© Sergio Calzolani, Firenze, 2016
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: agrimensura, misura superfici piane, triangolazione, fondazione città etrusche e romane, cardo e decumano, gnomone, groma, orientamento città romane, Vitruvio, centuriazioni, Gromatici, geometria centuriazioni, unità misura romane, catasto romano, costruzioni geometriche dei Gromatici, centuriazione Piana fiorentina, misura degli angoli

L'AGRIMENSURA

La *topografia* studia i metodi e gli strumenti usati per ricavare una rappresentazione grafica e metrica della superficie terrestre. Essa determina le coordinate dei punti sul terreno e individua i punti sulla carta.

Talvolta in passato la topografia era chiamata *geometria pratica*.

La *cartografia* studia i metodi usati per riportare sulle carte i punti rilevati sul terreno.

L'*agrimensura* è un ramo della topografia che studia la misura delle superfici agrarie: mentre la *geometria* è considerata una *scienza*, l'agrimensura è una *tecnica*. Per misurare i terreni, essa impiega una serie di strumenti per scomporre il terreno in figure semplici: triangoli e quadrilateri.

Le operazioni che compiono gli agrimensori sono le seguenti:

1. Operazioni da compiere sul terreno (posizionamento di cippi e di pali e tenditura di corde).
2. Azioni da compiere per la rappresentazione su carta del terreno esaminato.
3. Effettuazione dei calcoli necessari per determinare lunghezze e superfici.

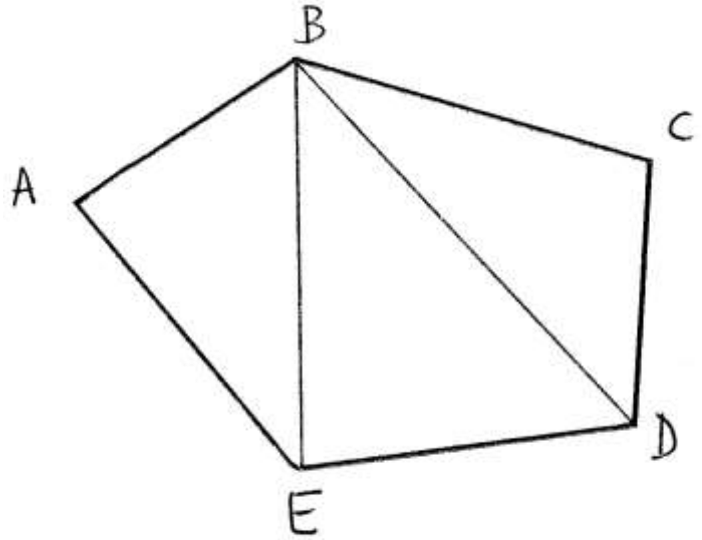
In sintesi, le attività svolte da un agrimensore hanno due finalità:

a) misura delle superfici,
b) divisione di terreni nei casi vendite o di divisioni ereditarie.

Qualcosa di simile al lavoro degli agrimensori è svolto nei cantieri edili dai *tracciatori*, generalmente geometri, periti agrari e periti edili.

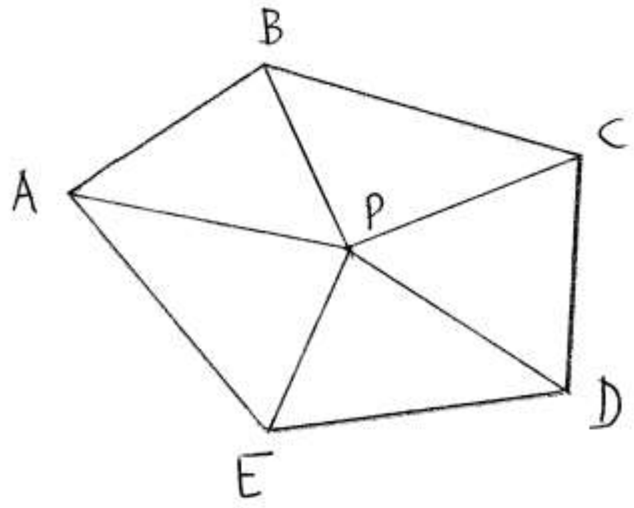
Per misurare la superficie di un terreno di forma irregolare (come accade nella maggior parte dei casi) occorre scomporla in *triangoli* e *quadrilateri semplici*, poligoni dei quali è facile misurare i lati e calcolare le superfici.

La figura che segue rappresenta un terreno che ha la forma di un pentagono non regolare:



Tracciando le diagonali BE e BD, la figura risulta divisa in tre triangoli *scaleni* (ABE, BDE e BCD) dei quali è facile determinare le superfici con semplici formule di geometria piana.

In relazione alla situazione del terreno, il solito poligono ABCDE può essere misurato con un altro metodo descritto nella figura che segue:



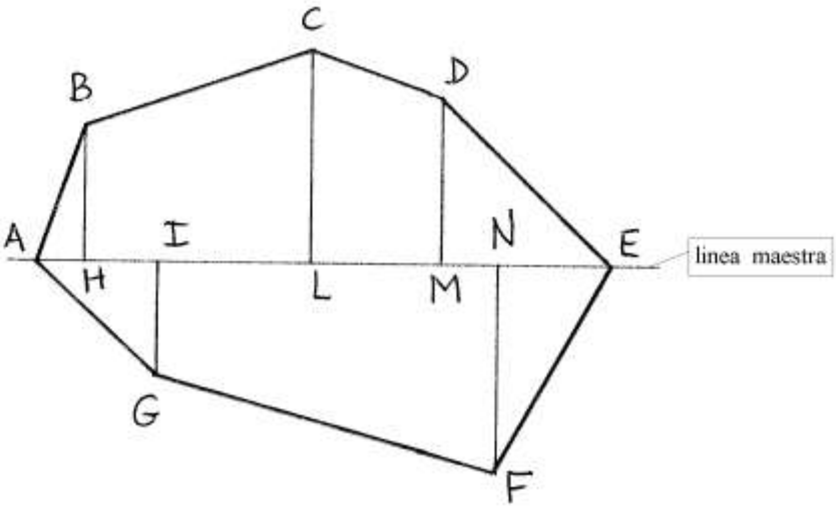
Viene scelto un punto interno, P, dal quale sono tracciati i segmenti che lo collegano ai cinque vertici della figura.

Questa tecnica è conosciuta come *metodo delle coordinate polari* e P è il *polo*.

Il pentagono non regolare ABCDE risulta così suddiviso in cinque triangoli scaleni: ABP, BCP, CDP, DEP e EAP dei quali è facile calcolare le superfici.

Entrambi i metodi impiegati per trattare il pentagono ABCDE hanno diviso il poligono in un certo numero di *triangoli*: questa operazione è chiamata *triangolazione*.

Un altro metodo usato per la misurazione di un terreno di forma irregolare è mostrato nella figura che segue:



ABCDEFG è un poligono non regolare con *sette* lati.

Viene tracciata la *diagonale* più lunga possibile del poligono che lo divida in due parti: in figura è AE, chiamata *linea maestra*.

Le misure sono prese seguendo le coordinate cartesiane dei vertici determinate rispetto alla *linea maestra* AE. Questa linea equivale all'asse delle ascisse nelle coordinate cartesiane.

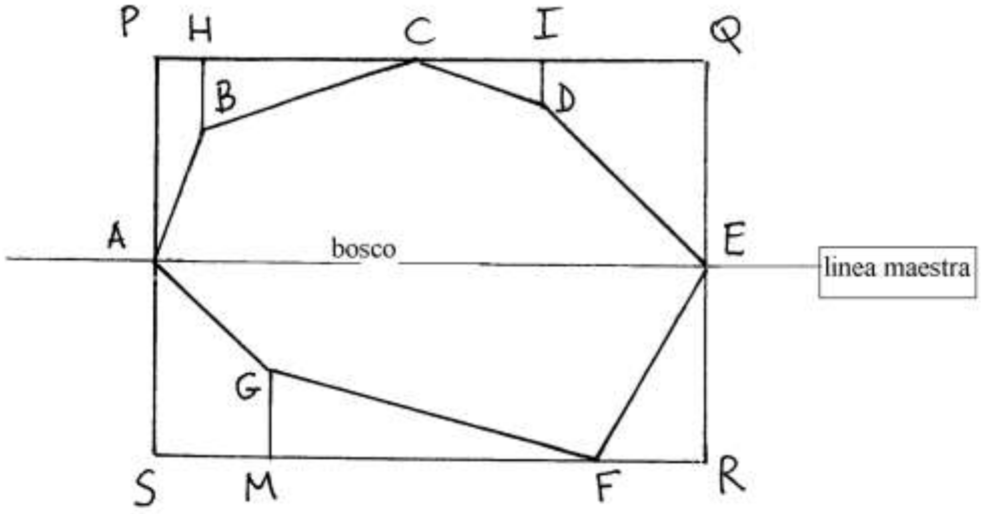
Dai vertici B, C, D, F e G condurre dei segmenti *perpendicolari* a AE: sono così fissati i punti H, I, L, M e N.

Il poligono risulta diviso in *triangoli rettangoli* (ABH, AIG, DEM e EFN) e in *trapezi rettangoli* (HBCL, LCDM e GINF), figure delle quali è facilissimo calcolare le rispettive aree.

La misura di un bosco

La misura di un bosco con i metodi descritti in precedenza presenta un grosso inconveniente: dopo aver scelto il punto che costituirebbe il *polo interno*, risulterebbe molto difficile prendere le misure da questo punto.

Le misure devono essere prese dall'*esterno* al bosco:



ABCDEFG è il profilo del bosco e i punti A e E sono i più distanti: la linea passante per A e E è la *linea maestra*.

Il bosco è idealmente racchiuso all'interno di un rettangolo PQRS. Alcuni vertici della figura che rappresenta il bosco si trovano sui lati del rettangolo PQRS: si tratta di A, C, E e F.

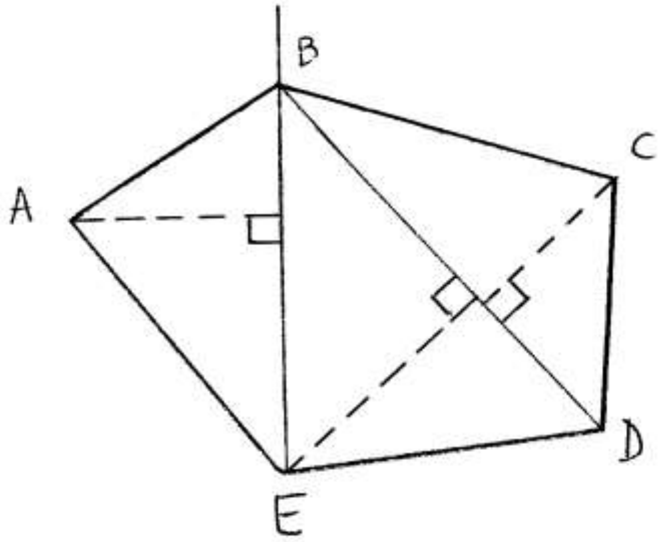
Per completare la pianta del bosco sono sufficienti le coordinate dei punti B, D e G, da determinare con riferimento ai lati del rettangolo PQRS.

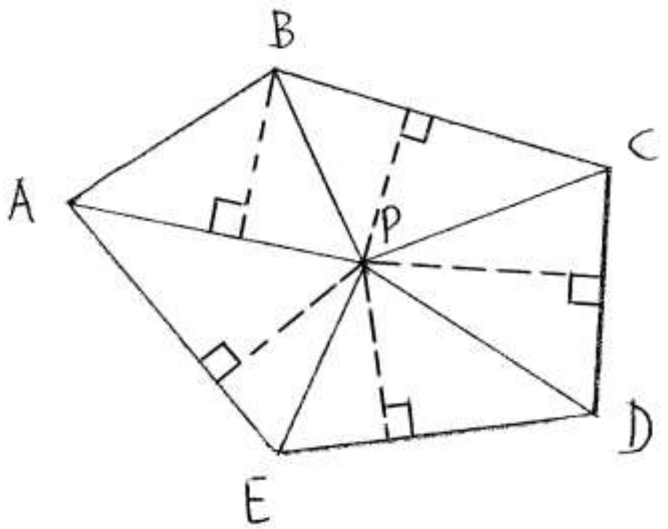
La triangolazione nei tempi antichi

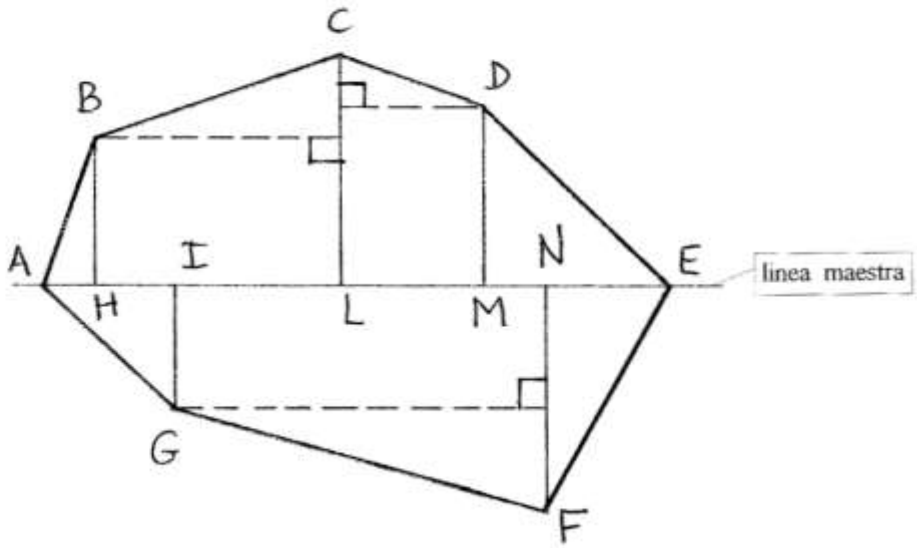
Nei tempi antichi (almeno fino al Rinascimento), l'area di un triangolo *non* rettangolo (isoscele, scaleno o equilatero) o di un quadrilatero (che non fosse un quadrato o un rettangolo) era difficilmente misurabile: per renderle misurabili, quelle figure geometriche dovevano essere scomposte in un insieme di figure più semplici:

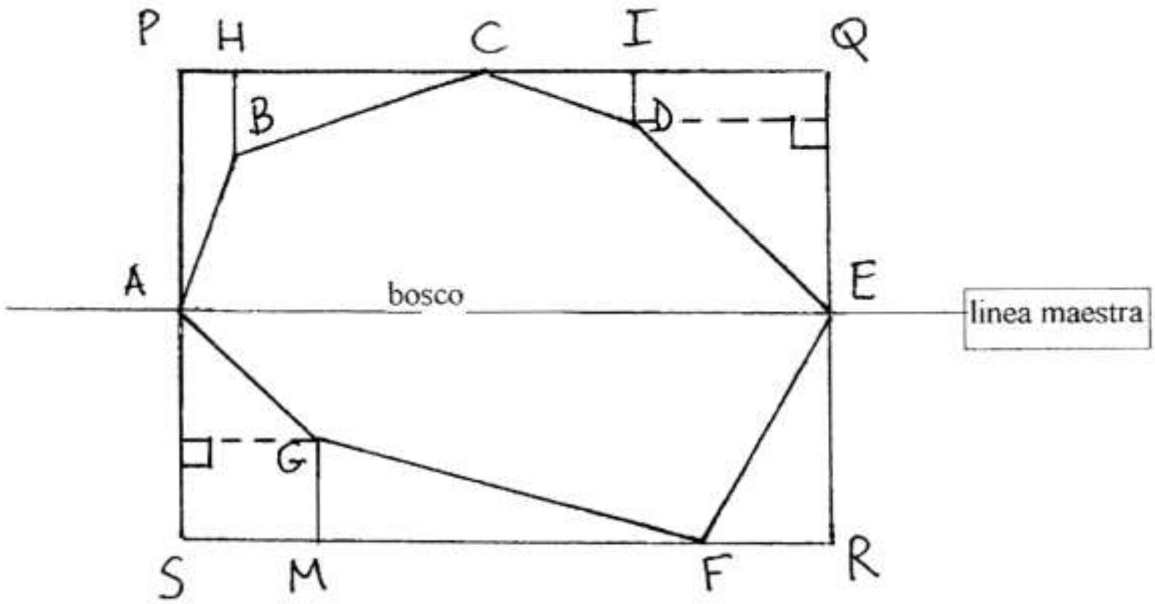
- Triangoli rettangoli
- Rettangoli o quadrati.

Le quattro precedenti figure sono rielaborate secondo queste regole: sono state disegnate con segno *tratteggiato* le altezze che scompongono le figure più complesse in triangoli rettangoli (per chiarire meglio le costruzioni, al piede delle altezze sono stati disegnati i simboli dell'angolo retto):


A
B
C
D
E


A
B
C
D
E
P


A
B
C
D
E
F
G
H
I
L
M
N
linea maestra



Il rilievo di un terreno

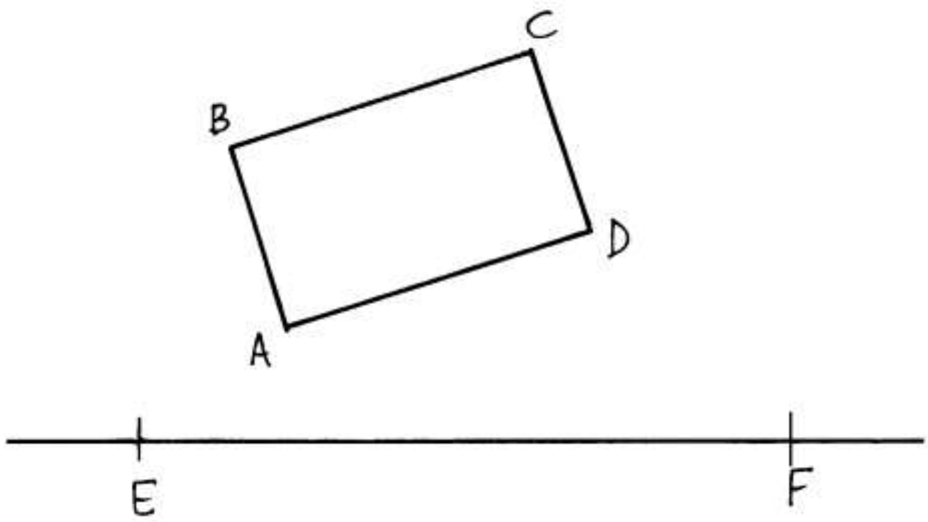
Le attività svolte dagli Agrimensori romani possono essere classificate in due gruppi:

a) La *centuriazione* di un terreno.
b) Il *rilievo* di un terreno di forma qualsiasi.

Il *rilievo* di un terreno è l'operazione opposta a quella dell'impianto di una centuriazione.

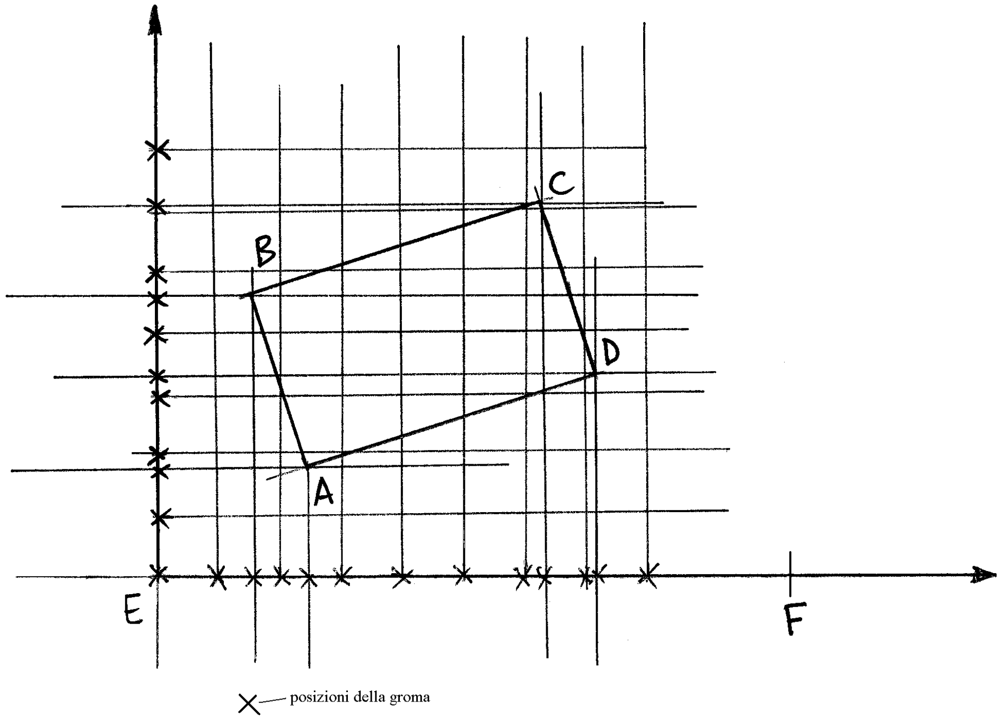
Il rilievo di una superficie piana comunque inclinata rispetto a delle linee di riferimento veniva effettuata con la groma e con corde.

Il quadrilatero ABCD (qui semplificato in un rettangolo) deve essere rilevato, ma la sua posizione è poco accessibile, tranne che da una retta passante per i punti E e F:



I lati del quadrilatero non sono paralleli o perpendicolari alla retta passante per i punti E e F.

Un primo metodo impiegato per il rilievo è descritto nella figura che segue:

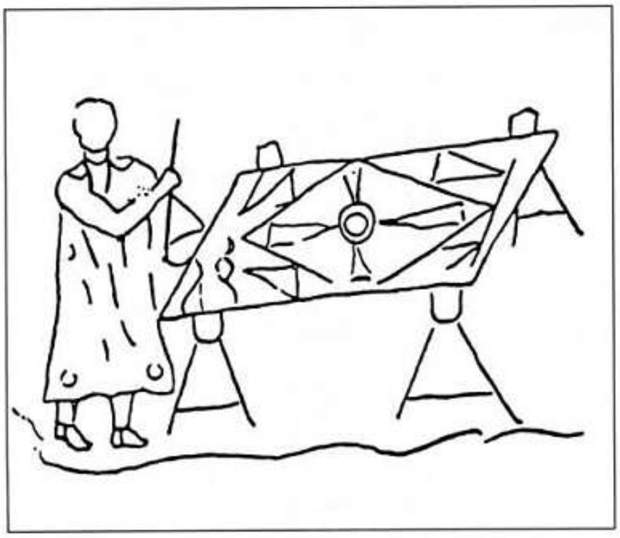


Dal punto E è tracciata una linea perpendicolare alla retta passante per E e per F. L’operazione poteva essere facilmente realizzata con la groma, che al suo vertice aveva un *goniometro* in grado di misurare soltanto angoli retti.

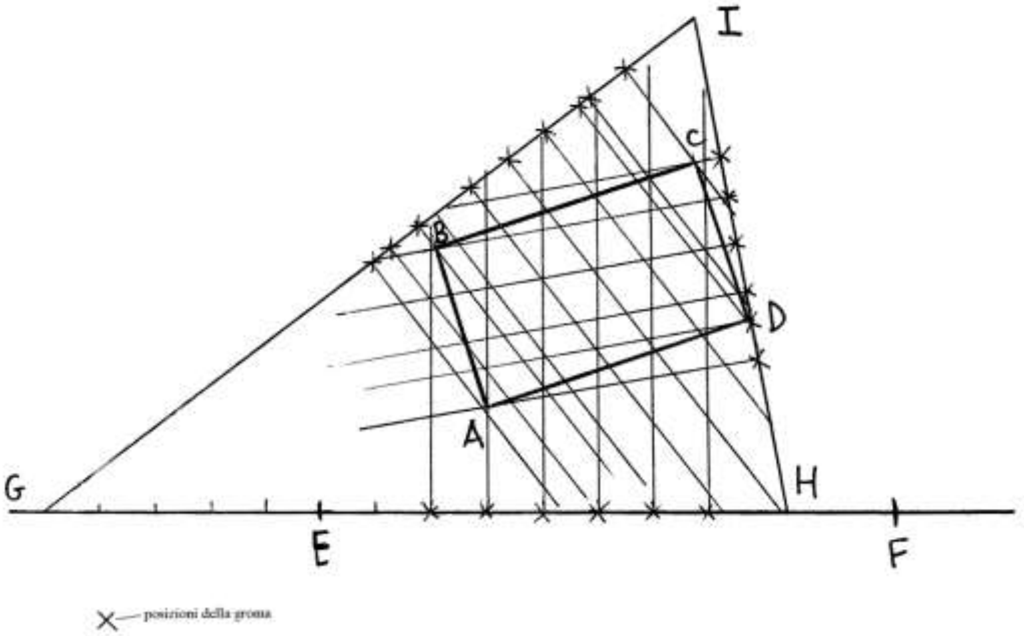
Sui due assi perpendicolari in E sono fissati una serie di punti, contrassegnati con il simbolo **X**.

Da questi punti sono tracciate linee parallele o perpendicolari ai due assi, fino a incontrare il quadrilatero ABCD: al suo interno esse si intersecano in una serie di punti. È così possibile misurare le distanze di quei punti dai due assi perpendicolari e riportare le dimensioni su una pianta disegnata in scala.

La figura che segue è da una stele funeraria romana dedicata a un progettista ritratto accanto al tavolo da disegno (da Mario Docci e Riccardo Migliari):



Un secondo metodo per il rilievo del quadrilatero ABCD è spiegato nella figura che segue:



Le condizioni del luogo non permettono di tracciare una perpendicolare alla retta passante per i punti E e F.

Sulla retta sono fissati due nuovi punti, G e H: un terzo punto, I, è in una posizione accessibile dai gromatici con la groma posizionata in G e in H.

GIH è un triangolo generico (in questo esempio è *scaleno*), al cui interno si trova inscritto il quadrilatero ABCD: il triangolo circoscritto ha un lato, HI, sul quale giace un vertice del quadrilatero, il punto D.

Dalla retta passante per i punti G, E, H e F sono tracciati segmenti ad essa perpendicolari, fino a incontrare il quadrilatero. La stessa operazione è compiuta dai segmenti GI e IH.

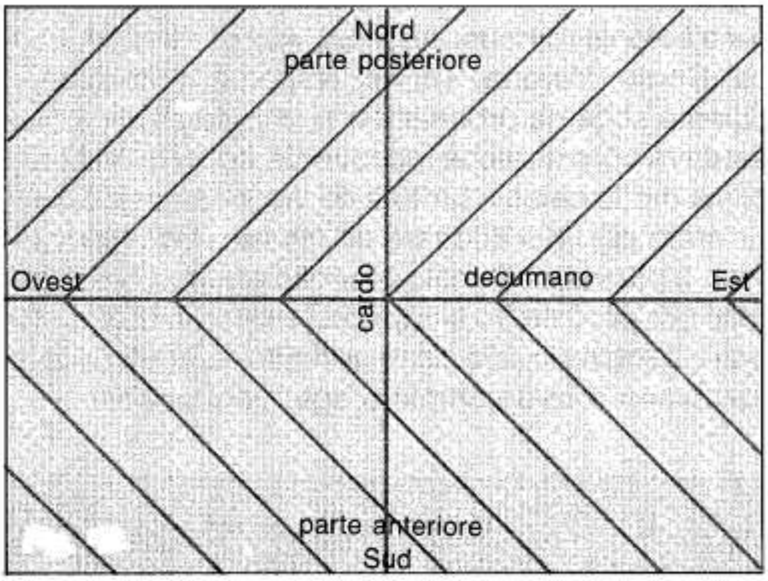
Le intersezioni di queste linee determinano le posizioni dei lati e dei vertici di ABCD. Misurando le lunghezze e riportandole su un foglio, in scala, si ricavano le dimensioni e la posizione del quadrilatero.

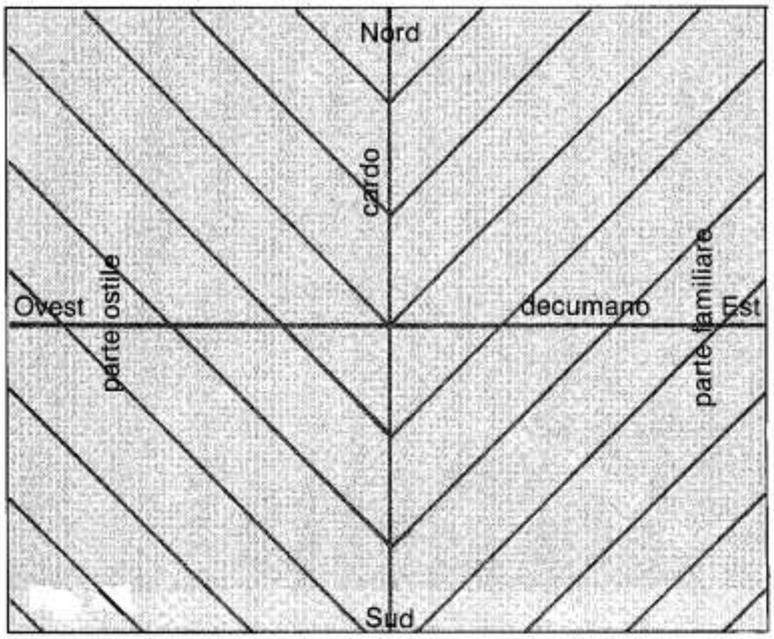
La fondazione delle antiche città etrusche e romane

Presso gli Etruschi, il cielo e la terra erano idealmente suddivisi in varie parti regolari, in relazione alle convinzioni religiose di quel popolo.

Lo spazio sacro era sempre orientato e suddiviso secondo un modello celeste, sia che si trovasse in cielo sia in un'area terrestre consacrata, quali ad esempio il recinto di un santuario, di una città, di un'acropoli.

L'orientamento di questo spazio sacro era determinato con riferimento ai quattro punti cardinali collegati fra loro da due linee che si incrociavano ad angolo retto (fig. 48). Quella nord-sud era dai Romani chiamata *cardo* (con vocabolo di origine non latina) e quella est-ovest *decumano*. I Romani derivarono la terminologia e le concezioni religiose poste a fondamento dell'urbanistica (la disciplina che studia la sistemazione delle aree urbane, di quelle extraurbane e dei loro rapporti) e dell'agrimensura (la disciplina che si occupa della misura delle superfici agrarie) dal mondo etrusco-italico.



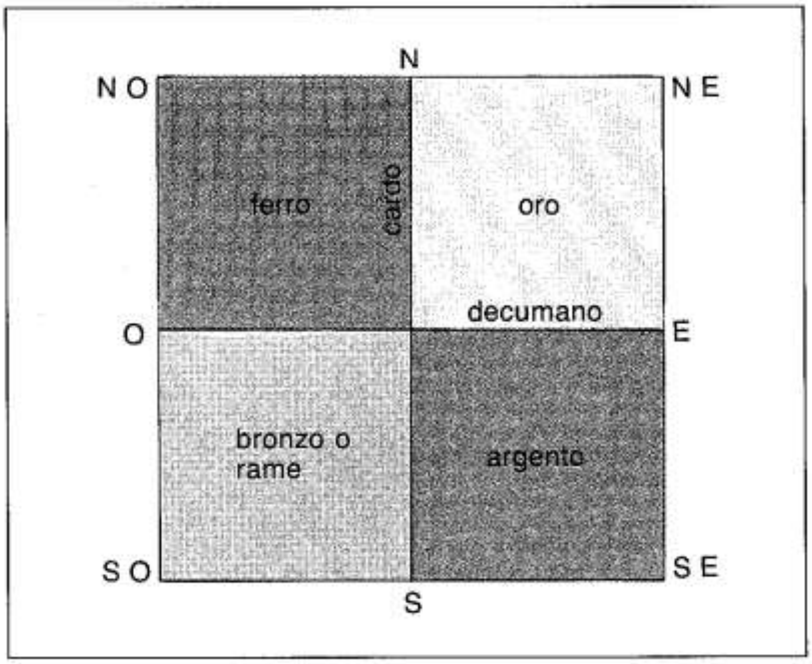


Il cardo corrisponde a un *meridiano* geografico (Nord – Sud) e il decumano si sovrappone a un *parallelo* (Ovest – Est).

Il cardo e il decumano principali erano più larghi delle altre vie e erano chiamati *massimi*. Parallelamente a questi due assi importanti venivano tracciati altri assi, cardi e decumani minori.

Secondo gli Etruschi, la volta celeste era divisa dal decumano in due parti: la parte posteriore rivolta al settentrione e la parte anteriore rivolta verso mezzogiorno.

Una seconda bipartizione dello spazio si aveva nel senso longitudinale del cardo: il settore che per noi è di sinistra o occidentale era considerato sfavorevole (parte ostile), mentre la parte rivolta verso est era ritenuta di buon auspicio (*parte familiare*;, rivedere la precedente figura). Lo spazio interessato alla fondazione di una nuova città etrusca era diviso in quattro regioni dai due assi (cardo e decumano), come spiega la figura che segue:



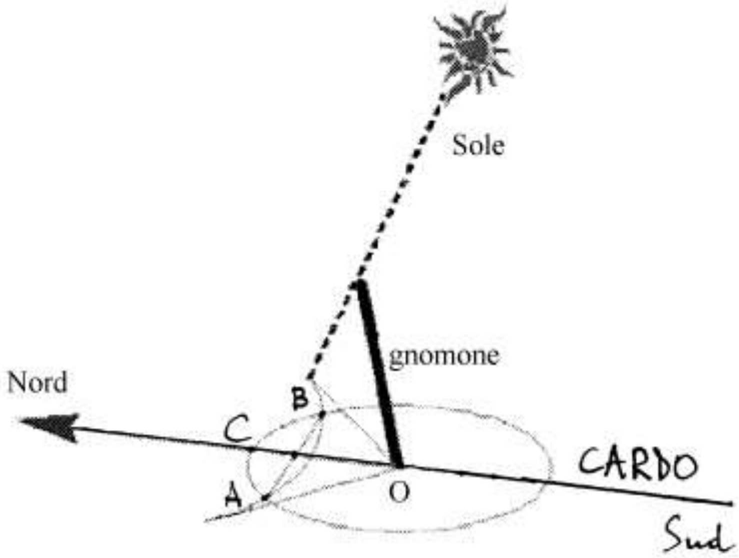
Il quarto nord-orientale era ritenuto sempre propizio, mentre il quarto nord-occidentale era considerato il più sfavorevole. Il quarto sud-orientale era un po' meno favorevole di quello N.E. e quello sud-occidentale un po' meno sfavorevole di quello N.O. Nell'antica mitologia dei popoli mediterranei, ripresa e sviluppata dal poeta latino Ovidio, l'età dell'oro sarebbe il periodo nel quale visse la prima delle generazioni umane: sotto il regno di Saturno, padre di Giove, gli uomini sarebbero vissuti in totale felicità e assenza di dolori; essi non conoscevano la vecchiaia e la morte non era temuta, avendo essa la dolcezza del sonno. La terra offriva spontaneamente grande abbondanza di frutti, senza necessità di una stabile agricoltura. Ma gli uomini sarebbero a poco a poco degenerati e avrebbero trascurato le virtù e il culto degli dei: per punirli, Giove inviò l'età dell'argento cui presto seguì quella del bronzo (o del rame). Si rese allora necessario coltivare la terra, ripararsi dal freddo e difendersi dalle prepotenze dei violenti. Insorsero contese e liti e si scatenarono le prime guerre fra uomini. Giove, disgustato di tutto ciò, inviò agli uomini l'ultima età, quella del ferro, l'età dell'espiazione delle colpe, del faticoso lavoro, della fame, delle inondazioni e degli altri cataclismi naturali. Poi, quando l'ira di Giove traboccò, egli scatenò sulla Terra il diluvio di Deucalione ed essa ne fu sommersa. Questa mitologia non è esclusiva del mondo greco-romano, ma sotto varie forme è presente presso un gran numero di popoli antichi.

La precedente figura fornisce la corrispondenza fra i quarti della città etrusca e le ère metalliche.

Roma subì potentemente l'influsso culturale e tecnico etrusco e, secondo la leggenda, fu anch'essa fondata secondo le regole etrusche.

La determinazione del Nord

Dopo aver consultato gli *aruspici* (i sacerdoti etruschi) e fissato un punto quale centro di una città da costruire, il gromatico piantava un’asta verticale in quel punto scelto sul terreno: l’asta era uno *gnomone*. Esso veniva orientato in modo grossolano verso il Nord.



Il terreno circostante allo gnomone era stato precedentemente spianato.

Con una corda, il gromatico tracciava intorno al palo una circonferenza con centro alla base dello stesso palo (punto O).

