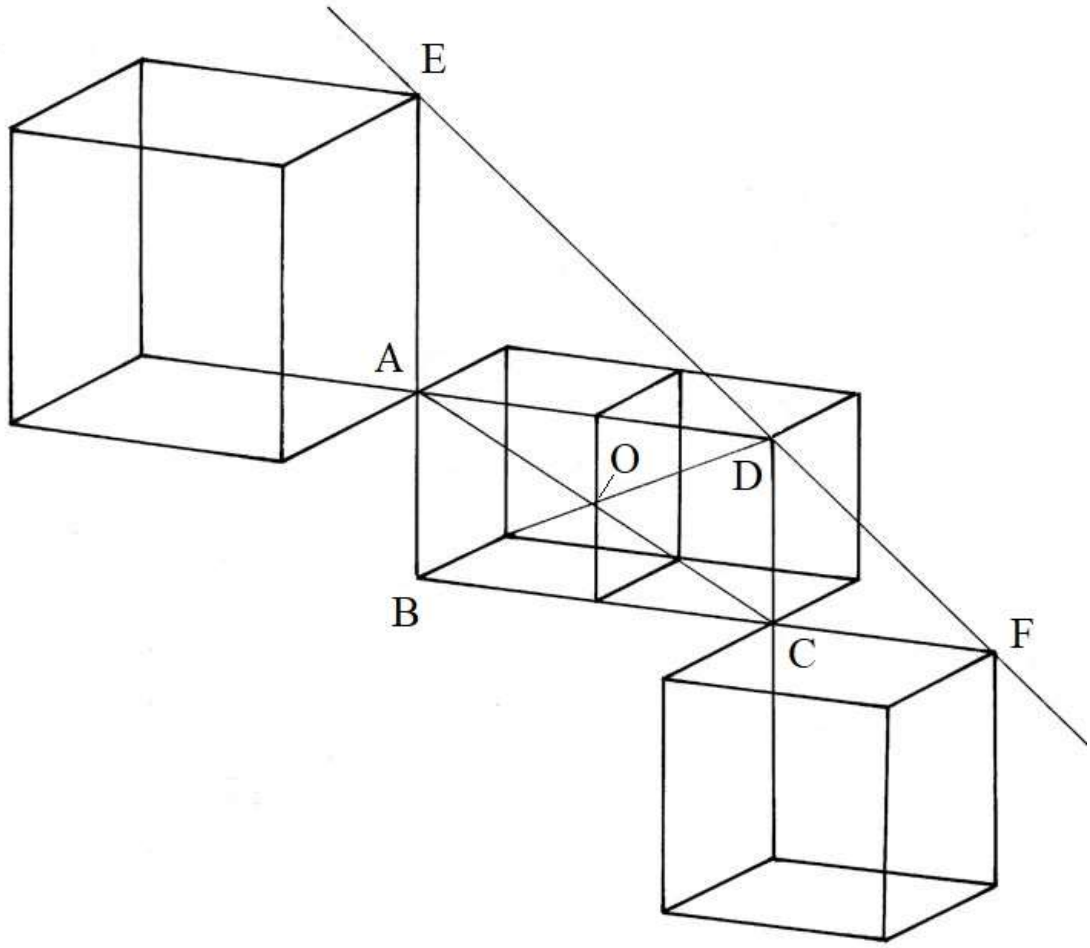
Il valore 125 non è esattamente il doppio di 64.

La radice cubica del volume doppio (128) di quello di V_1 è:

$$\sqrt[3]{2*V_1} = \sqrt[3]{2*64} = \sqrt[3]{128} \approx 5{,}039$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

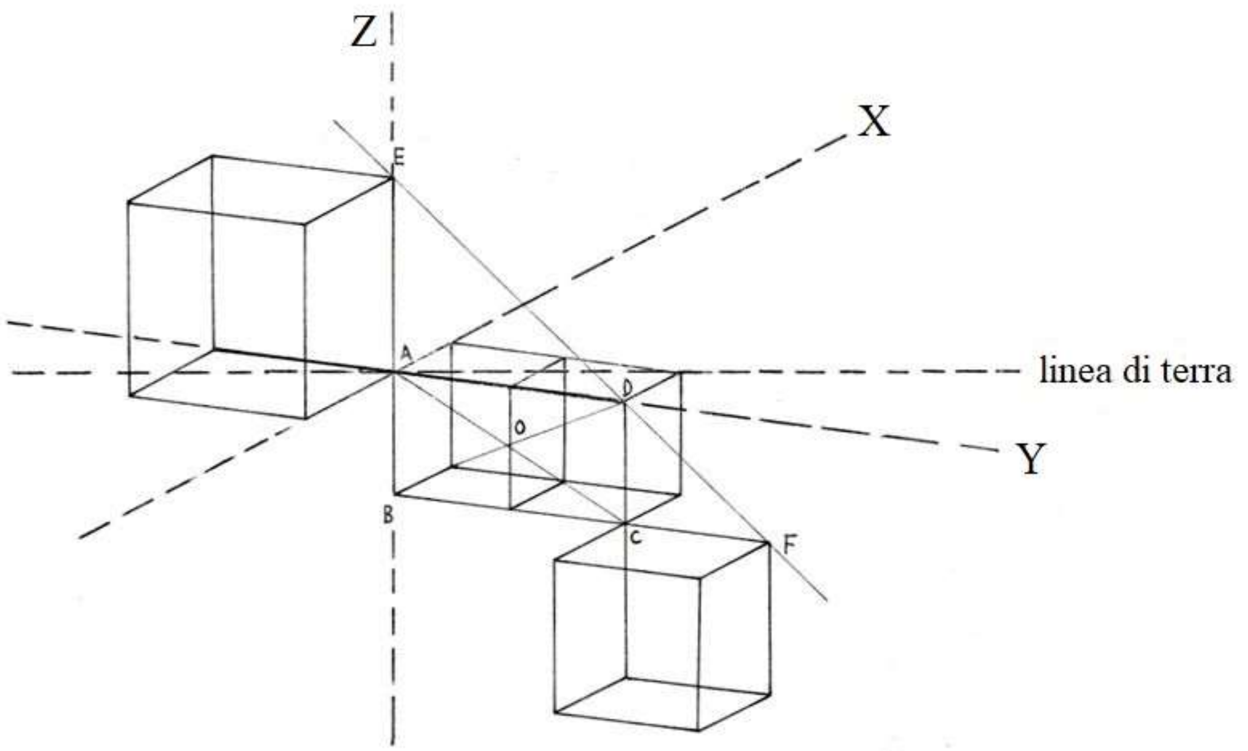
Nell'articolo citato in bibliografia, Sylvie Duvernoy ha fornito una sua interpretazione di un'altra costruzione per la duplicazione del cubo contenuta nel foglio 32 del *Codice Forster* di Leonardo da Vinci.

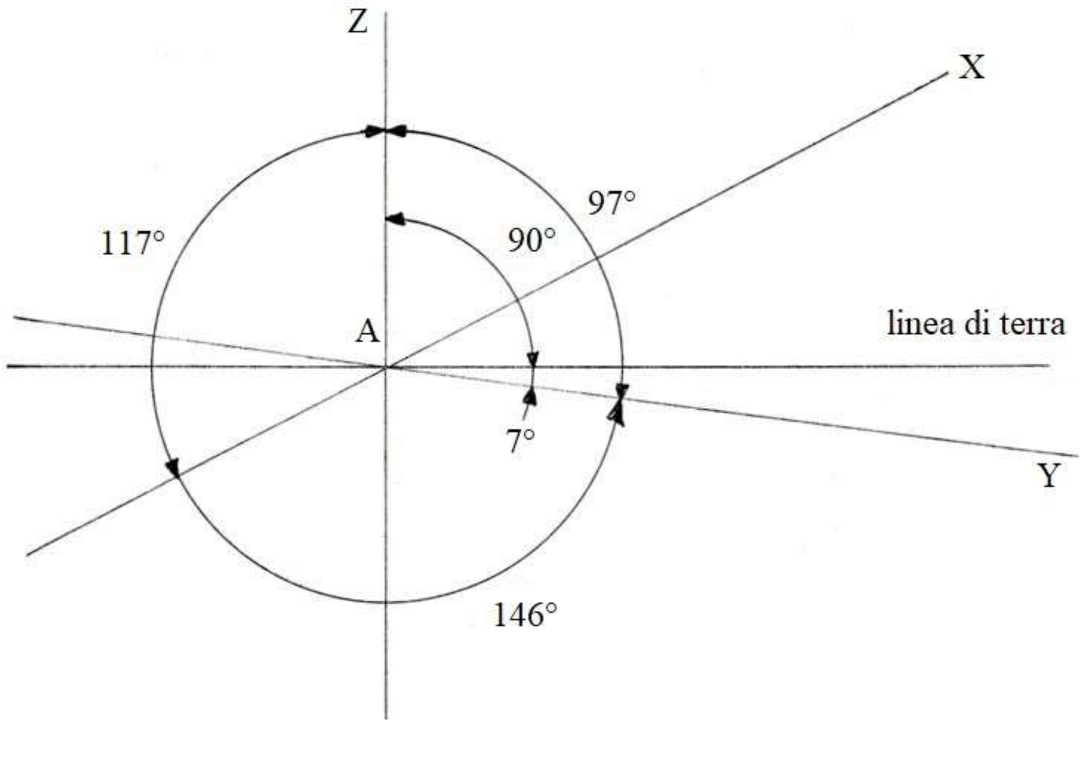


ABCD è la faccia anteriore del doppio cubo costruito sul doppio quadrato di lati AB e AD (con AD = 2*AB).

La costruzione di Leonardo è tridimensionale ed è basata su quella di Apollomio.

