© Sergio Calzolani, Firenze, 2017
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: area figure piane, area cerchio e semicerchio, area segmento circolare

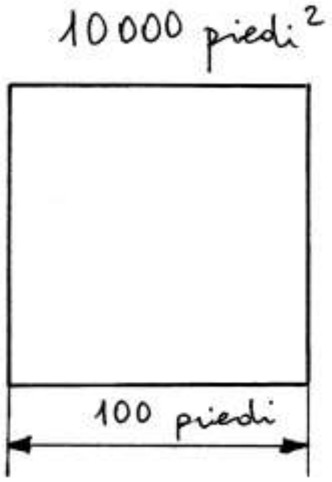
La geometria di Columella

Lucio Giunio Moderato Columella (4 – 70) è stato uno scrittore romano che ha lasciato un importante trattato di agricoltura, il *De re rustica* ("L'arte dell'agricoltura").

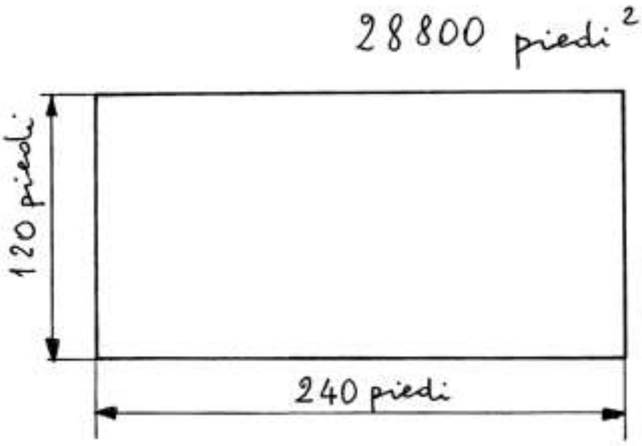
Nel V libro della sua opera Columella ha fornito una serie di regole geometriche empiriche per misurare l'area di campi di forma varia.

L'area di un *quadrato* di lato lungo 100 piedi è calcolata correttamente in

$$\text{Area} = \text{lato2} = 100^2 = 10\,000 \text{ piedi}^2:$$



Un campo *rettangolare* ha la forma di un *doppio quadrato* di 120 x 240 piedi:

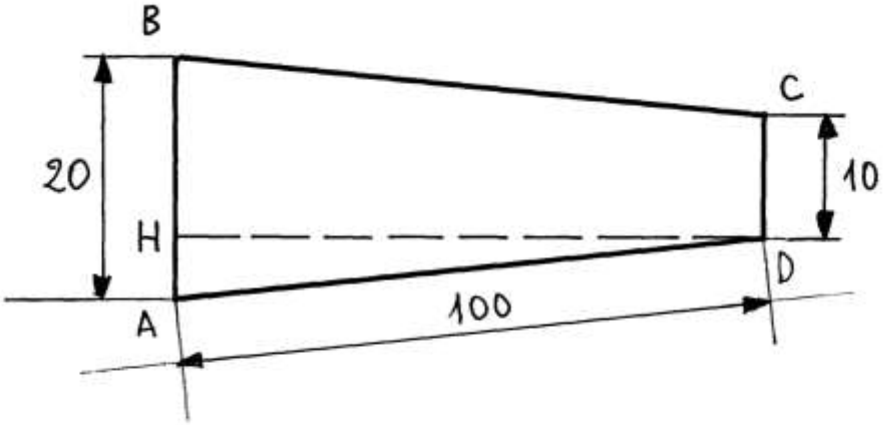


La sua area è calcolata correttamente in 28 800 piedi^2:

$$\text{Area} = \text{lunghezza} * \text{larghezza} = 240 * 120 = 28\,800 \text{ piedi}^2$$

.

Un *trapezio isoscele* ha le dimensioni descritte nella figura che segue:



Il metodo proposto da Columella è errato perché egli calcola l'area moltiplicando la semisomma delle basi:

semisomma basi = (AB + CD)/2 = (20 + 10)/2 = 15 piedi ,

per la lunghezza del lato obliquo AD.