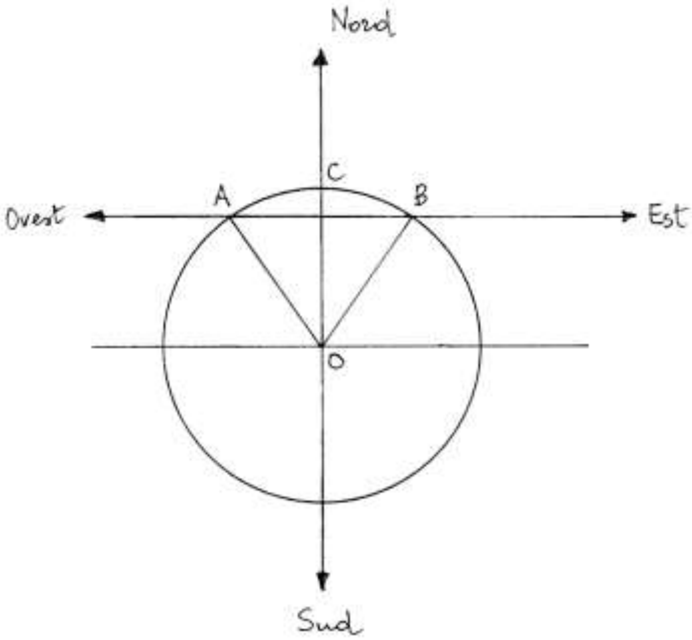
Lo gnomone creava un'ombra sul terreno che si muoveva in relazione al moto apparente del Sole.

Poco prima di mezzogiorno, veniva segnata sul terreno la posizione dell'ombra: essa tagliava la circonferenza nel punto A.

Poco dopo mezzogiorno, il gromatico prendeva nota della nuova posizione dell'ombra, che si era spostata e tagliava la circonferenza nel punto B: egli costruiva la bisettrice dell'angolo AOB. La bisettrice era l'asse della corda AB e tagliava la circonferenza nel punto C: questa retta era il *cardo* Sud – Nord o, usando un termine moderno, un *meridiano*.

Prolungando la corda AB oltre A e oltre B veniva tracciato un *decumano* perpendicolare al cardo passante per O e per C o, in termini moderni, un *parallelo*.

La figura che segue mostra, in pianta, la precedente costruzione:



- APPROFONDIMENTO -

L’origine dello gnomone

Lo gnomone è uno strumento di origine sumerico babilonese.

Esso veniva fissato su di una piattaforma orizzontale graduata.

L’ombra dello gnomone indicava il meridiano (la retta Nord – Sud) quando essa era la più *corta* del giorno: in questo momento, l’ombra era la bisettrice che divideva in due parti uguali l’angolo formato dalle ombre rilevate al momento del sorgere del Sole e a quello del suo tramonto.

- -

Gli strumenti etruschi e romani

Gli Etruschi e i Romani non conoscevano la *bussola* e ciò nonostante riuscivano ad orientare perfettamente il cardo e il decumano delle città da essi fondate. Ciò era reso possibile dall'attenta osservazione del corso apparente del Sole da est verso ovest: questo suo immaginario percorso celeste fu preso a modello per l'orientamento e l'allineamento del suo equivalente terreno, il *decumano*. L'altro asse, il *cardo*, veniva tracciato con l'ausilio di appositi semplici strumenti, quali la *groma*, utilizzando il principio della costruzione dell'angolo retto fra i due assi. In sintesi, il decumano massimo era considerato la *proiezione* sulla Terra del movimento *apparente* del Sole e il cardo massimo era l’asse di quel movimento.

La groma era costituita da due aste orizzontali, incrociate a 90°, e montate su di un asse verticale. Una delle due aste veniva usata per mirare nella direzione voluta (ad esempio, era posta in corrispondenza del decumano) e l'altra asta consentiva di determinare la direzione perpendicolare alla prima (nel nostro caso indicava la direzione del cardo).

Le città romane

Molte delle attuali città italiane furono fondate dai Romani: dai suoi eserciti fissatisi in un nuovo territorio occupato, oppure da nuclei di coloni lasciati a difendere le conquiste militari e a coltivare terre spesso situate in zone boscose o paludose e da bonificare.

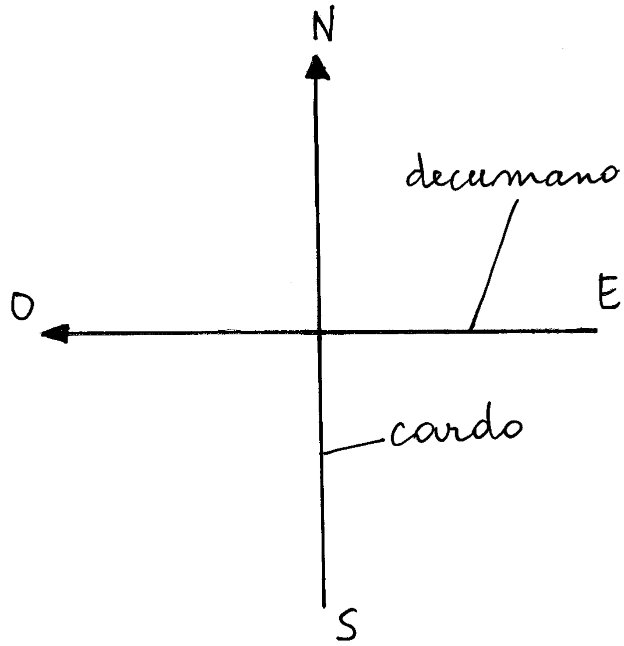
Nella fondazione di queste città fu costantemente seguita la regola etrusca dell’organizzazione dello spazio (che i Romani chiamarono “Etrusca disciplina”), lungo due assi fra loro perpendicolari: il cardo e il decumano non venivano più orientati rigidamente verso i quattro punti cardinali. I più pratici Romani adattavano l’orientamento delle nuove città alle condizioni del singolo luogo, pur conservando sempre la perpendicolarità fra cardi e decumani.

Questo rigoroso schema urbanistico a scacchiera viene facilmente rintracciato anche nelle odierne piante delle città che furono colonie romane: Aquileia, Aosta, Firenze, Lucca, Como, Verona, Torino, Napoli e tante altre.

Questo schema urbanistico di origine etrusca presentava pure qualche inconveniente: in località dal clima molto caldo o battute da venti costanti sarebbe stato più utile adottare un criterio meno geometrico e più vario.

Il modello etrusco così rigoroso era però molto semplice: i militari e i coloni romani badavano alle cose semplici e pratiche e si trovarono a loro completo agio adottandolo e adattandolo alle varie situazioni locali.

La figura che segue descrive l’originale tecnica seguita dagli Etruschi:

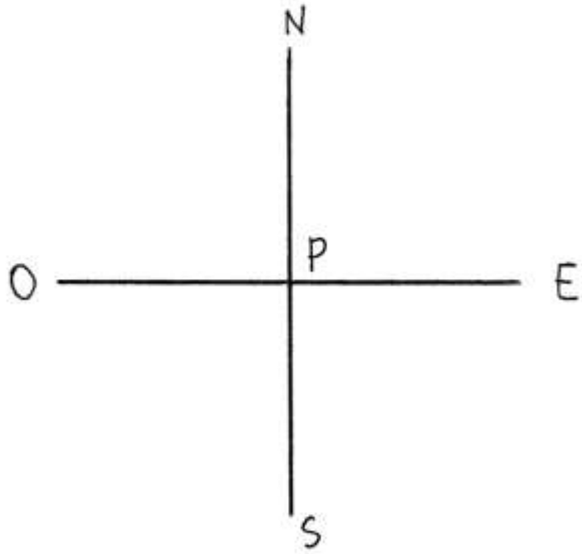


I sacerdoti etruschi e gli agrimensori osservavano il sorgere del Sole a Est e tracciavano il decumano da Est a Ovest. Sempre guardando verso Est, alla loro destra si trovava il Sud: perpendicolarmente al decumano, essi fissavano il cardo da Sud verso Nord.

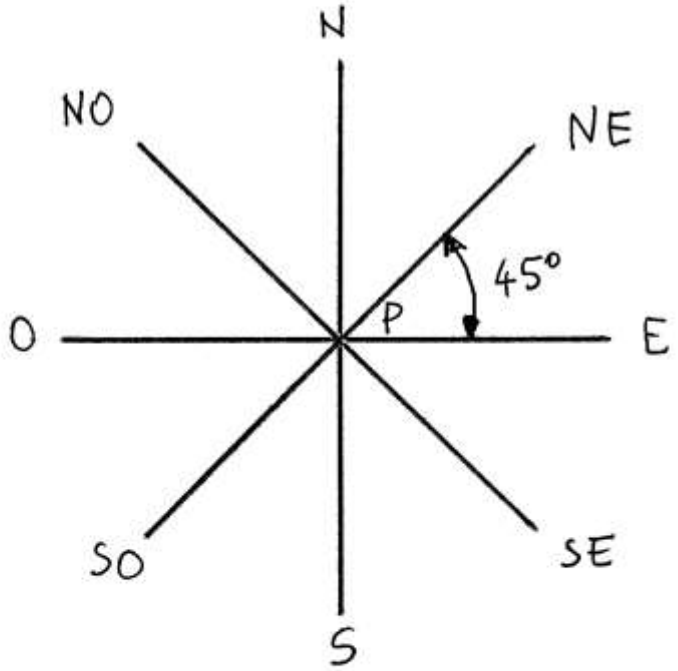
La rosa dei venti

Per aiutare la comprensione dell'orientamento di molte città romane e delle centuriazioni di vaste aree agricole effettuate dai Romani, è utile richiamare alcuni concetti relativi alla *rosa dei venti*.

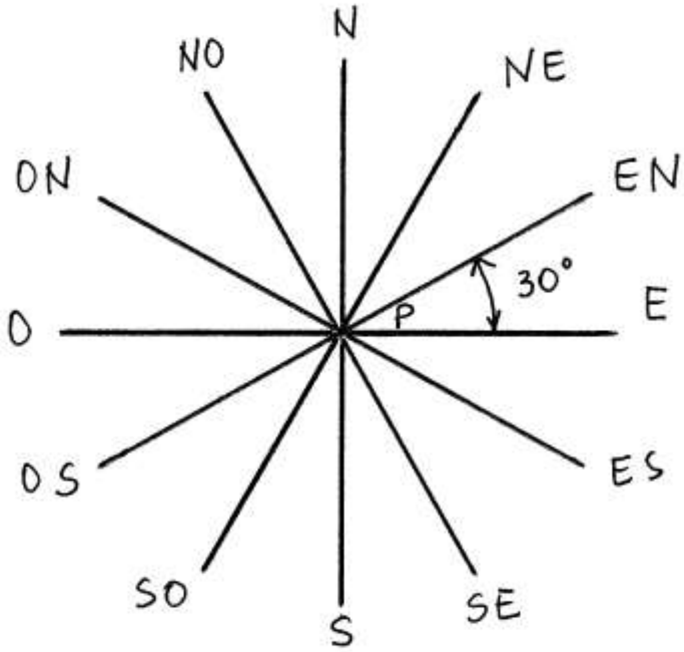
La figura che segue presenta la tradizionale posizione dei quattro punti cardinali:



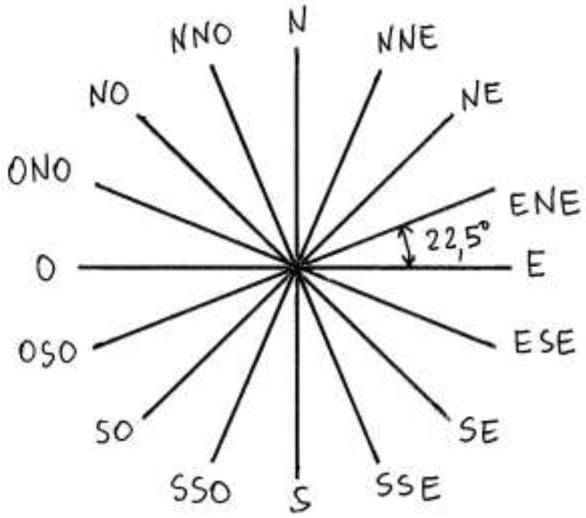
Nella seguente figura sono aggiunte quattro nuove *direzioni* (NE, NO, SO e SE), ruotate di 45° rispetto a quelle relative ai quattro punti cardinali:



Presso i Greci e i Romani erano presi in considerazione 12 venti, orientati come in figura e con le direzioni ruotate di fra loro di 30° (360/12 = 30):



Una rosa dei venti più complessa ne contiene ben 16; le direzioni sono fra loro ruotate di 22,5° (360°/16 = 22,5°):



Il significato delle sigle, tutte formate da lettere maiuscole, dovrebbe essere evidente: **NE** sta per **N**ord **E**st, **NNE** per **N**ord **N**ord **E**st e **ENE** per **E**st **N**ord **E**st.

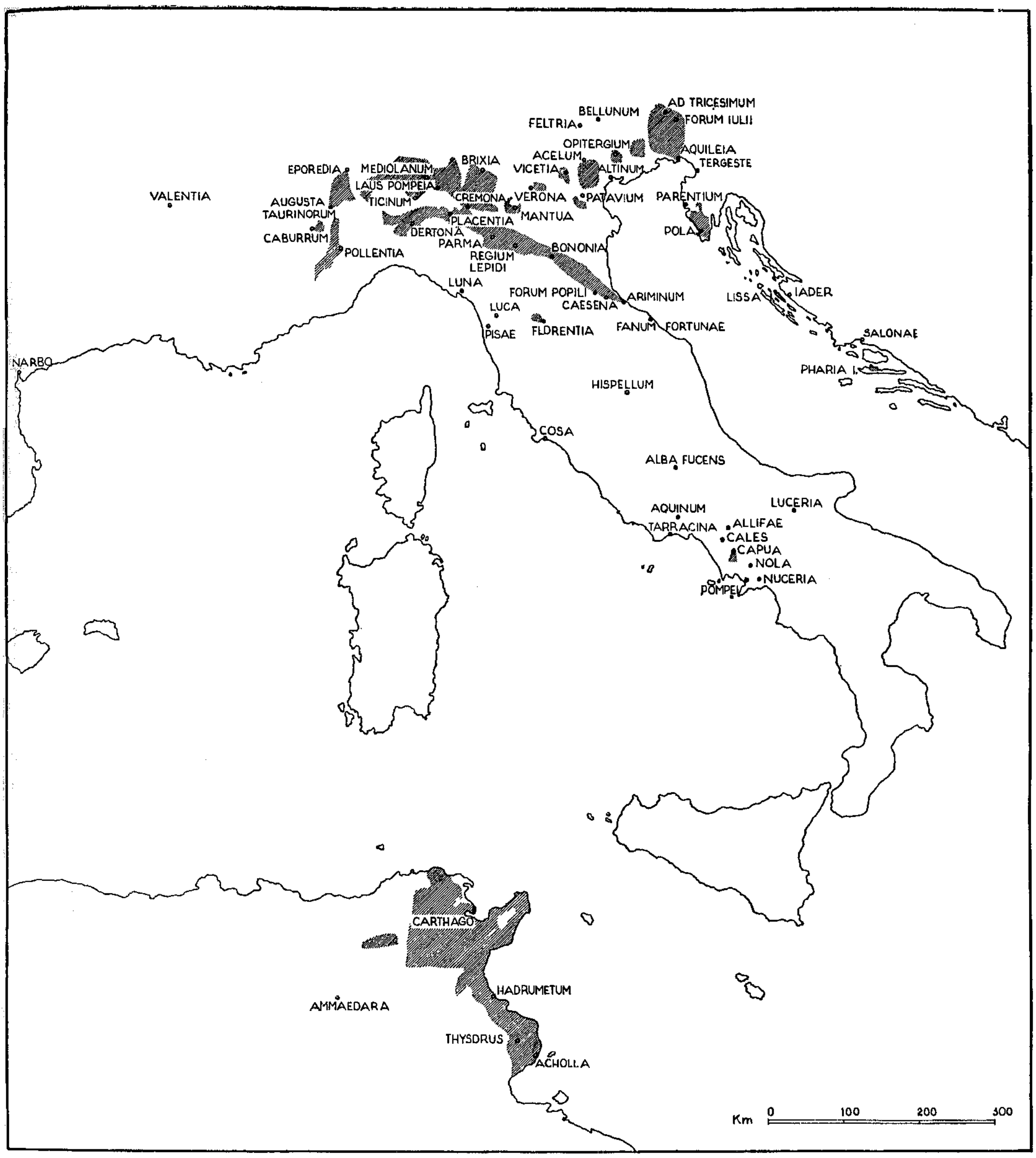
L'orientamento di alcune città di fondazione romana in Italia

La tabella che segue fornisce l'inclinazione del *cardo massimo* di alcune città italiane di sicura fondazione (o rifondazione) romana rispetto al Nord geografico (fonte: Giulio Magli):

città (nome moderno)	epoca di fondazione (sempre avanti Cristo)	inclinazione in gradi (°)
Pesaro	184	44 NE
Senigallia	284	44 NE
Minturno II	I secolo (a.C.)	40 NE
Rimini	268	37 NE
Verona	I secolo (a.C.)	36 NE
Vicenza	135	34 NE
Venafro	II secolo	28 NE
Aosta	25	26 NE
Aquileia	II secolo	19 NE
Telese (Benevento)	?	19 NE
Sorrento	I secolo	17 NE
Ostia	IV secolo	17 NE
Formia	III secolo	17 NE
Parma	183	8 NE
Trento	23	8 NE
Alatri	II secolo	7 NE
Atri (presso Teramo)	289	7 NE
Pestum	273	2 NE
Firenze	59	1 NE
Mondragone	296	3 SE
Lucca	180	4 SE
Pozzuoli (Rione Terra)	194	4 SE

Falerii Novi (presso Civita Castellana)	240	4 SE
Ascoli Piceno	269	6 SE
Albintimilium (presso Ventimiglia)\	I secolo	7 SE
Palestrina	90	7 SE
Brescia	I secolo	8 SE
Bologna	189	12 SE
Ferentino	II secolo	17 SE
Torino	29	30 SE
Minturno I	296	31 SE
Grumento Nova	III secolo	37 SE
Cosa (Ansedonia)	III secolo	38 SE
Luni	177	38 SE
Fano	I secolo	39 SE

La mappa che segue (riprodotta da Castagnoli, “*Le ricerche sui resti della centuriazione*”, citato in bibliografia), mostra le centuriazioni eseguite dai Romani in Italia, Dalmazia, Tunisia e Provenza:



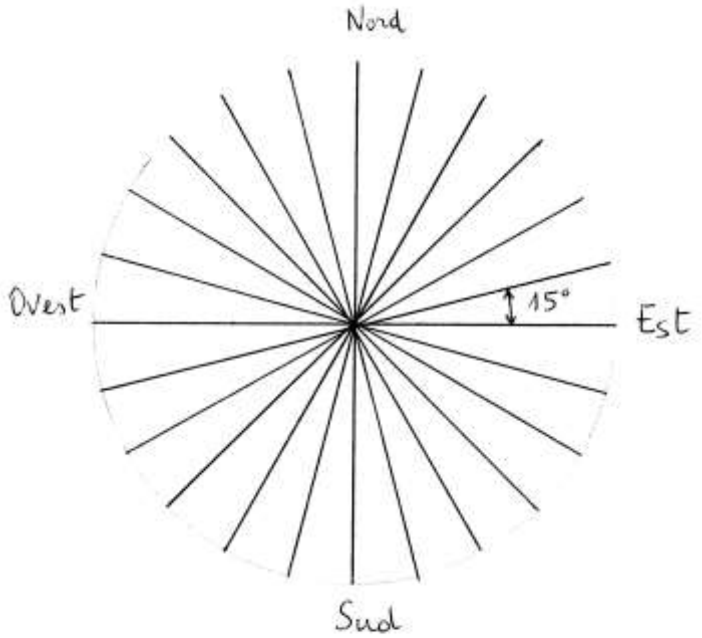
Carta delle centuriazioni sicure e finora documentate

Le proposte di Vitruvio riguardo all’orientamento delle città

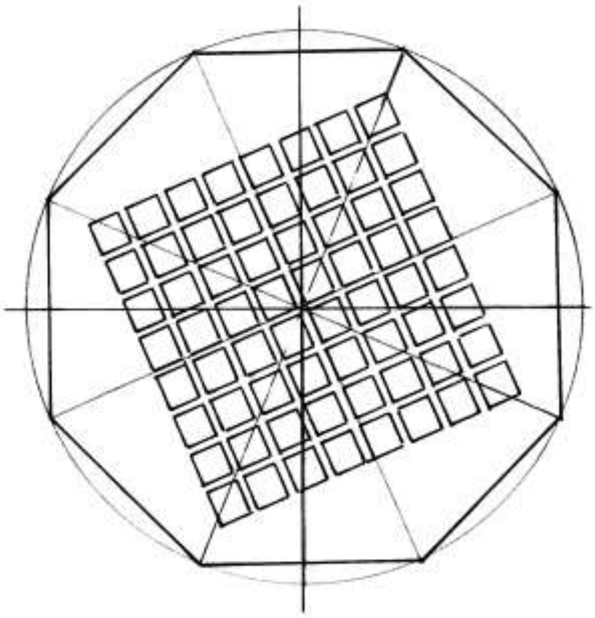
Nel suo trattato di architettura e di ingegneria, Vitruvio suggerì dei criteri da seguire nella progettazione della struttura delle città.

Egli propose di non orientare le strade delle città secondo le direzioni tradizionali, Sud – Nord e Est – Ovest, ma di orientarle inclinate, ruotandole di un angolo di 22,5°, angolo che è esattamente un quarto di un angolo retto (90/4 = 22,5).

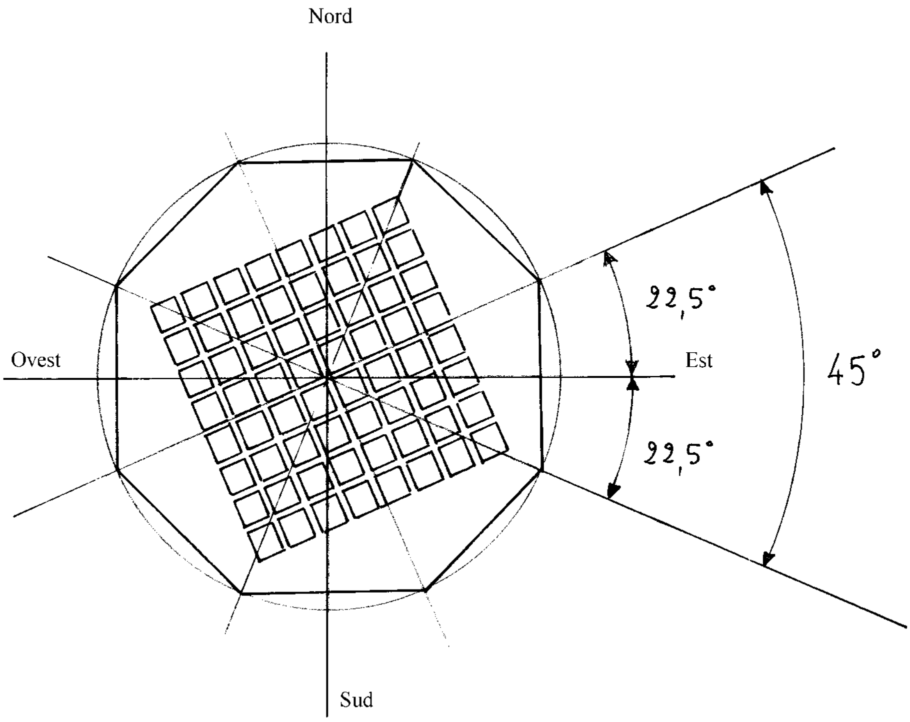
Egli usò inizialmente una *rosa dei venti* con 24 diverse direzioni, ruotate fra loro di 15° (360/24 = 15°):



Riferendosi a quella rosa dei venti, Vitruvio tracciò poi un *ottagono* regolare inscritto, orientato secondo 8 direzioni:

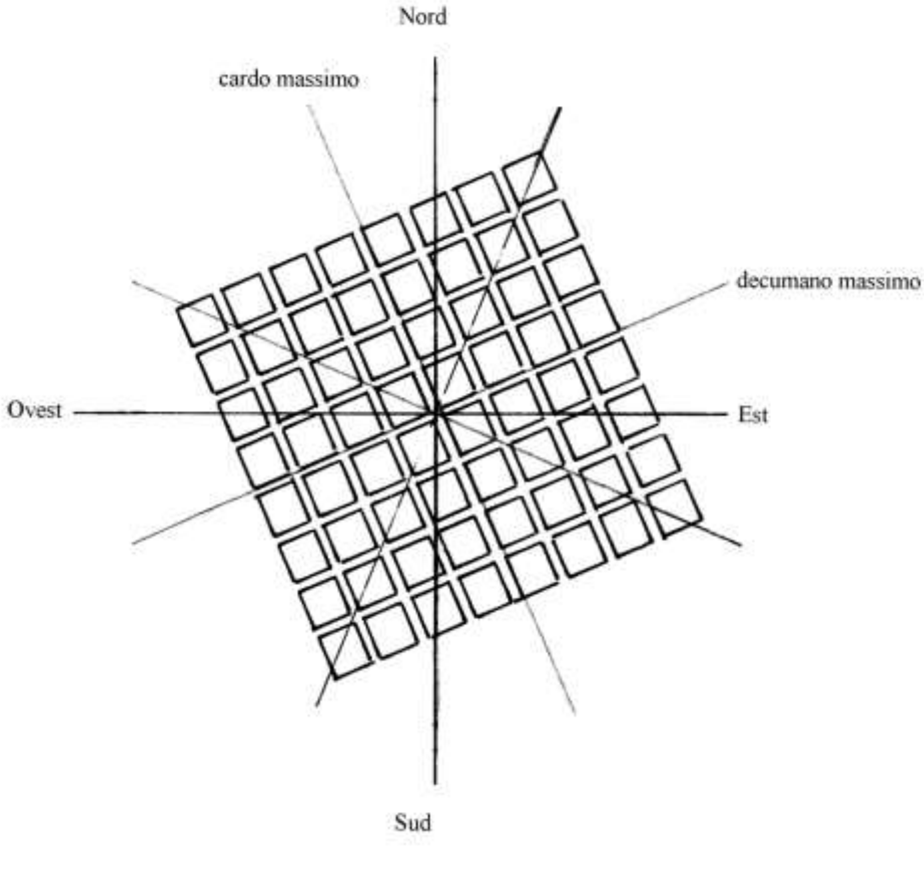


Nella figura che segue sono riportati gli angoli:

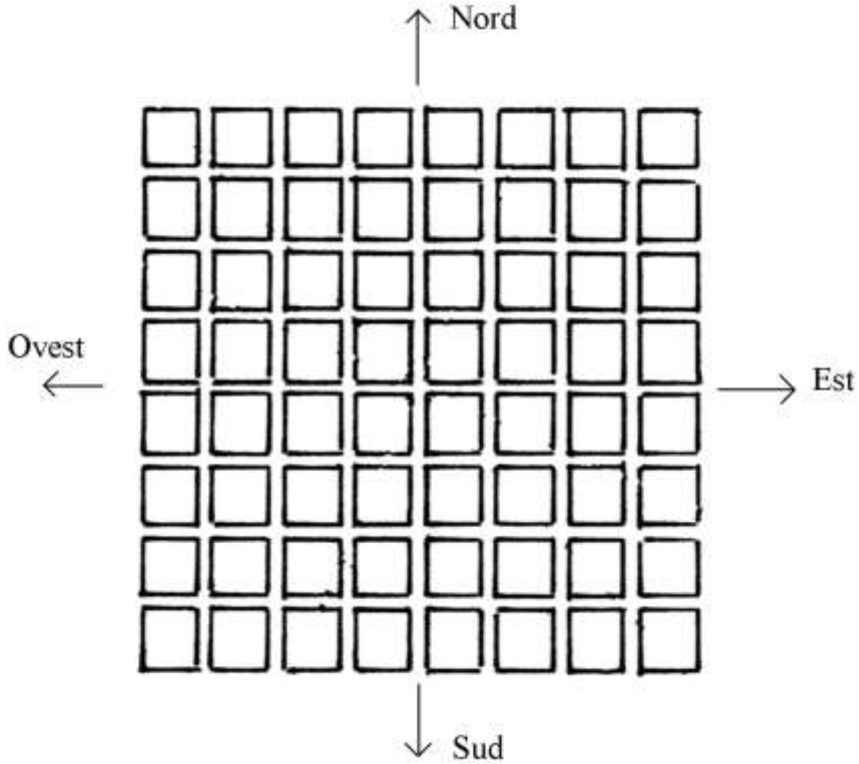


Vitruvio propose di ruotare l'orientamento delle strade di 22.5°, angolo che ricavò dalla divisione in due dell'angolo di 45° sotteso da un lato dell'ottagono (360/8 = 45°).

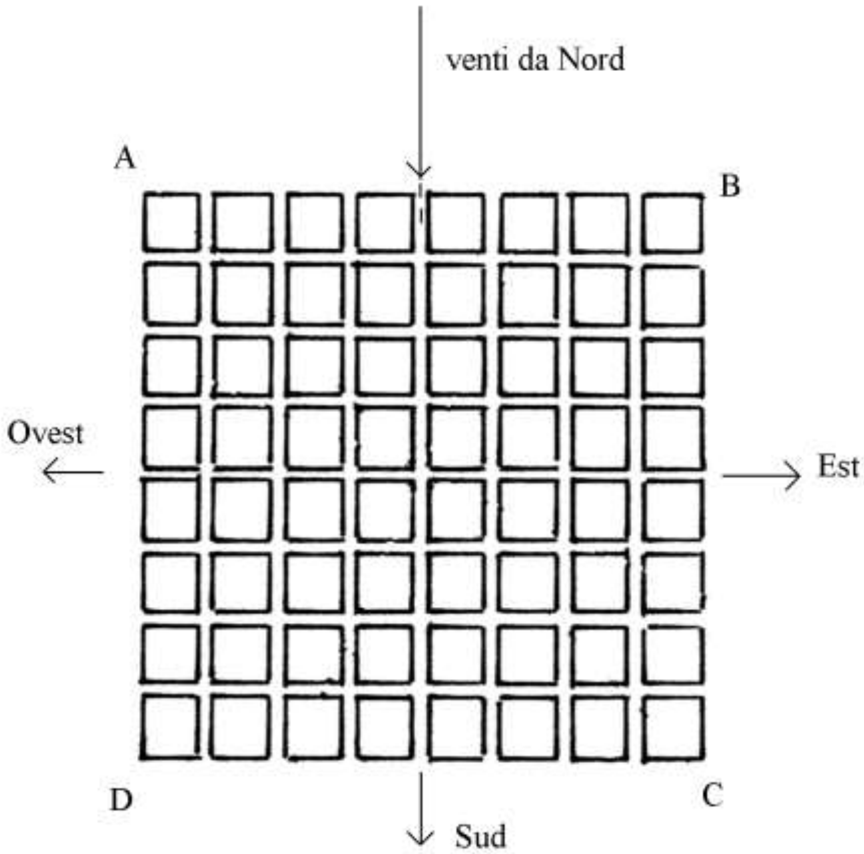
La città avrebbe avuto la disposizione descritta nella figura che segue:

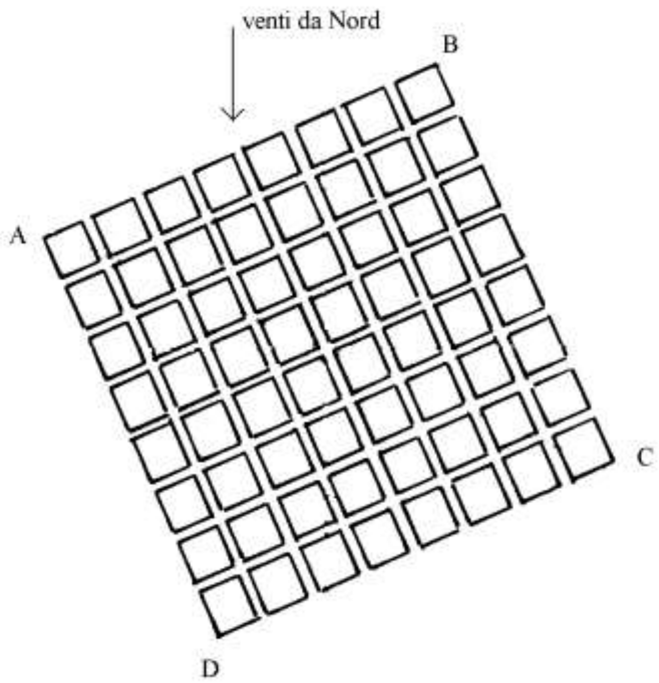


Una città perfettamente orientata verso i quattro punti cardinali avrebbe la struttura mostrata nella figura che segue:



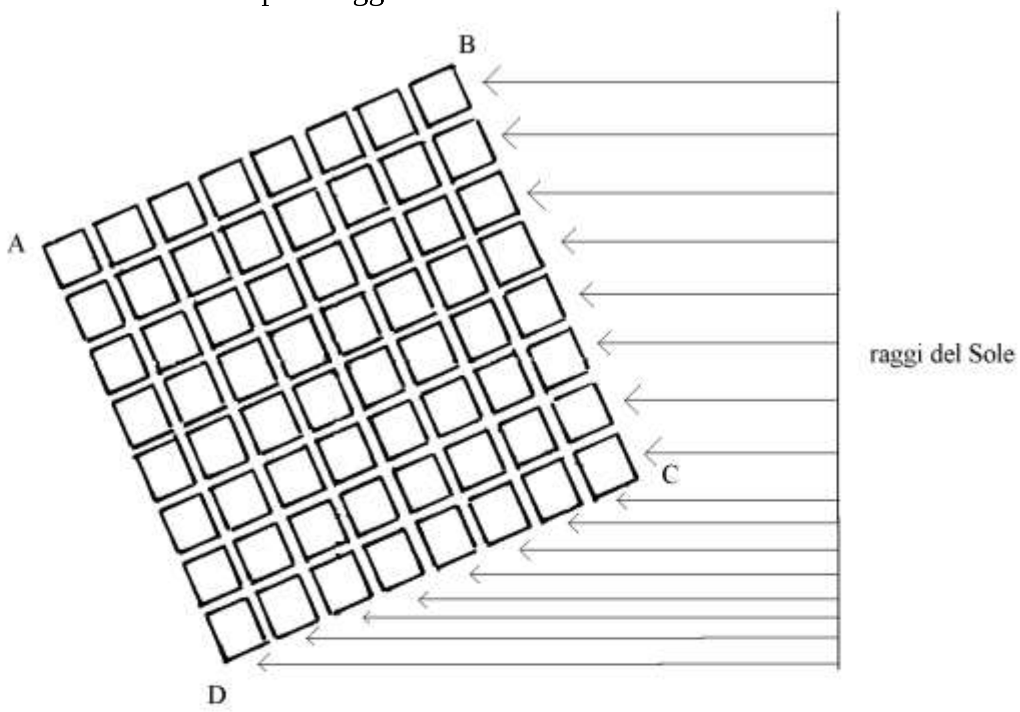
Vitruvio suggerì la soluzione *obliqua* per evitare che i venti predominanti potessero percorrere le vie orientate verso i quattro punti cardinali:





Ad esempio, i venti provenienti da Nord (vedere la figura qui sopra) colpivano le facciate orientate secondo AB con una direzione obliqua e i loro effetti erano attutiti.

Inoltre, l'obliquità permetteva ai raggi del Sole provenienti al mattino da Est di investire le facciate BC e CD e al pomeriggio le facciate AB e AD:



La centuriazione del terreno

In epoca romana, i terreni agricoli o da convertire in agricoli delle regioni conquistate erano assegnati ai coloni con un metodo, la *centuriazione*, anch'essa basata sulla "*Etrusca disciplina*".

Centuriazione deriva dal nome attribuito alle unità quadrate – *centurie* – di lato lungo circa 710 m in cui veniva diviso il territorio.

Gli agrimensori romani adattavano l'inclinazione degli assi della centuriazione (cardo e decumano sempre fra loro perpendicolari) alle limitazioni imposte dalla natura degli ostacoli presenti sui terreni: fiumi, laghi, paludi, mari, colline, montagne, boschi e foreste.

Gli Autori dei trattati Gromatici

I trattati dei Gromatici furono scritti in buona parte fra il 75 e il 120 d.C.

Essi raccolgono le regole e le pratiche degli Agrimensori che risalivano almeno al 300 a.C., data intorno alla quale i Romani iniziarono a fondare le loro *colonie* in Italia.

Le date attribuite ai trattati sono state desunte dalle dediche agli Imperatori romani in carica o da loro citazioni.

Fra i principali autori sono i seguenti:

- Sesto Giulio Frontino, vissuto nel I secolo.
- Igino Gromatico, attivo a cavallo dell'anno 100.
- Agenio Urbico (*Agennius Urbicus*), operante fra l'81 e il 96.
- Balbo, scrisse fra il 102 e il 106.
- Pseudo Igino, vissuto alla fine del II secolo.
- Siculo Flacco (*Siculus Flaccus*), attivo fra il 96 e il 291. Più probabilmente visse verso la fine del IV secolo.

Altri più piccoli trattati sono anonimi.

Tutti i manoscritti originali sono andati perduti. I loro testi furono raccolti in una collezione compilata nel corso del V secolo (o verso la fine di questo secolo) e conosciuta con l'espressione latina "*Corpus Agrimensorum Romanorum*" (o "*Gromatici Veteres*"). La collezione sarebbe stata redatta a Ravenna, in epoca bizantina. Da questo testo iniziale deriverebbero i manoscritti presenti in alcune biblioteche italiane, europee e americane.

Quattro manoscritti sono illustrati con delle *miniature* per un insieme di circa 350 illustrazioni di differenti tipologie: si va da semplici primitivi schizzi a più complesse mappe a colori di città o territori centuriati.