Il grafico di Leonardo, rielaborato dalla Duvernoy, è tracciato in *assonometria trimetrica,* come spiegano le due figure che seguono:

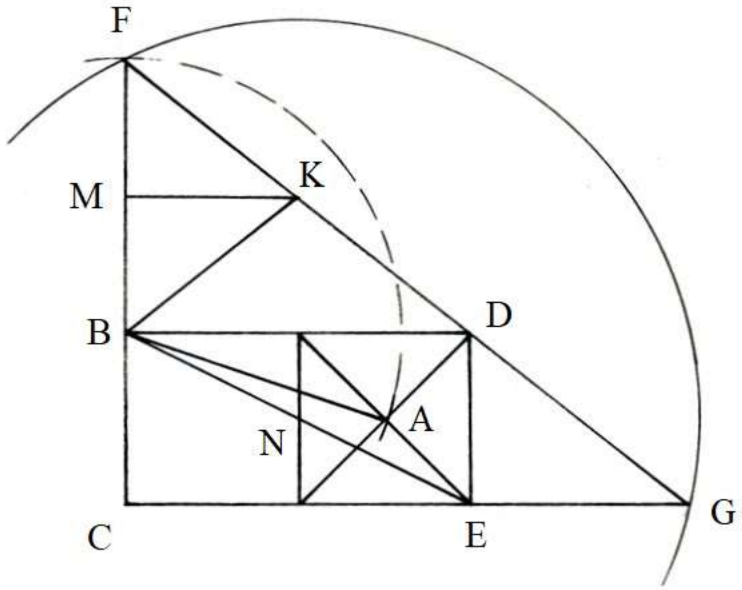

Z
X
E
A
linea di terra
D
O
Y
B
C
F


Z
X
97°
117°
90°
A
linea di terra
7°
Y
146°

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel foglio 588 *recto* del *Codice Atlantico* Leonardo utilizzò il metodo proposto dal matematico Apollonio di Perga (circa 262 – 190 a.C.) per la duplicazione del cubo, introducendovi delle modifiche e delle semplificazioni.

La descrizione che segue è una rielaborazione del grafico di Leonardo.



CBDE è un rettangolo formato da un *doppio quadrato*: CE = 2 * CB.

Ciascuno dei due quadrati è la faccia del cubo da duplicare.

Disegnare le diagonali del quadrato di destra, che si incontrano nel punto A.

Tracciare la diagonale BE: essa fissa il punto medio N.

Prolungare CB verso l'alto e CE verso destra.

La costruzione serve a determinare due valori intermedi fra le lunghezze di BC e di CE:

$$CE : x = x : y = y : BC$$

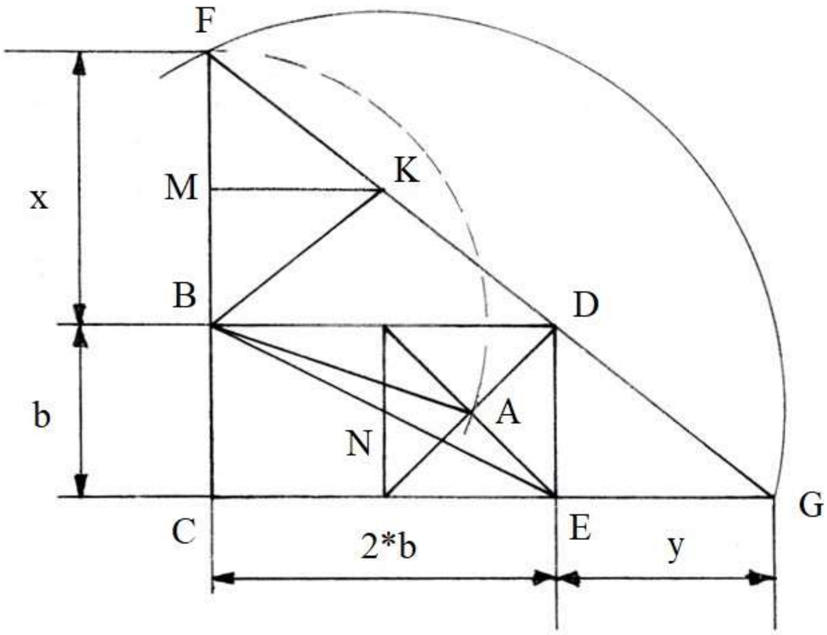
Leonardo usò riga e compasso per determinare i punti significativi per la duplicazione. Egli scoprì un'importante proprietà geometrica: la distanza del vertice B dal centro A del quadrato di destra è la lunghezza dell'incognita x.

Fare centro nel punto B e con raggio BA tracciare un arco da A fino a tagliare il prolungamento di CB in un punto, F.

Per i punti F e D disegnare una linea che incontra il prolungamento di CE nel punto G.

Fare centro in N e con raggio NF = NG tracciare un arco di circonferenza.

Lo schema che segue riassume i dati relativi alle lunghezze:



Vale la seguente proporzione:

CE : BF = BF : EG = EG : BC

Se la lunghezza *convenzionale* di BC è 1, la proporzione diviene:

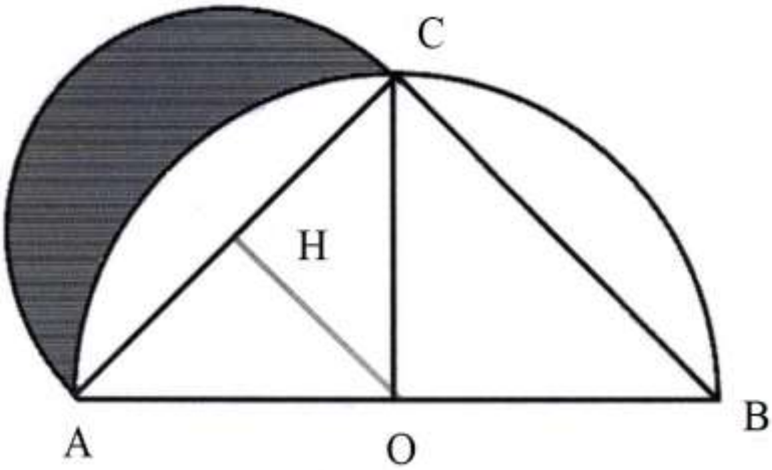
2 : BF = BF : EG = EG : 1

LE LUNULE

Il matematico greco Ippocrate di Chio (vissuto nel V secolo a.C.) studiò la geometria del cerchio. Scrisse un trattato di geometria – *Elementi* – che è andato perduto. Fu un precursore di Euclide.

Le ricerche di Ippocrate di Chio sulla (im)possibile quadratura del cerchio lo portarono allo studio di un gruppo particolare di figure piane, le *lunule*, così chiamate perché la loro forma si avvicina a quella delle fasi lunari.

Il triangolo ACB nella figura che segue è rettangolo e isoscele:

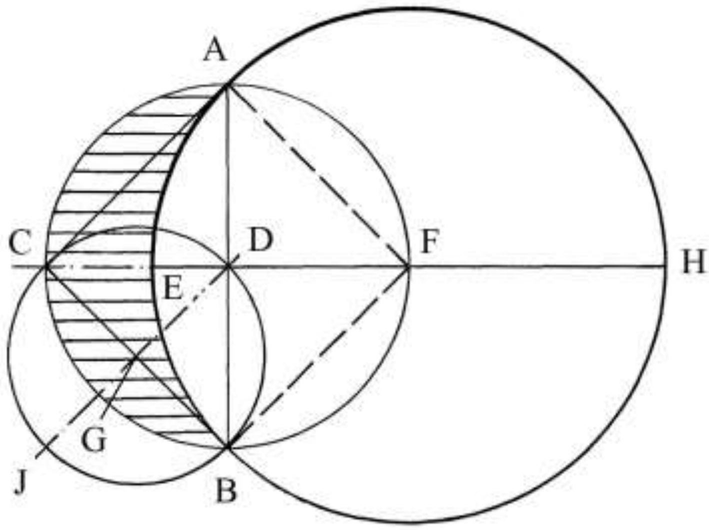


Esso è inscritto nella semicirconferenza ACB.

Il punto medio del cateto AC è il punto H. Con centro in H e raggio AH è tracciata una semicirconferenza che per estremi ha i punti A e C. La superficie *tratteggiata* è una *lunula*, una figura piana racchiusa fra due archi di circonferenza di raggi differenti. Il raggio AH vale $(\sqrt{2})/2$ volte il raggio AO.

Ippocrate di Chio dimostrò che la superficie della lunula è uguale a quella del triangolo rettangolo ACO.

Leon Battista Alberti (1404 – 1472) scrisse un breve saggio – *De lunularum quadratura* – in cui studiò la figura e ne spiegò la costruzione con il metodo che segue:



Tracciare una retta orizzontale e fissarvi un punto, D, per il quale condurre la perpendicolare. Facendo centro in D con raggio DA disegnare una circonferenza che determina i punti B, C e F.

Tracciare le corde AC e BC: esse sono due lati del quadrato inscritto ACBF.

Dal centro D condurre la perpendicolare alla corda BC che incontra nel suo punto medio G: fare centro in G e con raggio GB=GC=GD disegnare una seconda circonferenza passante per i punti B, C e D.

Fare centro in F e con raggio FA=FB tracciare una terza circonferenza che taglia la retta orizzontale nel punto E.

La superficie curvilinea AEBC è una lunula: essa ha area uguale a quella del triangolo rettangolo isoscele ABC.

Fra il raggio FA e il raggio DF vi è un'esatta proporzione:

$FA = \sqrt{2} * DF$.

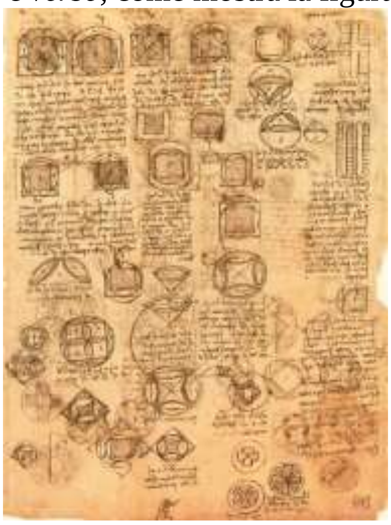
Le aree dei cerchi di raggio FA e DF sono in proporzione:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO FA}} = 2 * \text{Area}_{\text{CERCHIO DF}}$.