L'area calcolata da Columella è:

Area Columella = (semisomma basi) * AD = 15 * 100 = 1500 piedi^2 .

Il metodo corretto è:

Area = (base maggiore + base minore)/2 * altezza .

L'altezza DH è data da:

$DH^2 = AD^2 – HA^2 = AD^2 – [(AB – CD)/2]^2 = 100^2 – [(20 – 10)/2]^2 =$
$10\,000 – 25 = 9975$.

DH è lunga

$BH = \sqrt{(9975)} \approx 99{,}87$ piedi .

L'area corretta del trapezio ABCD è:

$Area_{ABCD} = (AB + CD)/2 * DH \approx (20 + 10)/2 * 99{,}87 \approx 1498$ piedi^2.

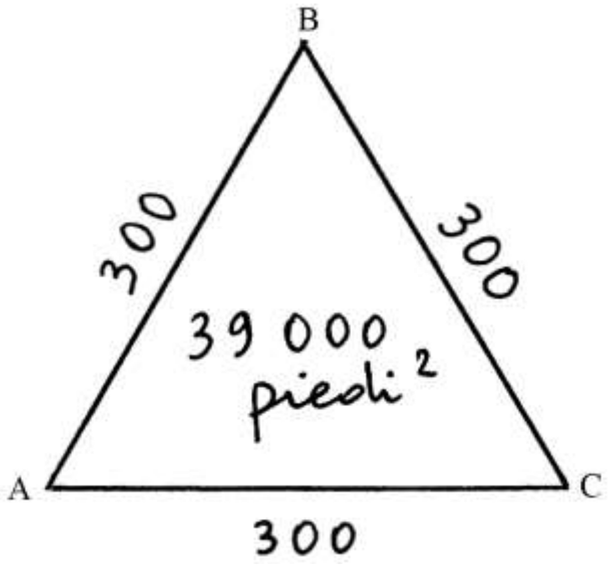
L'errore commesso *in eccesso* da Columella è minimo perché il trapezio è molto allungato:

errore = (1500 – 1498)/1498 = 0,1335%.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura proposta da Columella per calcolare l'area di un *triangolo equilatero* con lati lunghi 300 piedi è riassunta nella formula che segue:

$Area_{ABC} = (lato^2) * (1/3 + 1/10) = 13/30 * lato^2 = 13/30 * 300^2 = 39\,000$ piedi^2.



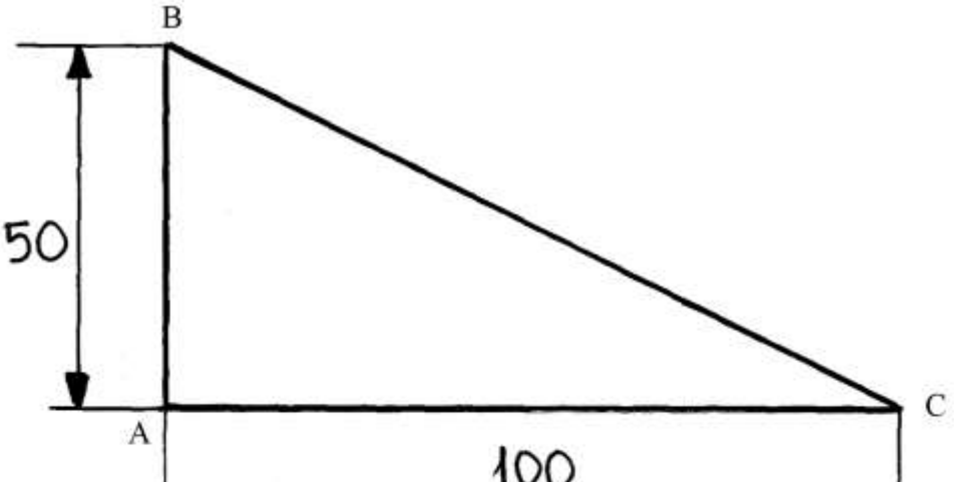
La formula corretta è la seguente:

$$\text{Area}_{ABC} = \text{lato}/2 * \text{lato} * \sqrt{(3)}/2 = \text{lato}^2 * \sqrt{(3)}/4 \approx$$
$$\approx 0{,}4330 * \text{lato}^2 \approx 0{,}4330 * 300^2 \approx 38\,971 \text{ piedi}^2 .$$