I trattati contenuti in quella raccolta furono ripetutamente copiati in Europa a partire dal VI secolo e fino almeno al XVII secolo. Subirono inoltre continui rimaneggiamenti.

I testi conservati in varie Biblioteche europee contengono molte illustrazioni che descrivono città e luoghi centuriati: esse sono state disegnate con una forma di *assonometria cavaliera* o *militare*.

- APPROFONDIMENTO -

La gromatica militare

I Gromatici civili si occupano della divisione e della misurazione dei terreni.

Anche la fondazione delle nuove città, le grandi costruzioni (acquedotti, strade) e i grandi edifici (ad esempio il Colosseo) richiedevano l'intervento dei gromatici civili con i loro strumenti di misura.

I gromatici militari si occupavano di organizzare gli spazi all'interno degli accampamenti militari.

Nelle regioni ai confini dell'Impero romano e in zone importanti per il traffico e per i commerci, gli accampamenti militari divenivano vere e proprie città con pianta quadrata o rettangolare. La pianta di un accampamento veniva organizzata con l'aiuto della groma.

Un'opera in latino, il *De Munitionibus Castrorum* ("Sulle fortificazioni degli accampamenti") è stata erroneamente attribuita a Igino Gromatico (attivo intorno all'anno 100) e il cui autore è convenzionalmente conosciuto come *Pseudo Igino*. L'opera è stata composta alla fine del II secolo, all'epoca dell'Imperatore Marco Aurelio (121-180). Essa descrive in maniera dettagliata un accampamento romano.

- -

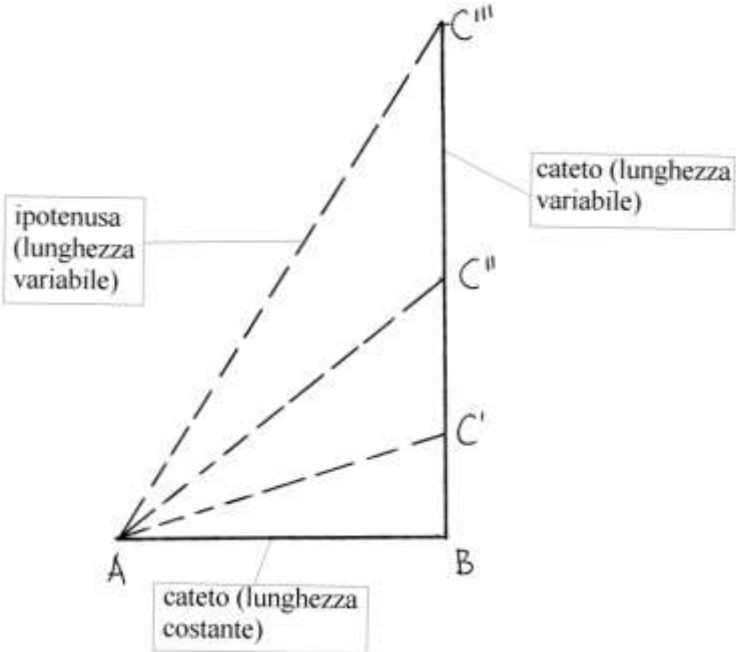
Geometria della centuriazione

La struttura regolare delle città fu impiegata anche alla divisione dei terreni agricoli circostanti alle stesse: la *centuriazione* era effettuata su base quadrata o rettangolare.

Alcuni studiosi hanno rilevato una interessante proprietà di queste centuriazioni: mentre gli assi delle città risultavano orientati con sufficiente precisione verso i poli geografici, gli assi delle centuriazioni dei territori (cardi e decumani) erano orientati diversamente.

Le ricerche condotte sui resti delle centuriazioni romane in Europa, in Africa settentrionale (in particolare in Tunisia) e in Asia hanno messo in evidenza lo scostamento dei relativi cardi e decumani di angoli preferiti.

Gli Agrimensori romani usavano l'ipotenusa di triangoli rettangoli con un cateto di lunghezza costante e l'altro variabile molto spesso in proporzione a 2, a 5 o a 10:



BC' era lungo in proporzione a 2, BC'' in proporzione a 5 e BC''' era proporzionale a 10 (nella stessa scala).

A questo proposito, è stata avanzata l'ipotesi che gli Agrimensori romani avessero a disposizione una squadra recante delle tacche incise a distanze uguali a 5 o a 10 unità di misura.

La divisione dell'area centuriata

L'area centuriata era divisa in particelle di forma quadrata, chiamate *actus*, di lato uguale a 120 *piedi*: un piede romano era lungo 29,57 cm (o 295,7 mm), secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma. Non sempre è stata rispettata questa misura standard.

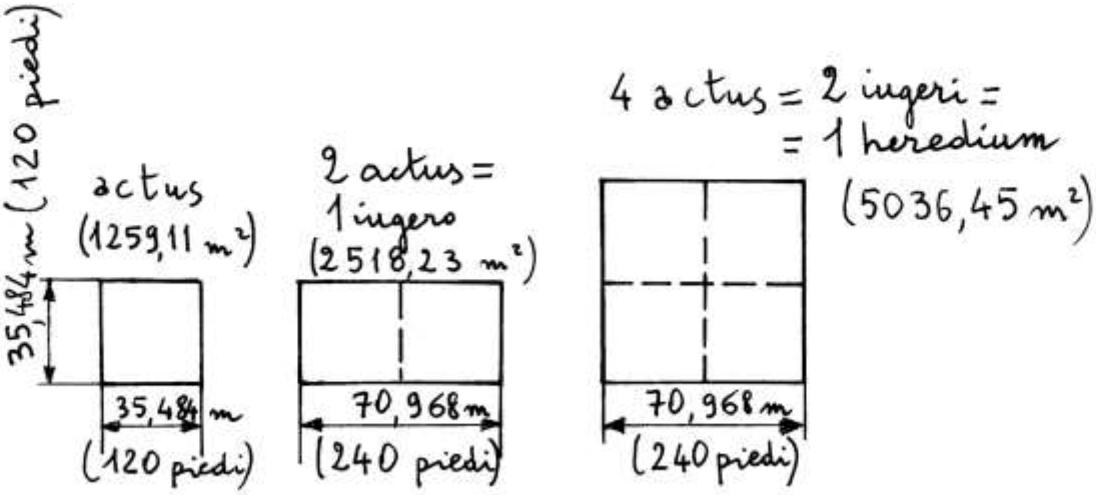
Una curiosità: la dimensione maggiore del foglio di formato A4 è 29,7 cm (297 mm). La misura è *quasi* uguale a quella della lunghezza del piede romano.

La misura di 120 piedi era ottenuta con successive misurazioni effettuate sul terreno con l'impiego della *pertica*, un'asta che poteva assumere due diverse lunghezze:

- 10 piedi (= 295,7 cm) e la pertica era detta *decempeda*,
- 12 piedi (= 354,84 cm).

Con la pertica da 10 piedi occorreva riportare 12 volte la sua lunghezza per determinare la distanza di 120 piedi; con la pertica da 12 piedi erano sufficienti 10 misurazioni.

Il lato dell'actus era quindi lungo 35,48 m. Nella figura che segue sono riportati valori *approssimati*:

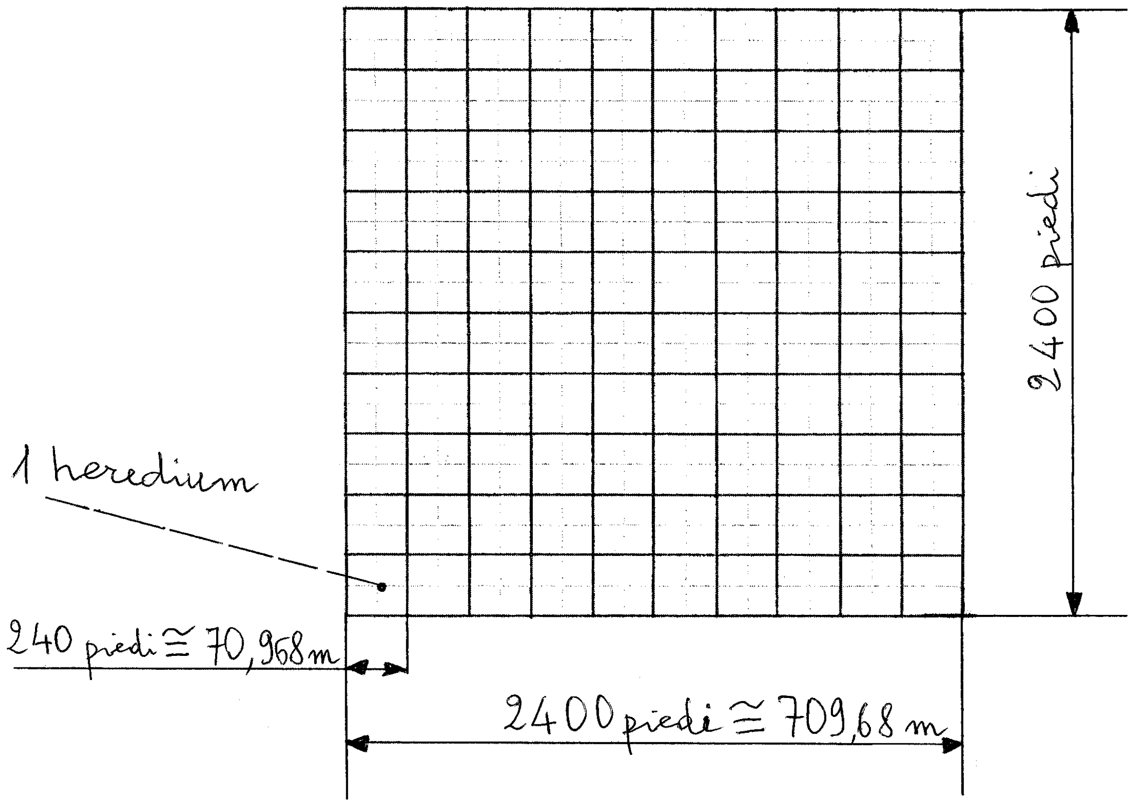


2 actus affiancati formavano 1 *iugero*: questa superficie corrispondeva, grosso modo, a quella lavorabile con l'aratro tirato da una coppia di buoi in una giornata di lavoro. Da questo dato di fatto potrebbe derivare la forma quadrata dell'*heredium*, lavorabile in due giorni.

2 iugeri (uguali a 4 actus) formavano un *heredium*: il nome indicava il diritto degli assegnatari a trasmettere la proprietà agli *eredi*.

Ai coloni era assegnata una porzione di terreno formata da 1 heredium.

La terra era divisa in *centurie,* così definite perché divise in 100 parti uguali formate da 100 *heredia* (plurale di *heredium*):



Il *perimetro* di una centuria era lungo 9600 piedi.

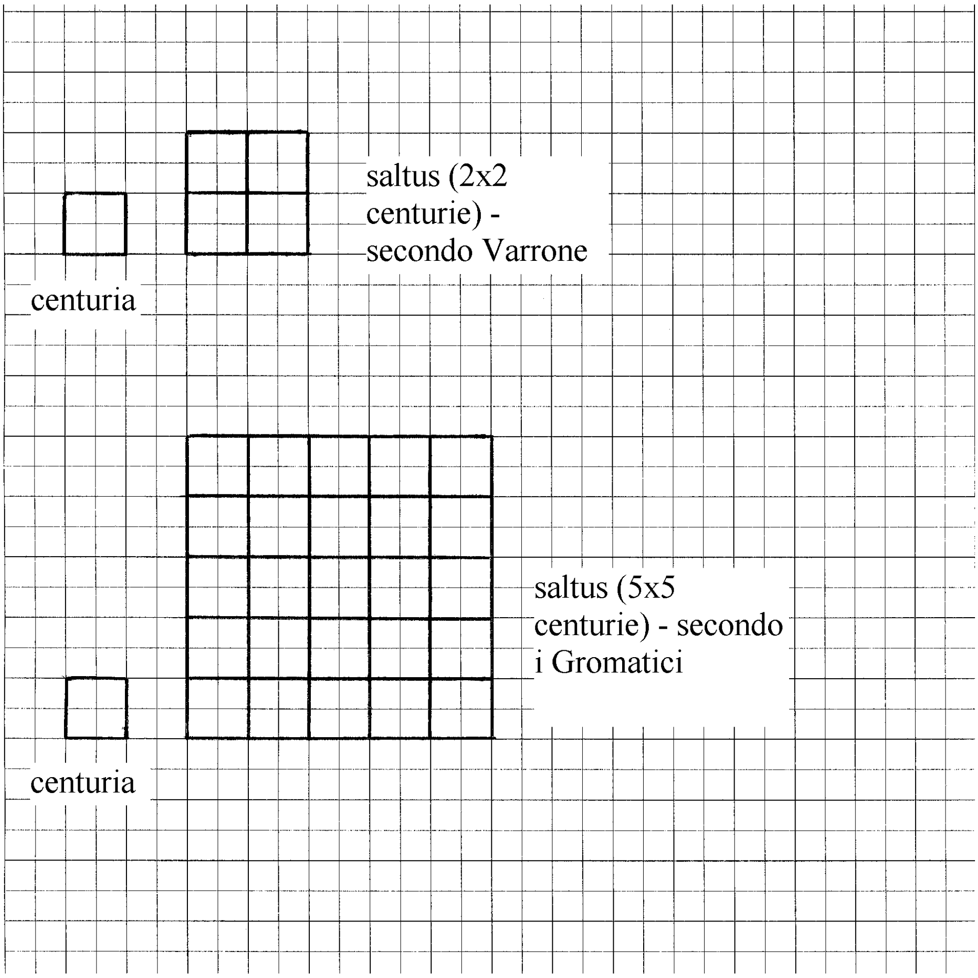
Dalla divisione di un territorio in *centurie* è derivato il termine *centuriazione*.

La tabella che segue riassume i dati relativi alla superficie delle quattro unità:

unità	superficie in m^2
actus (atto)	1259,11
iugero	2518,23
heredium	5036,45
centuria	503 645 m^2 = 50,3645 ha (*) = 0,503645 km^2

(*) *ha* sta per ettaro.

Un’altra unità di superficie era usata dai Romani: si tratta del *saltus*, di forma quadrata, che secondo lo scrittore latino Marco Terenzio Varrone (Rieti, 116 a.C. – Roma, 27 a.C.) era costituito da 4 centurie e secondo i Gromatici da 25 centurie:



La tabella che segue riassume le dimensioni e la superficie delle più grandi unità di superficie della centuriazione:

unità di superficie	dimensioni in metri	superficie in m^2
heredium	70,96 x 70,96	5036,45
centuria (= 100 heredia)	709,6 x 709,6	503 645
saltus (secondo Varrone – 4 centurie)	1419,2 x 1419,2	2 014 580
saltus (secondo i Gromatici – 25 centurie)	3548 x 3548	12 591 125

- APPROFONDIMENTO -

<u>La pertica</u>

Oltre ad essere usata per indicare sia un'unità di misura lineare e sia l'asta usata a questo scopo, il termine *pertica* assumeva altri significati: ad esempio era il nome attribuito a un territorio diviso per centuriazione e assegnato o da assegnare ai coloni.

Pertica era pure usata per indicare un bastone, una lunga asta di legno, un sostegno per le viti, un elemento di una struttura di una gabbia di polli, uno strumento usato per bacchiare le olive e le noci, un'asta per battere il grano.

Anche la sbarra usata per chiudere una porta era chiamata *pertica*.

- -

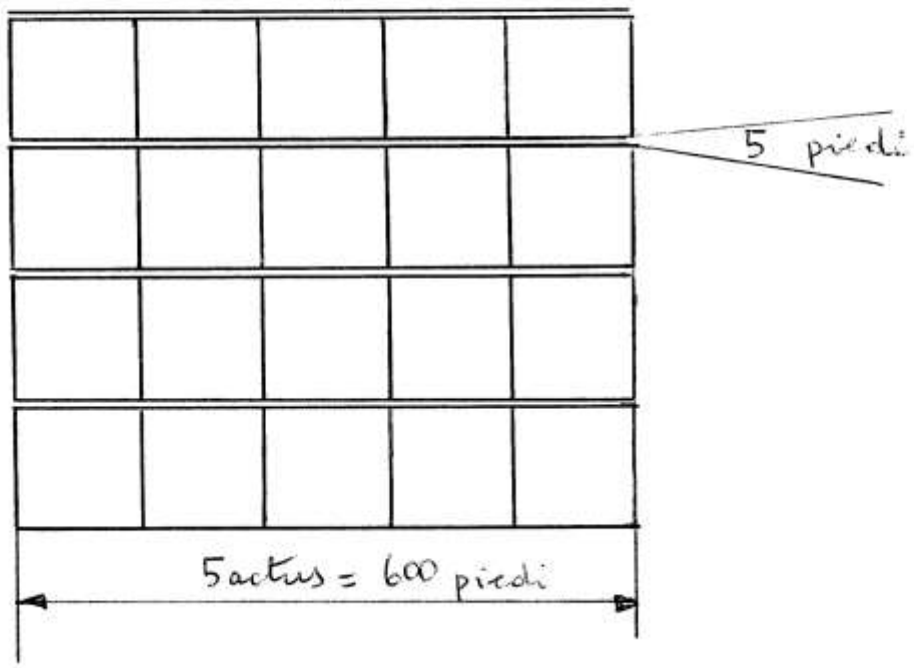
Altri metodi di centuriazione

La regola dell'assegnazione di un lotto di terreno uguale a un solo iugero non fu sempre rispettata. In alcuni casi fu concesso un lotto di maggiore superficie e ciò avvenne per tener conto delle condizioni dei diversi suoli, sia per assegnare lotti di superficie in qualche modo legata al grado raggiunto nell'esercito romano dai futuri coloni. Un esempio è quello della centuriazione di Aquileia (nell'attuale provincia di Udine), avvenuta nel 181 a.C.: ai fanti furono assegnati 50 iugeri a testa, ai centurioni 100 e ai cavalieri ben 140! Riguardo al 'peso' delle tre classi sono state proposte le seguenti cifre:

- 3000 fanti;
- 300 cavalieri;
- 60 centurioni.

In alcune regioni dell'Impero (ad esempio in Italia e in Francia) i Romani usarono un differente metodo di centuriazione, con l'assegnazione di *strisce* rettangolari, allungate come fossero ritagli di stoffa o di cuoio.

Nel Veneto, fra Cittadella e Castelfranco, sono state riscoperte delle strisce formate da 5 actus, separate da stradine larghe 5 piedi:



La disposizione descritta nella precedente figura è detta "*a pettine*". Essa può essere stata imposta dalla presenza di numerosi canali di scolo creati dalle grandi bonifiche realizzate dai Romani nei terreni paludosi.

La metrologia romana

La metrologia romana impiegava unità di misura di lunghezza lineare su base 5 e su base 6 e i loro multipli e sottomultipli.

Il *sistema di numerazione* romano era basato sul numero *cinque*.

I numeri 5 e 12 (= 2x6) che caratterizzano i multipli della *centuria* presentavano una proprietà fondamentale per gli Agrimensori romani: le diagonali dei quadrati con lati lunghi 5 e 12 sono facilmente approssimabili a numeri interi:

quadrato lato 5 → diagonale = $\sqrt{50} = 7{,}071 \approx 7$

quadrato lato 12 → diagonale = $\sqrt{288} = 16{,}9705 \approx 17$

L'unità di misura base della lunghezza era il *piede* (29,57 cm).

Sembra che il più importante strumento usato dai tecnici romani per disegnare fosse un *righello* lungo 1 piede; esso era diviso in sottomultipli lungo i due bordi paralleli:

- in *once* (1/12 di piede) su di un lato;
- in *dita* (1/16 di piede) sull'altro.

Lucio Giunio Moderato Columella (4 – 70) è stato uno scrittore romano che ha lasciato un importante trattato di agricoltura, il *De re rustica* ("L'arte dell'agricoltura").

Nel V libro della sua opera Columella ha fornito molte informazioni sulle unità di misura (lineari, di superficie) usate in agricoltura.

La tabella che segue presenta i sottomultipli del piede, sulla base della relazione 1 piede = 29,57 cm:

nome	rapporto con il piede	lunghezza in cm
dito (digitus)	1/16	1,848
oncia (uncia)	1/12	2,464
palmo (palmus)	1/4	7,39
sestante (sextans o dodrans)	3/4	22,1775

Nella tabella che segue sono riportate le unità di misura lineari multiple del piede:

nome	rapporto con il piede	lunghezza in cm (o in metri, dove indicato)
palmipes (piede + palmo)	1 1/4	36,96
cubito	1 ½	44,355
passo semplice (gradus) o grado	2 ½	73,925
passo doppio (passus)	5	147,85
pertica (decempeda)	10	295,70
actus (atto)	120	35,484 metri
lato maggiore iugero	240	70,968 metri
stadio (stadium) = 125 passi doppi	625	184,81 metri
centuria	2 400	709,68 metri
miglio (miliarius)	5 000 (= 1 000 passi doppi)	1478,5 metri
lega (leuga)	7 500	2217,75 metri
lato saltus	12 000	3548,4 metri
lato ager	60 000 (= 12 miglia)	17 742 metri

Il gruppo delle prime unità di misura (dito, oncia, palmo, piede e cubito) è di derivazione *anatomica* perché esse sono ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

Anche altre antiche civiltà usarono unità di misura di derivazione anatomica: i Sumeri e i Babilonesi e gli Egizi.

Un *secondo* gruppo di unità di misura lineari (grado o passo, passo doppio, miglio) erano legate agli spostamenti dell'uomo; sono unità di natura *dinamica* perché misurano lunghezze percorribili: un *passo semplice* è coperto dal movimento di una sola gamba e il *passo doppio* è rappresentato dal moto successivo e coordinate delle due gambe di un uomo.

Un terzo gruppo di unità di misura lineari riguardava l'agricoltura. La base era l'*actus* (atto), equivalente alla lunghezza di 120 piedi. Secondo Plinio, l'atto " … è la distanza che in un solo normale slancio riescono a coprire i buoi con l'aratro …".

La tabella che segue descrive le principali unità di misura di superficie usate dai Romani:

nome	dimensioni	superficie in cm^2 o in m^2
piede quadrato	29,57 x 29,57 cm	874,38 cm^2
pertica quadrata	10 x 10 piedi = 100 $piedi^2$	8,7438 m^2
clima	60 x 60 piedi = 3600 $piedi^2$	314,7768 m^2
actus (atto quadrato)	120 x 120 piedi quadrati = 14 400 piedi quadrati	1259,11 m^2
iugero	2 actus = 28 800 piedi quadrati	2518,22 m^2
centuria	200 iugeri = 5 760 000 piedi quadrati	503 645,7 m^2

Sempre in agricoltura, l'unità base di superficie era lo *iugero*, un rettangolo con lati 120 x 240 piedi: esso corrispondeva alla superficie di terreno arato in un giorno da una coppia di buoi.

- APPROFONDIMENTO -

Il piede internazionale

Il piede è un'unità di misura di lunghezza che non fa parte del sistema del sistema internazionale di unità di misura (SI).

Il *piede internazionale* ("*international foot*") corrisponde a una lunghezza di 30,48 cm.

È usato per misurare le *quote* in aeronautica e la lunghezza delle imbarcazioni a vela.

- -

Il catasto romano

Dopo aver completato l'assegnazione dei terreni, i Romani registravano le particelle di concesse ai coloni in due distinti documenti: uno era custodito nella città vicina e un secondo era conservato a Roma. Si trattava di un disegno *in pianta* chiamato *forma*.

La forma era lo schema grafico ufficiale al quale fare ricorso nel caso di liti fra i diversi assegnatari. Era un precursore dei moderni *catasti*.

La prima copia della forma era di bronzo e veniva esposto nella colonia in un luogo pubblico. La seconda copia era disegnata *su tela* e inviata all'archivio centrale a Roma. Delle copie inviate a Roma non esistono tracce perché la tela era un materiale deperibile.

In diverse località sono stati ritrovati documenti, per così dire *locali*, incisi nel marmo che contengono copie più o meno integre di quei registri. Non è stata ritrovata alcuna *forma* intera di bronzo.

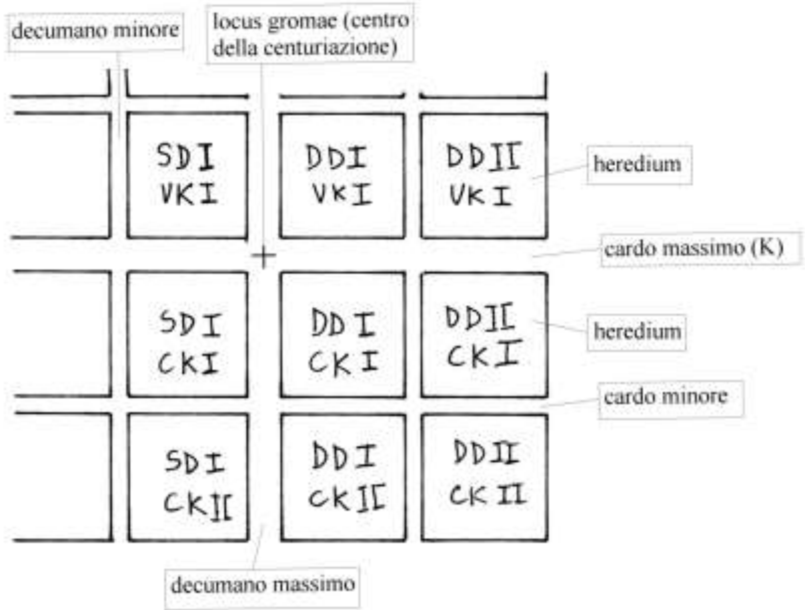
Erano pure compilati altri documenti relativi ai terreni non assegnati.

Il singolo terreno assegnato portava il nome del primo proprietario e nel caso di cambiamenti era necessario consultare altri libri per ricostruire i passaggi di proprietà.

Per distinguere le diverse proprietà assegnate, i Romani usavano dei riferimenti fissati rispetto al cardo e al decumano massimi di una centuriazione, metodo che costituisce un chiaro precursore di quello delle *coordinate cartesiane*.

Per la forma quadrata delle particelle di terreno, la struttura delle mappe si avvicina a quella della *scacchiera* della dama e degli scacchi o alla struttura di un pavimento coperto con mattonelle quadrate uguali.

Il centro della centuriazione era dato dall'incrocio del cardo massimo e del decumano massimo ed era chiamato *locus gromae* (nella mappa che segue il cardo massimo è disposto in senso orizzontale e il decumano massimo in senso verticale):

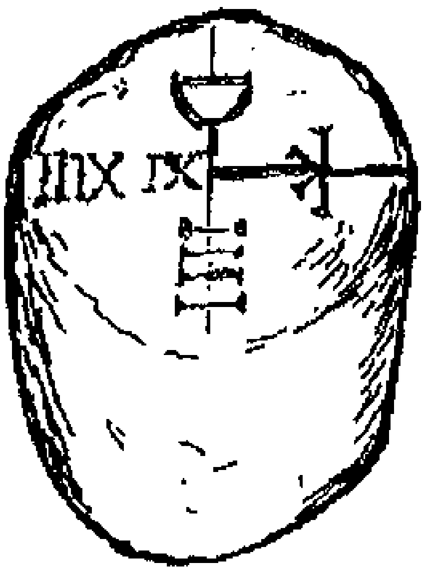


Gli *heredia* assegnati, tutti di forma quadrata, erano contrassegnati sulla mappa (o *forma*) con delle sigle il cui significato è spiegato nella tabella che segue:

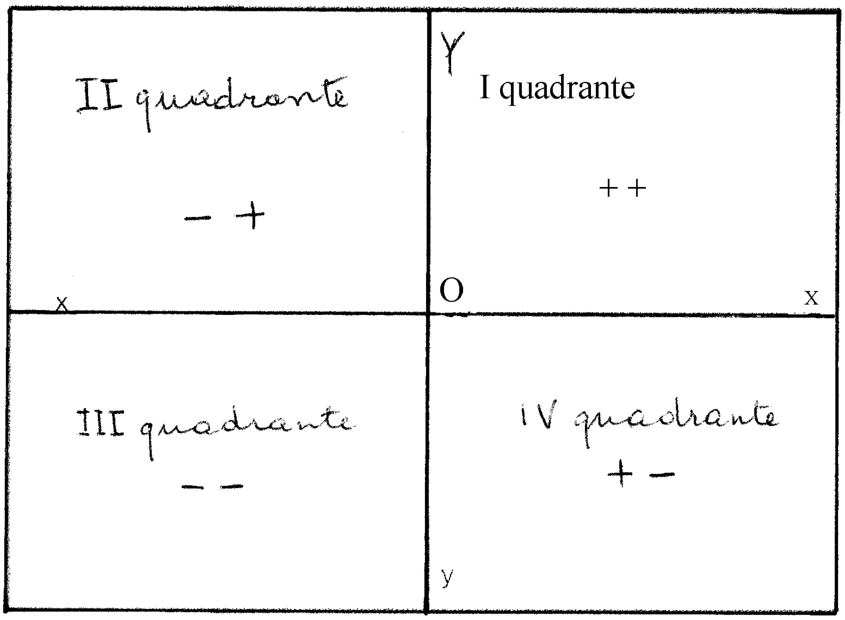
sigle	significato
SD	S(inistra) D(ecumano)
DD	D(estra) D(ecumano)
VK	U(ltra) K(ardo) (*) (**)
CK	C(itra) K(ardo) (***)
I	1 (numero romano)
II	2
III	3

(*) *Ultra* significa *al di là*.
Kardo era il nome latino del *cardo*.
(**) Nel primo alfabeto latino non erano presenti le lettere J, U, W, Y e Z. In particolare la distinzione fra le lettere U e V risale al Rinascimento.
(***) *Citra* significa *al di qua*.

Appositi *cippi* posizionati sul terreno indicavano la posizione di una centuria:



Il metodo usato dai Romani per determinare la posizione delle particelle di terreno assegnate può essere facilmente confrontato con quello delle *coordinate cartesiane*:

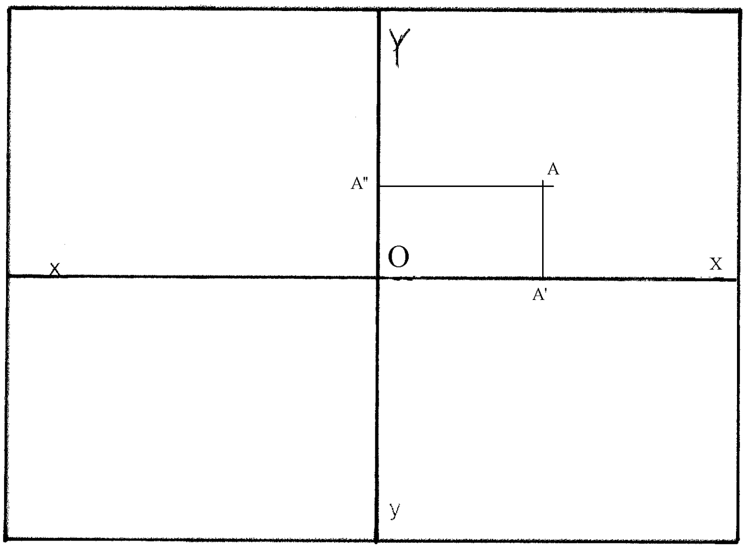


Invece di usare le espressioni dei Gromatici – *destra*, *sinistra*, *aldilà*, *aldiquà* – nel piano cartesiano sono usati i segni + (più) e – (meno).

Il *cardo* corrisponde all'asse Y (asse delle *ordinate*) e il *decumano* all'asse X (asse delle *ascisse*).

I quattro quadranti del piano cartesiano sono contrassegnati con i numeri romani da I a IV e risultano ruotati in *senso antiorario* a partire dal semiasse X orientato dal punto O verso destra. Nel piano cartesiano le posizioni di un punto sono indicate da una coppia di cifre, racchiuse fra parentesi tonde (…) e separate da una virgola: (ascissa, ordinata).

Tutte le distanze sono misurate a partire dal punto O, *parallelamente* ai due assi, come spiega la figura che segue:



Il punto A è proiettato sui due assi e sono fissati i punti A' (sull'asse delle ascisse) e il punto A'' (sull'asse delle ordinate) e le sue coordinate sono le seguenti:

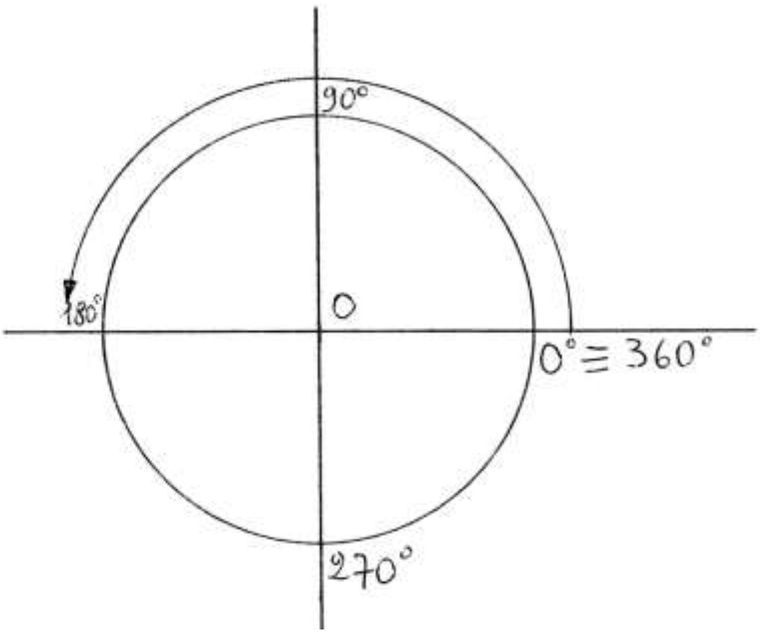
$$(X_A, Y_A)$$

Il valore X_A è la lunghezza del segmento OA' e il valore Y_A misura la lunghezza di OA''.

La tabella che segue riassume i segni nei quattro quadranti:

quadrante	segno ascisse	segno ordinate
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

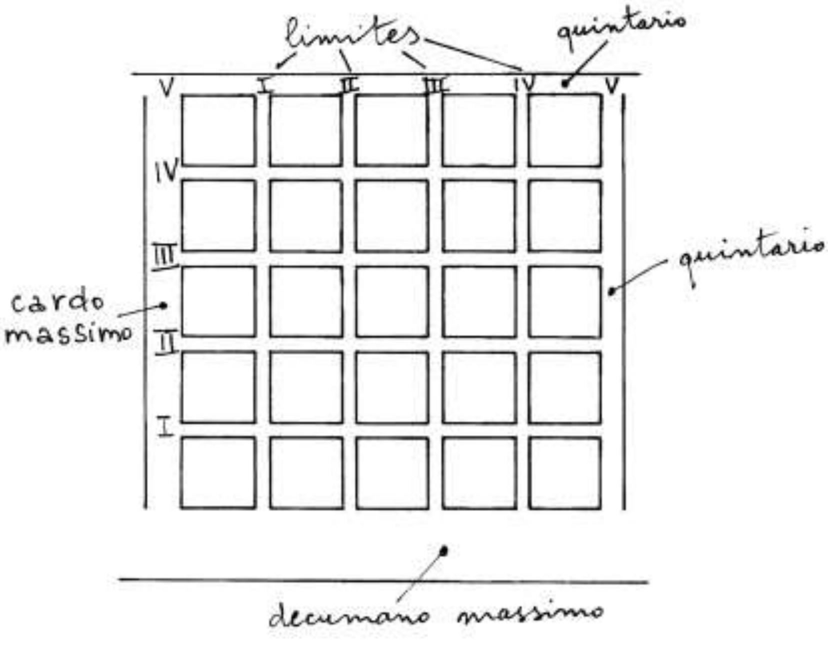
Nel *cerchio trigonometrico* gli angoli sono misurati in *senso antiorario*, a partire dal semiasse orizzontale orientato dal punto O verso destra (semiasse che corrisponde al semiasse positivo delle ascisse):



- APPROFONDIMENTO -

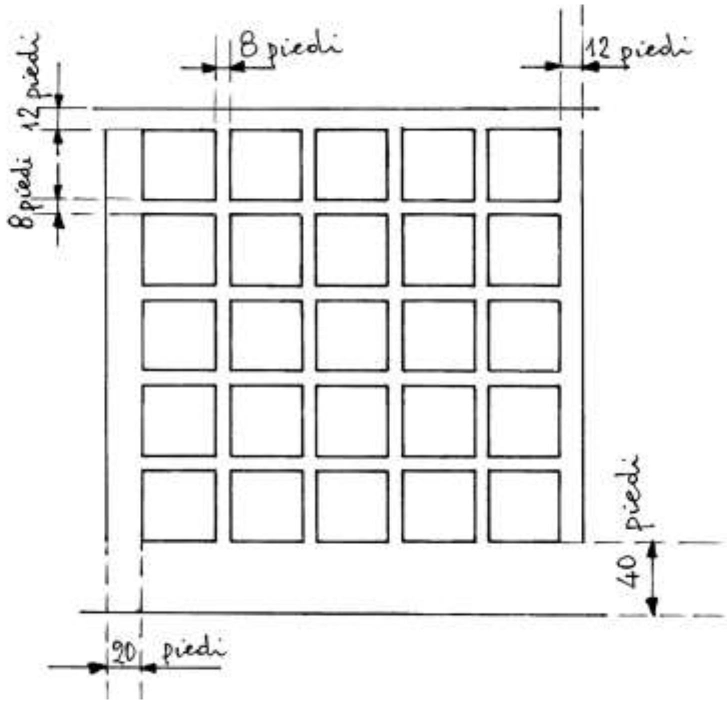
La larghezza delle strade della centuriazione

Il terreno centuriato era diviso fra le varie proprietà per mezzo di fossati e di strade rettilinee, sempre orientati come i cardi e i decumani: i fossati e le strade formavano i *limites*, numerati da I a V, progressivamente a partire dai cardi e dai decumani. Il quinto (V) limites era chiamato *quintario*:



Il decumano massimo era tracciato con una larghezza di 40 piedi (11,828 m); il cardo massimo era più stretto: solo 20 piedi (5,914 m).