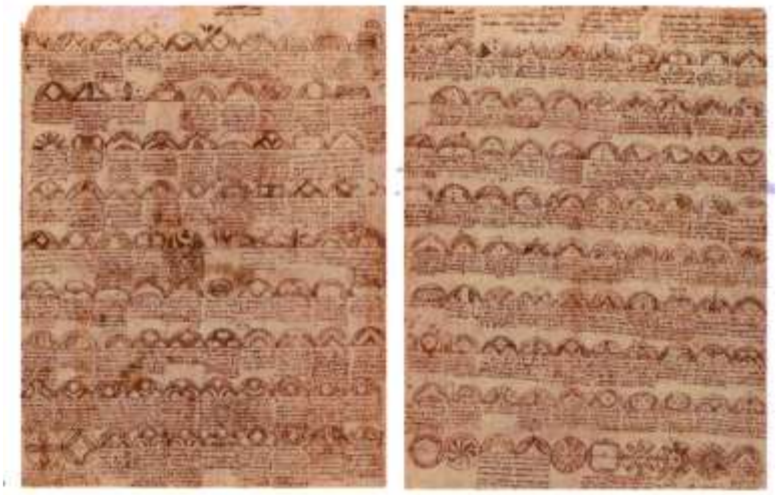
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Leonardo da Vinci approfondì l'argomento e nel *Codice Atlantico* sono contenute alcune tavole con i suoi studi:

- il foglio 264 *recto* e *verso*, come mostra la figura che segue ricavata dal foglio 264 *recto*:



- i fogli 307 *recto* e *verso* e 308 *recto* e *verso* contengono disegni con lunule;
- il foglio 455 che al *recto* contiene 180 figure di lunule:



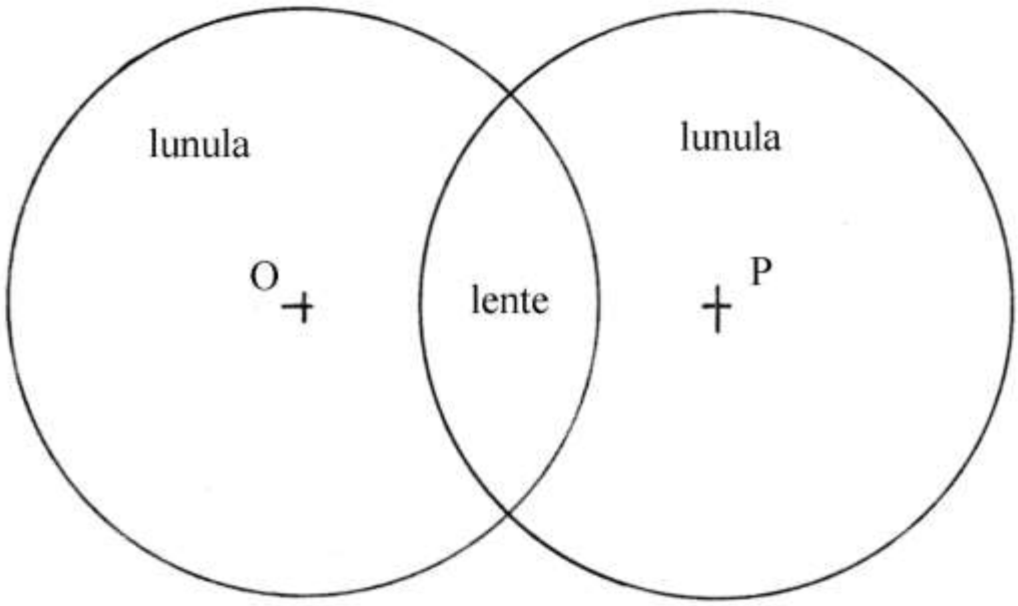
Questa ultima pagina è veramente notevole.

La lunula è anche chiamata *arbelo,* parola di origine greca che indica il *trincetto da calzolaio,* un coltello che ha il profilo simile a una serie di lunule.

- APPROFONDIMENTO -

Lunule e lente

Due cerchi con centri nei punti O e P si intersecano e creano due *lunule*:



La regione comune ai due cerchi ha una forma che giustifica il nome che le è stato attribuito: è una *lente*.

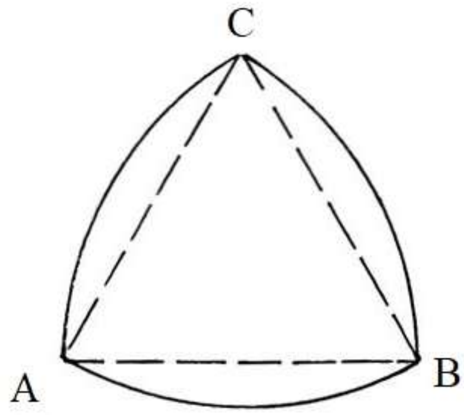
Invece le due lunule appartengono ciascuna ad un unico cerchio.

- -

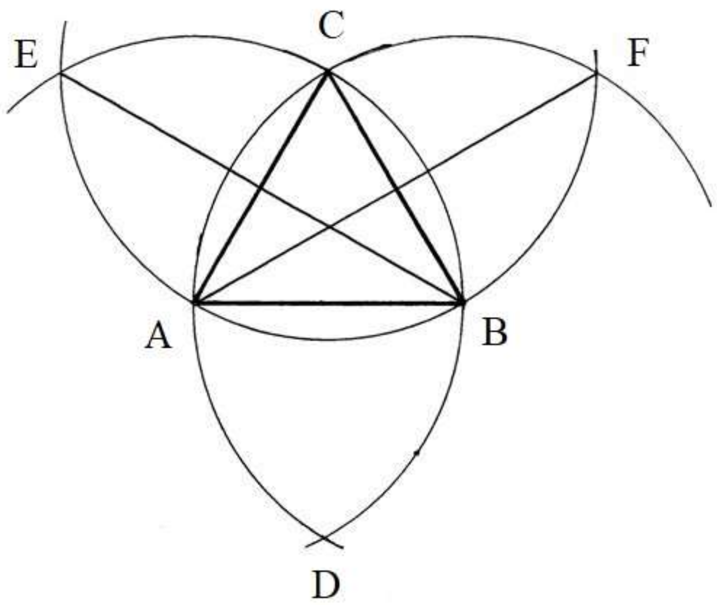
- APPENDICE 1- -

IL TRIANGOLO DI REULEAUX

È probabile che la prima apparizione di questo triangolo sia nel foglio 15 *verso* del Codice A di Parigi, di Leonardo da Vinci:



La figura che segue ne mostra l'origine geometrica secondo Leonardo (che la definisce con l'espressione "*per trovare il mezzo del triangolo equilatero*"):

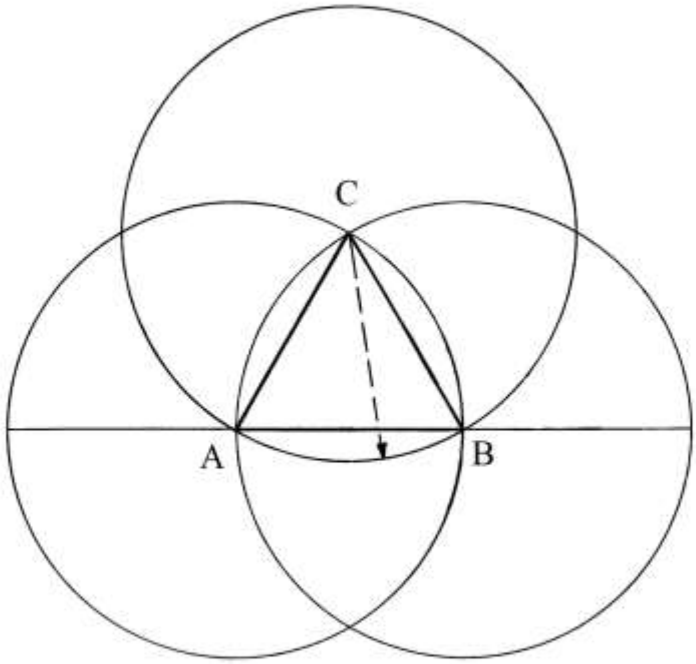


Tracciare il segmento orizzontale AB: è il primo lato del triangolo equilatero ACB.

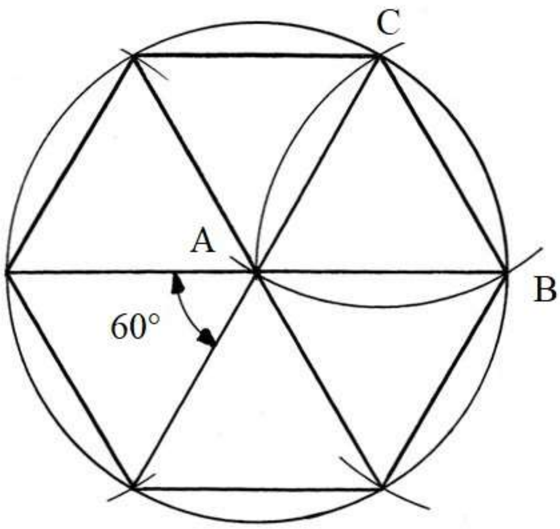
Fare centro nei tre vertici e con apertura uguale a AB disegnare tre archi di circonferenza che passano per i tre vertici del triangolo e si intersecano nei punti D, E e F.

Tracciare due altezze e prolungarle: sono BE e AF.

Il triangolo equilatero può essere costruito con il metodo, più completo, descritto nella figura che segue:



Il triangolo equilatero può essere generato anche dalla costruzione dell'esagono inscritto:



ACB è uno dei sei triangoli equilateri nei quali è scomposto l'esagono regolare inscritto.

Ciascuno dei tre archi dai quali è delimitato il triangolo ACB è lungo *un sesto* dell'intera circonferenza, per cui il perimetro *p* di questa figura è:

$p = 3 * 1/6 *$ circonferenza $= ½ *$ circonferenza $= ½ * 2 * \pi * r = \pi * r$, dove *r* è il raggio AB.

L'area del *settore circolare* CAB è uguale a *un sesto* di quella del cerchio:

Area settore CAB $= 1/6 * \pi * r^2$.

L'area del triangolo equilatero CAB è:

Area triangolo CAB = $(\sqrt{3})/4 * r^2$.