La differenza fra i due risultati è minima: la formula di Columella fornisce un risultato leggermente approssimato per eccesso.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un campo ha la forma di un triangolo rettangolo scaleno con cateti che hanno lunghezze in proporzione 1 : 2 :



L'area calcolata da Columella è ottenuta con una formula corretta:

$$\text{Area}_{ABC} = (AB * BC)/2 = (50 * 100)/2 = 2500 \text{ piedi}^2 .$$

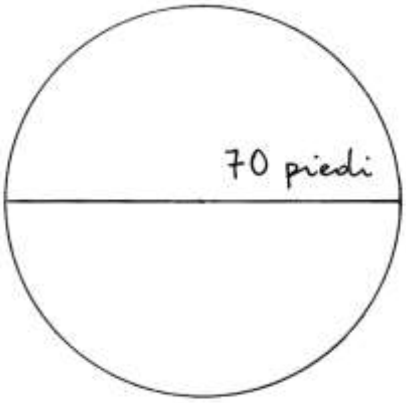
L’area del cerchio e del semicerchio

Per Columella l’area *approssimata* del cerchio è data dalla formula

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14$$

Con d è indicato il diametro, che in questo caso è lungo 70 piedi.
La frazione presente nella formula equivale a

$$11/14 \approx 0{,}785714$$



La formula corretta per calcolare l’area del cerchio è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (d/2)^2 * \pi \approx d^2/4 * 3{,}14159 \approx 0{,}785397 * d^2 .$$

L’area calcolata da Columella con la sua procedura è

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}}\ \text{Columella} \approx 70^2 * 11/14 \approx 3850\ \text{piedi}^2 .$$

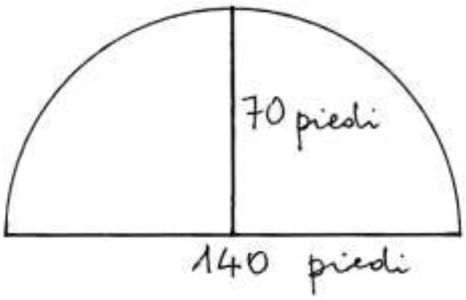
La misura con la formula corretta è data da

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} \approx 3{,}14 * (70/2)^2 \approx 3846{,}5\ \text{piedi}^2 .$$

Anche in questo caso la differenza è minima. La formula di Columella fornisce un risultato leggermente approssimato per eccesso.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Columella prende poi in considerazione un semicerchio che ha raggio 70 piedi, il doppio rispetto al raggio del campo circolare.



La procedura usata da Columella è riassunta nella formula che segue:

$$\text{Area}_{\text{SEMICERCHIO}}\ \text{Columella} = \text{raggio} * \text{diametro} * 11/14 =$$
$$70 * 140 * 11/14 = 7700\ \text{piedi}^2 .$$

A differenza del caso precedente, Columella moltiplica il raggio *r* (70 piedi) per il diametro *d* (140 piedi) e per il coefficiente 11/14.

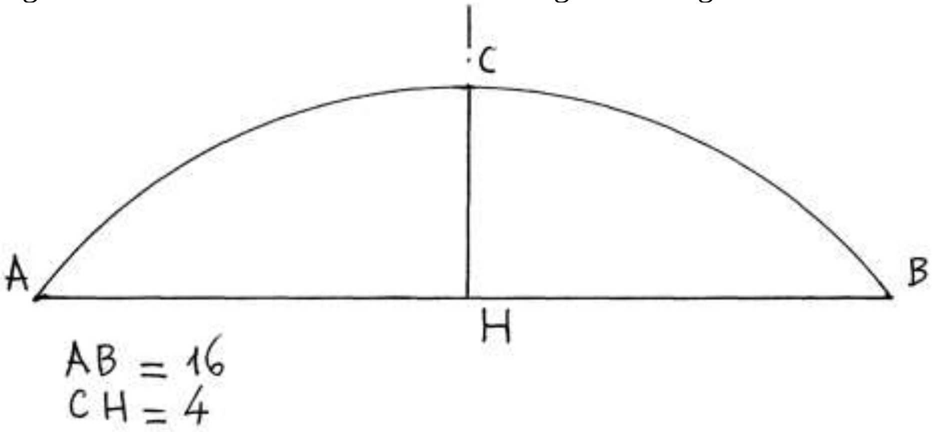
Il risultato ottenuto da Columella è leggermente arrotondato *per eccesso* rispetto a quello ricavato dalla formula corretta:

$$\text{Area}_{\text{SEMICERCHIO}} = \pi * d/2 * r/2 \approx 3,14 * 140/2 * 70/2 \approx 7693\ \text{piedi}^2 .$$

<u>Il segmento circolare</u>

Columella considera il caso della figura che è *meno di un circolo* e cioè la figura che nel linguaggio geometrico è un *segmento circolare*.

Il segmento ha le dimensioni mostrate nella figura che segue:



In termini moderni, AB è la *corda* (c) e CH è la *freccia* (f); inoltre ACB è un segmento circolare *a una base* che è costituita dalla corda.

La procedura risolutiva proposta da Columella contiene i seguenti passi:

- sommare le lunghezze della corda e della freccia: 16 + 4 = 20 piedi;
- moltiplicare la somma per 4: 20 * 4 = 80 piedi;
- dividere il precedente risultato per 2: 80 : 2 = 40 piedi;
- elevare al quadrato la metà della lunghezza della corda:
  $(16/2)^2 = 64$;
- calcolare la *quattordicesima* parte di 64 e arrotondare il risultato *per difetto* all'intero più vicino:

$64/14 \approx 4{,}5714 \rightarrow 4$;

- sommare 40 e 4: $40 + 4 = 44$ piedi^2 , che è l'area del segmente circolare ACBHA.

Usando i moderni metodi di scrittura, l'algoritmo di Columella assume la forma della formula che segue:

$$\text{Area segmento}_{ACBHA} = [(c + f)/2] * 4 + 1/14 * (c/2)^2 .$$

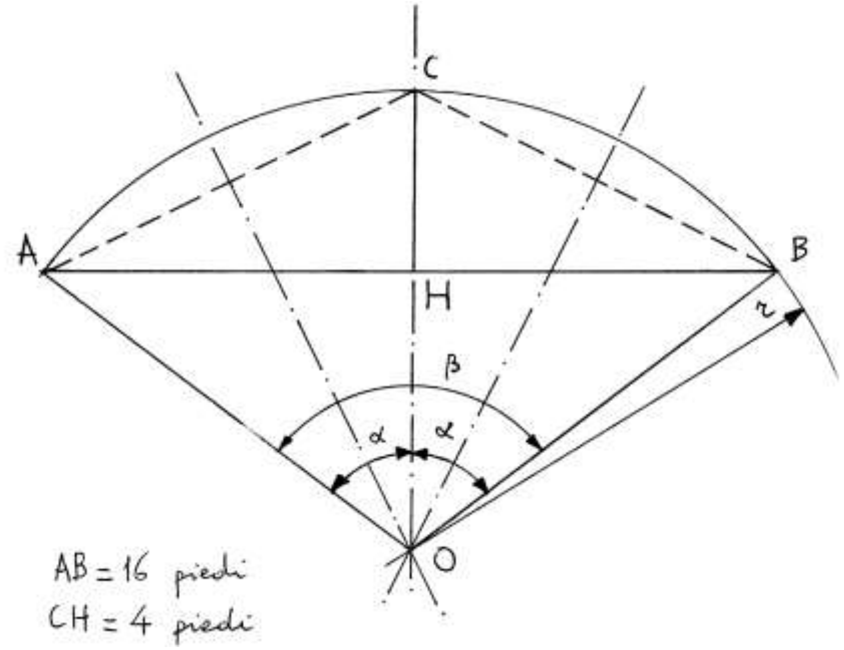
Nota: dal testo di Columella non si comprende se il coefficiente "4" per il quale va moltiplicato il primo membro della precedente formula abbia valore generale, oppure sia soltanto la lunghezza della freccia, 4 piedi in questo caso. Sembra ragionevole attribuire a quel coefficiente un *valore generale*.