I limites erano larghi 8 piedi (2,3646 m), mentre i quintari erano più larghi: 12 piedi (3,5484 metri):



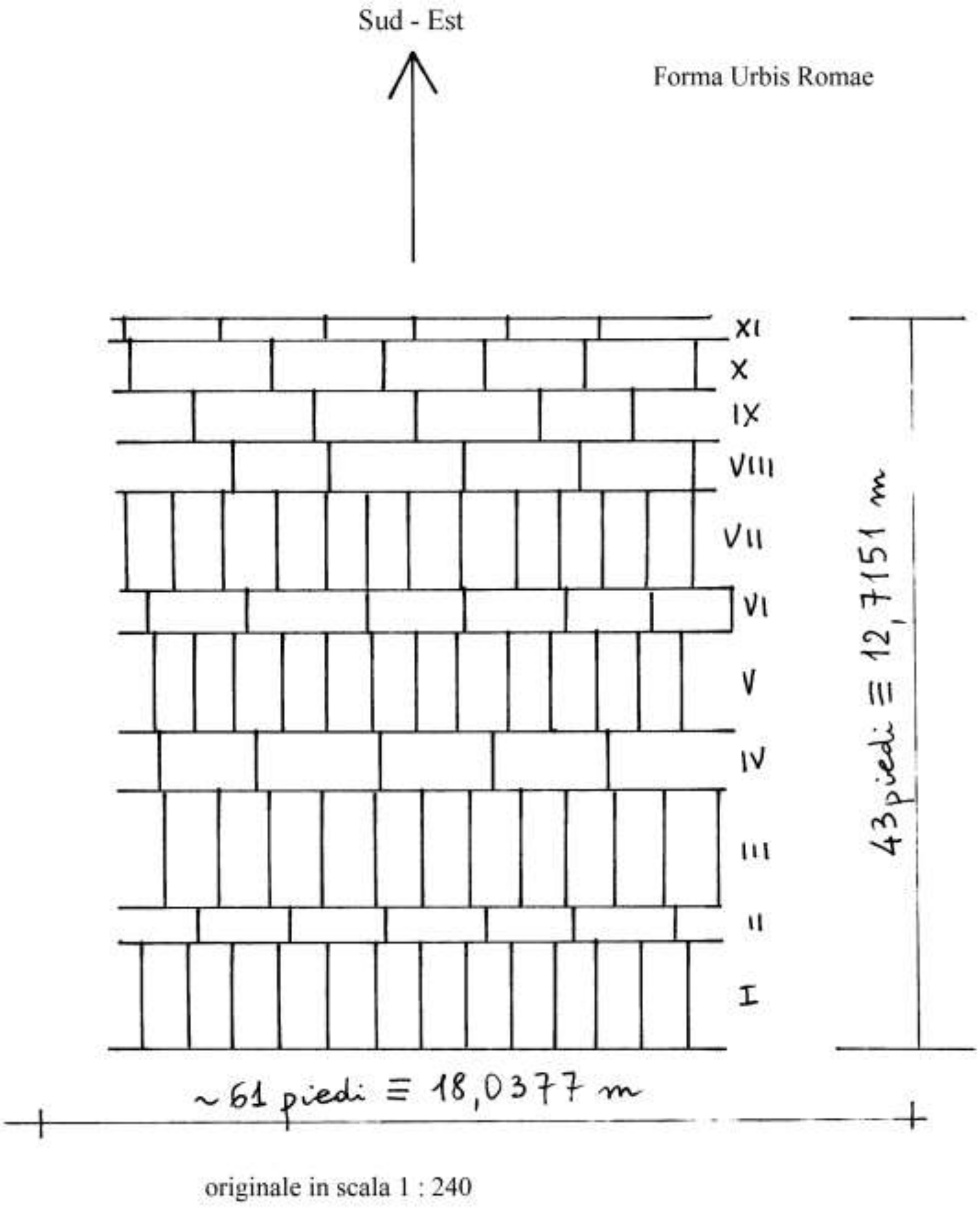
- -

Le mappe dei Romani

È probabile che i Romani disponessero di *mappe* delle terre conquistate o da conquistare. È stata avanzata l'ipotesi che esse fossero tracciate riportando le misurazioni effettuate sul terreno con il metodo della *quadratura* (o *quadrangolazione*): gli Agrimensori romani usavano quadrati tracciati con l'impiego di assi fra loro perpendicolari; questi poligoni venivano ingranditi o ridotti secondo le necessità.

Un esempio di questo tipo di disegni è dato dalla *Forma Urbis Severiana* (o *Forma Urbis Romae*), una pianta della città di Roma realizzata nel periodo fra il 203 e il 211 e collocata in senso verticale nel Tempio della Pace.

Fu realizzata con circa 150 lastre rettangolari di marmo di differenti dimensioni e disposte su *undici* file:



Sulle lastre erano incise le piante del *piano terra* di tutti gli edifici di Roma (con i loro nomi), mediante l'uso di disegno a filo a ferro e l'impiego di alcuni simboli.

La pianta era orientata con il Sud – Est in alto.

La scala della pianta era 1:240: 240 è multiplo di 5 e di 6 (oltreché di 4). La lunghezza di *1 piede* sulla mappa corrispondeva alla lunghezza di *2 actus* o a quella del lato maggiore di *1 iugero* (e cioè 240 piedi).

Gran parte delle lastre sono state danneggiate e sono andate perse: si conservano 1186 frammenti che studiosi di varie nazionalità hanno studiato e ricomposto per ricostruire la pianta originale.

Il catasto di Orange

Oltre alla *Forma Urbis Romae* è conosciuto un altro documento inciso su marmo.

Orange è una città della Provenza. Fu fondata come colonia dai Romani nel 35 a.C.

Le assegnazioni di terre ai veterani nei pressi della colonia di Orange furono registrate su tre catasti incisi nel marmo: di essi si sono conservati complessivamente solo 298 frammenti.

Su uno di questi catasti (quello che gli studiosi hanno contrassegnato con la lettera C), le centurie quadrate erano tracciate in scala approssimativamente uguale a 1:6 000.

La groma

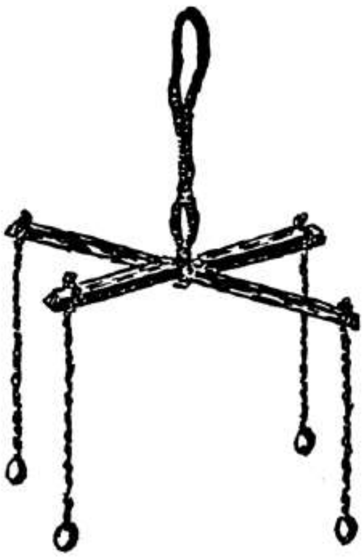
La *groma* è uno strumento usato dai Romani per la determinazione degli assi perpendicolari nei riti di fondazione di una città o nella centuriazione di un grande terreno per dividerlo in particelle regolari di area uguale a 1 *centuria* (equivalente a 50,4 ettari). La *centuria* era poi frazionata in 100 particelle uguali, di forma quadrata, ciascuna delle quali era assegnata a un coltivatore.

Dal nome di questo importante strumento, gli agrimensori romani furono chiamati *Gromatici*: sono pervenuti fino ai tempi nostri copie manoscritte dei trattati che essi composero.

La groma e altri strumenti (fra i quali il *chorobate* o *corobate*, una lunga livella ad acqua) erano largamente impiegati nella progettazione e nella costruzione degli acquedotti romani.

È nota la straordinaria precisione ottenuta dai Romani nella costruzione degli acquedotti.

La parola *groma* pare derivi dall'etrusco *kruma*, a sua volte proveniente dal greco *gnomon*. Esistono prove che dimostrano l'uso di una groma da parte degli Agrimensori egizi, benché di dimensioni più piccole di quelle etrusco-romane: essa era fatta con due costole di foglie di palma lunghe 342 e 352 mm, incrociate ad angolo retto e sostenute da una corta impugnatura:



Queste ridotte dimensioni possono essere spiegate con la natura pianeggiante della Valle del Nilo, rispetto alla natura collinare che caratterizzava i terreni italiani.

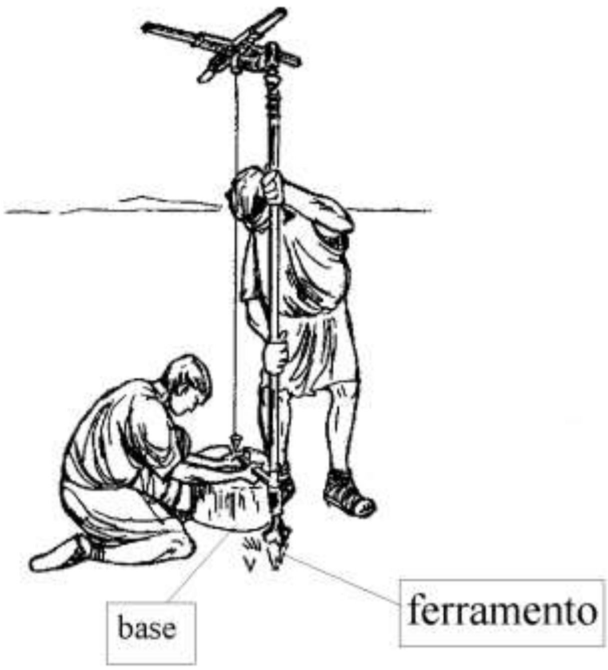
Le origini dell'Agrimensura vanno cercate presso gli Egizi e i Babilonesi, alle prese con la necessità di ridefinire i confini dei terreni dopo le esondazioni dei loro rispettivi grandi fiumi (Nilo e Tigri – Eufrate).

In Egitto, gli agrimensori usavano una pluralità di strumenti per *misurare con la vista*: corde, filo a piombo, livella.

Secondo alcuni studiosi dell'Ottocento, la groma giunse agli Etruschi dai Babilonesi.

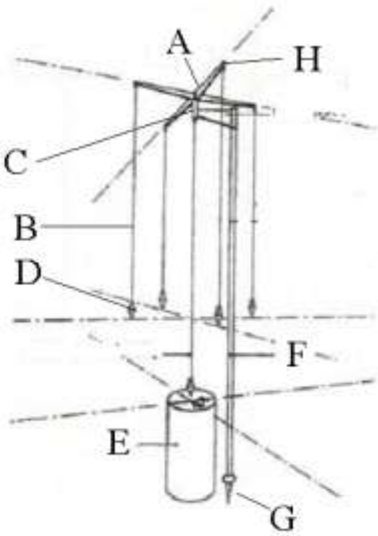
Le tecniche agrimensorie dei Romani derivarono dalla cultura degli Etruschi: le città romane venivano fondate seguendo le regole della “*etrusca disciplina*”.

La groma era formata da un’asta chiamata *ferramento* da conficcare verticalmente nel terreno. Il termine latino *ferramentum* derivava dal fatto che il piede dell’asta era fatto di *ferro*. Nei trattati dei Gromatici, la groma è chiamata poche volte con questo nome e molto spesso *ferramentum*.



La struttura della groma era poggiata sul terreno per mezzo di una *base* rigida, di legno o di pietra: sul suo punto centrale veniva posizionata l’estremità di un filo a piombo pendente dal centro della squadra.

A - squadra ad angoli retti
B - filo a piombo
C - rostro
D - peso di piombo
E - base di appoggio
F - ferramento
G - piede del ferramento
H - curnicola



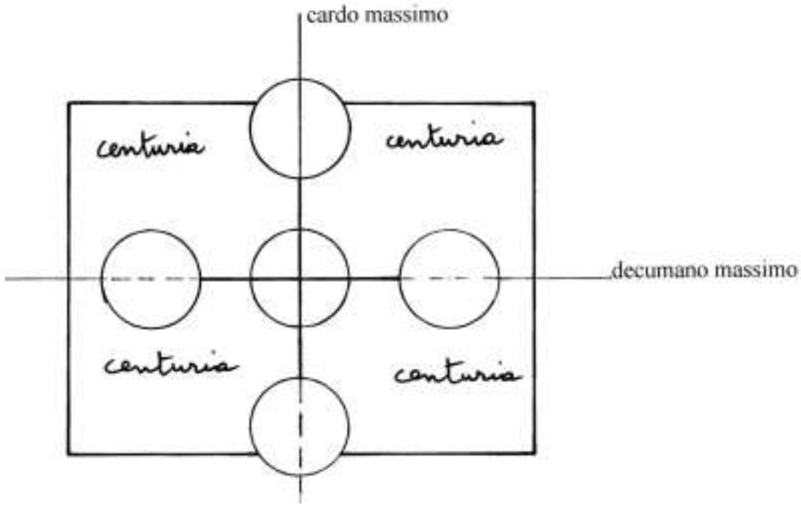
Nella parte superiore il ferramento terminava con un supporto sporgente, il *rostro*, recante due estremità cilindriche cave: nella seconda cavità era conficcato il perno che reggeva la *squadra* orizzontale con bracci ad angolo retto. Il rostro poteva ruotare in un piano orizzontale, senza ostacolare l'uso dello strumento. Anche la squadra poteva ruotare, sempre in un piano orizzontale.

Alle estremità (*curnicula*) di ciascun braccio era legato un filo recante all'estremo inferiore un peso di piombo necessario per tendere il filo stesso.

L'altezza della groma (dal piede del ferramento fino alla squadra) è stata stimata fra 180 e 190 cm: in questo modo l'agrimensore poteva *vedere* traguardando comodamente due fili appesi a *curnicula* opposte. I bracci della squadra della groma erano lunghi circa 46 cm (a partire dal perno centrale).

Non sono giunti a noi degli esemplari completi di groma, perché essa era fatta con materiali deperibili o con materiali metallici recuperati. La sua forma è stata ricavata dai resti rinvenuti nel 1912 in scavi effettuati a Pompei nella bottega di un fabbricante di utensili: *Verus*. Altre importanti indicazioni sono venute da alcune lastre tombali di agrimensori romani, che vollero farsi incidere gli strumenti del loro lavoro.

Infine, nel trattato di Igino Gromatico è presente una serie di diagrammi che potrebbero essere interpretati come una vista dall'alto di una groma conficcata nel terreno e orientata secondo il cardo massimo e il decumano massimo:

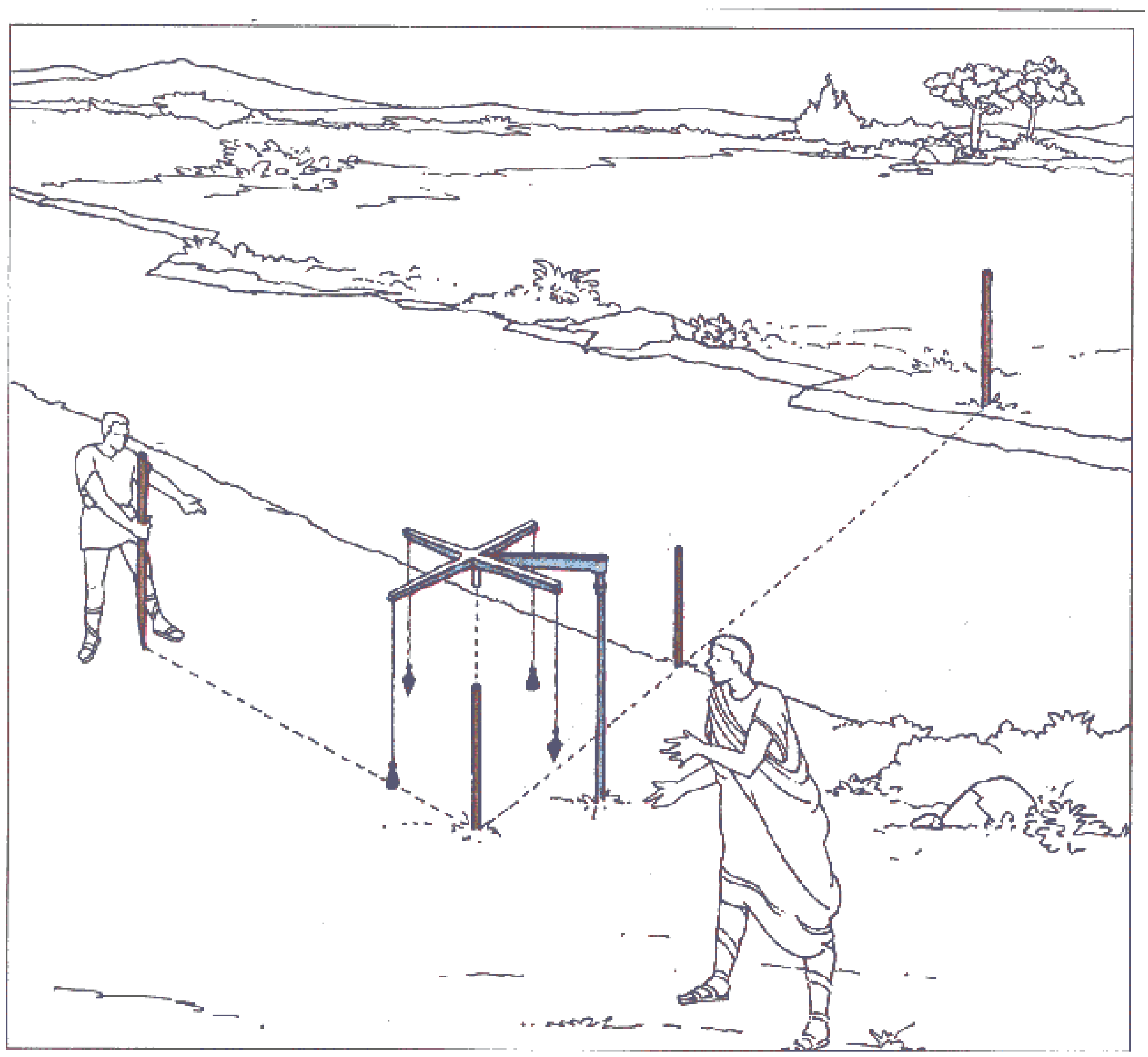


L'agrimensore romano *misurava con la vista*: la groma era uno dei numerosi strumenti per misurare con la vista usati fino a tutto il Rinascimento. L'espressione "misurare con la vista" è stata largamente usata durante il Medioevo e il Rinascimento e, con questo titolo, in Europa sono stati scritti diversi trattati di geometria pratica destinati alla descrizione di strumenti e metodi di misurazione.

L'uso della groma richiedeva l'assenza del vento, che avrebbe potuto far oscillare i fili tesi con i piombi.

In condizioni di calma di vento, gli agrimensori conficcavano nel terreno, verticalmente, il piede del ferramento F e posizionavano la base di appoggio E.

Dopo essersi assicurati che il filo a piombo della base fosse nella giusta posizione, ruotando opportunamente la squadra, gli agrimensori erano in grado di determinare l'orientamento in due direzioni fra loro perpendicolari. Per raggiungere questo scopo venivano conficcate nel terreno delle *paline* di legno di uguale altezza:



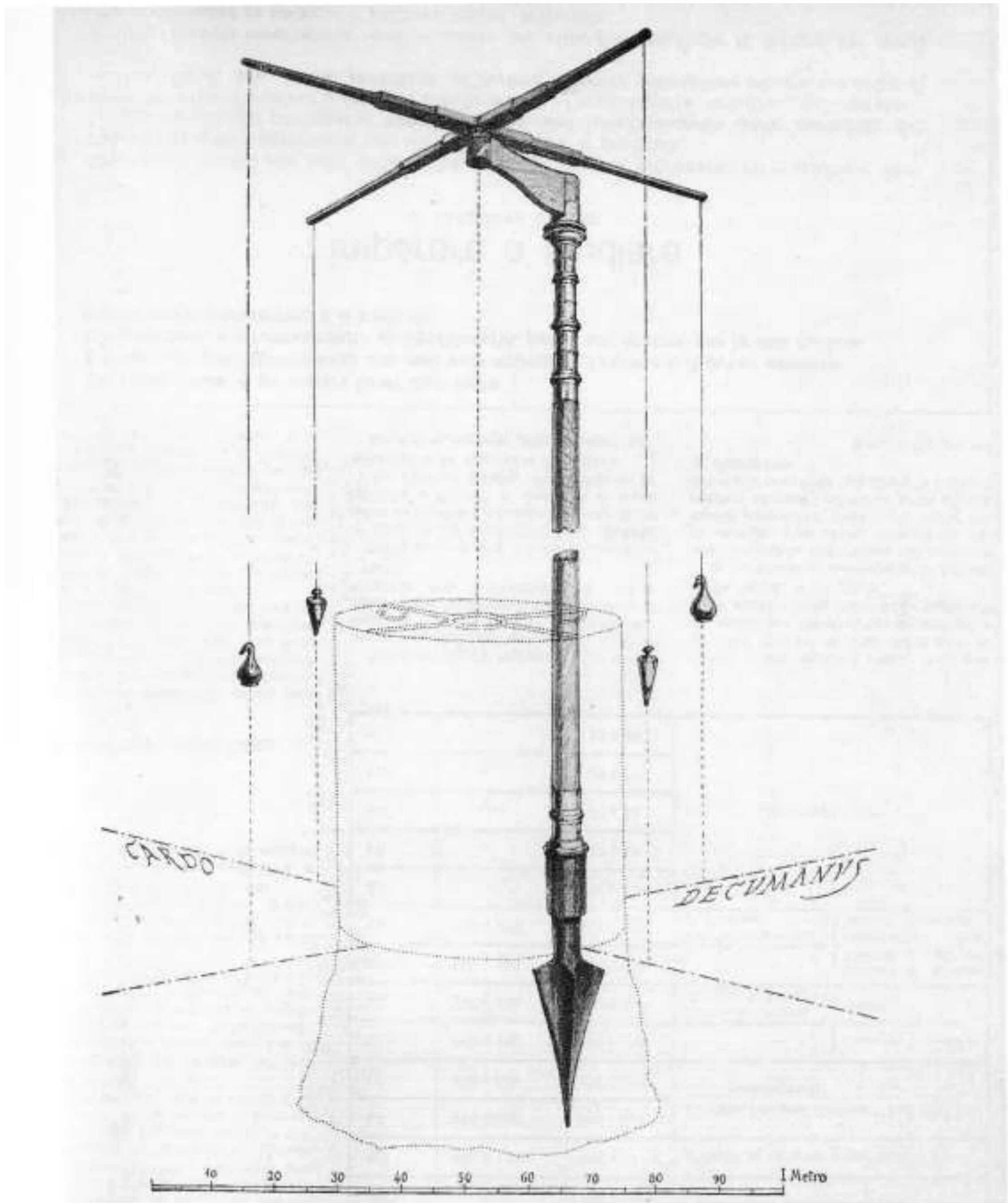
- APPROFONDIMENTO -

La forma della groma secondo Matteo Della Corte

Matteo Della Corte (1875 – 1962) è stato un archeologo che si è a lungo occupato degli scavi di Pompei.

In un importante articolo pubblicato nel 1922 offrì una ricostruzione di una *groma* a partire da alcuni resti dello strumento da lui trovati a Pompei nel 1912.

La figura che segue riproduce la ricostruzione di Della Corte:

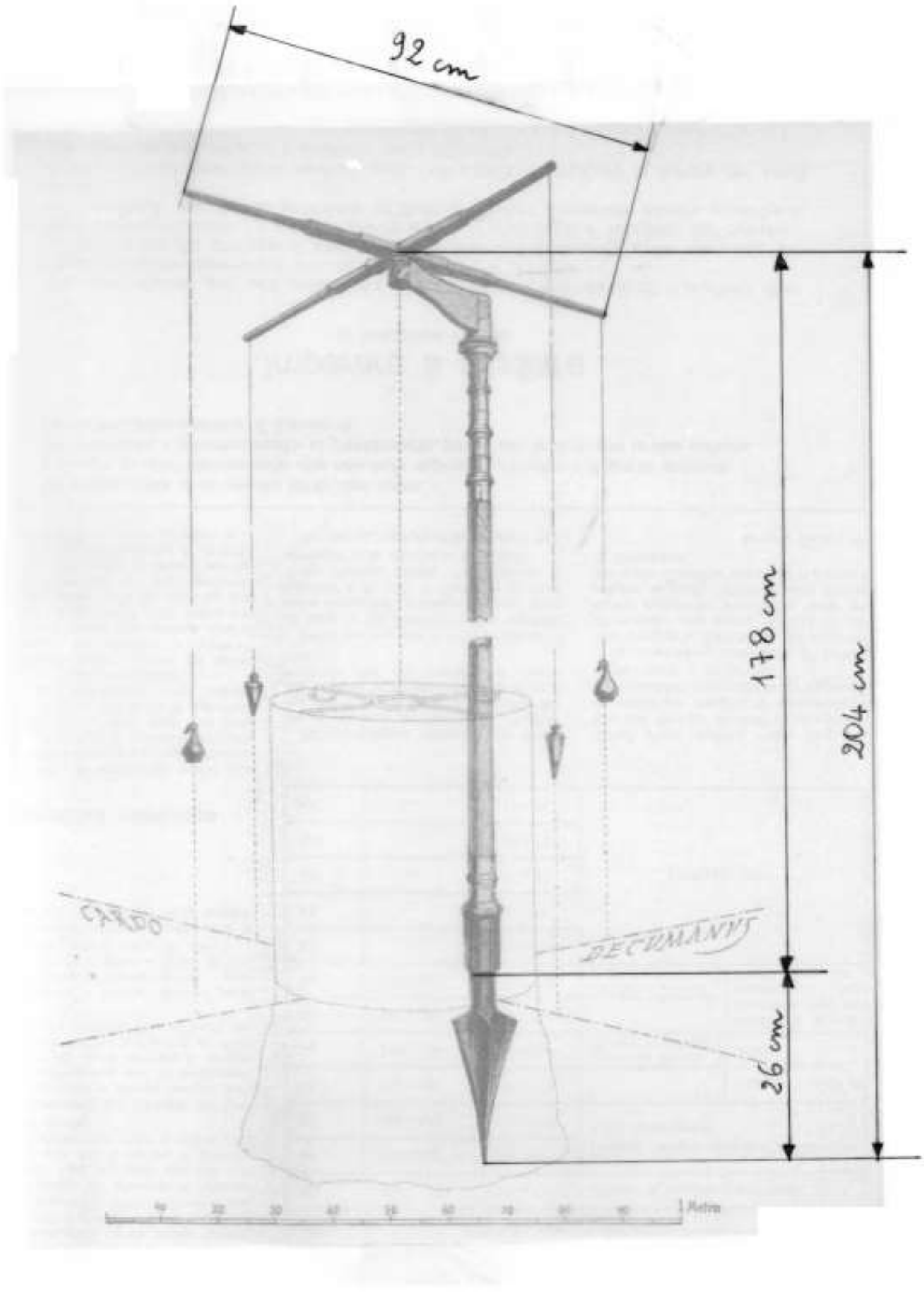


Secondo Della Corte, la groma giunse ai Romani per il tramite degli Etruschi i quali l’avevano conosciuta dai Babilonesi.

Il nome *groma* sarebbe in realtà il nome della squadra a forma di croce, fatta di legno e di ferro (acciaio).

I pesi portati dai fili appesi alle estremità della croce (*curnicola*) giungevano fin quasi a toccare il terreno, per ridurre l’influenza del vento.

La *cuspide* (il piede dello strumento) veniva conficcata nel terreno per 26 cm. L’asta della groma era lunga 178 cm (e cioè 6 piedi) più i 26 cm della cuspide e in totale 204 cm, come spiega la seguente figura:



La groma era formata da 11 pezzi, di legno, bronzo e ferro (acciaio). Secondo Della Corte le parti metalliche pesavano 12,15 kg e quelle di legno 3 kg, per un peso complessivo di 15 kg.

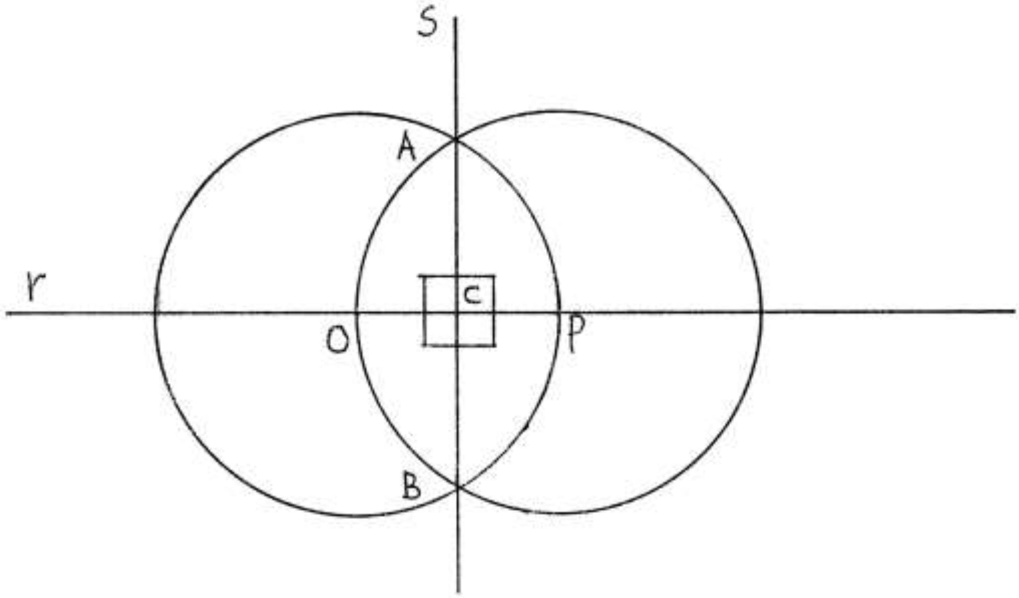
La groma era scomponibile per essere più facilmente trasportabile.

- -

Alcune costruzioni geometriche usate dai Gromatici

Gli agrimensori romani usavano *tre* differenti metodi per tracciare un angolo retto.

Il *primo metodo* usava due circonferenze di uguale raggio e con i centri sulla retta **r**:



Per riprodurre la costruzione, fissare sulla retta r due punti, O e P, a distanza uguale al raggio delle due circonferenze.

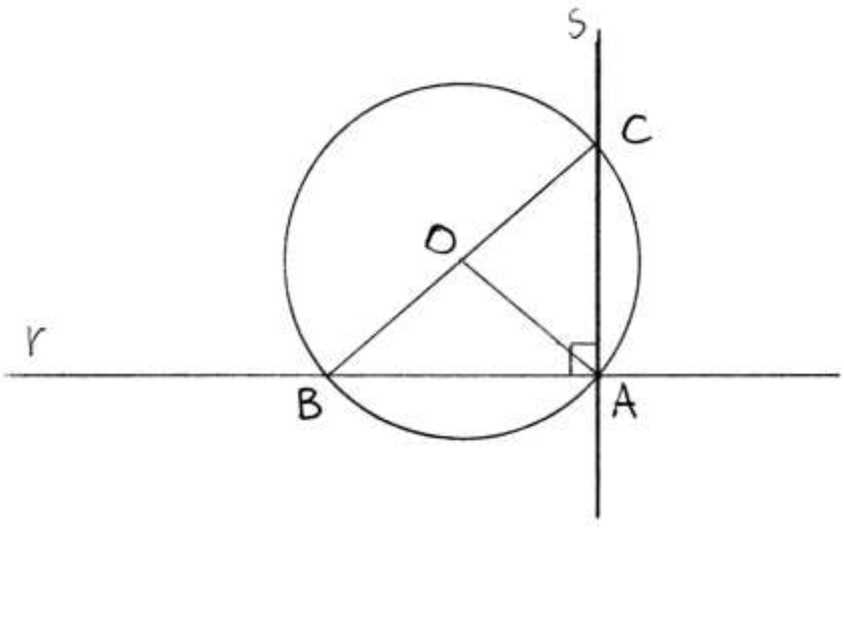
Facendo centro in O e in P disegnare le due circonferenze: esse si intersecano in due punti, A e B.

Per questi ultimi due punti tracciare una retta, **s**, che taglia la retta **r** in un punto, O, formando *quattro* angoli retti.

La costruzione è pure conosciuta come quella per determinare l'*asse del segmento* OP.

Il *secondo metodo* impiegava il triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza. Qualunque triangolo inscritto in una semicirconferenza è sempre *rettangolo*: i suoi vertici giacciono sulla semicirconferenza e l'ipotenusa coincide con il diametro.

Disegnare una retta orizzontale, **r**, e fissarvi un punto, A.



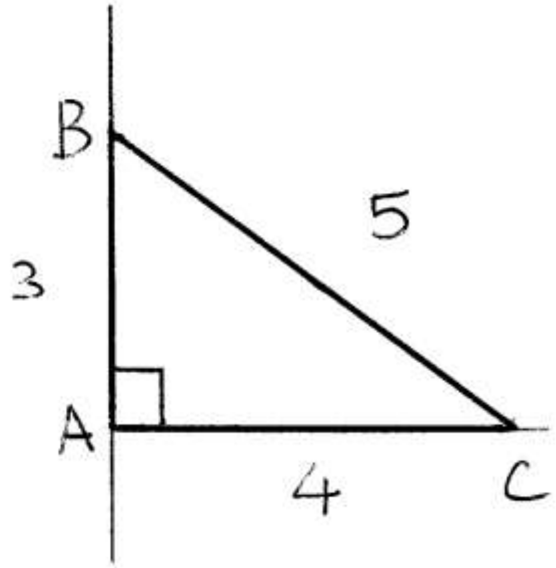
Al di sopra della retta scegliere un punto, O, da collegare con A: tracciare una circonferenza con centro in O e raggio OA. Essa taglia la retta **r** in un secondo punto, B.

Disegnare il diametro passante per i punti B e O: esso interseca la circonferenza in un nuovo punto, C.

Tracciare la retta **s**, passante per i punti A e C: ABC è un triangolo rettangolo con angolo retto in A e il diametro BOC è l'ipotenusa del triangolo stesso.

I vertici del triangolo – A, B e C – giacciono sulla semicirconferenza BCA.

Il *terzo metodo* era basato sulla costruzione del triangolo rettangolo con cateti lunghi proporzionalmente a 3 (AB) e a 4 (AC): l'ipotenusa BC è lunga in proporzione a 5:



<u>Le operazioni geometriche di base</u>

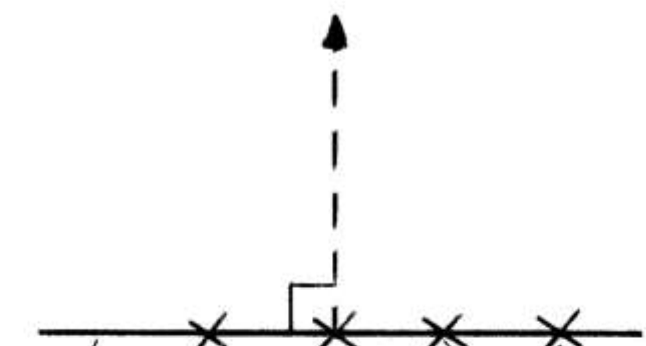
La tracciatura di una centuriazione sul terreno richiedeva inizialmente l'*allineamento* di una serie di punti la cui posizione era fissata da altrettanti *picchetti* o *paline* conficcati verticalmente e posti a distanza regolare.

L'allineamento veniva verificato con la *groma*.

Successivamente, gli agrimensori procedevano a una serie di operazioni geometriche elementari: la costruzione di linee perpendicolari alla retta rappresentata dall'allineamento.

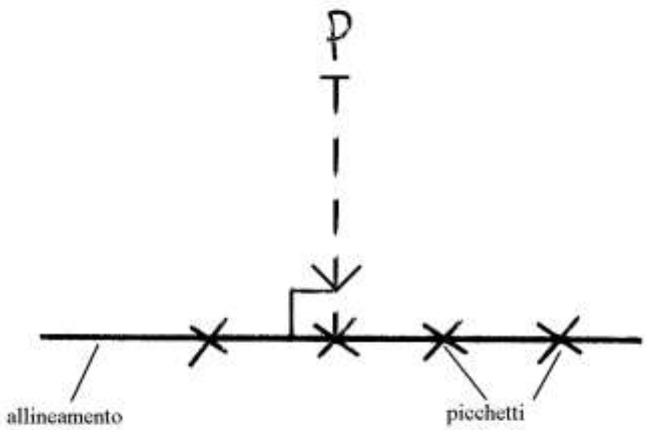
Due casi differenti richiedevano la costruzione della perpendicolare:

a) era data una linea perfettamente retta e doveva essere costruita la perpendicolare passante per un suo punto generico, P:



Dal punto P veniva *elevata* una perpendicolare.