L'area del *segmento circolare* delimitato dall'arco CB e dalla corda CB è data dalla differenza fra l'area del settore circolare CAB e e quella del triangolo equilatero CAB:

$$\text{Area}_{\text{SEGMENTO CB}} = (\pi * r^2)/6 – (\sqrt{3})/4 * r^2 = r^2 * (2*\pi – 3*\sqrt{3})/12 \approx$$
$$\approx r^2 * (6{,}28 – 5{,}196)/12 \approx 0{,}090(33) * r^2.$$

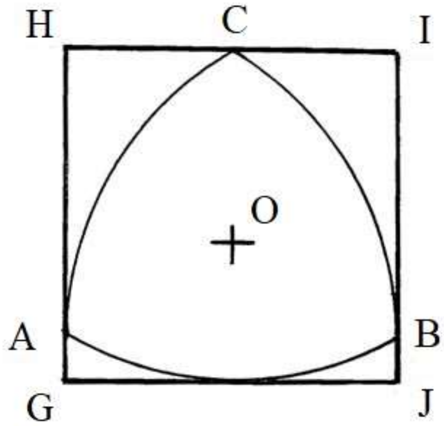
Il triangolo CAB è circondato da *tre* segmenti circolari uguali a quello CB.
L'area del triangolo convesso CAB è ottenuta dalla seguente formula:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO CONVESSO}} = \text{Area}_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} + 3 * \text{Area}_{\text{SEGMENTO CB}} =$$
$$= (\sqrt{3})/4 * r^2 + 3 * r^2 * (2*\pi – 3*\sqrt{3})/12 = r^2 * [(\sqrt{3})/4 + (2*\pi – 3*\sqrt{3})/4] =$$
$$= r2 * (\pi - \sqrt{3})/2 \approx 0{,}705 * r^2.$$

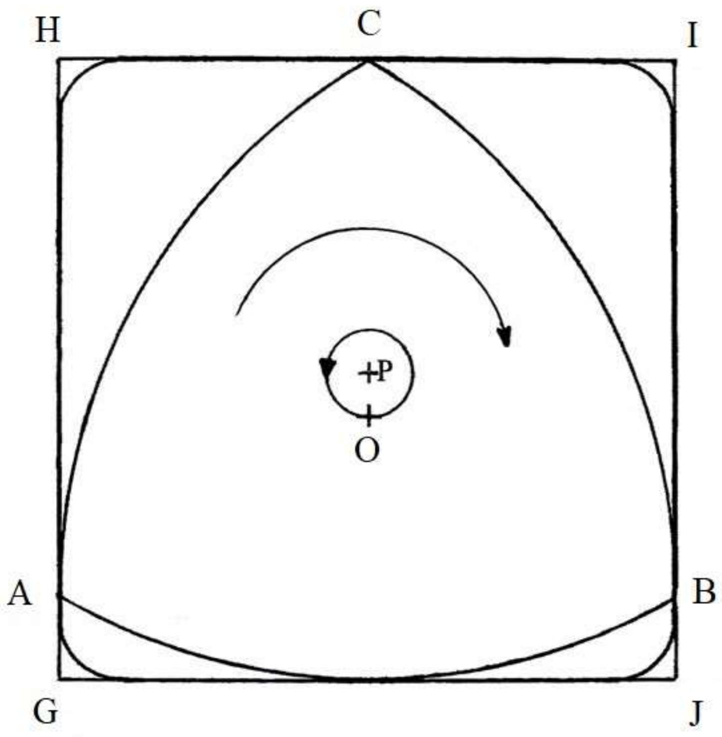
Questa figura prende il nome di *triangolo di Reuleaux* dal nome dell'ingegnere tedesco Franz Reuleaux (1829 – 1905).

Si tratta di una curva ad ampiezza costante: è una curva piana e convessa.

Un triangolo di Reuleaux può ruotare all'interno di un foro al quale attribuisce una forma *quasi* quadrata:



Il triangolo ruota intorno al suo baricentro O (che è anche il baricentro del triangolo equilatero ACB), ma questo punto ruota in *senso inverso* intorno ad un altro punto, P, collocato sull'altezza passante per O e per C:

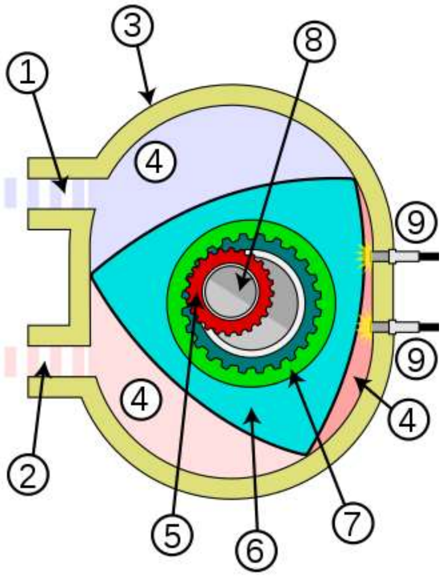


Mentre il triangolo ruota in senso orario, il punto O descrive, grosso modo, in senso antiorario una circonferenza.

Il quasi quadrato GHIJ ha internamente i lati collegati da archi di circonferenza che arrotondano il poligono. Ruotando, il triangolo di Reuleaux non “spazza” completamente il quadrato e non raggiunge l’area vicina ai suoi quattro vertici.

Una delle applicazioni del triangolo di Reuleaux è nella produzione di punte da trapano con questa forma: il foro ricavato assume una forma quasi quadrata.

Un’altra nota applicazione è nel rotore del *motore Wankel* (fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Motore_Wankel, visitato il 18 luglio 2021):

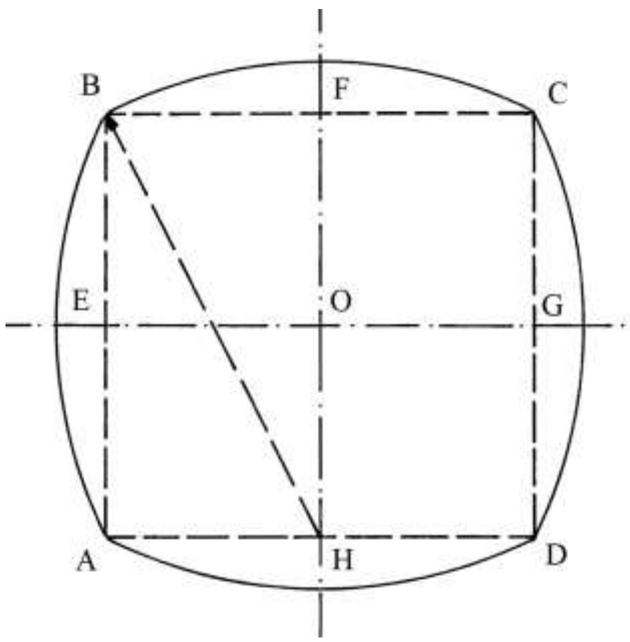


Schema del motore:
1 - Ugello di iniezione
2 - Ugello di scarico
3 - Camera esterna
4 - Camera di combustione
5 - Ingranaggio centrale
6 - Rotore
7 - Ingranaggio interno
8 - Albero motore
9 - Candele di accensione

I poligoni di Reuleaux

Il poligono convesso costruito sul triangolo equilatero non è l'unica figura piana chiusa di questa famiglia: esistono poligoni con un numero di lati, *pari* o *dispari*, maggiore di 3.

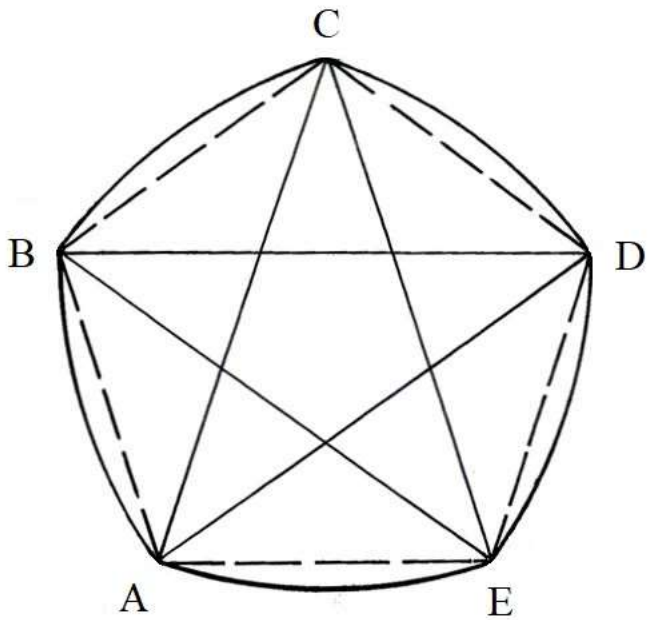
Nel caso di poligoni con numero di lati *pari*, come è il caso del quadrato, occorre determinare i punti medi dei lati:



ABCD è un quadrato e E, F, G e H sono i punti medi dei lati. Tracciare la *corda* BH: le altre *sette* corde che congiungono i vertici ai punti medi hanno la stessa lunghezza di BH.

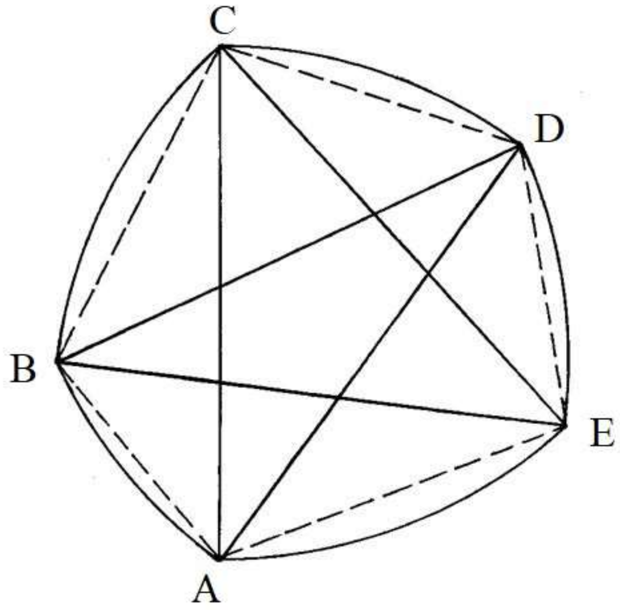
Fare centro nei punti nei quattro punti medi e con raggio BH disegnare quattro archi di circonferenza che si raccordano fra loro nei vertici A, B, C e D.

Nel caso del *pentagono* regolare occorre tracciare le cinque diagonali, che hanno uguale lunghezza:



Fare centro nei cinque vertici (A, B, C, D e E) con raggio uguale alla lunghezza di una diagonale e disegnare cinque archi di circonferenza che collegano due vertici consecutivi.

Un poligono di Reuleaux con numero di lati dispari può essere costruito anche con un poligono *non regolare*, come è il caso del pentagono non regolare della figura che segue:



Il poligono è di Reuleaux solo e soltanto se le sue diagonali hanno la stessa lunghezza, come è il caso di questo pentagono:

AC = AD = BD = BE = CE .

I cinque archi di circonferenza sono disegnati con archi di circonferenza di raggio uguale alla lunghezza delle diagonali:

AC = AD = BD = BE = CE.