\- APPROFONDIMENTO -

L'esempio dell'area del segmento circolare è ora risolto applicando le regole corrette.

Prolungare verso il basso la freccia CH

Disegnare le corde AC e CB e determinare gli assi dei due segmenti che si intersecano nel punto O, posto sul prolungamento di CH: questo punto è il centro della circonferenza di cui fa parte l'arco ACB:



Tracciare i raggi OA e OB.

La lunghezza del raggio $OA = r$ è data dalla formula

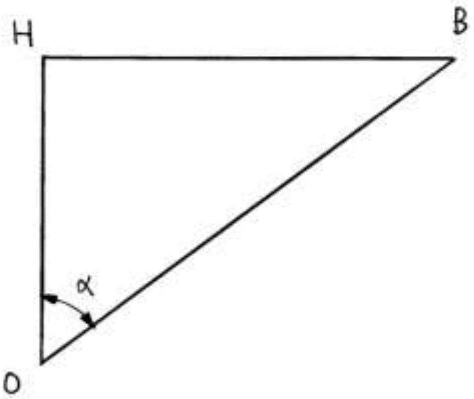
$$r = c^2/(8 * f) + f/2$$

dove c è la lunghezza della corda AB e f quella della freccia CH.

In questo caso:

$$r = 16^2/(8 + 4)\ 4/2 = 256/32 + 2 = 10 \text{ piedi} .$$

Consideriamo ora il *triangolo rettangolo* OHB:



L'ipotenusa OB è lunga 10 piedi (perché è un *raggio*) e il cateto HB è lungo metà della corda AB e cioè 8 piedi.

Il cateto OH è lungo

$OH = OC – HC = 10 – 4 = 6$ piedi .

Il triangolo OHB ha lati lunghi secondo un multiplo della più semplice terna pitagorica:

$2 * (3 – 4 – 5) = 6 – 8 – 10$.

L'angolo α ha ampiezza calcolabile tramite la sua tangente:

$$tg\ \alpha = HB/OH = (8/6) \approx 1,(33) .$$

Ne deriva $\alpha \approx 53,13°$.

L'angolo α è ampio la metà dell'angolo β:

$\beta = 2 * \alpha \approx 106,26°$.

L'area del cerchio è data da: $Area_{cerchio} = \pi * r^2 \approx 3,14 * 10^2 \approx 314$ piedi^2.

L'area del *settore circolare* OACB è data da

$$Area_{OACB} : Area_{CERCHIO} = \beta : 360°$$

Da cui discende

$$Area_{OACB} = Area_{CERCHIO} * \beta/360 \approx 3,14 * 10^2 * 106,26 /360 \approx$$
$$\approx 92,68 \text{ piedi}^2.$$

L'area del segmento circolare ACB è uguale alla differenza fra l'area del settore circolare OACB e quella del triangolo OAB.

L'area di OAB è:

$$Area_{OAB} = (AB * HO)/2 = (16 * 6)/2 = 48 \text{ piedi}^2 .$$

L'area del segmento circolare ACB è:

$$Area\ segmento_{ACB} = Area\ settore_{OACB} – Area\ triangolo_{OAB} =$$
$$= 92,68 – 48 = 44,68 \text{ piedi}^2 .$$

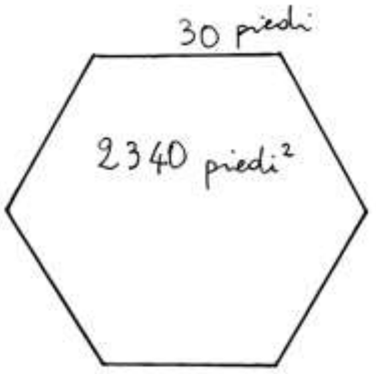
La differenza fra il risultato corretto (44,68 piedi^2) e quello della formula di Columella (44 piedi^2) è minima. L'errore è dato da

$$\text{errore} = (44{,}68 - 44)/44{,}68 = 0{,}68/44{,}68 = 1{,}52\% \ .$$

- -

<u>L'esagono regolare</u>

Un campo ha la forma di un esagono regolare con lato lungo 30 piedi:



La procedura usata da Columella per calcolare la sua area contiene i seguenti passi:

- moltiplicare la lunghezza del lato per se stesso: 30 * 30 = 900;
- dividere il prodotto per 3: 900 : 3 = 300;
- dividere lo stesso numero quadrato per 10: 900 : 10 = 90;
- sommare questi ultimi due quozienti: 300 + 90 = 390:
- l'ultimo risultato va moltiplicato per 6, perché tanti sono i lati dell'esagono: 390 * 6 = 2340 piedi^2.

L'area di un esagono regolare è oggi calcolata con una formula

$$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 3 * \text{lato}^2/2 * \sqrt{3} = 3 * 30^2/2 * \sqrt{3} \approx$$
$$\approx 2338{,}26 \text{ piedi}^2.$$

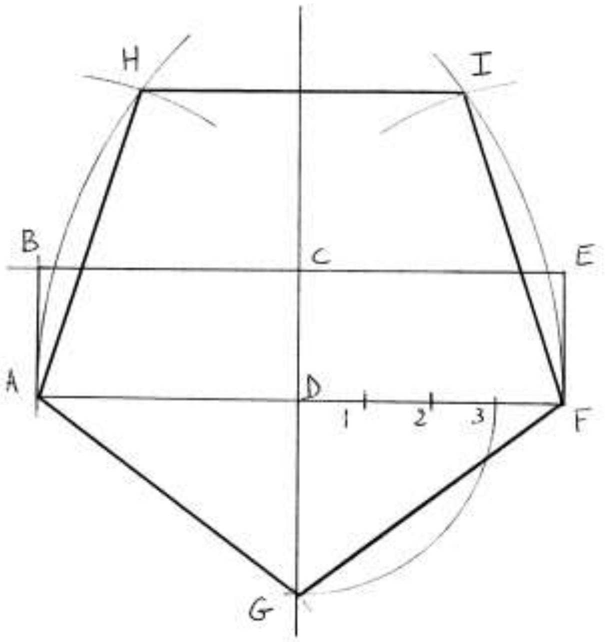
La differenza fra il risultato di Columella e quello fornito dalla formula corretta è veramente minima.

<u>Costruzione del pentagono secondo Columella</u>

Columella suggerì pure un metodo grafico per la costruzione del pentagono *approssimato*.

Disegnare due rettangoli affiancati con uguali dimensioni e con le lunghezze dei lati nel rapporto 1:2, ABCD e DCEF:

$$AB : AD = 1 : 2$$



Prolungare verso l'alto e verso il basso il lato CD.

Dividere in *quattro* parti uguali il lato DF: sono fissati i punti 1, 2 e 3.

Fare centro in D e, con raggio D-3, tracciare un arco dal punto 3 fino a intersecare il prolungamento di CD in un punto, G.

Il segmento D-3 è lungo quanto la *media aritmetica* fra le lunghezze di CD e DF:

$$D\text{-}3 = (CD + DF)/2 = (CD + 2*CD)/2 = 1{,}5 * CD\ .$$

Il punto G è il *terzo vertice* del pentagono da costruire (A e F sono i primi due).

Disegnare i segmenti AG e FG.

Con apertura AG, fare centro in A e in F e tracciare due archi.

Il segmento AF è una *diagonale* del pentagono: con apertura AF, fare centro in A e poi in F e disegnare due archi che tagliano i due precedenti archi in due punti, H e I.

Il poligono AHIFG è il pentagono approssimato.

<u>Bibliografia</u>

1. Columella Lucio Giunio Moderato, "L'arte dell'agricoltura e Libro sugli alberi", trad. dal latino di Rosa Calzecchi Onesti – Introduzione e note di Carlo Carena, edizione bilingue a fronte, Torino, Einaudi, 1977, pp. XXIII+1060.
2. Moyon Marc, "La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales", Turnhout (Belgio), Brepols, 2017, pp. 652.