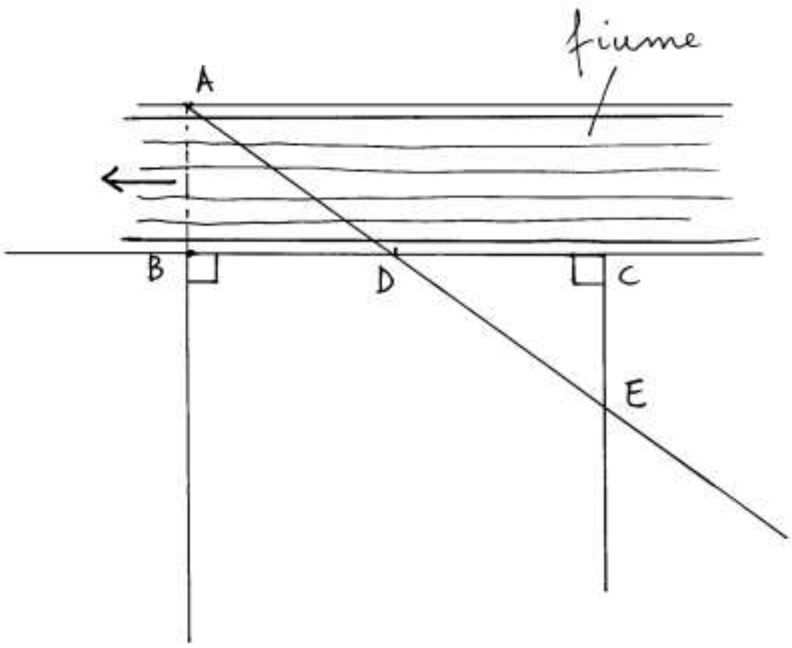
b) Era necessario condurre – *abbassare* – una perpendicolare a una retta da un punto ad essa esterno, P:



Misurare la larghezza di un fiume

Gli agrimensori romani usavano la *groma* e le corde per misurare la larghezza di un fiume non accessibile perché abbastanza largo. Un testo di *Marcus Iunius Nipsus* (“° secolo d.C.) è dedicato alle misurazioni della larghezza dei fiumi.

Venivano scelti due punti, A e B, allineati in direzione perpendicolare al fiume e posti sulle due rive, *quasi nel fiume*: in essi erano conficcati dei *picchetti*:



La linea *immaginaria* AB risultava perpendicolare al corso del fiume in quel tratto.

Ecco la descrizione del metodo seguito e che può essere riprodotto su carta.

Prolungare AB dalla parte di B; dal punto B tracciare una linea perpendicolare a AB e parallela al corso del fiume (come indica la freccia, nel disegno l'acqua scorre da destra verso sinistra). Sul terreno questa operazione era realizzata con le corde.

Fissare un punto a piacere, C, sulla linea appena disegnata: da questo punto condurre una linea perpendicolare a BC.

Determinare il punto medio di BC: è D.

Gli agrimensori romani traguardavano con la groma attraverso i punti A e D, fino a intersecare in un nuovo punto, E, la linea abbassata da C.

I triangoli ABD e DCE sono rettangoli e uguali: hanno cateti di uguale lunghezza (BD = DC) e angoli uguali:

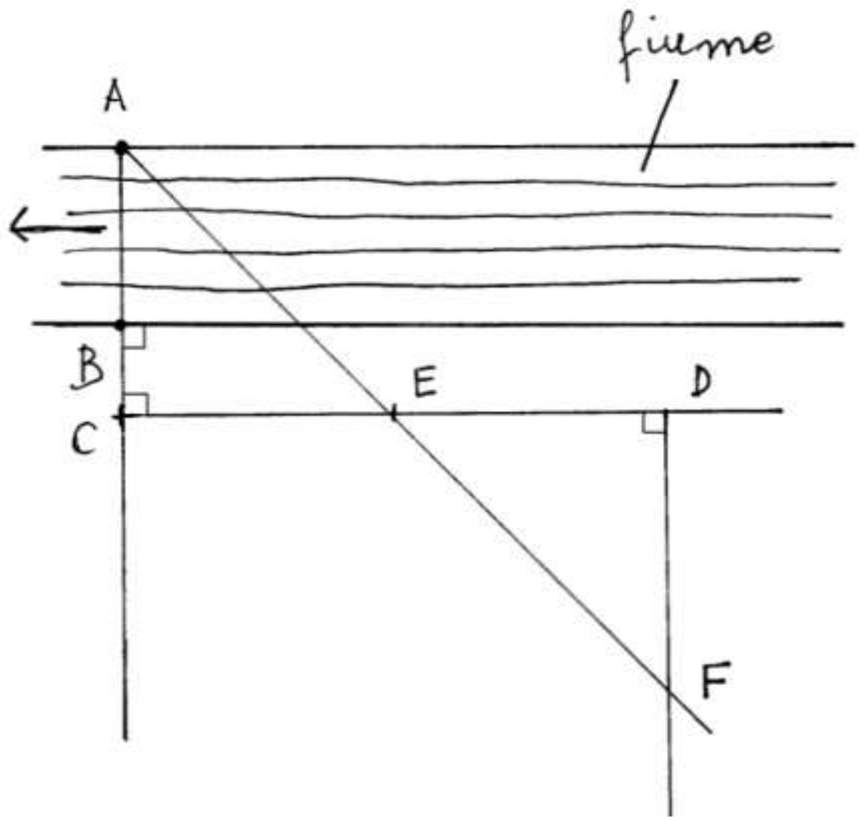
- ABD e DCE sono angoli retti.
- ADB e CDE sono uguali perché opposti nel vertice D.

Di conseguenza, anche gli angoli BAD e CED sono uguali.

I cateti AB e CE hanno la stessa lunghezza.

Il cateto CE è lungo quanto la larghezza AB del fiume.

Nel caso risultasse difficoltoso posizione una delle due paline costituenti i *picchetti* all'estremo dell'alveo del fiume (caso del picchetto B nella figura che segue), la costruzione andava un po' modificata:



Dopo aver scelto il punto A e conficcatavi una palina nell'alveo del fiume, veniva fissato il punto B in modo che la retta immaginaria passante per i punti A e B risultasse perpendicolare al corso del fiume e alle rive.

Dal punto B era tracciata verso destra una linea perpendicolare alla retta passante per A e per B e veniva fissato un punto D.

Dal punto D era costruita la perpendicolare.

Era poi determinato il punto medio del segmento BD: è E.

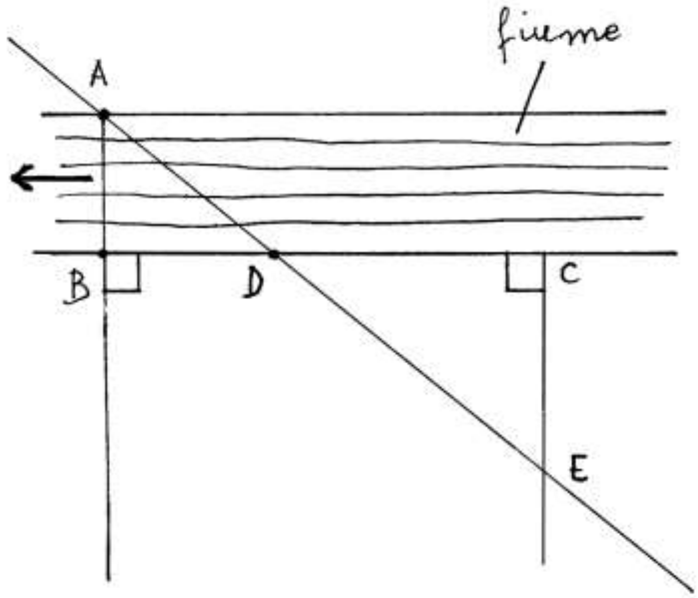
Gli agrimensori posizionavano la groma in modo da traguardare i punti A ed E, fino a terminare il punto F posto sulla perpendicolare uscente da D.

I triangoli ACE e EDF sono rettangoli. I cateti AC e DF hanno uguale lunghezza (come sono fra loro di uguale lunghezza i cateti CE e ED).

Il segmento AB, larghezza del fiume, è così determinato:

AB = AC – CB ma AC = DF per cui sostituendo nella prima relazione ad AB il suo valore DF si ottiene: AB = DF – CB .

Nel caso della figura che segue, il punto scelto, D, *non* è collocato a metà dell'ipotetico segmento BC. La situazione da rilevare era più complessa, come nel caso di rive poco percorribili o non sicure:



Le lunghezze BD, DC e CE sono misurabili. L'incognita è la larghezza del fiume, AB.

I triangoli ABD e CDE sono *simili* e vale la proporzione:

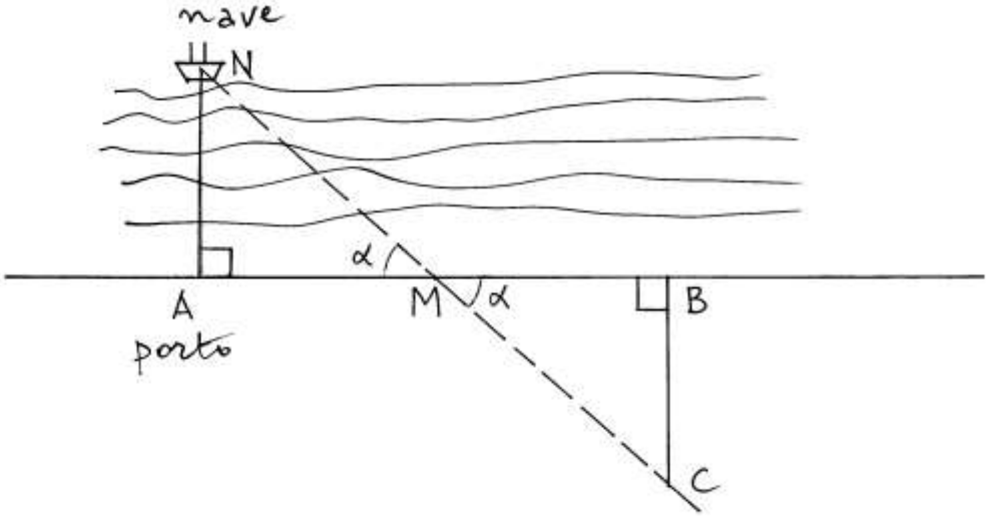
$$AB : CE = BD : DC$$

Da essa deriva il valore della larghezza del fiume, AB:

$$AB = \frac{CE \cdot BD}{DC}$$

Distanza di una nave dal porto

Il metodo descritto nel precedente paragrafo poteva essere impiegato per calcolare la distanza di una nave, N, dal porto A:



Il segmento NA è perpendicolare alla linea costiera.

Fissare un punto, B, lungo la riva e determinare il punto medio, M, della lunghezza AB.

Dal punto B tracciare verso l'interno (il basso in figura) una linea perpendicolare a AB.

Disegnare una linea *immaginaria* da N e passante per il punto M: la cosa era fattibile con la groma. La linea interseca la perpendicolare abbassata da B in un nuovo punto, C.

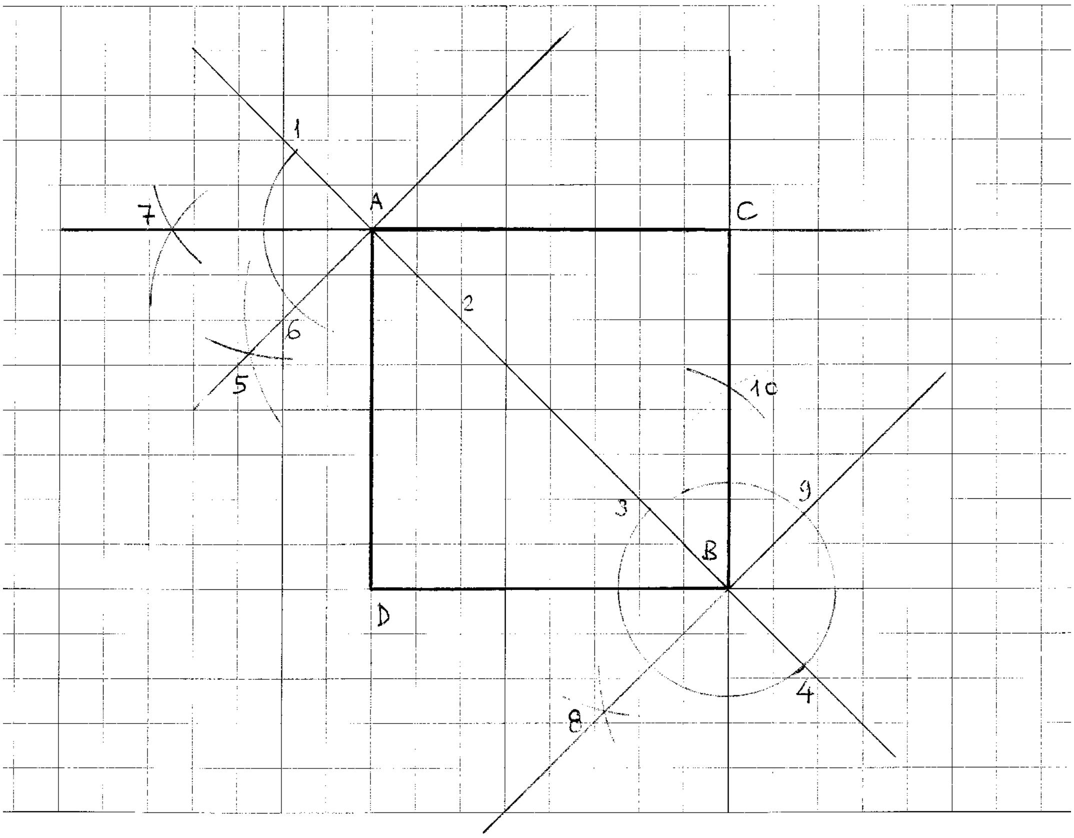
Gli angoli AMN e BMC hanno uguale ampiezza, α, perché sono angoli opposti rispetto al vertice comune M.

I triangoli rettangoli NAM e BMC hanno i lati corrispondenti di uguale lunghezza e gli angoli di identica ampiezza. In particolare, i cateti AN e BC hanno la stessa lunghezza: BC è la distanza della nave N dal porto A.

Sono stati trascurati gli effetti della curvatura terrestre.

Ricostruzione della struttura di un quadrato della centuriazione

A e B sono i vertici della diagonale di un *quadrato* facente parte di una centuriazione e del quale sono andati smarriti i confini:



Il quadrato che deve essere ritracciato può essere un *actus* (con lato lungo 120 piedi o 35,48 m) o un *heredium* , cioè una superficie uguale a 4 *actus* e con lato lungo 70,96 m (240 piedi).

Un *primo metodo* è realizzato su carta con la costruzione descritta nella figura qui sopra.

La diagonale di un quadrato forma angoli di 45° rispetto ai lati che convergono nei vertici che essa connette.

Prolungare la diagonale nei due sensi.

Occorre costruire le perpendicolari a AB nei punti A e B. Fare centro in A e in B e, con raggio a piacere (per tracciare sul terreno una circonferenza gli agrimensori romani usavano una corda), disegnare gli archi per fissano i punti 1, 2, 3 e 4.

Con centro in 1 e 2 tracciare due archi che si intersecano in un punto, 5; condurre la bisettrice dell'angolo 1-A-2, passante per i punti A e 5: è determinato il punto 6.

Dobbiamo ora costruire la bisettrice dell'angolo 1-A-6: con centro nei punti 1 e 6, disegnare due archi che in incontrano in un nuovo punto, 7. Per i punti 7 e A condurre una linea.

A partire dai punti B, 3 e 4, ripetere lo stesso insieme di operazioni già eseguite sui punti A, 1 e 2. Sono così stabiliti i punti 8, 9 e 10.

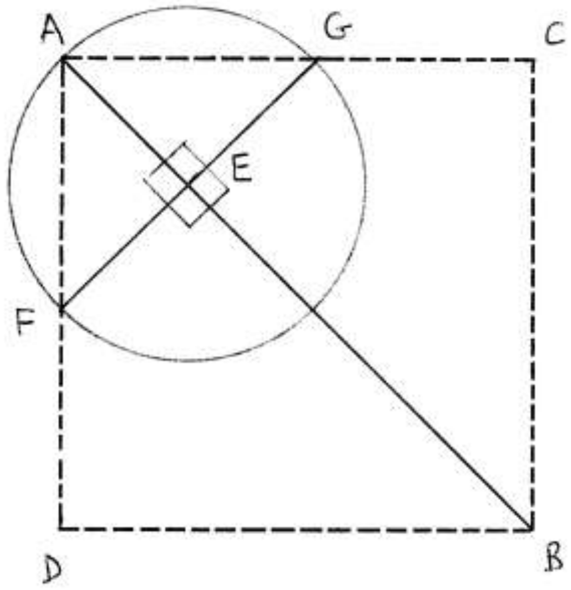
Per i punti B e 10 disegnare una linea verso l'alto: essa taglia in un nuovo punto, C, la retta passante per 7 e per A.

Dal punto A tracciare verso il basso una linea parallela a CB e da B, verso sinistra, una linea parallela a CA: le due linee si intersecano nel quarto vertice mancante del quadrato, D.

ACBD è il quadrato ricercato.

Un *secondo metodo* è spiegato con le figure che seguono.

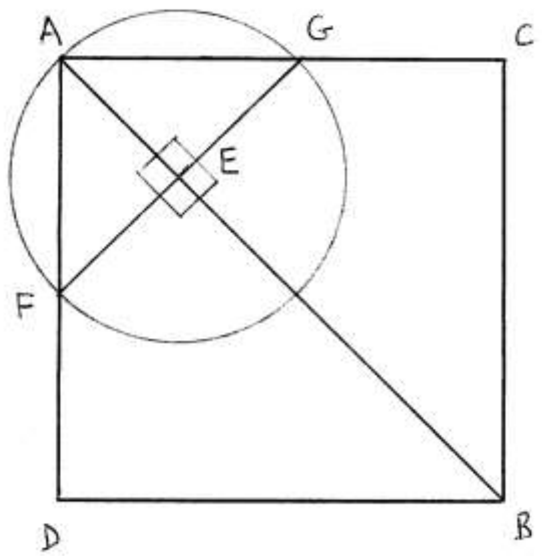
In un qualsiasi quadrato, come ACBD, è tracciata la diagonale AB:



I lati del quadrato sono disegnati con *linee tratteggiate* perché il poligono non è ancora stato ricostruito.

Scegliere un punto qualsiasi, E, sulla diagonale e disegnare la perpendicolare a AB passante per il punto E: le due linee si intersecano in formando quattro angoli retti.

Fare centro in E e, con raggio EA, tracciare una circonferenza:

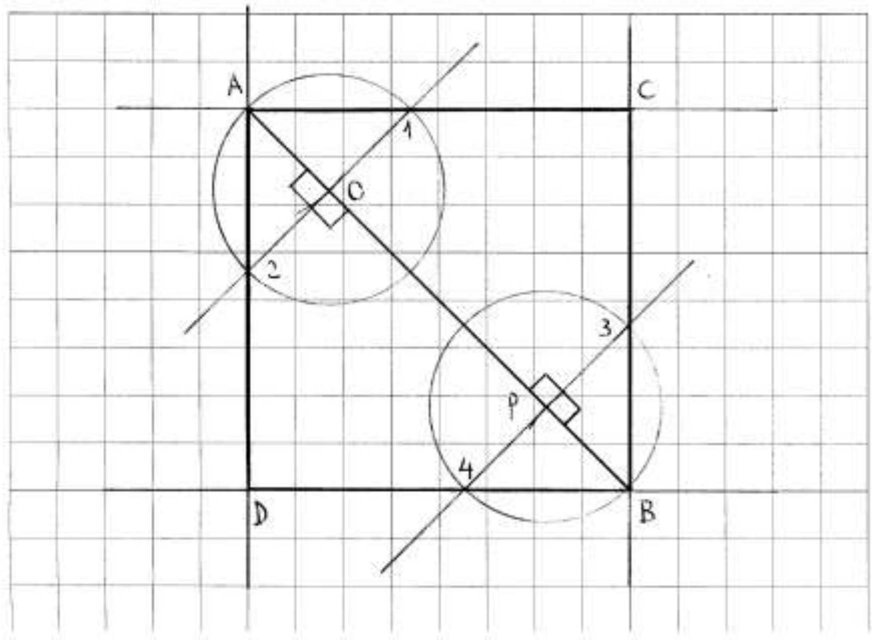


Il triangolo rettangolo FAG è isoscele: i suoi cateti FA e AG hanno uguale lunghezza; la circonferenza passa per i punti F, A e G.

Anche i triangoli AEF e AGE sono rettangoli e isosceli e hanno pure uguali dimensioni.

In un quadrato qualsiasi linea perpendicolare a una diagonale genera triangoli rettangoli isosceli. È probabile che gli Agrimensori romani abbiano sfruttato questa proprietà.

La figura che segue descrive in dettaglio la costruzione:



A partire dai punti A e B sono fissati sulla diagonale AB due punti, O e P, rispettivamente a uguale distanza da A e da B.

Tracciare due circonferenze con centro in O e in P e con raggio OA = PB.

Per i punti O e P condurre rette perpendicolari alla diagonale AB: esse tagliano le circonferenze nelle coppie di punti 1 – 2 e 3 – 4.

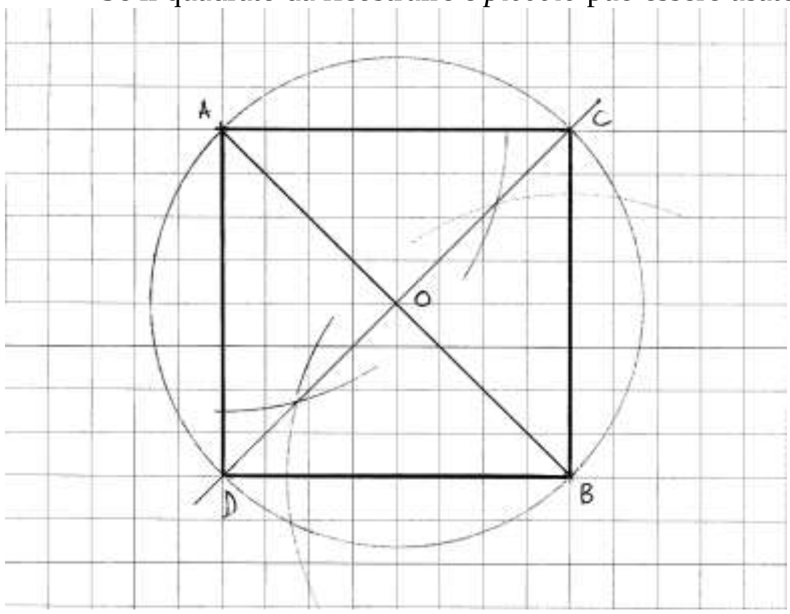
Disegnare quattro rette passanti per i punti:

- A e 1.
- A e 2.
- B e 3.
- B e 4.

Le quattro rette si intersecano in due nuovi punti: C e D.

Il poligono ACBD è il quadrato che ha come diagonale il segmento AB.

Se il quadrato da ricostruire è *piccolo* può essere usato un *terzo metodo* semplificato:



Determinare il punto medio della diagonale AB: è O. Tracciare la perpendicolare a AB nel punto O (asse del segmento AB).

Fare centro nel punto e, con raggio OA, disegnare una circonferenza passante per i punti A e B: essa taglia la perpendicolare in due nuovi punti, C e D.

Il poligono ACBD è il quadrato cercato.

<u>La centuriazione della Piana fiorentina</u>

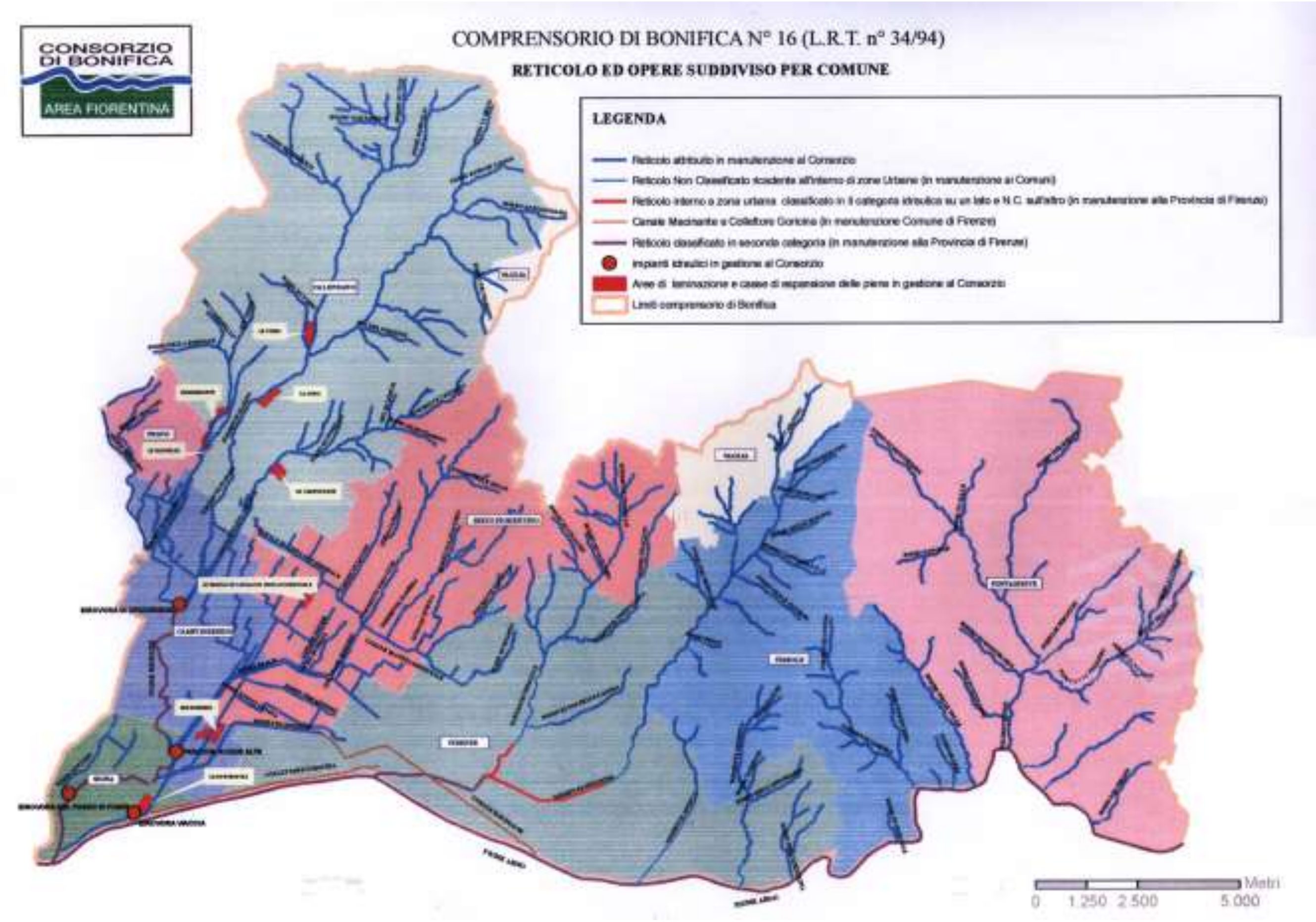
Dopo aver fondato nel I secolo a.C. la colonia di *Florentia* (Firenze), i Romani procedettero alla centuriazione dell'area della *Piana fiorentina*, la vasta area fertile che si estende fra Firenze e Prato e che prosegue in direzione di Pistoia. La *Piana* interessa in particolare i Comuni di Firenze, Sesto Fiorentino, Campi Bisenzio e Signa.

La più vasta pianura compresa fra Firenze e Pistoia ha l'asse maggiore (il *decumano*) orientato da Sud – Est a Nord – Ovest. Essa ha una lunghezza di circa 40 km e una larghezza di 12 km, per una superficie di circa 480 km^2.

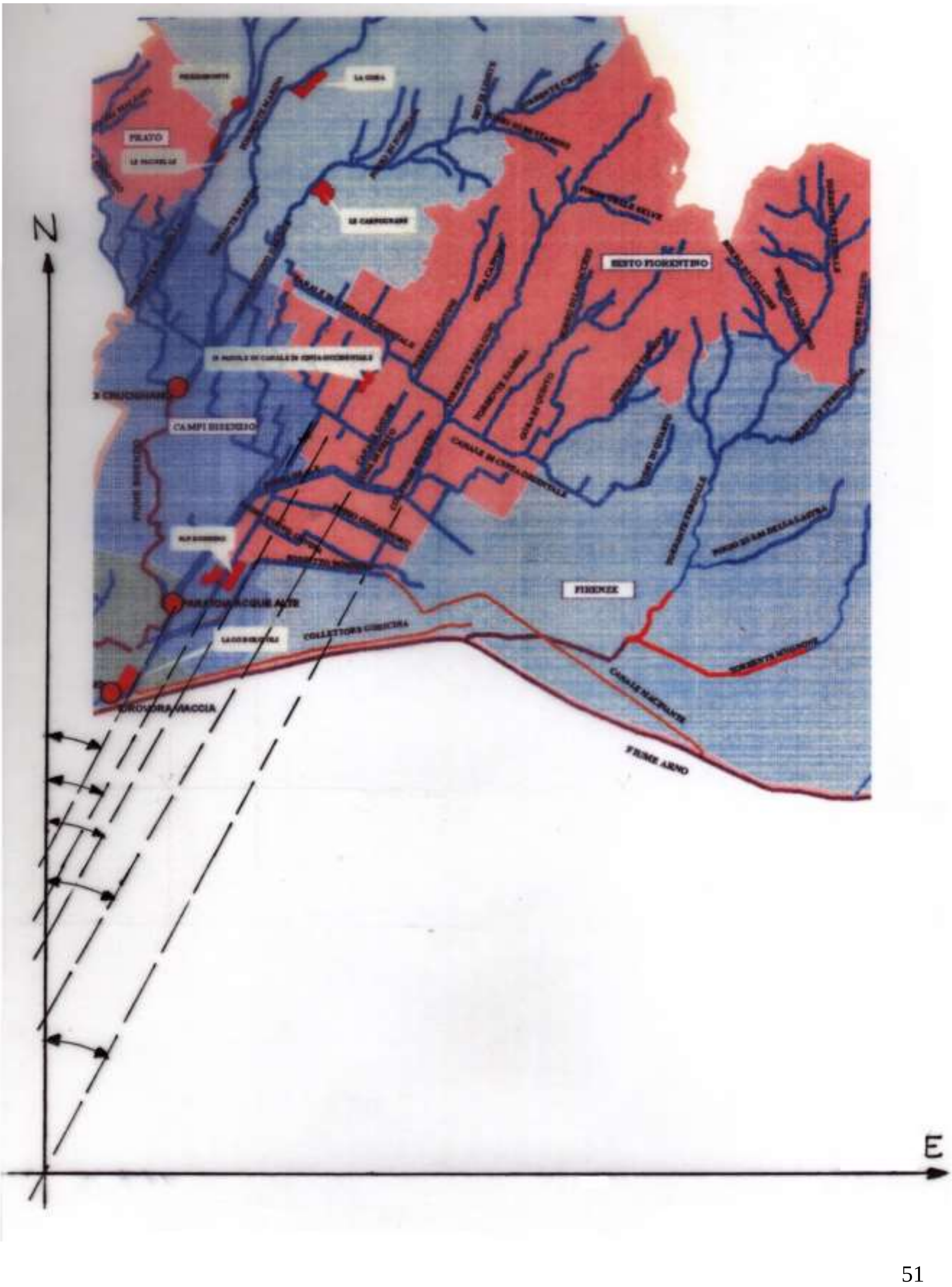
Il territorio presso Prato ha di recente restituito importanti tracce della presenza di un importante centro etrusco a Gonfienti. Dal canto suo, è probabile che anche Pistoia abbia ospitato insediamenti etruschi.

Almeno nel tratto fra Firenze e Prato, l'area della Piana era stata sistemata dal punto di vista idraulico dagli Etruschi (probabilmente della città di Fiesole): i diversi corsi d'acqua scendono da Nord e si riversano in direzione Sud - Ovest ancora oggi negli affluenti di destra dell'Arno.

L'immagine che segue è tratta da una pubblicazione del "*Consorzio di Bonifica dell'Area Fiorentina*" (attualmente – 2015 – assorbito nel più vasto "*Consorzio di Bonifica 3 – Medio Valdarno*"): si tratta di una mappa dell'odierno reticolo dei corsi d'acqua nell'area di competenza del Consorzio di Bonifica:

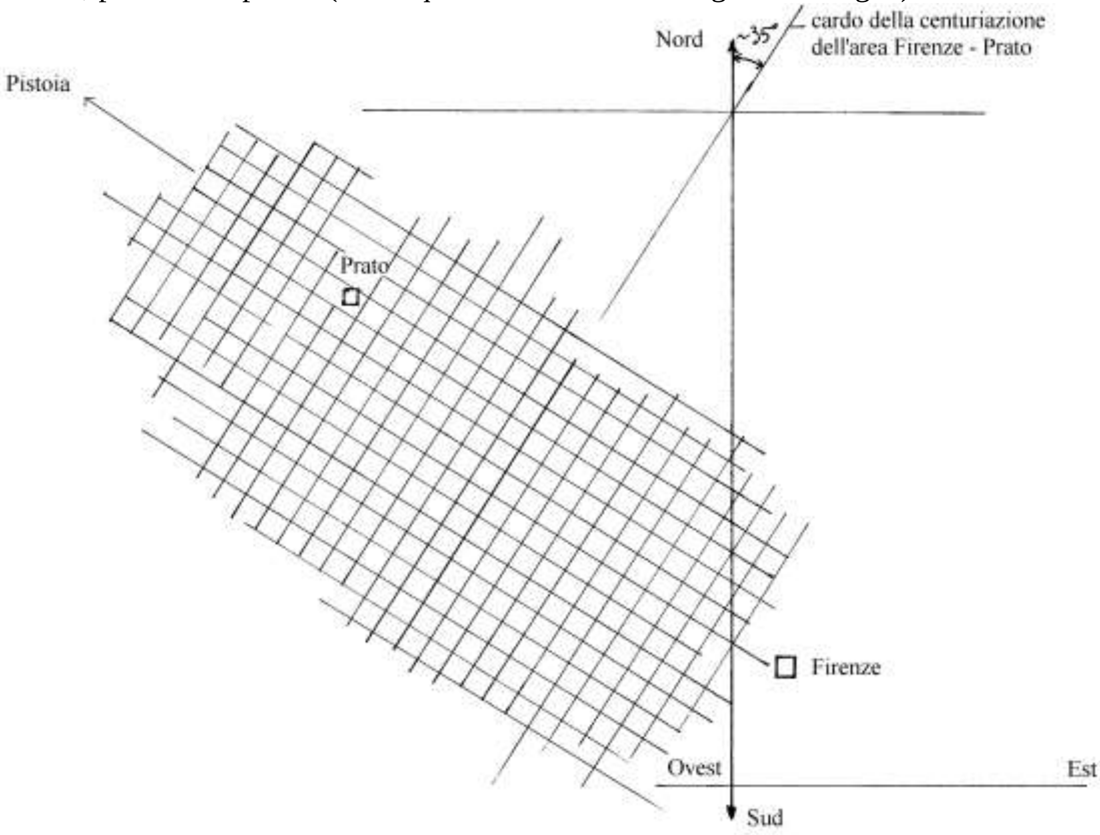


I corsi d'acqua che attraversano il territorio del Comune di Sesto Fiorentino sono inclinati rispetto all'asse Nord – Sud di un angolo variabile intorno ai 30°, con orientamento da Nord- Ovest verso Sud – Est:

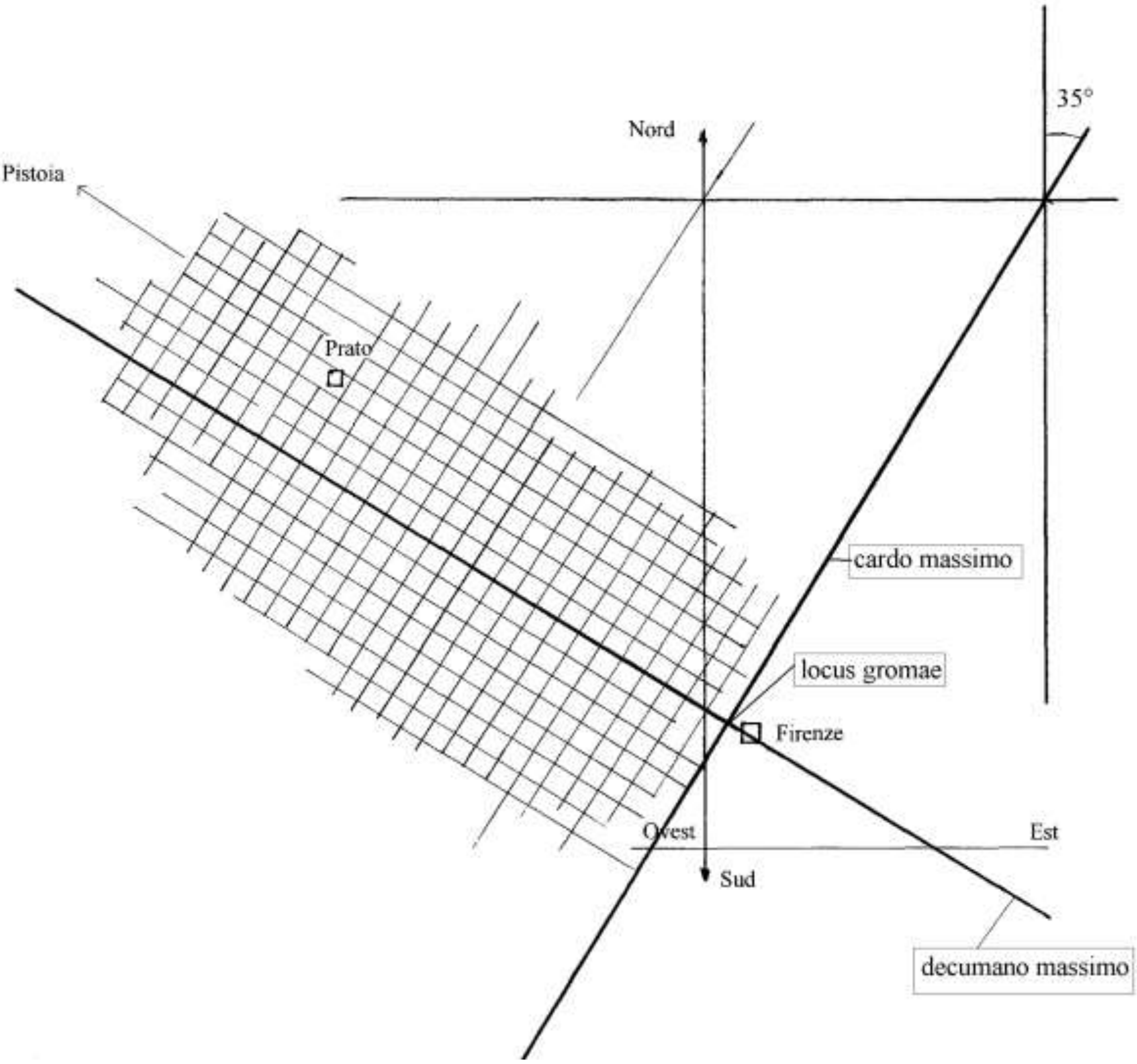


Come vedremo in seguito, questa inclinazione è *quasi* parallela a quella del cardo della centuriazione romana.