- APPROFONDIMENTO -

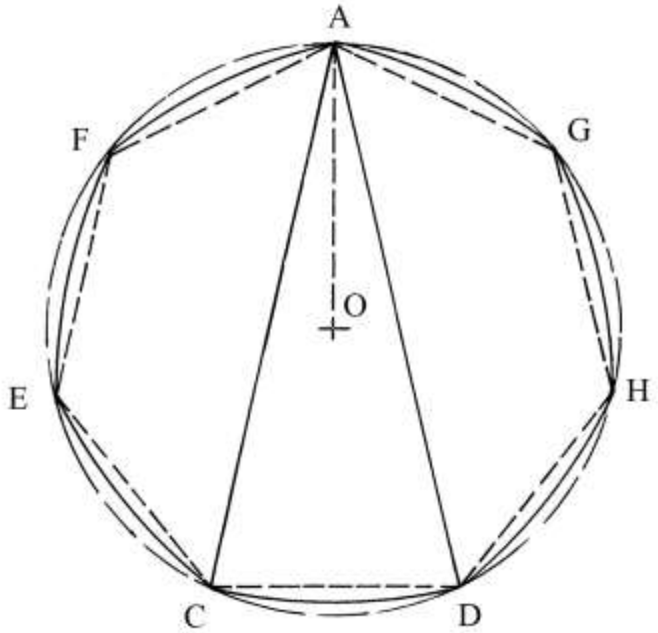
Le monete ettagonali

La Gran Bretagna ha emesso due monete metalliche da 20 e da 50 *penny* (*pence* in inglese), e cioè centesimi di sterlina.

La moneta da 50 penny è stata emessa nel 1969 e quella da 20 penny nel 1982. Entrambe sono coniate in leghe di rame e nichel. La figura che segue riproduce il *recto* e il *verso* di una moneta da 20 penny emessa nel 1983:

Le due monete hanno forma ettagonale sono due poligoni di Reuleaux, dal nome dell’ingegnere tedesco Franz Reuleaux (1829-1905).

Lo schema che segue mostra l’origine di questo poligono:

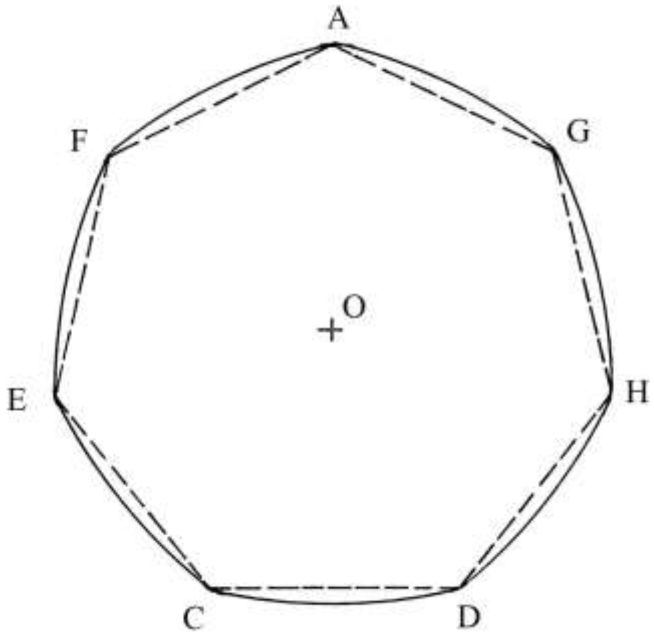


AGHDCEF è un ettagono inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA: sia il poligono che il cerchio sono disegnati *tratteggiati*.

Nel cerchio (e nell'ettagono) è disegnato il triangolo isoscele ACD: la sua base, CD, è un lato dell'ettagono. I due lati obliqui, AC e AD, sono due diagonali del poligono.

Con centro in A e raggio AC = AD tracciare un arco da C a D: con la stessa apertura fare centro negli altri sei vertici dell'ettagono e raccordare le coppie di vertici opposti con altri sei archi. Il risultato è il poligono curvilinee AGHDCEF, rappresentato con tratto continuo nella figura: esso ha una posizione intermedia fra quella del cerchio circoscritto e quella dell'ettagono inscritto ed un ettagono di Reuleaux.

Le monete inglesi da 20 e da 50 penny hanno questa forma:



Da un semplice esame di queste figure si nota che un poligono di Reuleaux ha una superficie più grande di quella del poligono regolare sul quale è costruito, ma è più ridotta rispetto alla superficie del cerchio circoscritto: si ha un risparmio di materiale rispetto alla forma circolare.

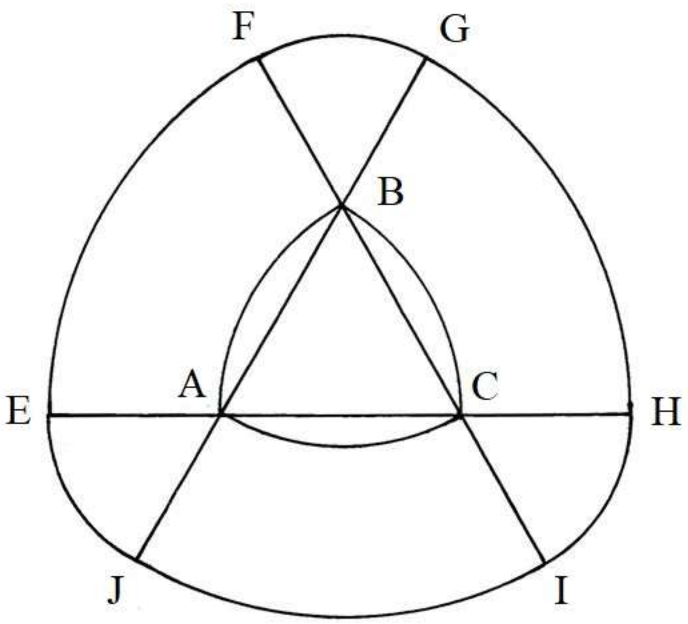
Confrontando il poligono ettagonale di Reuleaux con l'ettagono corrispondente si nota l'arrotondamento degli spigoli vivi.

Infine, e la proprietà geometrica che possiede è assai importante: i poligoni di Reuleaux hanno *ampiezza costante* e questo ne facilita l'uso nelle macchine automatiche.

- -

I poligoni dilatati

La figura che segue deriva dal triangolo di Reuleaux che è stato sottoposto a un trattamento chiamato *dilatazione parallela*:



Prolungare i lati del triangolo equilatero ABC.

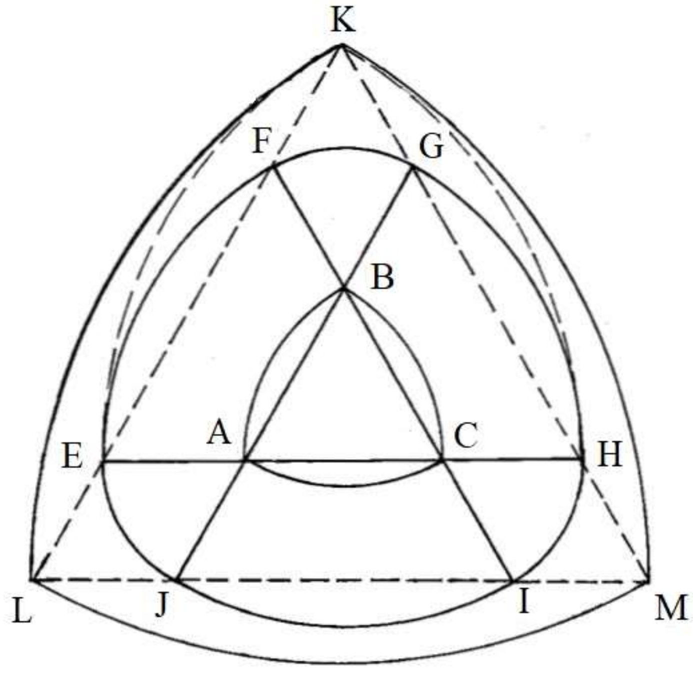
Scegliere la lunghezza del raggio degli archi paralleli a quelli che delimitano ABC.

Fissare il punto E alla distanza CE scelta.

Fare centro nei vertici A, B e C con raggio CE e tracciare gli archi EF, GH, e IJ.

Raccordare i tre archi facendo centro nei A, B e C con raggio AE e disegnare gli archi FG, HI e JE.

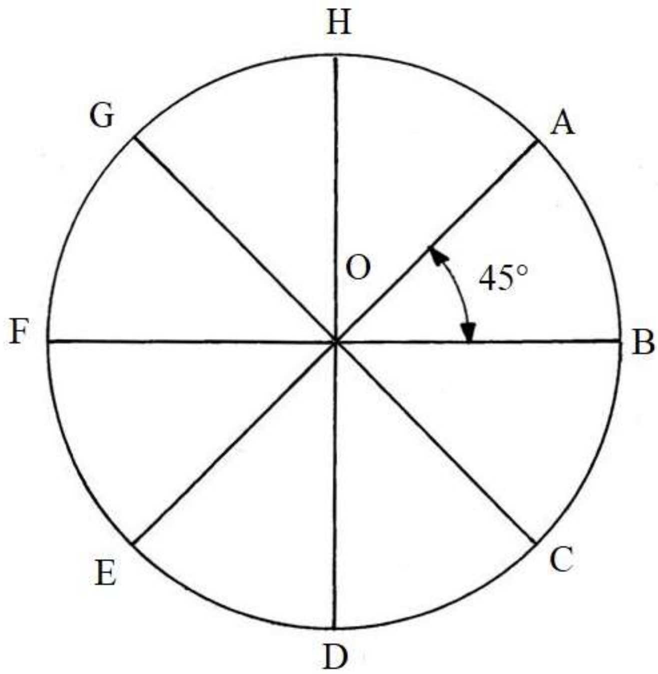
Un'ulteriore evoluzione della precedente costruzione è mostrata nella figura che segue:



I successivi triangoli di Reuleaux sono ricavati a partire dal triangolo equilatero ABC.

<u>L'ottante</u>

In geometria piana un *ottante* è l'ottava parte di un cerchio, un settore circolare che ha angolo al vertice uguale a 45°:



La proiezione ottante di Leonardo da Vinci

Il ricercatore inglese Christopher W. Tyler, della City University di Londra, ha pubblicato uno studio sulla proiezione ottante di Leonardo (citato in bibliografia).

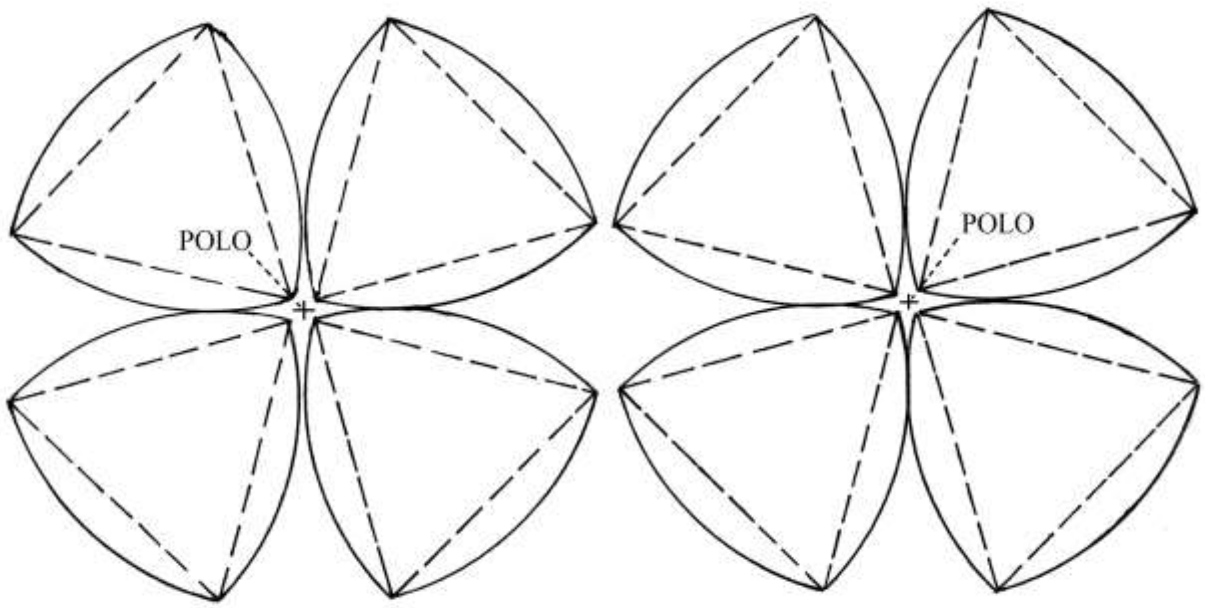
Una *proiezione ottante* è un tipo di proiezione geografica probabilmente proposta per la prima volta da Leonardo in alcuni schizzi risalenti a circa il 1508 e contenuti in alcuni Codici fra i quali sono:

* Codice Atlantico, foglio 521 *recto*;
* Codice Atlantico, foglio 923 *recto*;
* Codice A (di Parigi), foglio 15 *verso*.

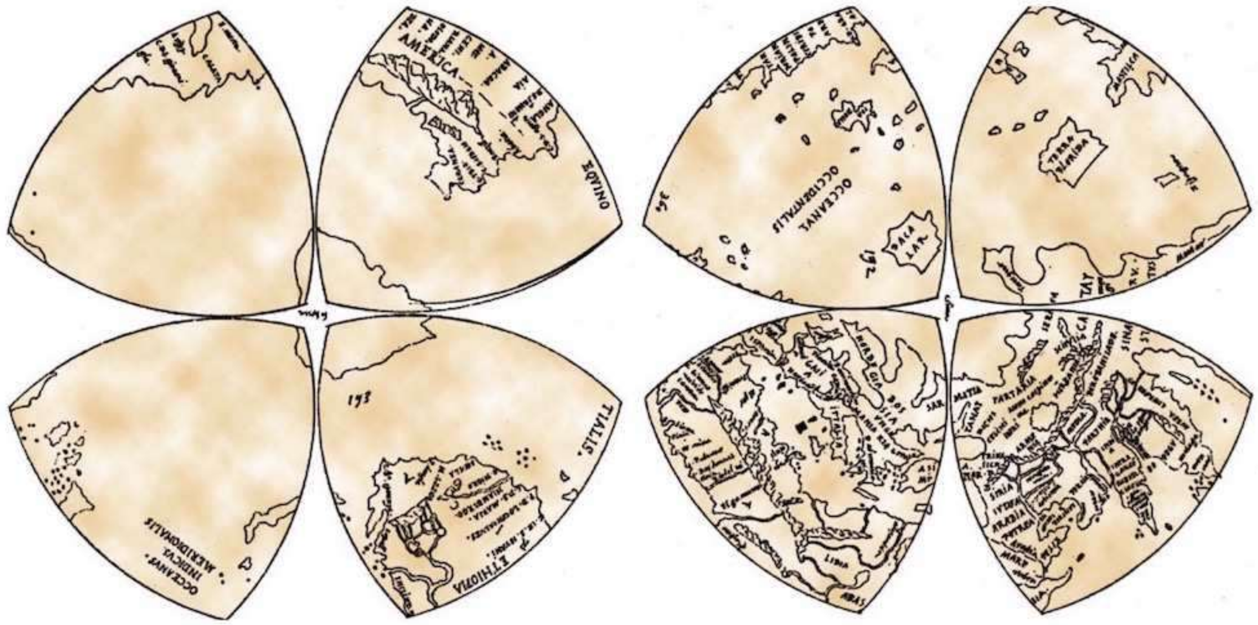
La proiezione ottante non riproduce con precisione le aree delle porzioni della superficie della Terra.

La superficie sferica è divisa in due emisferi: l'emisfero settentrionale o *boreale* e quello meridionale o *australe*.

Ciascun emisfero è diviso in quattro ottanti: sviluppando su di un piano gli ottanti dei due emisferi essi assumono la forma dei triangoli di Reuleaux (o, meglio, di Leonardo-Reuleaux):



La figura che segue è tratta dal citato articolo del Tyler:



- -

- APPENDICE 2- -

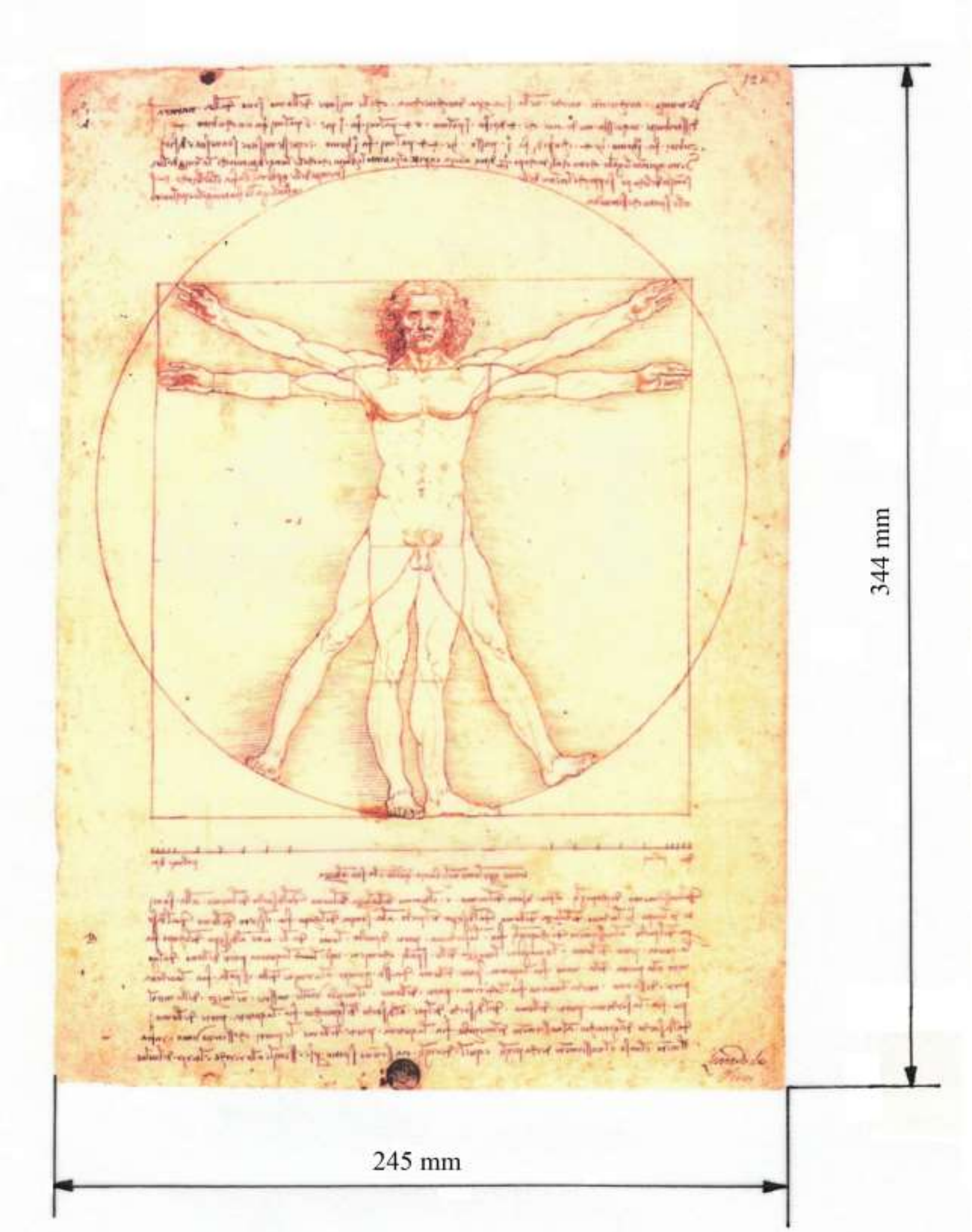
L'UOMO VITRUVIANO

L'*Uomo vitruviano* è un disegno realizzato a penna e inchiostro su carta da Leonardo da Vinci intorno al 1490.

È conservato nel *Gabinetto dei Disegni e delle Stampe* delle Gallerie dell'Accademia di Venezia.