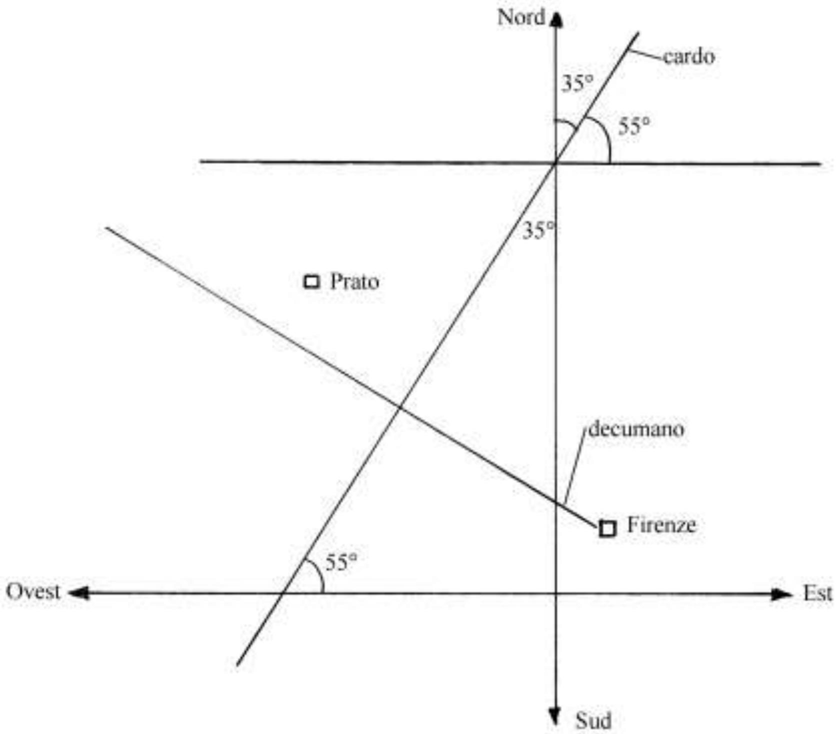
Infatti, i Romani rispettarono le sistemazioni idrauliche degli Etruschi e centuriarono il territorio con un *cardo massimo* ruotato di circa 35° verso Nord Est. E lo stesso accadde ai cardi minori, paralleli al primo (come quello tracciato nella figura che segue):



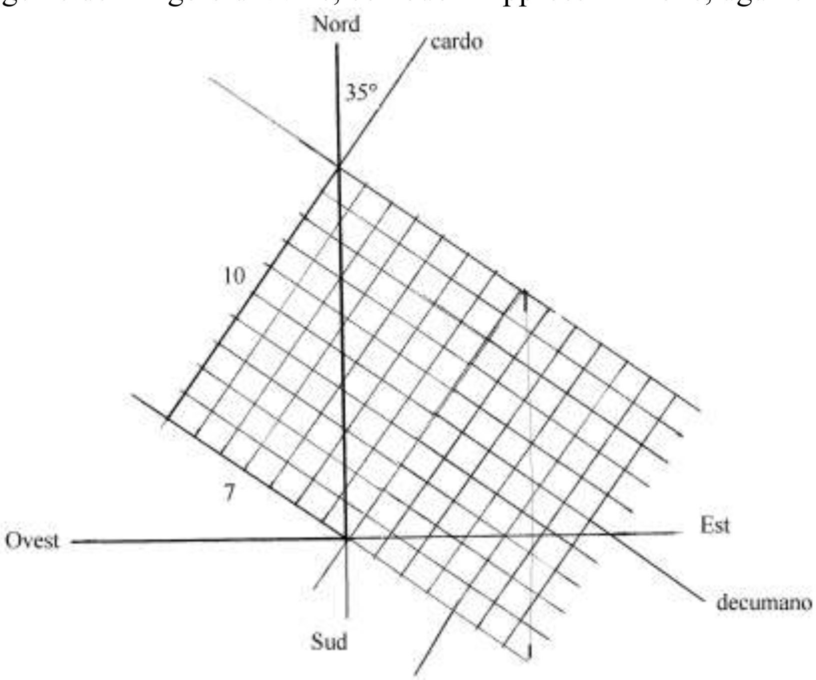
L'origine della centuriazione (*locus gromae*) del territorio della Piana è stato individuato in un punto esterno a Florentia, nei pressi della porta occidentale:



Il *decumano massimo* dell’area Firenze Prato era quindi ruotato di 35° nei confronti dell’asse Est – Ovest e di 55° nei riguardi dell’asse Sud – Nord. Ciò era probabilmente dovuto alla scelta fatta dagli Agrimensori romani di tracciare il *decumano massimo* parallelo al corso dell’Arno:

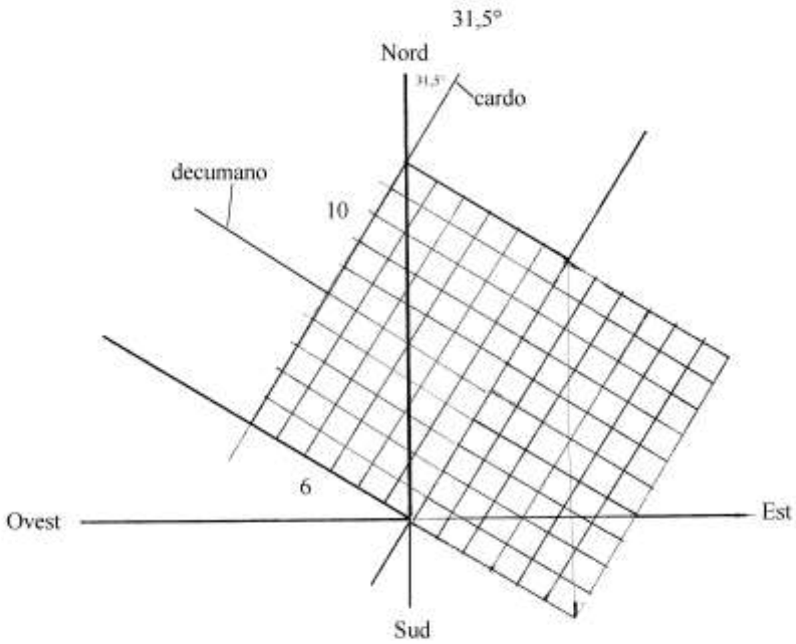


L'inclinazione di 35° era ottenuta usando una griglia rettangolare con lati lunghi 7 e 10: la tangente dell'angolo di 35° è, con buona approssimazione, uguale a 7/10 (o 0,7):

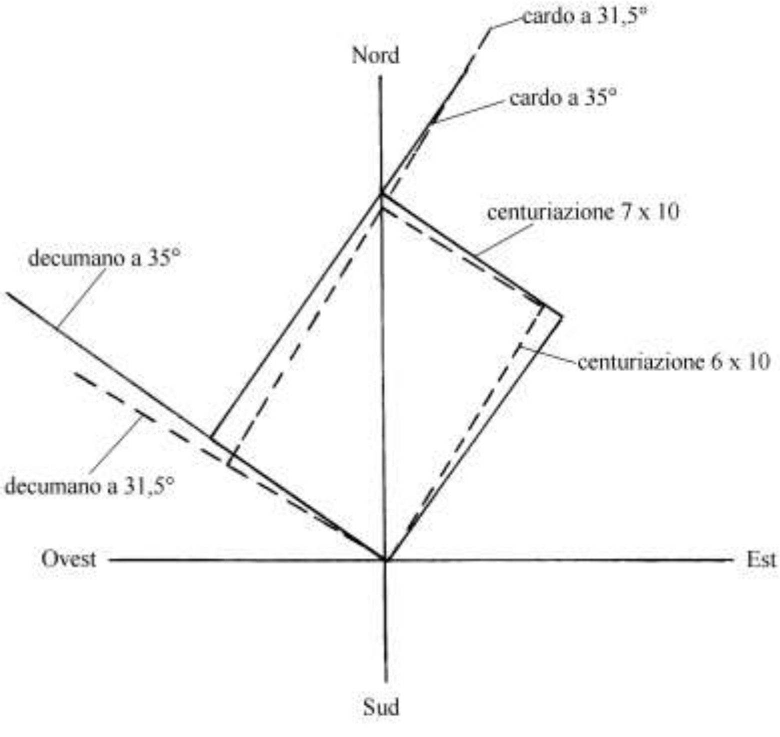


Dal grafico precedente risulta che il *cardo massimo* di questa centuriazione era ruotato di 35° verso Est.

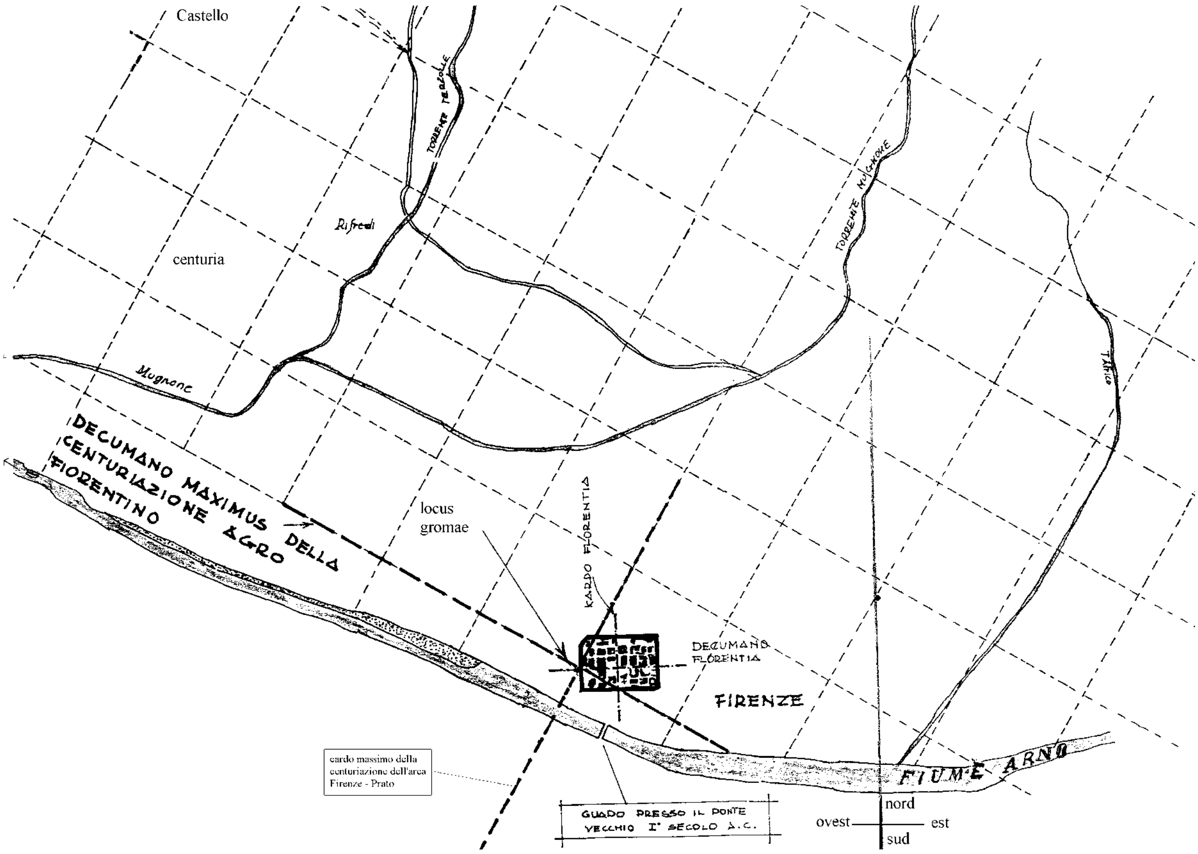
Alcuni studiosi ipotizzano che questa centuriazione sia orientata in direzione Nord – Est con un angolo leggermente più piccolo, di circa 31,5°. Essa sarebbe stata prodotta con una griglia rettangolare con lati lunghi 6 e 10: approssimativamente, la tangente dell'angolo di 31,5° vale 6/10 (o 0,6):



Il diagramma che segue mostra la sovrapposizione delle due precedenti griglie: esso è stato ottenuto facendo coincidere le due *diagonali* con l'asse Sud – Nord: la griglia 7x10 è tracciata con linea *continua* e quella 6x10 è disegnata con linea *tratteggiata*:

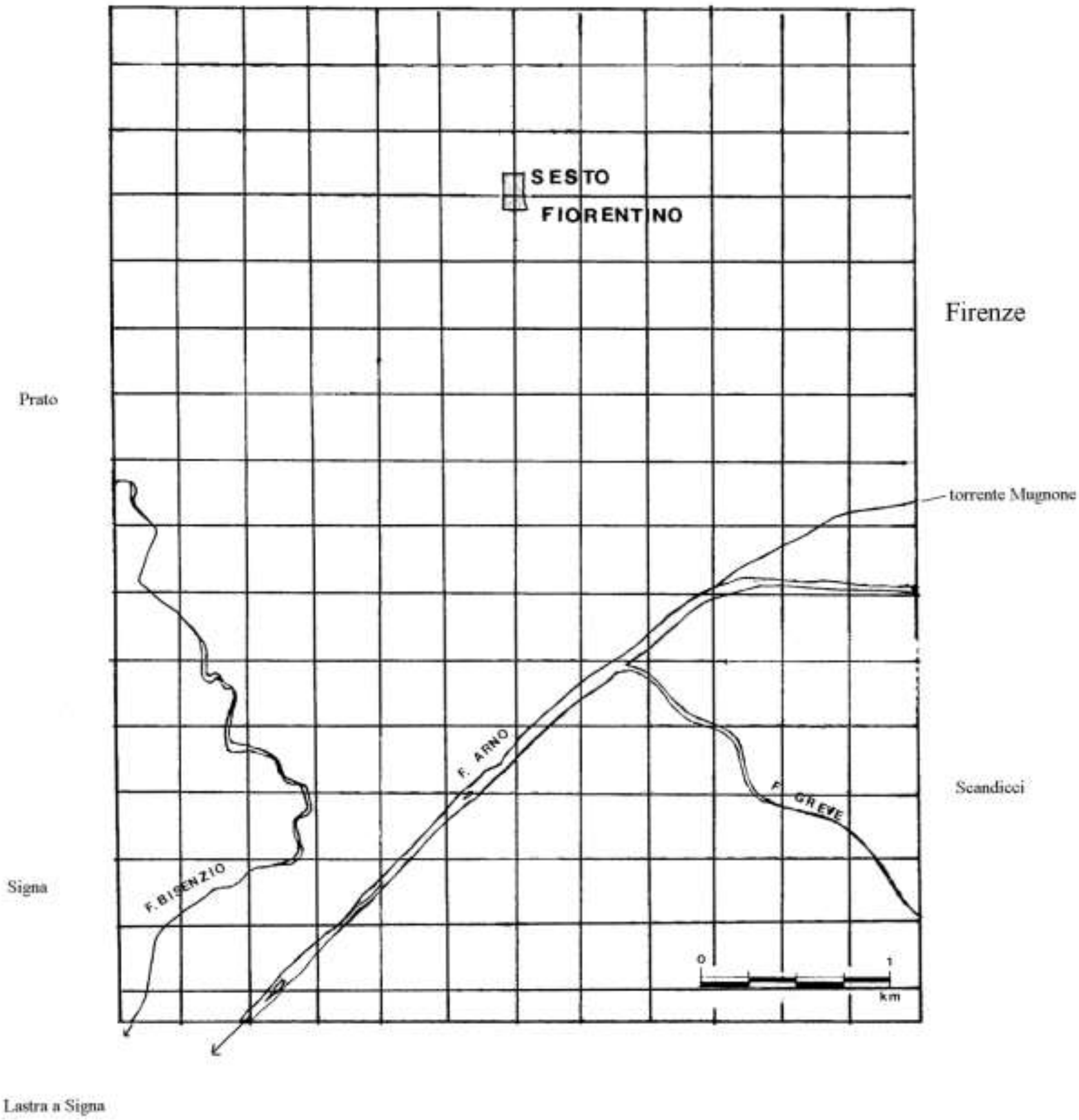


Lo schema della centuriazione della Piana fiorentina mostra un'interessante proprietà:



il suo *decumano massimo* è quasi parallelo a un consistente tratto del percorso dell'Arno nell'area fiorentina.

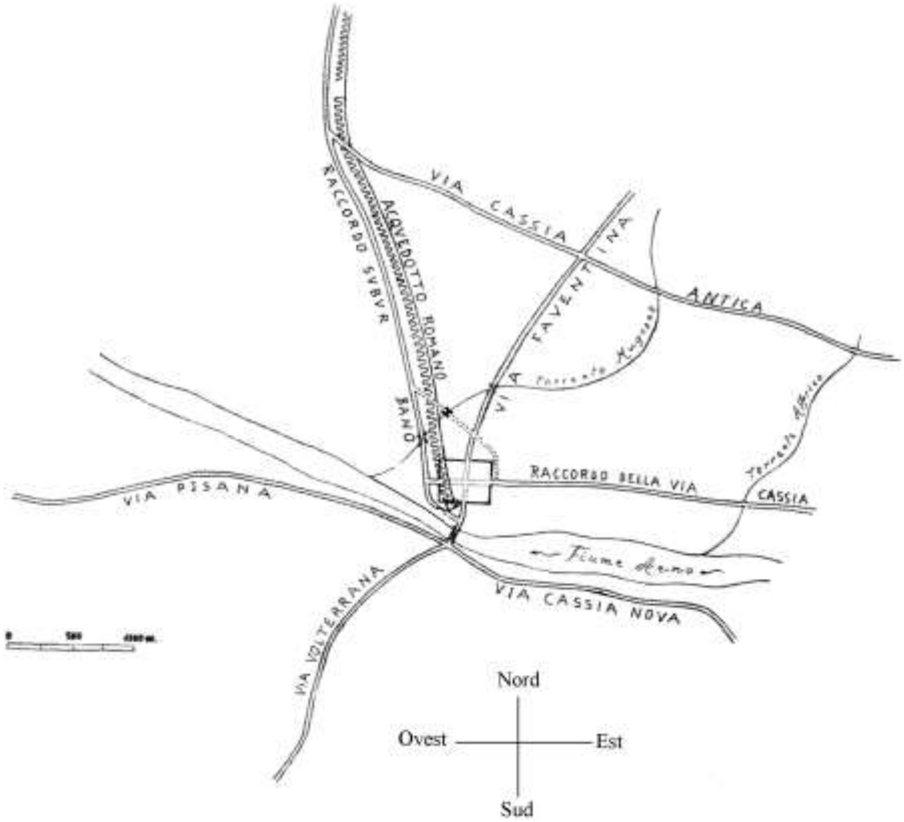
Infine, la centuriazione si estese anche all'area sulla riva a sud dell'Arno, in una zona gravitante intorno all'attuale Comune di Scandicci, come spiega la mappa che segue (rielaborata da "Misurare la terra: centuriazione e coloni nel Mondo romano", Modena, Panini, nuova edizione, 2003, p. 198):



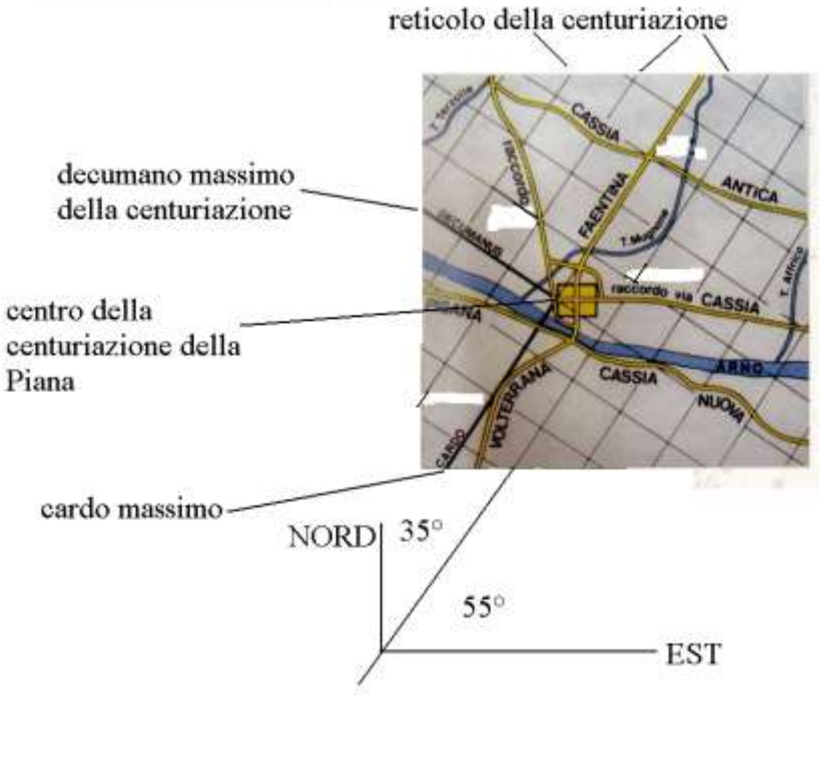
La realizzazione di questa centuriazione a cavallo del corso dell'Arno è stupefacente: a monte e a valle di Firenze, l'Arno creava una serie di rami secondari chiamati *Bisarni* o *Visarni* che davano vita a una serie di isolotti più o meno temporanei. La larghezza del fiume era maggiore rispetto ai tempi moderni nei quali l'Arno scorre ormai incanalato. La precisa centuriazione del territorio della Piana richiedeva l'esecuzione di complesse costruzioni geometriche sulle due rive del fiume al fine di ottenere un perfetto allineamento delle centurie.

Forse non è noto a tutti che fino a tutto il Medioevo e oltre, la Repubblica di Firenze manteneva volutamente paludose certe zone nei dintorni della città e la ragione era principalmente la difesa dei centri abitati dagli assalti degli eserciti nemici.

Un'altra curiosità topografica emerge dalla carta che segue (rielaborata da Mario Lopes Pegna, "Firenze dalle origini al Medioevo"):

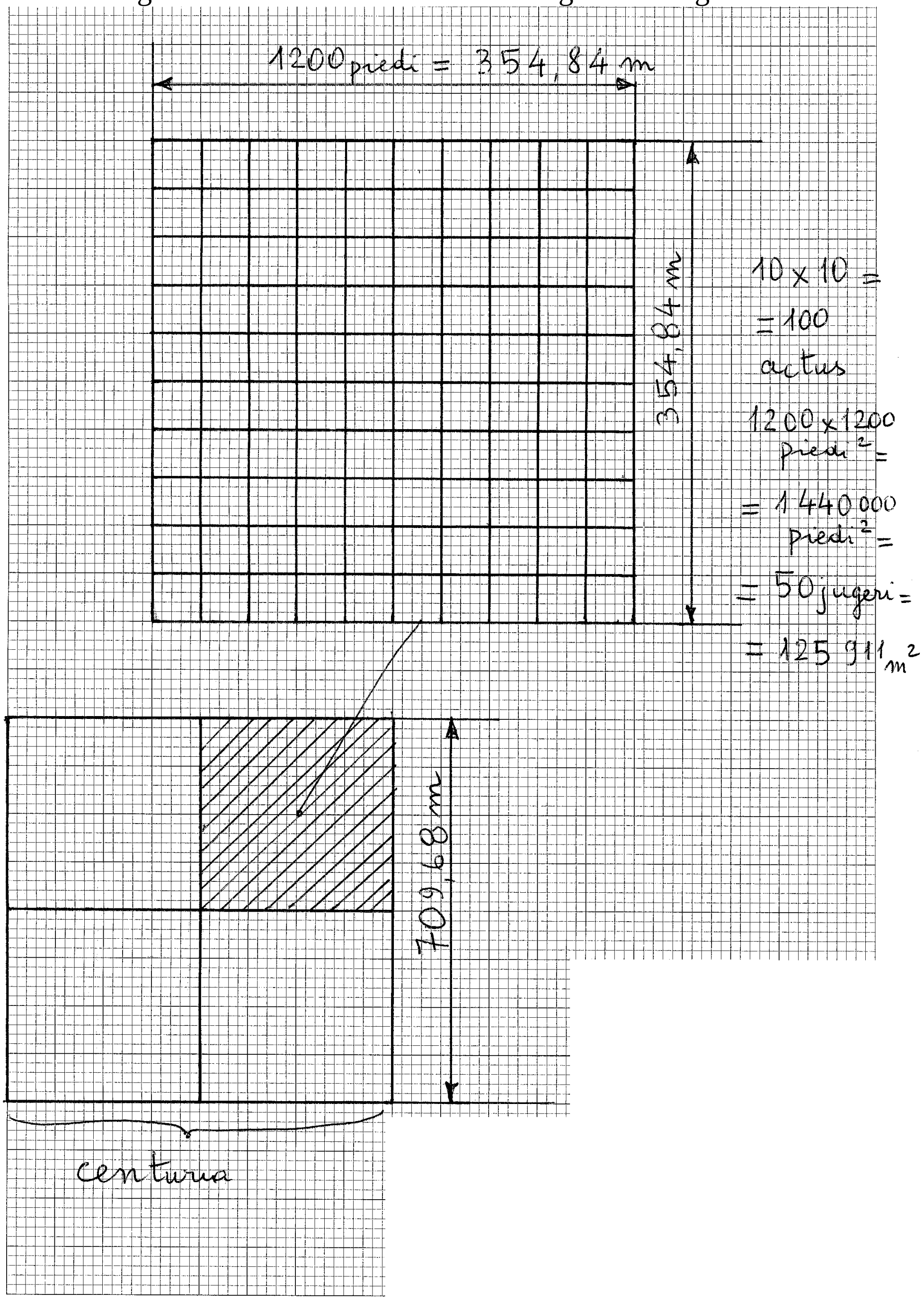


Il tracciato della *Via Cassia Antica*, a nord di Florentia, correva per un certo tratto parallelamente al corso dell'Arno e, di conseguenza, a quello del decumano massimo della centuriazione della Piana (come spiega la mappa che segue, rielaborata da una pubblicazione del Quartiere 2 del Comune di Firenze del 2011):



La struttura della centuriazione della Piana

La centuriazione della Piana fu fatta dividendo ciascuna singola *centuria* in quattro quadrati uguali. Ciascun quadrato era costituito da 100 *actus* formanti una matrice di 10x10 actus, come spiegano i due diagrammi che sono contenuti nella figura che segue:



In basso è la centuria divisa in *quattro* parti uguali. Il quadrante tratteggiato è suddiviso in 100 actus (grafico in alto).

LA MISURA DEGLI ANGOLI

La divisione dell'angolo giro in 360 parti uguali è molto antica perché fu introdotta dai Babilonesi.

La misura degli angoli sul terreno da parte dei geometri successivi ai Babilonesi presentava qualche difficoltà.

Anche ai giorni nostri, la misura di un angolo incontra dei problemi: la costruzione e la misura di angoli particolari quali 30°, 45° e 60° è facilmente realizzabile con la tracciatura di triangoli rettangoli, triangoli equilateri e quadrati. In questo modo, la misura di un angolo viene ottenuta per mezzo della misura della lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo o di un lato di un poligono regolare.

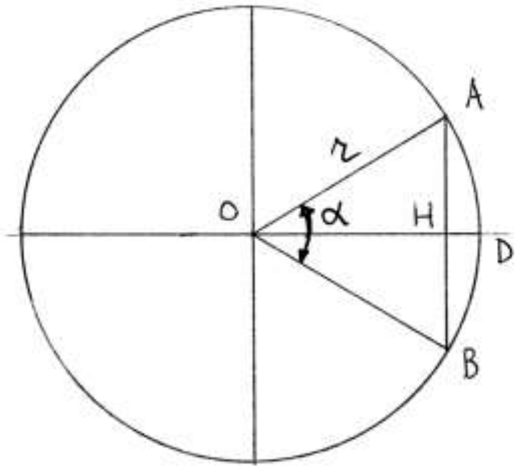
Per raggiungere questo scopo esistono due differenti procedure:

I) La misura della lunghezza della corda sottesa dall'arco di un angolo al centro, da misurare.
La procedura è antica e di origine orientale: con il tempo è caduta in disuso.

II) La misura del rapporto fra due lunghezze sui lati di un angolo retto determinato da un triangolo rettangolo, da un rettangolo o da un quadrato.
Questo metodo è quello della *diagonale* o dell'*ipotenusa*: è stato introdotto dai Romani.

La misura della corda

Nella figura che segue è descritta la procedura da seguire per misurare l'ampiezza di un angolo attraverso la misura della lunghezza della sua corda:



AB è la corda dell'arco AB sotteso dall'angolo AOB, di ampiezza α: essa taglia nel suo punto medio H il raggio uscente da O.

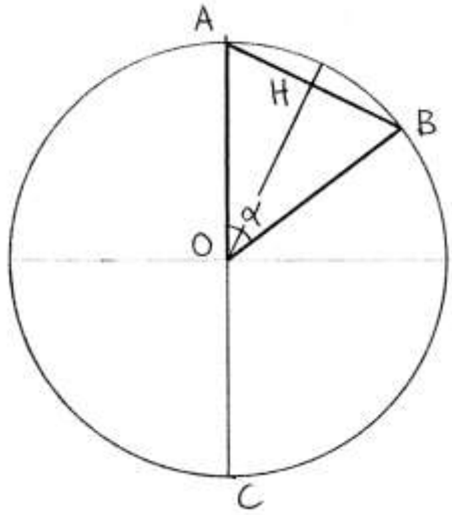
Il segmento AH è lungo la metà della corda AB.

Il teorema della corda

Il *teorema della corda* è impiegato in trigonometria per determinare la relazione esistente fra la lunghezza di una corda disegnata con i due estremi su di una circonferenza e l'angolo sotteso dal relativo arco.

Nella figura che segue, l'angolo α è chiamato *angolo alla circonferenza*.

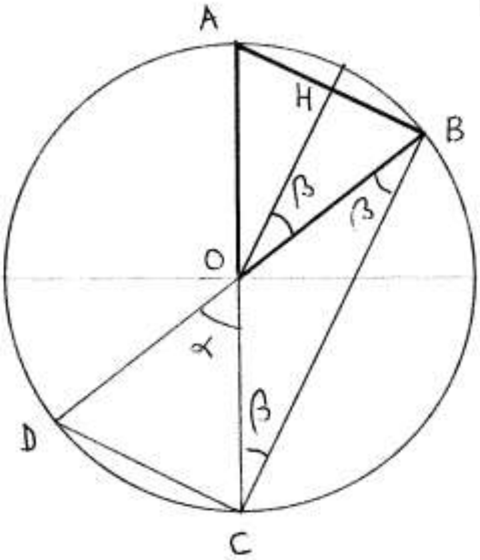
È intuitivo affermare l'esistenza di una relazione di proporzionalità diretta fra la lunghezza della corda AB e l'ampiezza dell'angolo α:



Il segmento OH è l’altezza del triangolo isoscele OAB e, ovviamente, è perpendicolare alla corda AB che incontra nel suo punto medio, H.

Nella figura che segue è tracciata la corda BC, parallela all’altezza OH:

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$



Il raggio OB è prolungato fino a intersecare la circonferenza nel punto D. La corda è simmetrica a quella AB (rispetto al centro di simmetria O) e ha la stessa lunghezza.

L’angolo AOB, α, è diviso dall’altezza OH in due angoli uguali, di ampiezza β; gli angoli AOH e HOB hanno la stessa ampiezza

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

Anche gli angoli OBC e OHB hanno la stessa ampiezza β.

I triangoli OAH e OCB sono rettangoli.

Relativamente al triangolo rettangolo OAH (che è delimitato dai cateti OH e AH e dall’ipotenusa OA), per la trigonometria vale la seguente relazione:

$$AH = OA * \text{sen}\,\beta$$

Se il raggio OA fosse, *convenzionalmente*, lungo 1(come lo è nel *cerchio trigonometrico*), varrebbe la seguente relazione:

$$AH = OA * \text{sen}\,\beta = 1 * \text{sen}\,\beta = \text{sen}\,\beta$$

Il segmento AB è lungo il doppio di AH e, quindi, $AB = 2*AH = 2\,\text{sen}\,\beta$.

AB è la *corda* sottesa dall'angolo; essa viene indicata con l'espressione

$$AB = \text{crd}(2\,\beta) = \text{crd}\,(\alpha).$$

[crd è l'abbreviazione di *corda*]

In questo caso vale

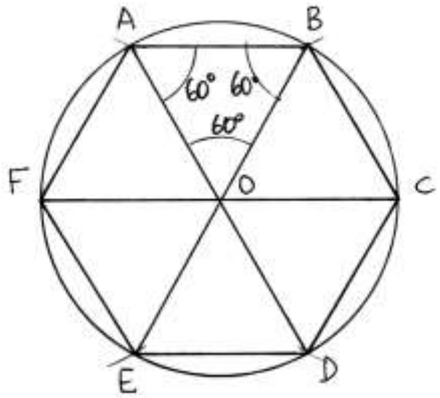
$$AB = \text{crd}(\alpha) = 2\,\text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

Un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario possiede un'importante proprietà trigonometrica: la corda dell'angolo sotteso dai vertici di un lato è lunga quanto il lato. In parole più semplici, in un poligono regolare inscritto i lati sono corde.

La lunghezza della corda è proporzionale soltanto all'ampiezza dell'angolo sotteso.

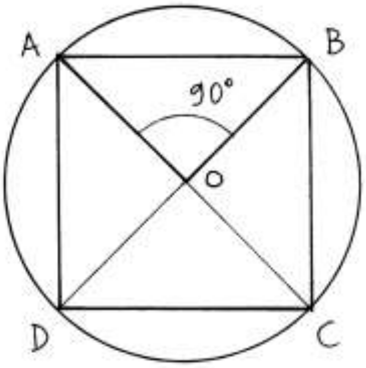
Il rapporto fra la lunghezza del lato e il raggio è costante ed è caratteristico di ciascun poligono regolare.

Un esagono regolare inscritto in una circonferenza può essere scomposto in *sei* triangoli equilateri, con lati lunghi quanto il raggio della circonferenza:

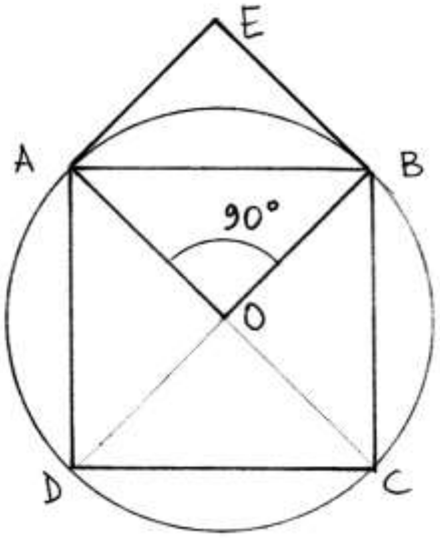


Se il raggio della circonferenza (OA) è lungo 1, lo sarà anche il lato AB; ne consegue che la $\text{crd}(60°) = 1$.