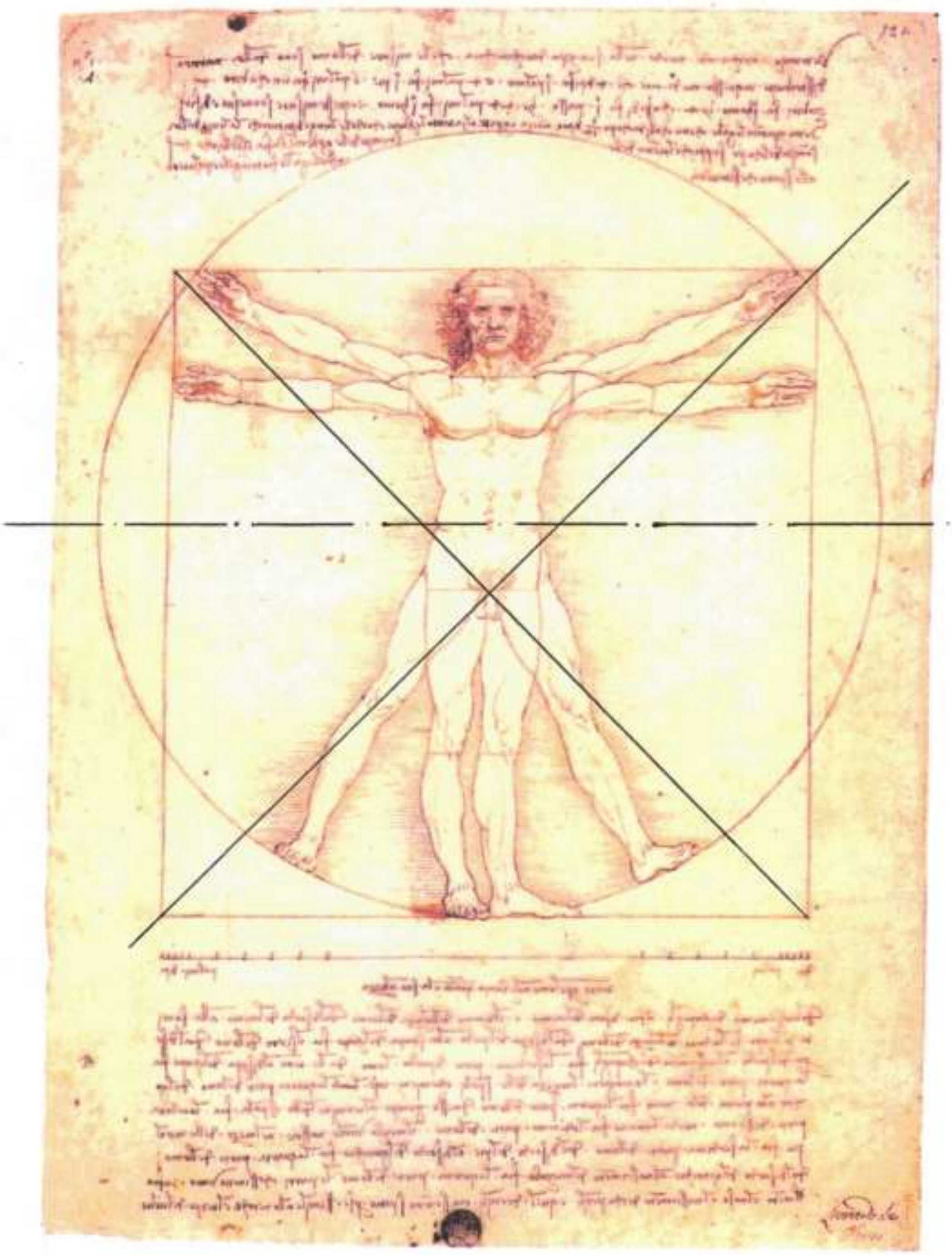
Un uomo nudo è disegnato all'interno di un cerchio e in un quadrato.

Le dimensioni del foglio sono mostrate nella figura:

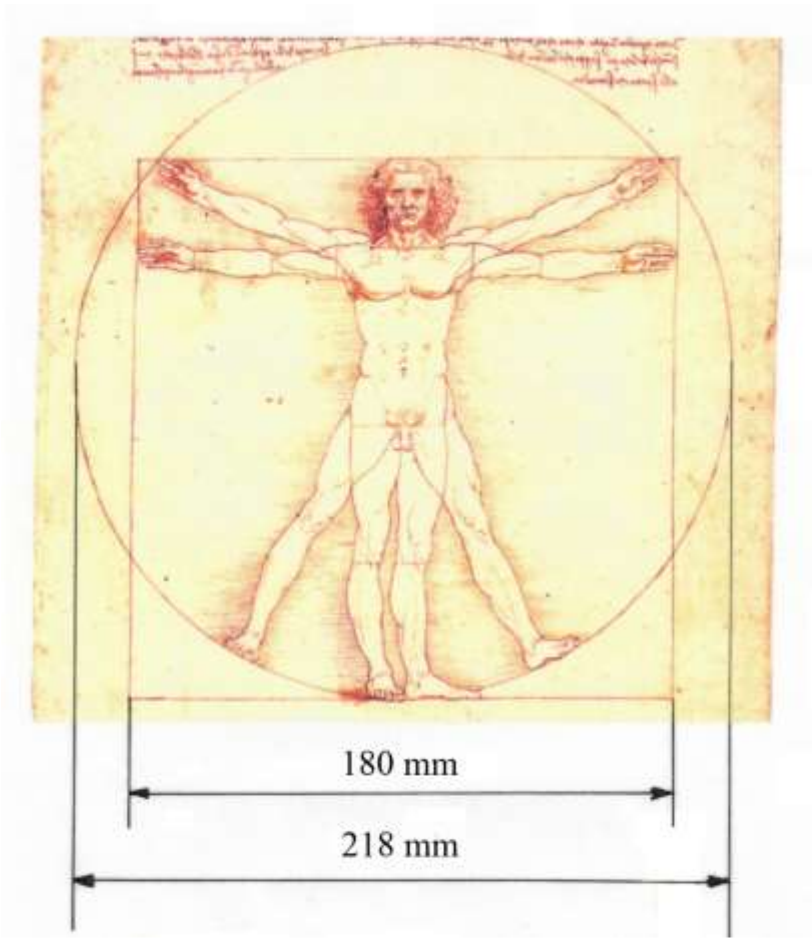


Le dimensioni sono qui espresse in millimetri e non i centimetri al solo scopo di eliminare le virgole.

L’ombelico è il centro del cerchio e il pube lo è del quadrato:



Le dimensioni della figura sono mostrate sulla figura che segue:



Il cerchio ha diametro di 218 mm e il quadrato ha lati lunghi 180 mm: il quadrato non è né inscritto né circoscritto al cerchio. Essi sono tangenti in basso, in corrispondenza dei piedi.

Leonardo spiega con due diversi testi, uno collocato sopra la figura e l’altro sotto di essa, le proporzioni del corpo umano. I due testi sono ispirati al trattato *De Architectura* di Vitruvio (80 a.C. circa – dopo il 15 a.C.).

Il testo leonardiano contenuto nella parte superiore è:

«Vetruvio, architetto, mette nella sua opera d'architectura, chelle misure dell'orno sono dalla natura disstribuite in quessto modo cioè che 4 diti fa 1 palmo, et 4 palmi fa 1 pie, 6 palmi fa un chubito, 4 cubiti fa 1 homo, he 4 chubiti fa 1passo, he 24 palmi fa 1 homo ecqueste misure son né sua edifiti. Settu apri tanto le gambe chettu chali dà chapo 1/14 di tua altez(z)a e apri e alza tanto le bracia che cholle lunge dita tu tochi la linia della somita del chapo, sappi che ‘l cientro delle strernita delle aperte membra fia il bellicho. Ello spatio chessi truova infralle gambe fia triangolo equilatero».

Il testo nella parte inferiore è:

«Tanto apre l'omo nele braccia, quanto ella sua altezza.
Dal nasscimento de chapegli al fine di sotto del mento è il decimo dell'altez(z)a del(l)'uomo. Dal di sotto del mento alla som(mi)tà del chapo he l’octavo dell'altez(z)a dell’omo. Dal di sopra del petto alla som(m)ità del chapo fia il sexto dell’omo. Dal di sopra del petto al nasscimento de chapegli fia la settima parte di tutto l’omo. Dalle tette al di sopra del chapo fia
la quarta parte dell'omo. La mag(g)iore larg(h)ez(z)a delle spalli chontiene insè la [oct] la quarta parte dell'omo. Dal gomito alla punta della mano fia la quarta parte dell’omo, da esso gomito al termine della isspalla fia la octava parte d'esso omo; tutta la mano fia la decima parte dell'omo. Il

membro virile nasscie nel mez(z)o dell'omo. Il piè fia la sectima parte dell'omo. Dal di sotto del piè al di sotto del ginochio fia la quarta parte dell'omo.
Dal di sotto del ginochio al nasscime(n)to del membro fia la quarta parte dell'omo. Le parti chessi truovano infra il mento e 'l naso e 'l nasscimento de chapegli e quel de cigli ciasscuno spatio perse essimile alloreche è 'l terzo del volto».

Leonardo cita le unità di misura romane, usate all'epoca di Vitruvio.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura romane lineari

Oltre che nel trattato di Vitruvio, in numerosi manoscritti dei testi dei Gromatici romani sono presenti dei paragrafi, più o meno simili, dedicati alla descrizione del sistema delle unità di misura romane.

La principale unità di misura lineare era il *piede romano*, lungo 29,57 cm (o 295,7 mm), secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma. Non sempre è stata rispettata questa misura standard.

Una curiosità: la dimensione maggiore del foglio di formato A4 è 29,7 cm (297 mm). La misura è *quasi* uguale a quella della lunghezza del piede romano.

Le lunghezze multiple del piede erano rilevate con misurazioni effettuate con l'impiego della *pertica*, un'asta che poteva assumere due diverse lunghezze:

- 10 piedi (= 295,7 cm) e la pertica era detta *decempeda*,
- 12 piedi (= 354,84 cm).

Il gruppo delle prime unità di misura lineari (*dito*, *oncia*, *palmo*, *piede* e *cubito*) è di derivazione *anatomica* perché esse sono state ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé stesse di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

La tabella che segue presenta i *sottomultipli* del piede, sulla base della relazione 1 piede = 29,57 cm:

Nome	Rapporti con il piede	Lunghezze in cm
dito (digitus)	1/16	1,848
oncia (uncia)	1/12	2,464
palmo (palmus)	1/4	7,39
sestante (sextans o dodrans)	3/4	22,1775

Nella tabella che segue sono riportate le unità di misura lineari *multiple* del piede:

Nome	Rapporti con il piede	Lunghezze in cm (o in metri, dove indicato)
palmipes (piede + palmo)	1 1/4	36,96
cubito	1 ½	44,355
passo semplice (gradus) o grado	2 ½	73,925
passo doppio (passus)	5	147,85
pertica (decempeda)	10	295,70
pertica 12 piedi	12	354,84
actus (atto)	120	35,484 metri
lato maggiore iugero	240	70,968 metri
stadio (stadium) = 125 passi doppi	625	184,81 metri
centuria	2 400	709,68 metri
miglio (miliarius)	5 000 (= 1 000 passi doppi)	1478,5 metri
lega (leuga)	7 500	2217,75 metri
lato saltus	12 000	3548,4 metri
lato ager	60 000 (= 12 miglia)	17 742 metri

Il gruppo delle prime unità di misura (dito, oncia, palmo, piede e cubito) è di derivazione *anatomica* perché esse sono ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

Anche altre antiche civiltà usarono unità di misura di derivazione anatomica: i Sumeri e i Babilonesi e gli Egizi.