Nel quadrato inscritto, la corda AB sottende un angolo di 90°:

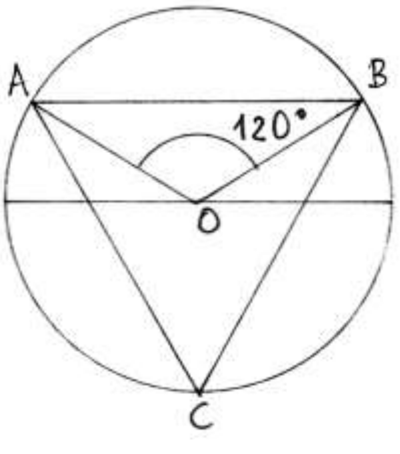


AB è la diagonale di un quadrato di lato OA (e cioè uguale al raggio della circonferenza nella quale è inscritto ABCD):



Il quadrato è AEBO e la sua diagonale AB è lunga $\sqrt{2}$ volte il raggio della circonferenza. Quindi, risulta crd(90°) = $\sqrt{2}$.

Nel caso dell'angolo di 120°, la corda AB è il lato del triangolo equilatero inscritto ABC ed è lunga $\sqrt{3}$ volte il raggio della circonferenza:



crd(120°) = $\sqrt{3}$

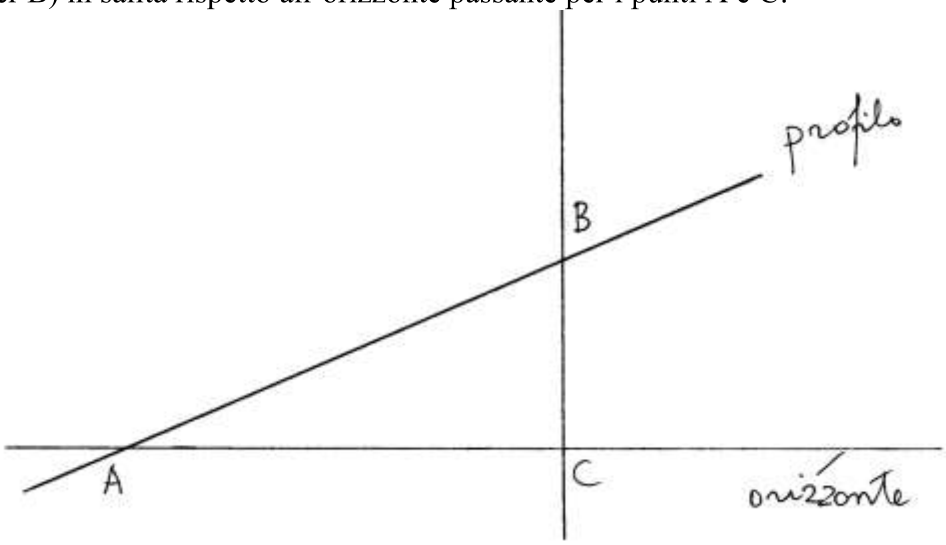
I Romani e la Trigonometria

I Romani non conoscevano la *trigonometria*, ma ne usavano alcune applicazioni.

La trigonometria fu studiata da Ipparco di Nicea (2° secolo a.C.) e da Claudio Tolomeo (2° secolo d.C.) e successivamente perfezionata da matematici Arabi.

I Romani applicarono il concetto di *pendenza* alle loro costruzioni, come è il caso degli acquedotti, e alle centuriazioni. La pendenza del canale di un acquedotto doveva essere costante.

La figura che segue presenta lo schema in sezione di un'immaginaria strada (passante per A e per B) in salita rispetto all'orizzonte passante per i punti A e C:



Rispetto al tratto AC, la strada si eleva del tratto BC.

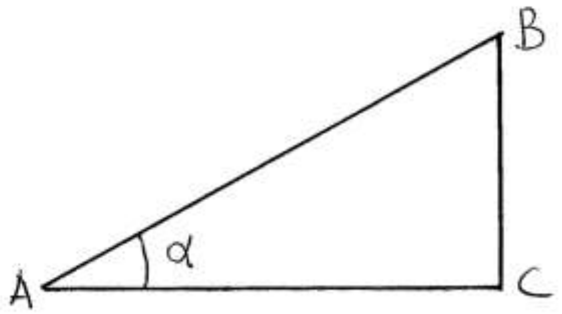
ABC è un *triangolo rettangolo*: AC e BC sono i *cateti* e AB è l'*ipotenusa*.

Nella segnaletica stradale sono usati dei cartelli che indicando la pendenza in *percentuale*:

[foto da inserire]

La tangente di un angolo

La tangente (tg) di un angolo, α, di un triangolo rettangolo ABC, è uguale al rapporto fra la lunghezza del cateto opposto (BC) e quella del cateto adiacente (AC):



$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Se il rapporto fra le lunghezze dei due cateti è, ad esempio, $0{,}546875$, si scrive:

$tg\ \alpha = 0{,}546875$ da cui risulta che $\alpha \approx 28°\ 40'$.

La *pendenza* di AB è $0{,}546875 * 100 = 54{,}6875\ \%$.

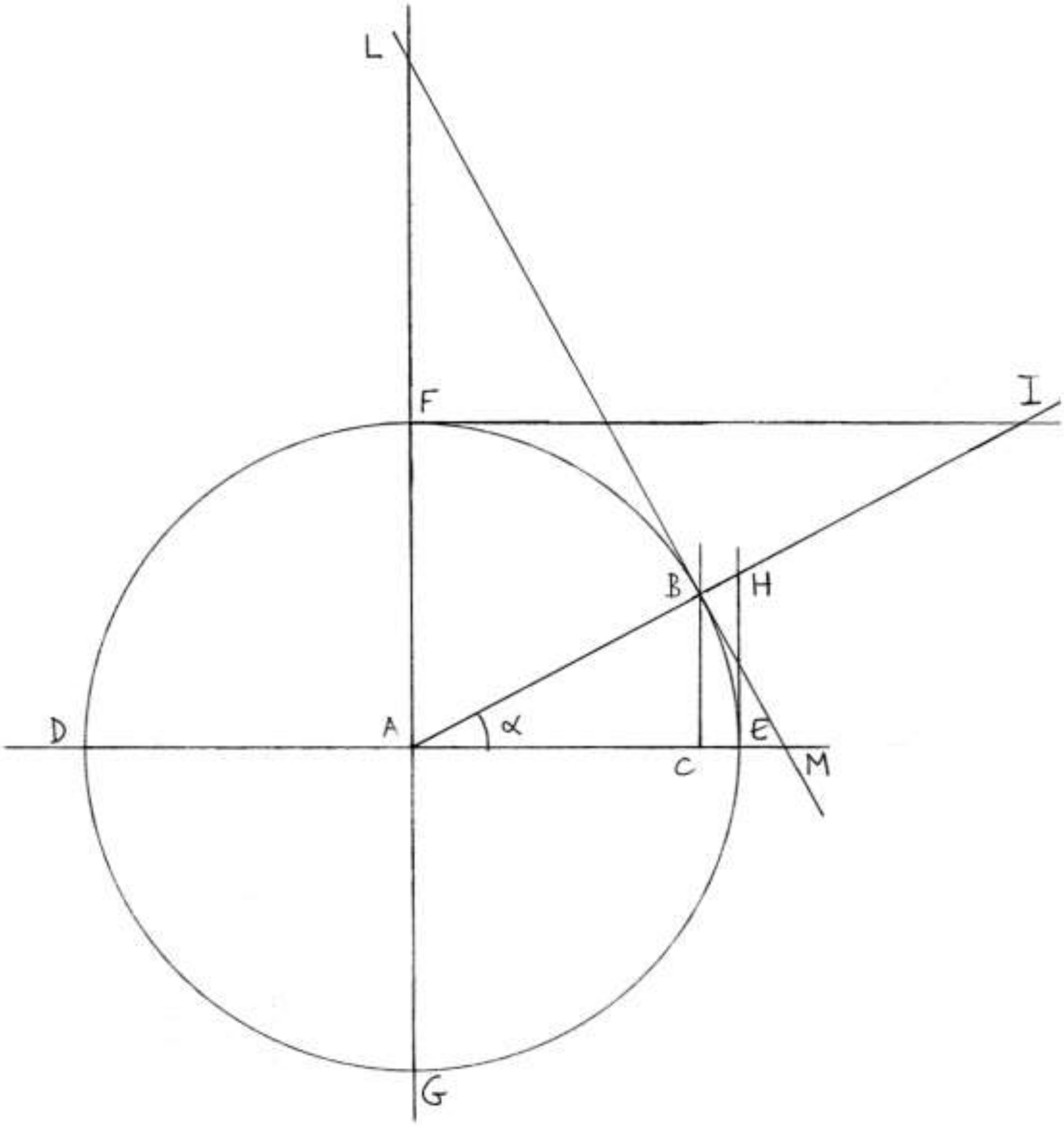
La *pendenza* indica la tangente dell'angolo BAC = α.

I Romani non conoscevano il concetto di "tangente di un angolo" ma lo impiegavano: un caso è quello della tracciatura di due differenti centuriazioni confinanti e diversamente inclinate rispetto ai punti cardinali.

- APPROFONDIMENTO -

Fu il grande matematico musulmano Abu'l Wafa (940 – 998) a introdurre in trigonometria la funzione *tangente*. A lui si devono pure le funzioni *cotangente*, *secante* e *cosecante*.

In un *cerchio trigonometrico* il raggio AE ha lunghezza *convenzionale* uguale a 1:



Sono tracciati i due diametri perpendicolari DE e FG che si intersecano nel centro A, vertice del triangolo rettangolo ABC, con ipotenusa AB lunga quanto il raggio della circonferenza.

Innalzare la tangente passante per il punto E.

Tracciare la tangente alla circonferenza per il punto F.

Prolungare l’ipotenusa AB fino a determinare i punti H e I.

Disegnare la tangente alla circonferenza nel punto B e prolungare verso l’alto il diametro GF: sono fissati i punti L e M.

La tabella che segue contiene i simboli delle sei funzioni trigonometriche dell’angolo BAC = α e le loro lunghezze riferite al precedente grafico:

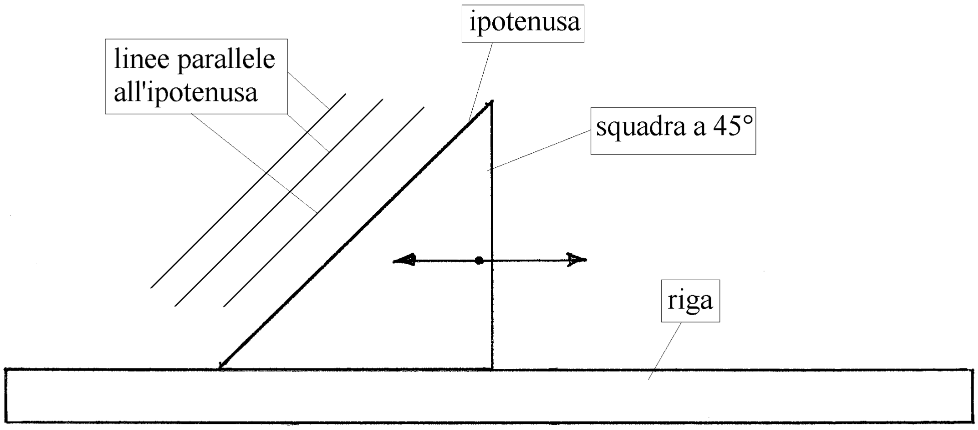
funzione	simboli	rapporti fra le funzioni	rapporti geometrici
seno α	sen α		$\text{sen}\,\alpha = \frac{BC}{AB}$
coseno α	cos α		$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$
tangente α	tg α	$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} = EH$
cotangente α	ctg α	$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$	$\text{ctg}\,\alpha = \frac{AC}{BC} = FI$
secante α	sec α	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$	$\sec\alpha = \frac{AB}{AC} = AH$
cosecante α	cosec α	$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$	$\text{cosec}\,\alpha = \frac{AB}{BC} = AL$

Costruzioni “per ipotenusa”

Gli Agrimensori romani chiamarono costruzioni *pro hypotenusa* (*per ipotenusa* o *lungo l’ipotenusa*) le centuriazioni tracciate lungo l’ipotenusa di triangoli rettangoli: l’ipotenusa serviva a orientare gli assi della singola centuriazione.

I Romani sceglievano triangoli con cateti con lunghezze proporzionali a *numeri interi piccoli*, per cui la tangente - espressa dal rapporto fra le lunghezze dei due cateti – era facilmente gestibile.

Lo scorrimento di una squadra lungo una riga (come accade su di un qualsiasi tavolo da disegno) permette di disegnare linee parallele all’*ipotenusa*:



Il grafico qui sopra dimostra che si tratta di un'applicazione del metodo della *diagonale*.

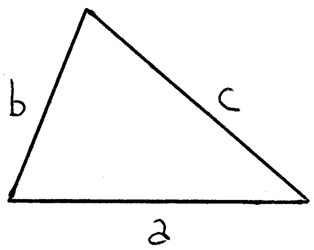
Con questa costruzione si realizza una *triangolazione* o si verifica una triangolazione già tracciata.

La *triangolazione* è un metodo per determinare la superficie di un'area mediante la sua divisione in triangoli connessi. Essa è stata usata in agrimensura ed è impiegata nella navigazione.

I Gromatici usavano la triangolazione di una superficie irregolare scomponendola in *triangoli rettangoli* dei quali con il teorema di Pitagora potevano calcolare le dimensioni. Il calcolo della superficie di un triangolo rettangolo non creava loro problemi perché è uguale al semiprodotto delle lunghezze dei due cateti.

La misura della superficie di un triangolo generico, *non rettangolo*, richiedeva la conoscenza del *teorema dei seni*, elaborato nei secoli successivi da Nasir al-Din al Tusi (1201-1274) e da Lev ben Gerson (1288-1344) e sistemato da Regiomontano (Johann Müller, 1436-1476).

Inoltre, non sembra che i Gromatici conoscessero la formula di Erone (I secolo d.C.) per calcolare l'area di un qualsiasi triangolo di cui erano conosciute le lunghezze dei tre lati, a, b e c, e quindi la lunghezza del *semiperimetro* p:

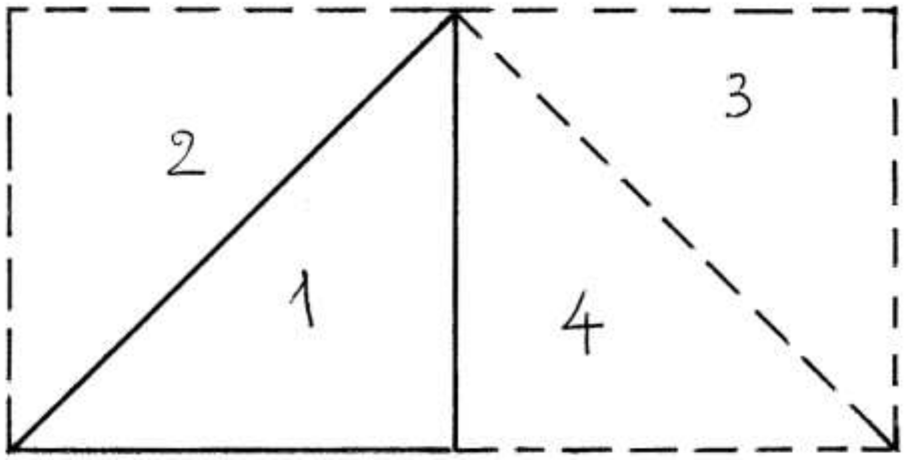


$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (-a+b+c)(a-b+c) \cdot (a+b-c)}}{4}$$

Nel caso degli Agrimensori romani, dopo aver tracciato il primo triangolo rettangolo (ad esempio *isoscele*), quello indicato con 1 nella figura che segue, gli altri tre venivano determinati con la *groma*:



Due triangoli uniti per le ipotenuse formavano un *actus* quadrato e 4 actus affiancati formavano un *heredium*. Nella figura i quattro triangoli (1, 2, 3 e 4) formano due *actus* o uno *iugero*.

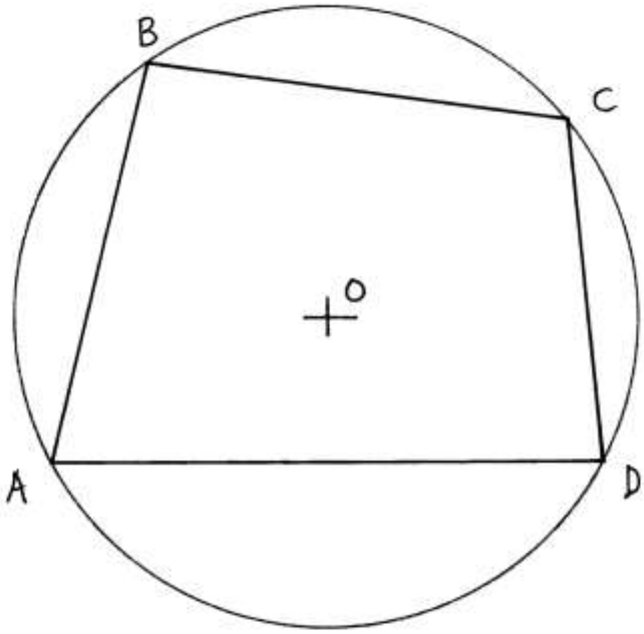
La *quadrangolazione* consisteva nella divisione di una superficie in poligoni formati da *quattro* lati.

\- APPROFONDIMENTO -

<u>La formula di Brahmagupta</u>

Brahmagupta (598 – 668) è stato un matematico e astronomo indiano.

Egli elaborò una formula per calcolare l’area di un *quadrilatero ciclico* e cioè con i vertici tutti posti su di una circonferenza. Il quadrilatero mostrato nella figura che segue lo è:



L’area è ottenuta con la formula seguente:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Nella formula precedente

$$AB = a \quad BC = b \quad CD = c \quad DA = d$$

$$2p = a + b + c + d \quad \text{da cui}$$

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

La formula di Erone è un caso particolare di quella di Brahmagupta, ponendo $d = 0$: il quarto lato di lunghezza d non esiste più e la figura viene trasformata in un triangolo generico con lati lunghi a, b e c. L'espressione in radice $(p - d)$ vale soltanto p, per cui ritorna la formula di Erone:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-0)} =$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p)} =$$

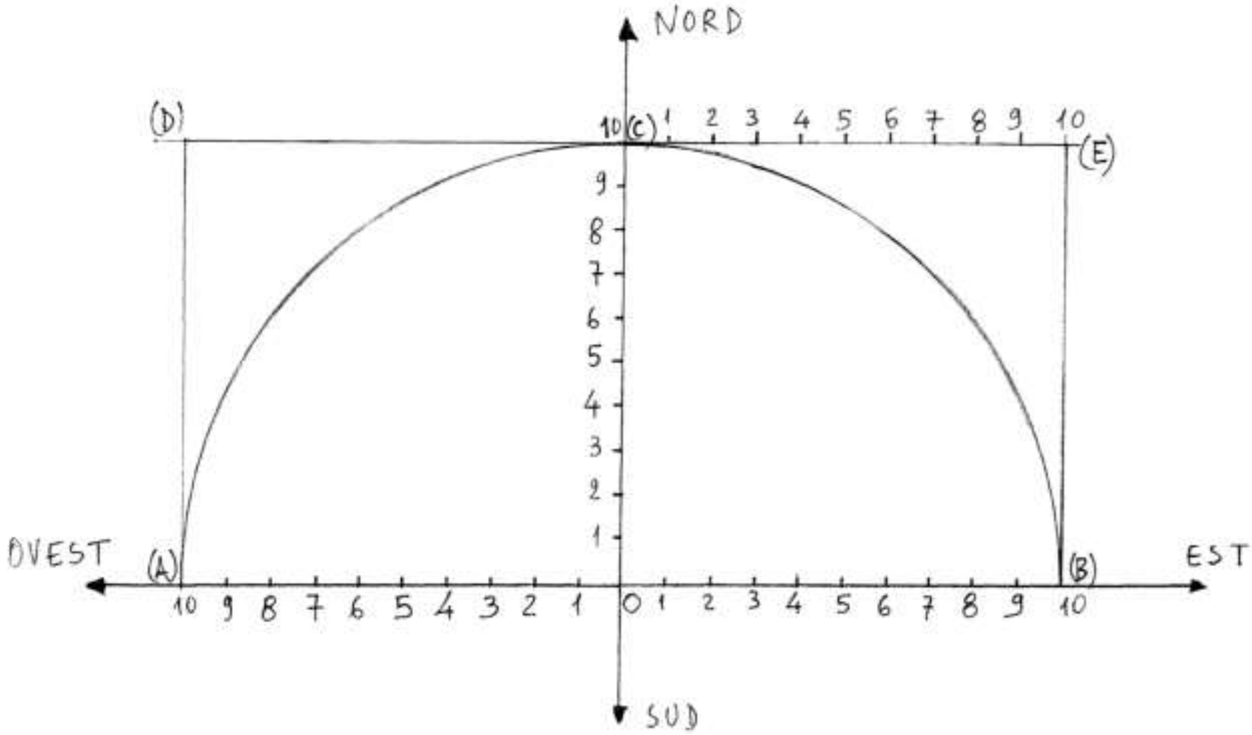
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

La formula di Erone è valida per qualunque triangolo come caso particolare di quella di Brahmagupta (vissuto, come detto sopra, alcuni secoli dopo Erone) per una semplice spiegazione geometrica: per tre punti (i vertici di un triangolo generico) passa una circonferenza e quindi il triangolo è un *poligono ciclico* perché inscritto in quella unica circonferenza.

- -

Alcune inclinazioni usate dai Romani

Il diagramma presentato nella figura che segue ha la forma di un semicerchio di raggio *convenzionale* uguale a 10:



Il diametro orizzontale (AB) è orientato da Est (B) a Ovest (A) e il raggio verticale si muove dal centro del semicerchio (O) verso il Nord (C).

Il semicerchio è inscritto nel rettangolo ADEB, che è un *doppio quadrato*: ADCO e OCEB sono due quadrati di uguali dimensioni.

I raggi OA, OC e OB sono divisi in 10 parti uguali, numerate a partire dal centro O.

Anche il lato CE è diviso in 10 parti uguali, numerate a partire dal punto C: il punto E coincide con il limite della divisione 10.

La parte destra del diagramma (Nord – Sud – Est) può essere usata per determinare per via geometrica gli angoli dei triangoli rettangoli con un cateto con lunghezza costante (uguale al raggio OC. Il secondo cateto ha lunghezza variabile in proporzione da 1 a 10, con le lunghezze prese a partire da C sul segmento CE.

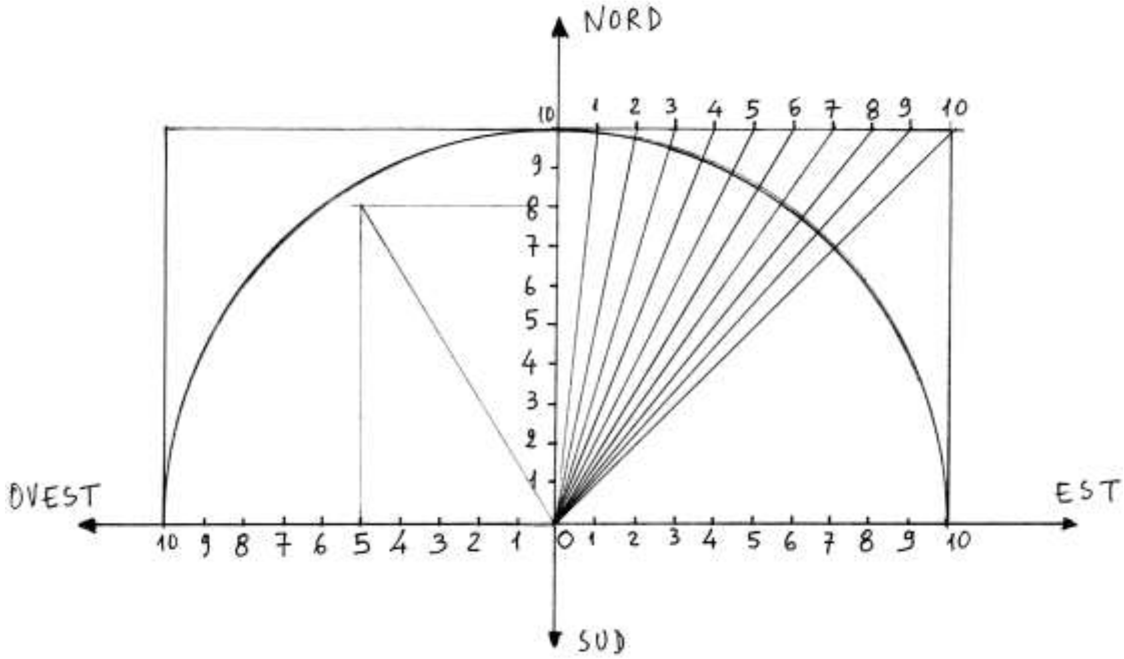
Gli angoli in O variano con la lunghezza del cateto allineato sul segmento CE: la tangente dell'angolo in O varia fra 1/10 (= 0,1) e 10/10 (= 1).

La tabella che segue contiene i dati relativi alle dieci possibili inclinazioni:

tabella tangenti 10

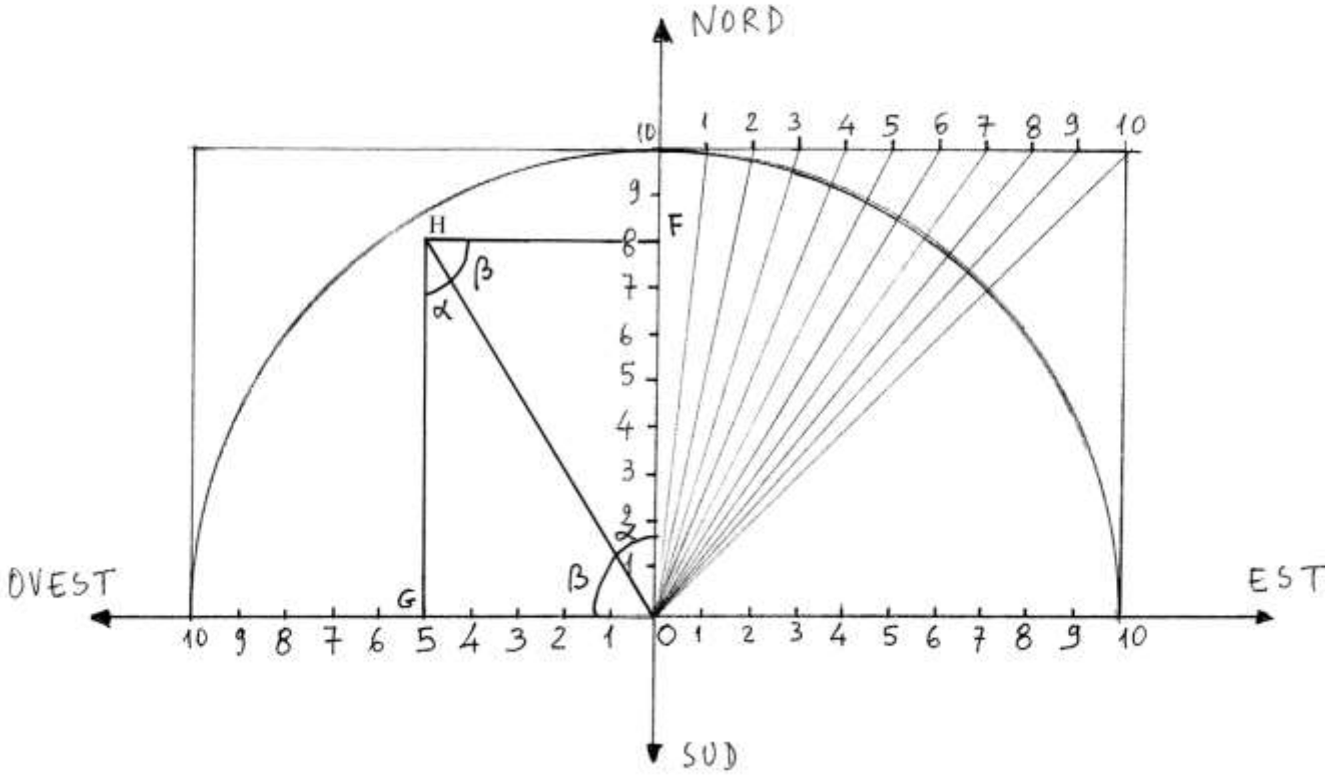
	lunghezza secondo cateto	tg α = = $\frac{\text{secondo cateto}}{\text{cateto OC}}$	ampiezza angolo α, in gradi (°) e minuti primi (')	ampiezza angolo α in gradi e centesimi di grado
lunghezza cateto OC: **10** costante	1	1/10 = 0,1	5° 45'	5,75°
	2	2/10 = 0,2	11° 15'	11,25°
	3	3/10 = 0,3	16° 45'	16,75°
	4	4/10 = 0,4	21° 45'	21,75°
	5	5/10 = 0,5	26° 35'	26,58°
	6	6/10 = 0,6	~ 31°	~ 31°
	7	7/10 = 0,7	~ 35°	~ 35°
	8	8/10 = 0,8	38° 35'	38,58°
	9	9/10 = 0,9	~ 42°	~ 42°
	10	10/10 = 1	45°	45°

La parte sinistra del diagramma può servire a determinare angoli di triangoli rettangoli con cateti nei più vari rapporti:



Nell'esempio, è tracciata la diagonale del rettangolo che ha lati lunghi 5 e 8.

Il rettangolo ha i vertici nei punti G, H, F e O:



La diagonale OH divide il rettangolo GHFO in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: GHO e HFO.

La diagonale OH divide l'angolo retto in H in due angoli *complementari* (perché la loro somma è uguale a 90°), α e β. La tabella che segue fornisce i dati relativi ai due angoli:

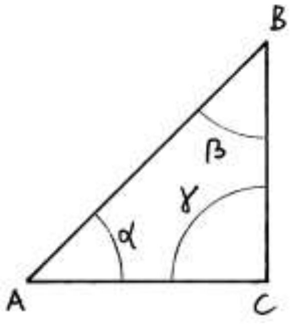
angoli	tangenti	ampiezza angoli
$GHO = HOF = \alpha$	$\frac{HF}{FO} = \frac{GO}{GH} = tg\alpha = 0{,}625$	$\alpha \cong 32° 5' \cong 32{,}08°$
$GOH = FHO = \beta$	$\frac{OF}{HF} = \frac{GH}{GO} = tg\beta = 1{,}6$	$\beta \cong 57° 55' \cong 57{,}92°$

$$\alpha + \beta = 90°$$

- APPROFONDIMENTO -

L’angolo di 45° è caratteristico di un triangolo rettangolo isoscele:

$$AC = BC \qquad \alpha = 45^\circ$$
$$\beta = 45^\circ$$
$$\gamma = 90^\circ$$

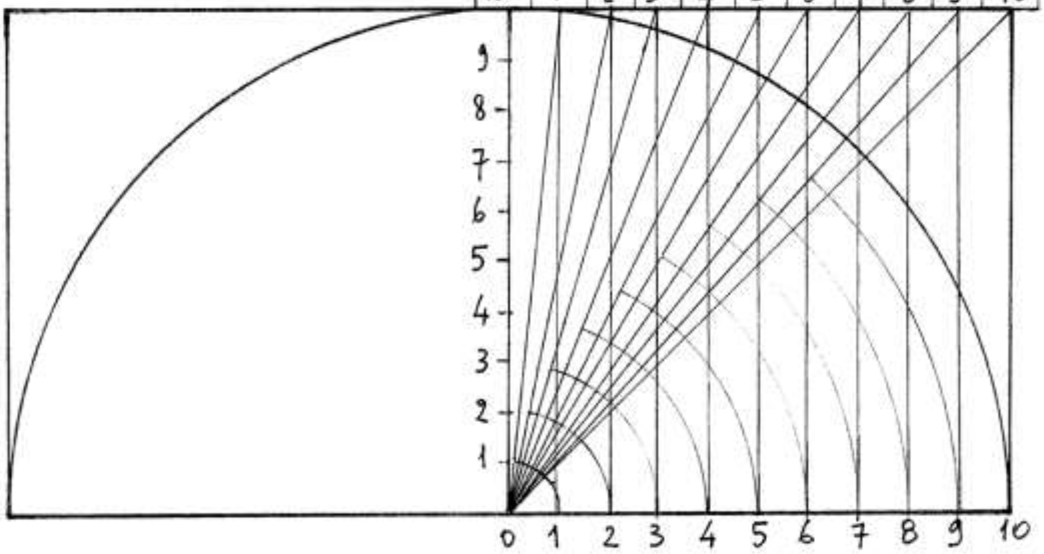


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = 1$$

Con l’aumentare dell’ampiezza dell’angolo di un triangolo rettangolo, oltre i 45°, il valore della tangente cresce in modo assai rapido fino a raggiungere quello ipotetico di ∞ (*infinito*) per la pendenza di 90°, come spiega il grafico che segue:

ampiezza α (in gradi e centesimi di grado)	90°	84,30°	78,58°	73,25°	68,06°	63,36°	58°	54°	51,70°	47°	45°
ampiezza α (in gradi e minuti)	90°	84°18'	78°35'	73°15'	68°4'	63°22'	58°	54°	51°42'	47°	45°
tangente α	$\frac{10}{0} = \infty$	$\frac{10}{1} = 10$	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{10}{3} = 3,333$	$\frac{10}{4} = 2,5$	$\frac{10}{5} = 2$	$\frac{10}{6} = 1,666$	$\frac{10}{7} = 1,428$	$\frac{10}{8} = 1,25$	$\frac{10}{9} = 1,111$	$\frac{10}{10} = 1$
	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



- -

Altre inclinazioni usate dai Romani

La tabella che segue contiene i dati essenziali relativi alle inclinazioni *secondo l'ipotenusa* individuate in antiche centuriazioni.

rapporto fra i cateti (in frazione)	valore della tangente	angolo approssimato (in forma decimale)
3/8	0,375	20° 35' = 20,58°
2/5	0,4	21° 45' = 21,75°
$4/9 = (2/3)^2$	0,4444	23,96°
5/9	0,5555	29,05°
5/8	0,625	32,01°
2/3	0,6666	33,69°
5/7	0,714	35° 33' = 35,55°
3/4	0,75	36,87°
5/6	0,833	39,81°
1/1	1	45°
6/5	1,2	50° 15' = 50,25°
5/4	1,25	51,34°
4/3	1,3333	53,13°
3/2 [= 9/6]	1,5	56,31°
5/3	1,6666	59,04°
7/4	1,75	60° 15' = 60,25°
9/4	2,25	66° 5' = 66,08°
11/4	2,75	69°
3/1	3	71° 35' = 71,58°
7/2	3,5	74°
9/2	4,5	77° 26' = 77,43°

Fra i valori delle inclinazioni degli assi delle centuriazioni sono generalmente assenti gli angoli compresi fra 5° e 10°. Essi sarebbero ricavati da triangoli rettangoli con cateti nel rapporto **1/n** con il denominatore **n** che assume valori maggiori di 5.