Un *secondo* gruppo di unità di misura lineari (grado o passo, passo doppio, miglio) erano legate agli spostamenti dell'uomo; sono unità di natura *dinamica* perché misurano lunghezze percorribili: un *passo semplice* è coperto dal movimento di una sola gamba e il *passo doppio* è rappresentato dal moto successivo e coordinate delle due gambe di un uomo.

Un terzo gruppo di unità di misura lineari riguardava l'agricoltura. La base era l'*actus* (atto), equivalente alla lunghezza di 120 piedi. Secondo Plinio, l'atto "… è la distanza che in un solo normale slancio riescono a coprire i buoi con l'aratro …".

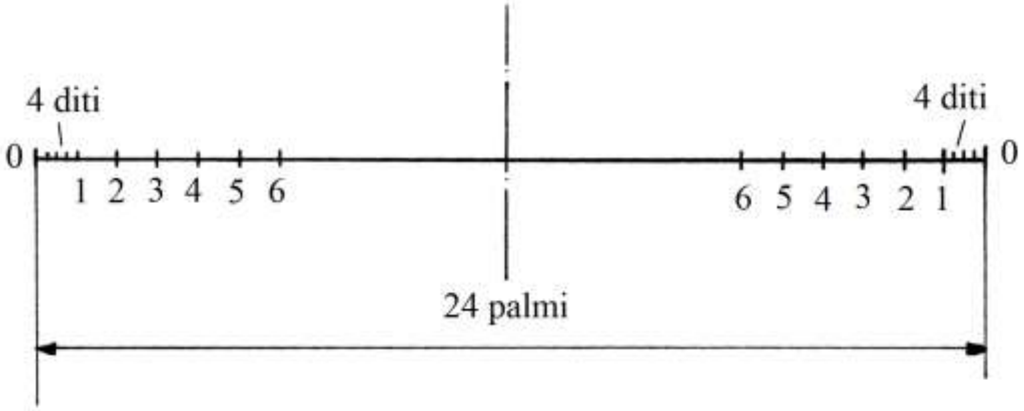
In sintesi, i Romani usavano *dodici* unità di misura della lunghezza che in ordine crescente sono le seguenti:

1. Il *dito*;
2. L'oncia;
3. Il *palmo*;
4. Il *sestante*;
5. Il PIEDE;
6. Il *cubito*;
7. Il *grado*;
8. Il *passo doppio*;
9. La *pertica decempeda*;
10. L'atto;
11. Lo *stadio*;
12. Il *miglio*.

Tutte queste unità erano sottomultipli (dalla 1.a alla 4.a) o multipli (dalla 6.a alla 12.esima) del *piede*.

- -

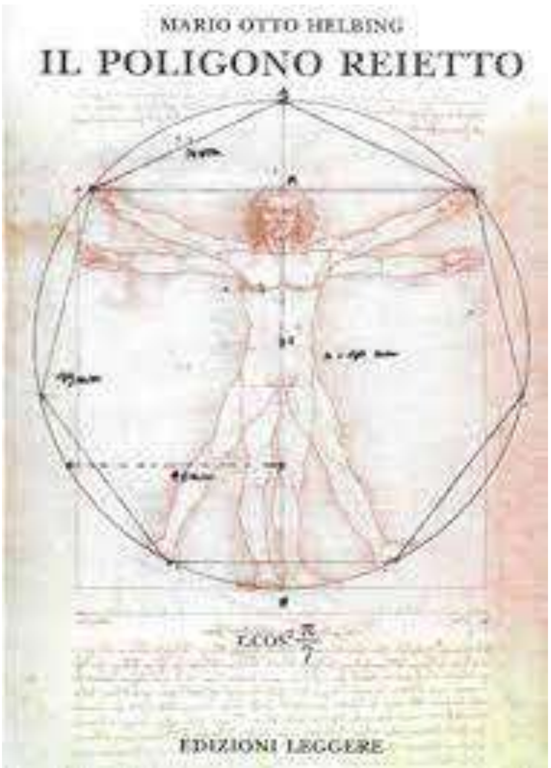
Immediatamente sotto al disegno, Leonardo ha tracciato una scala di proporzione simmetrica rispetto all'asse verticale:



La lunghezza della scala è uguale a quella dei lati del quadrato: 24 palmi. A sinistra e a destra, il primo palmo è diviso in 4 diti.

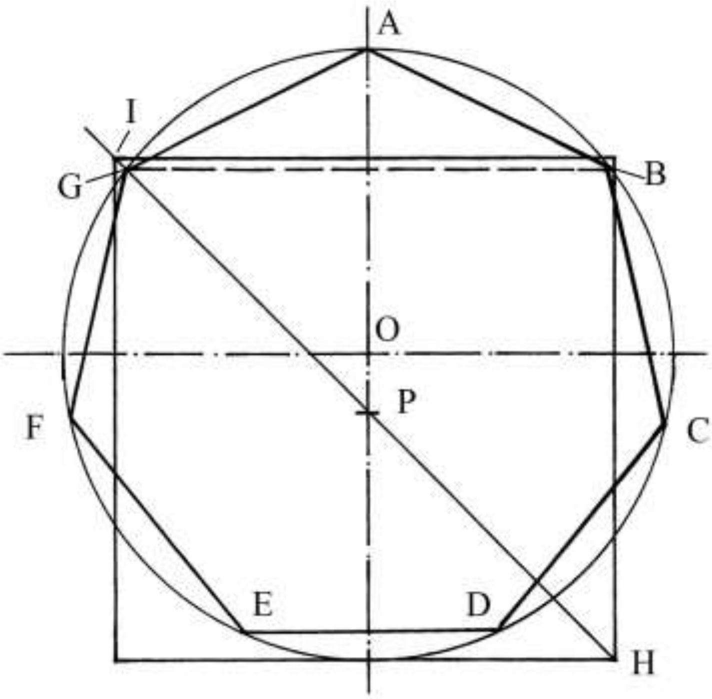
<u>L'ipotesi di Helbing</u>

Il ricercatore svizzero Mario Otto Helbing (1944-) ha pubblicato nel 2005 un piccolo libro – "*Il poligono reietto*" – nel quale descrive le proprietà dell'*ettagono*, il poligono reietto e fornisce un'ampia analisi storica sui tentativi di costruirne uno regolare.



Fra le proposte che Helbing avanza vi è l'ipotesi che Leonardo abbia costruito la figura dell'*Uomo vitruviano* basandosi su di un ettagono inscritto nel cerchio.

L'ettagono inscritto è mostrato nello schema che segue:



O corrisponde all'ombelico ed è il centro del cerchio e P è il pube, centro del quadrato.

IH è una diagonale del quadrato.

ABCDEFG è l'ettagono inscritto nel cerchio di centro O: il vertice A è posizionato sull'asse di simmetria verticale, nel punto più alto del cerchio.

GB è una diagonale dell'ettagono che si trova contenuta nel quadrato.

Bibliografia

1. Alberti Leon Battista, “De lunarum quadratura”.
2. Piero della Francesca, “Trattato d’abaco”, 3 voll., (Stampa anastatica del codice Ashburnham 359* della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze), volume I (testo e note) pp. LXXI-250 e vol. II (Disegni) pp. XXIII-189, Roma, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, 2012.
   [Nel volume II, “Disegni”, è un’ampia *Introduzione* all’analisi dei disegni a cura di Vladimiro Valerio, con la collaborazione di Alessandra Sorci].
3. “De Ludo geometrico”. La matematica e la geometria di Leonardo. Disegni di Leonardo dal Codice Atlantico, a cura di Furio Rinaldi, De Agostini, Novara, 2015, pp. 53.
4. Di Teodoro Francesco P.(aolo), “Per una filologia del disegno geometrico”, in “Piero della Francesca tra arte e scienza”, a cura di Marisa Dalai Emiliani e Valter Curzi, Marsilio, Venezia, 1996, pp. 239-251.
5. Duvernoy Sylvie, “Leonardo and Theoretical Mathematics”, in “Nexus Network Journal”, vol. 10, n. 1, 2008, pp. 39 – 50.
6. “Leonardo. L’uomo vitruviano fra arte e scienza”, a cura di Annalisa Perissa Torrini, Marsilio, Venezia, 2009, pp. 172 con un dvd.
7. “Leonardo e Vitruvio. Oltre il cerchio e il quadrato”, a cura di Francesca Borgo e Paolo Clini, Venezia. Marsilio / Centro Studi Vitruviani, 2019, pp. 151.
8. Marcolongo Roberto, “Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica”, in “Atti del Congresso Internazionale di Matematica” – Bologna, 3-10 settembre 1928, tomo I, Zanichelli, Bologna, 1929, pp. 275-293.
9. Marcolongo Roberto, “Le ricerche geometrico-meccaniche di Leonardo da Vinci”, “Atti della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)”, Roma Bardi editore, 1929, pp. 55, con 4 tavole fuori testo.
10. Marinoni Augusto, “La matematica di Leonardo”, Milano, Arcadia Edizioni, 1982, pp. 174.
11. Mascia Leno Liberato, “A Vitruvius Inspired Criterion for the Construction of Polygons”, “Nexus Network Journal”, volume 18 issue 2, Kim Williams Books, Torino, luglio 2015, pp. 533-545.
12. Moon Francis C., “The Machines of Leonardo da Vinci and Franz Reuleaux”, Dordrecht (Olanda), Springer, 2007, pp. xxxi-416.
13. Murtinho Vitor, “Leonardo’s Vitruvian Man Drawing: A New Interpretation Looking at Leonardo’s Geometric Constructions”, “Nexus Network Journal”, Kim Williams Books, Torino, 2015, pp. 507-524.
14. Perissa Torrini Annalisa, “L’uomo vitruviano di Leonardo da Vinci”, Giunti, Firenze, 2018, pp. 95.
15. Tyler Christopher W., “Leonardo da Vinci’s World Map”, pp. 16, 2015, http://openaccess.city.ac.uk/17683/1/Tyler_DaVinciWorldMap_C%26H2015.pdf
16. Valerio Vladimiro, “Per una nuova ecdotica dei testi scientifici figurati”, “Humanistica”, VII, n. 1-2, 2012, pp. 61-80.