La tabella che segue riporta i dati relativi a queste inclinazioni usate raramente:

tangente (frazione)	tangente (decimale)	angolo approssimato
1/5	0,2	11° 15' = 11,25°
1/6	0,16666	9° 26' = 9,43°
1/7	0,1428	8° 8' = 8,13°
1/8	0,125	7° 8' = 7,13°
1/9	0,1111	6° 4' = 6,07°
1/10	0,1	5° 45' = 5,75°
1/11	0,0909	5° 12' = 5,20°
1/12	0,0833	4° 46' = 4,77°

Anche le tangenti date dalle frazioni 1/4 e 1/3 sono poco diffuse:

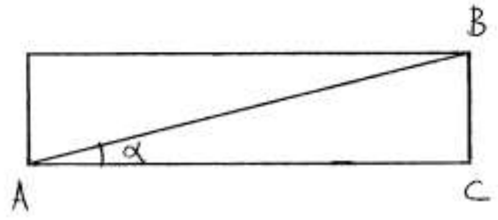
tangente (frazione)	tangente (decimale)	angolo approssimato
1/4	0,25	14° 2' 10'' = 14,036°
1/3	0,333	18° 25' = 18,42°

Le tavole che seguono presentano le caratteristiche geometriche di alcuni rapporti usati dagli Agrimensori romani:

$$AC = 4\,BC$$

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{4\,BC} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

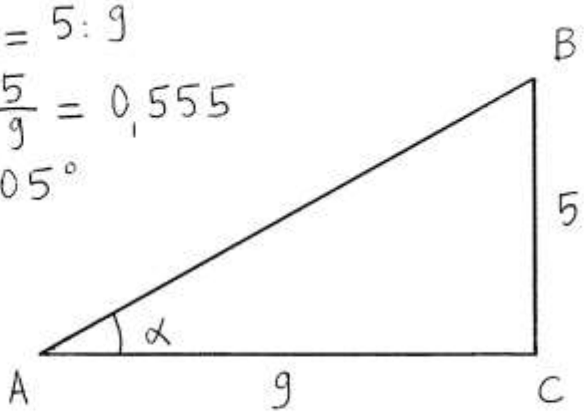
$$\alpha = 14{,}03°$$



$$BC : AC = 5 : 9$$

$$tg\,\alpha = \frac{5}{9} = 0{,}555$$

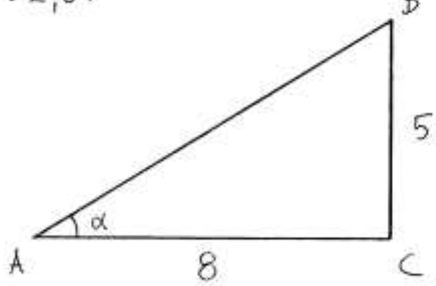
$$\alpha = 29{,}05°$$



$$BC : AC = 5 : 8$$

$$tg\,\alpha = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

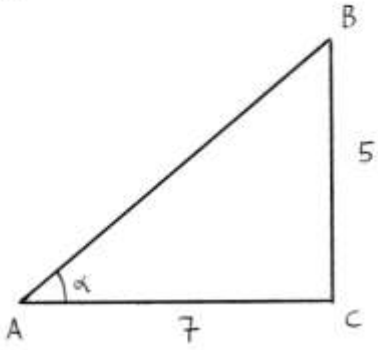
$$\alpha = 32{,}01°$$



$BC : AC = 5 : 7$

$tg\,\alpha = \frac{5}{7} = 0{,}714$

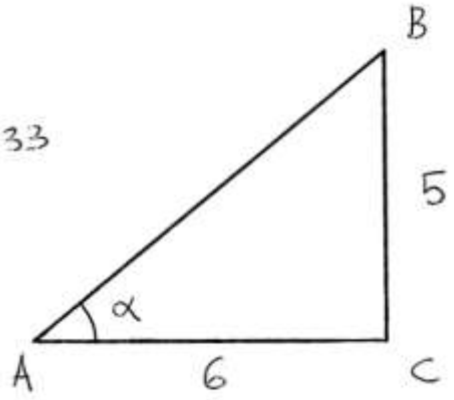
$\alpha = 35{,}54°$



$BC : AC = 5 : 6$

$tg\,\alpha = \frac{5}{6} = 0{,}833$

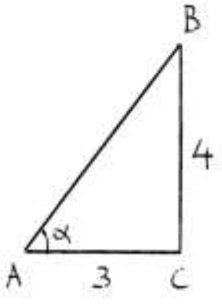
$\alpha = 39{,}81°$



$BC : AC = 4 : 3$

$tg\,\alpha = 1{,}3333$

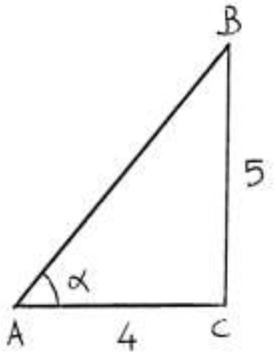
$\alpha = 53{,}13°$



$BC : AC = 5 : 4$

$tg\,\alpha = 1{,}25$

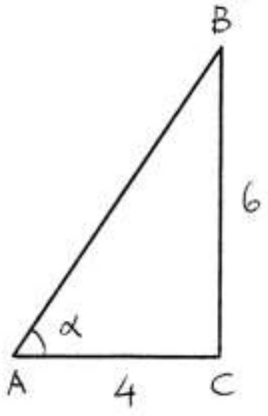
$\alpha = 51{,}34°$



$BC : AC = 6 : 4 = 3 : 2$

$tg\,\alpha = 1{,}5$

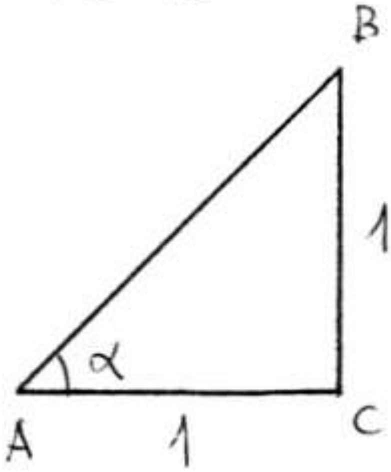
$\alpha = 56{,}31°$



$BC : AC = 1 : 1$

$tg\alpha = \frac{1}{1} = 1$

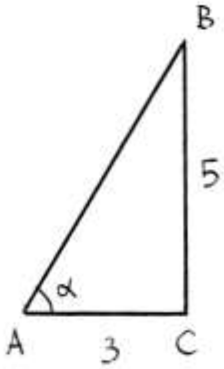
$\alpha = 45°$

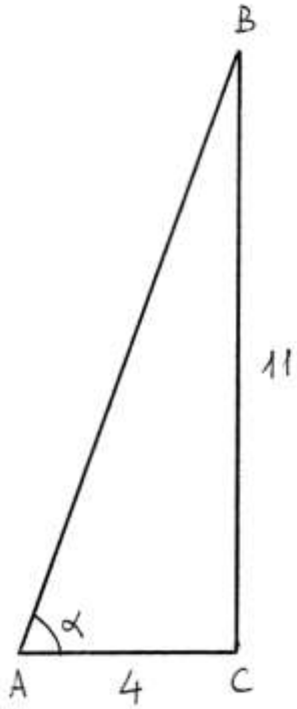


$BC : AC = 5 : 3$

$tg\alpha = 1,6666$

$\alpha = 59,04°$





$BC : AC = 11 : 4$

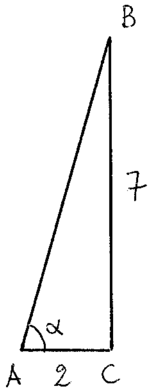
$tg\ \alpha = 2,75$

$\alpha \cong 69°$

$BC : AC = 7 : 2$

$tg\,\alpha = \frac{7}{2} = 3{,}5$

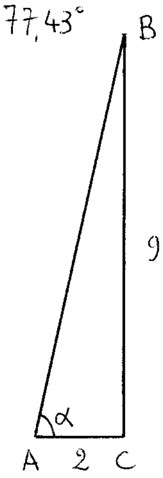
$\alpha = 74°$



$BC : AC = 9 : 2$

$tg\,\alpha = \frac{9}{2} = 4{,}5$

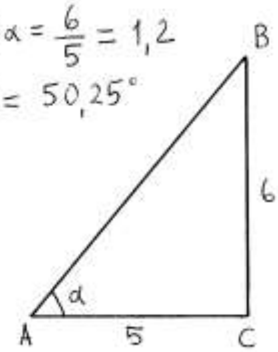
$\alpha = 77{,}43°$



$BC : AC = 6 : 5$

$tg\,\alpha = \frac{6}{5} = 1{,}2$

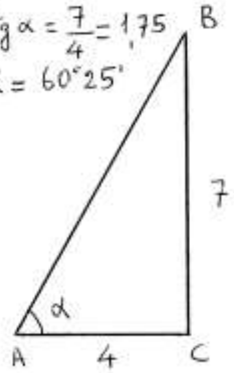
$\alpha = 50{,}25°$



$BC : AC = 7 : 4$

$tg\,\alpha = \frac{7}{4} = 1{,}75$

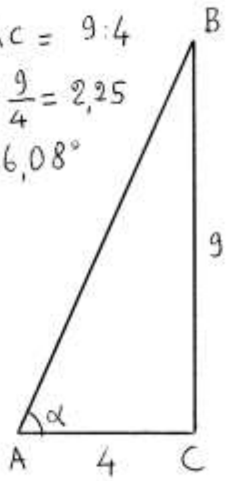
$\alpha = 60°25'$



$BC : AC = 9 : 4$

$tg\,\alpha = \frac{9}{4} = 2{,}25$

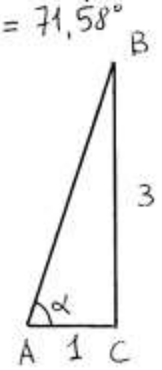
$\alpha = 66{,}08°$



$BC : AC = 3 : 1$

$tg\,\alpha = \frac{3}{1} = 3$

$\alpha = 71{,}58°$



- APPROFONDIMENTO -

<u>Le tabelle usate dagli agrimensori romani</u>

È stata avanzata l'ipotesi che per semplificare il lavoro e i calcoli, gli Agrimensori romani avessero a disposizione delle tabelle con valori approssimati di inclinazioni e di altri rapporti geometrici.

I loro probabili *appunti* erano scritti su materiali facilmente deperibili come la tela e il papiro, per cui non si è conservata alcuna documentazione.

Quegli *appunti* hanno avuto un degno successore nei "libri di bottega" compilati dagli artigiani italiani nel Medioevo e nel Rinascimento e di cui si conservano un buon numero di esemplari scritti su carta.

- -

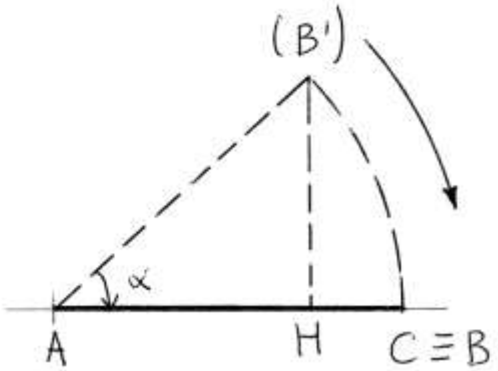
<u>Centuriazione con inclinazione uguale a 0°</u>

La tangente degli angoli è stata finora scritta sia sotto forma di frazione (ad esempio $2/10$) che sotto forma decimale (nell'esempio $0{,}2$).

Esiste un terza notazione, sotto forma di divisione o *ratio*: nel solito esempio, $2{:}10$ oppure $2 : 10$.

Nel caso di *due centuriazioni parallele* l'angolo α tende a $0°$:

$$BC : AC = 0 : 1$$
$$\alpha = 0° \quad tg\, \alpha = 0$$



Il triangolo A(B')H è rettangolo. L'angolo (B')AH è ampio α.

Ruotando in senso orario l'ipotenusa A(B'), essa va a sovrapporsi al cateto AH: l'angolo α si riduce a 0°. La tangente tg dell'angolo è: $tg\ \alpha = 0$.

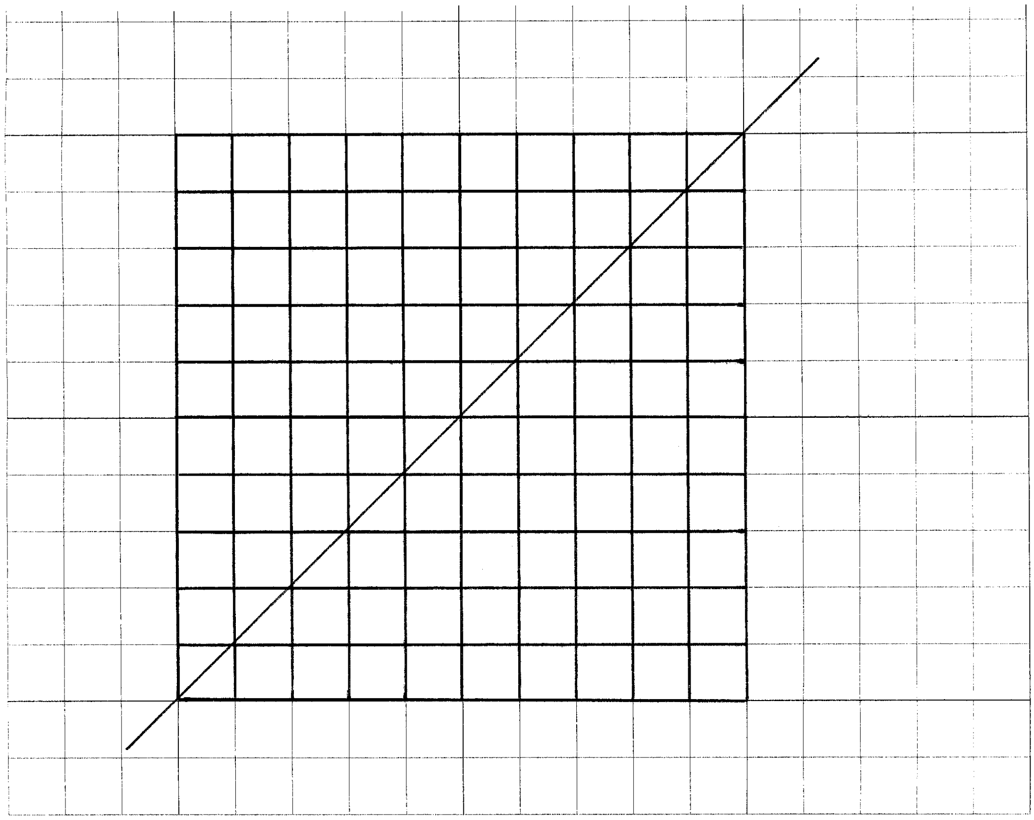
L'inclinazione è indicata con le tre seguenti espressioni

$$0/1 \ = \ 0 \ = \ 0{:}1$$

<u>Il controllo della precisione di una centuriazione</u>

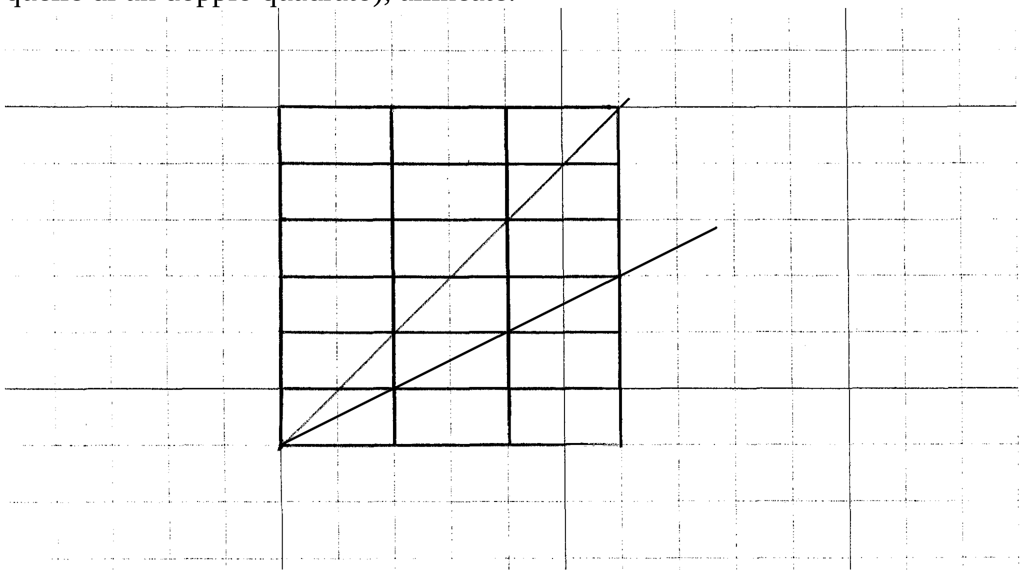
Un metodo semplice per verificare la precisione del reticolo di una centuriazione è quello della *diagonale*.

La figura che segue è la pianta di un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di uguali dimensioni:



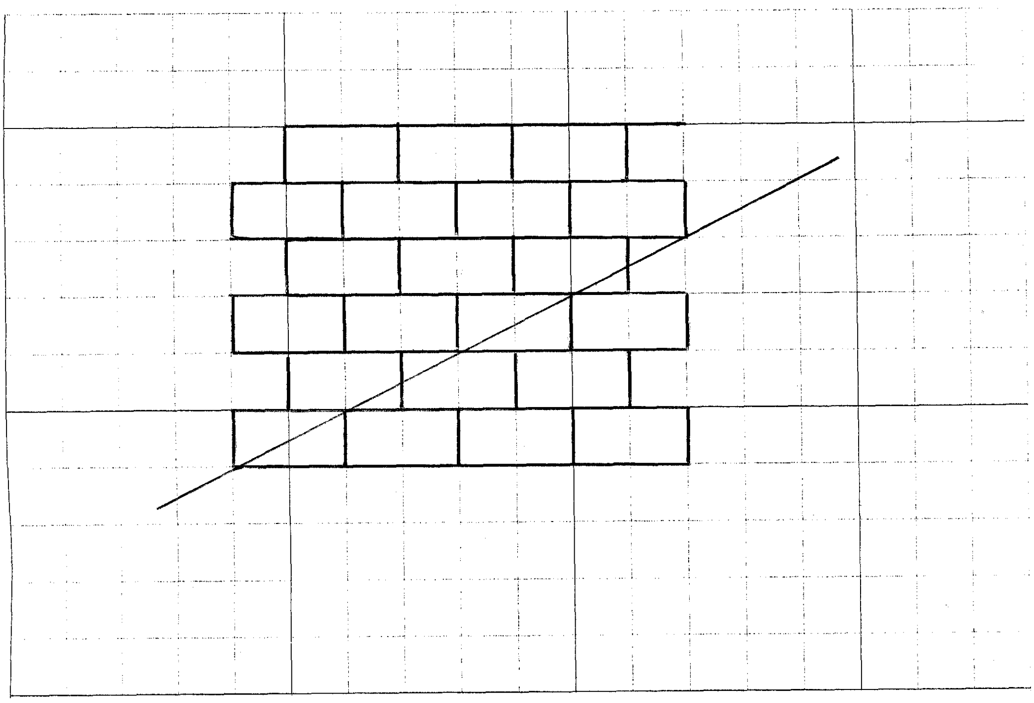
La diagonale taglia i quadrati passando sopra i vertici.

Un altro pavimento è ricoperto con mattonelle rettangolari (di forma e dimensioni uguali a quelle di un doppio quadrato), allineate:

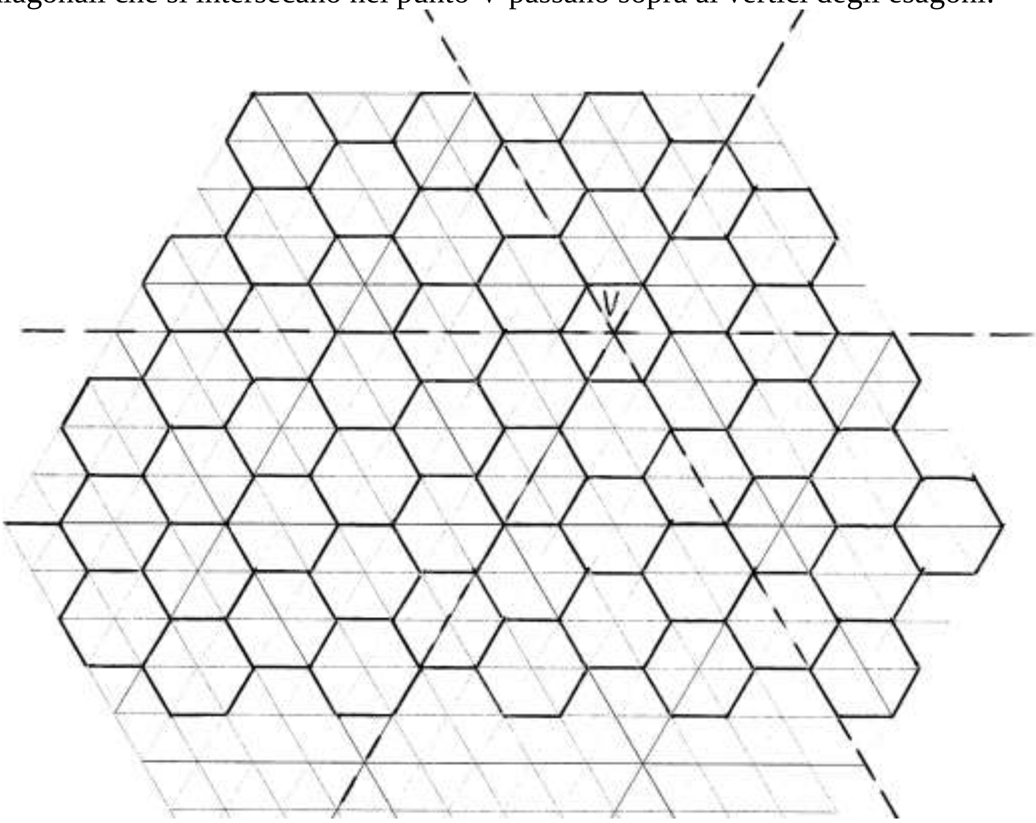


Anche in questo caso le diverse possibili diagonali passano nei vertici delle mattonelle.

Nel caso di mattonelle rettangolari disposte sfalsate, la diagonale passa sui vertici:



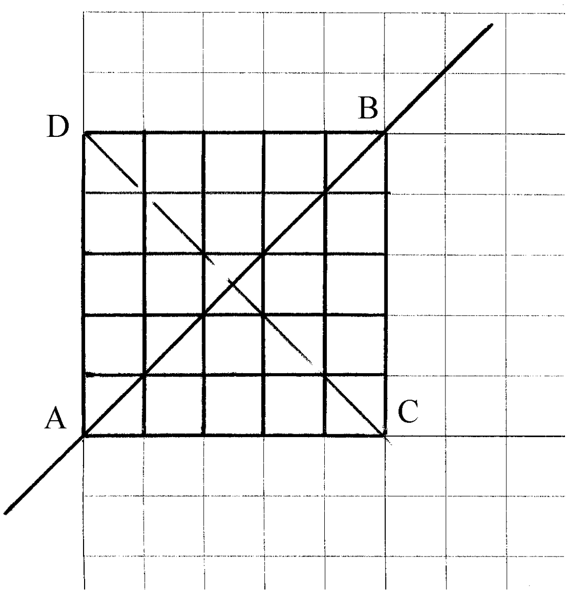
Nel caso di un pavimento coperto con mattonelle esagonali (esagoni regolari), le tre diagonali che si intersecano nel punto V passano sopra ai vertici degli esagoni:



La verifica dell'allineamento delle mattonelle di un pavimento o di una parete può essere facilmente compiuta con l'aiuto di una *corda tesa*. La corda richiesta è abbastanza corta e quindi non ha molta importanza la sua flessibilità, caratteristica che invece impedisce il suo uso su grandi distanze.

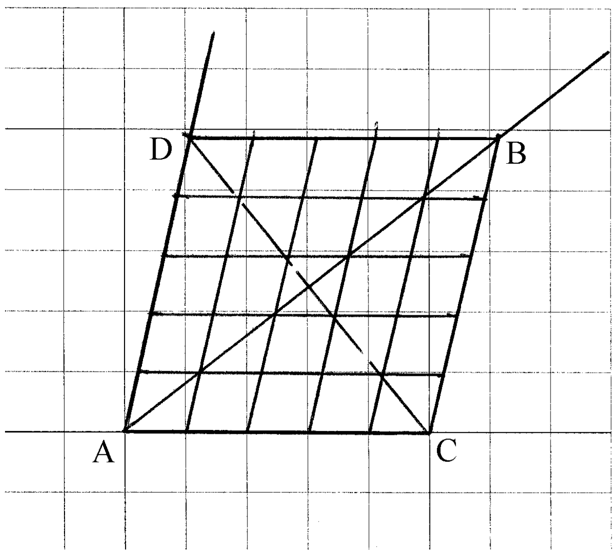
In edilizia e in agrimensura la *corda* è uno strumento indispensabile per verificare gli allineamenti e la verticalità.

Gli Agrimensori romani tracciavano un reticolato, qui semplificato in 25 particelle disposte su 5 righe per 5 colonne:



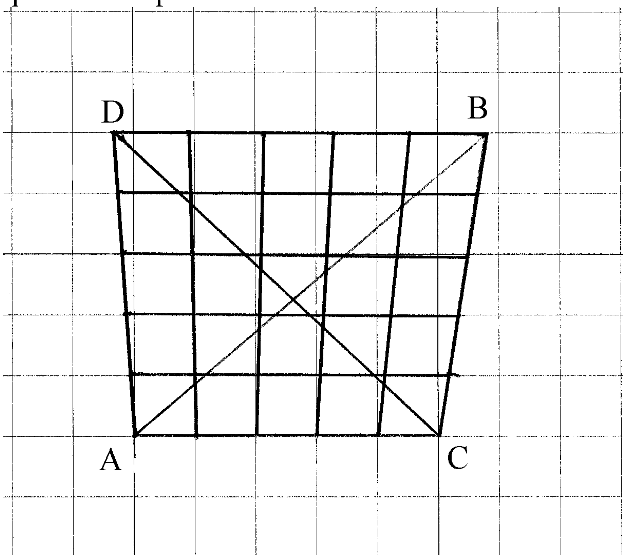
Osservando con la groma lungo le due diagonali era facilmente verificabile l'allineamento e quindi la costruzione: se le due immaginarie diagonali AB e CD passavano sopra tutti i vertici, la centuriazione era precisa e tutte le particelle avevano la stessa forma quadrata purché le due diagonali avessero la stessa lunghezza.

Nel caso che le particelle avessero i lati di uguale lunghezza e fossero a forma di *rombi*, la verifica della costruzione tramite l'esame delle diagonali AB e CD sarebbe stata poco significativa:



Entrambe le diagonali passavano per i vertici delle particelle. La misura delle lunghezze delle due diagonali era l'ulteriore passo necessario per verificare la precisione e segnalare l'errore: AB era manifestamente *più lunga* di CD.

Nel caso descritto nella figura che segue, le particelle non avevano forma quadrata, ma quella di trapezio:



Verificando le due diagonali con la groma era evidente come esse non passassero per i vertici delle singole particelle quadrangolari.

Lo stesso metodo di verifica della precisione di una centuriazione per mezzo delle diagonali poteva essere usato anche nel caso di reticolati a forma rettangolare.

La diagonale è stata usata dai trattatisti del Rinascimento – da Leon Battista Alberti in poi – per verificare l'esattezza di una rappresentazione in *prospettiva* e per determinare la posizione dei *punti di distanza*.

La precisione degli Agrimensori romani

Gli Agrimensori romani erano in grado di centuriare un vasto territorio commettendo errori trascurabili, anche di soli 2 metri su una distanza di 29 km.

I loro strumenti erano molto semplici ma i geometri romani possedevano grandi capacità, frutto anche di una secolare esperienza.

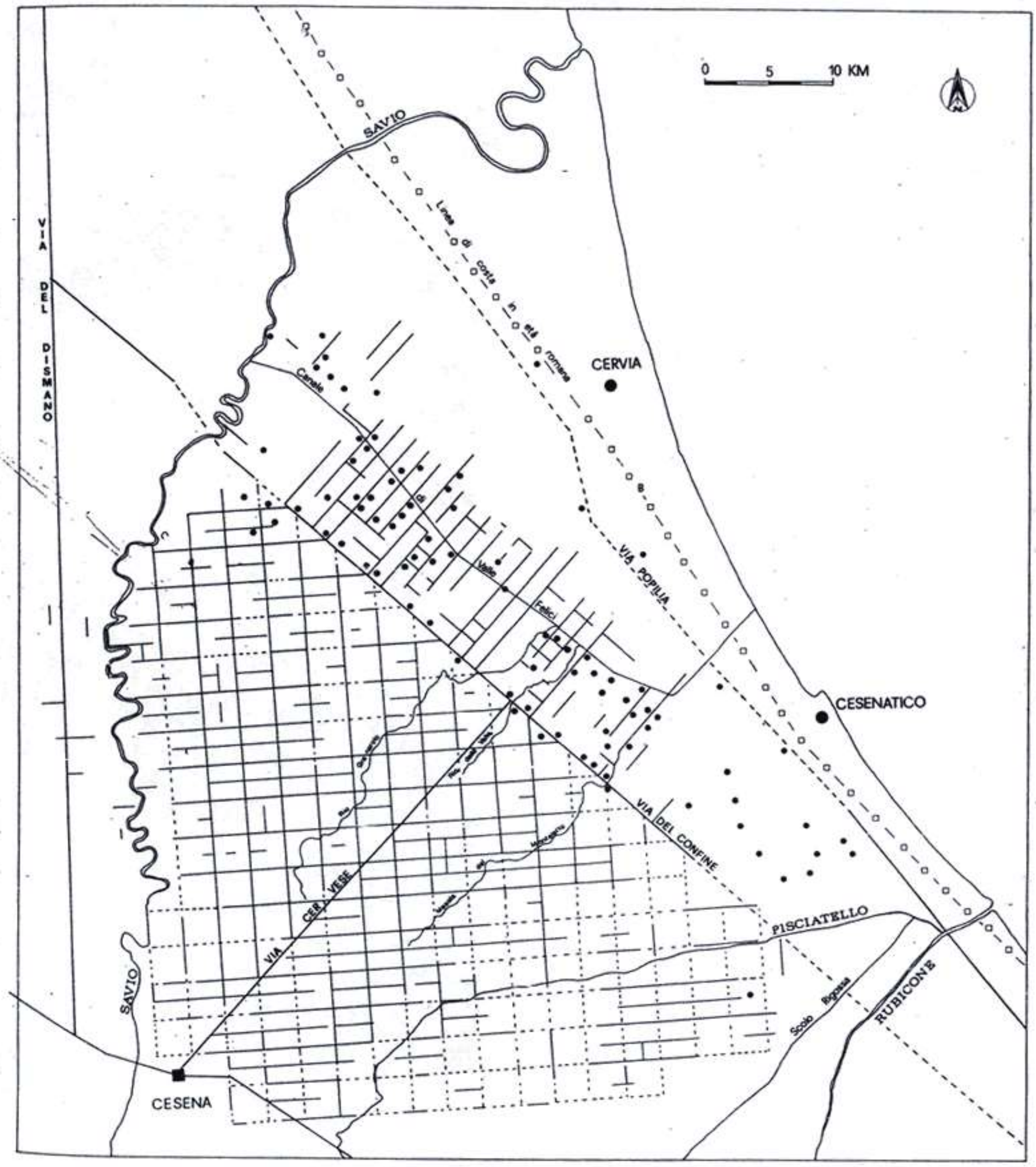
Per dare un'idea della loro capacità può essere utile indicare gli errori metrici nei quali sono incorsi i costruttori di alcune fra le più grandi costruzioni dei tempi moderni:

galleria	data di conclusione dei lavori	errore longitudinale (in metri)	errore trasversale (in metri)	errore altimetrico (in centimetri)
traforo ferroviario del Moncenisio (Italia – Francia)	25-12-1870	13,55	0,40	non conosciuto
galleria ferroviaria del San Gottardo (Svizzera)	29-2-1882	7,10	0,33	7
galleria ferroviaria del Sempione (Italia - Svizzera)	24-2-1905	0,79	0,20	9
galleria stradale del San Gottardo (Svizzera)	1980	0,05	0,05	6
tunnel della Manica o Eurotunnel (Francia – Gran Bretagna)	1-12-1990	0,07	0,36	6

Pluralità di centuriazioni

Una regione può essere stata centuriata più di una volta in epoche successive con il tracciamento di più griglie sovrapposte, oppure con griglie affiancate orientate in modo differente.

Quest'ultima è il caso della Romagna, nell'area compresa fra Cesena e il mare:



Carta dei siti e della centuriazione romana fra F. Savio e T. Pisciatello

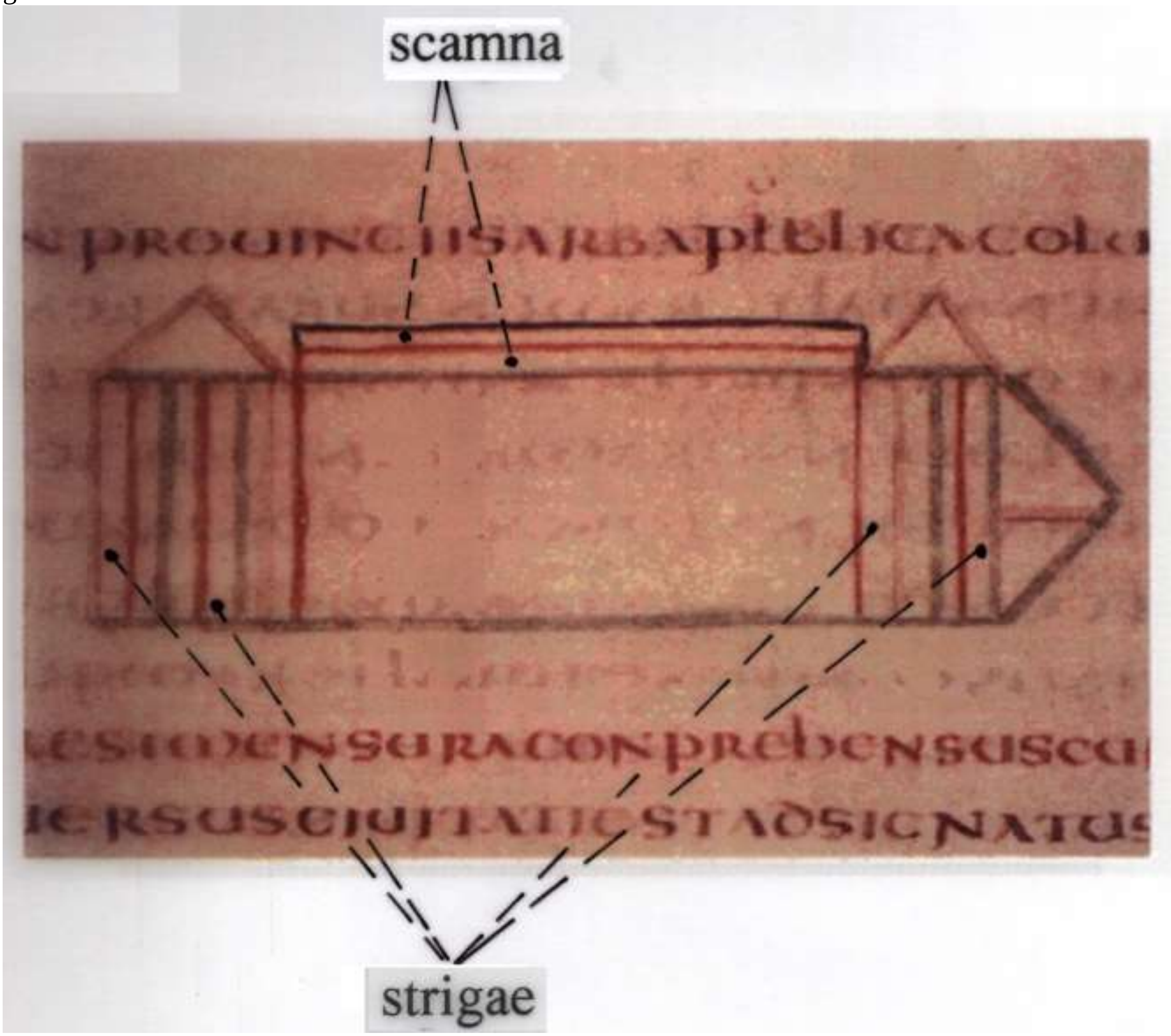
Scamnatio e striga

Scamnatio e *striga* (*strigatio*) sono due termini latini usati per indicare una divisione dei terreni in strisce rettangolari allungate invece che in quadrati (come l’actus e la centuria) utilizzate in alcune centuriazioni.

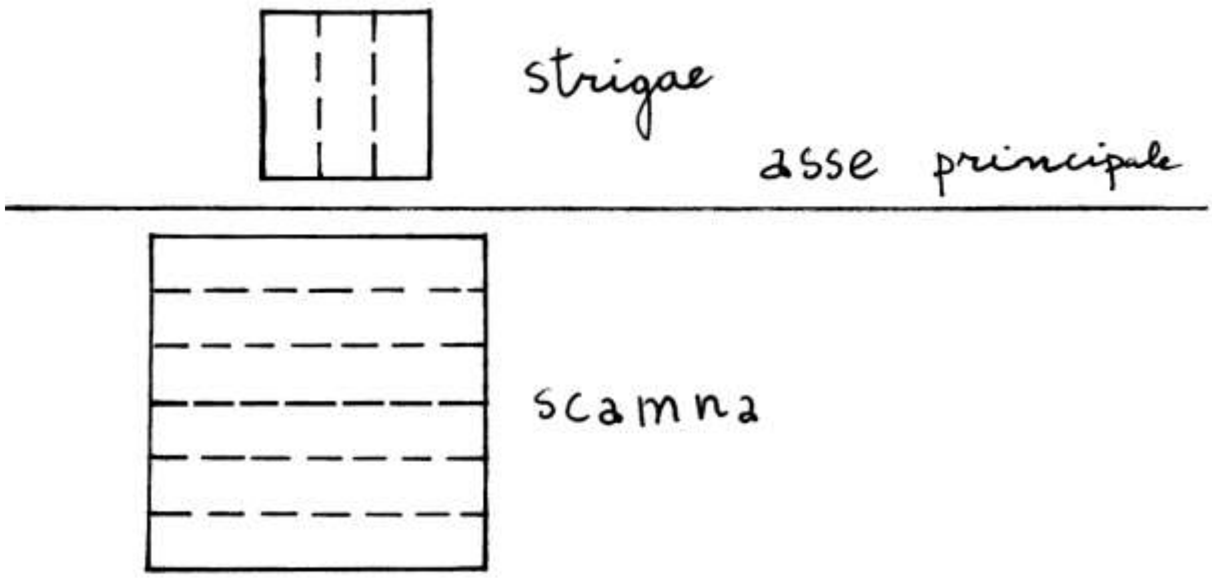
È stata avanzata l’ipotesi che questa forma di divisione dei terreni fosse impiegata dai popoli Italici (Umbri e Osci) prima della diffusione della tecnica della centuriazione da parte dei Romani.

I rettangoli a striga (plurale *strigae*) erano disposti con il lato corto lungo l’asse principale della divisione dell’area.

A loro volta i rettangoli della scamnatio erano orientati con il lato maggiore parallelo all’asse principale della divisione agraria, come spiega la figura che segue ripresa dal trattato gromatico di Frontino:

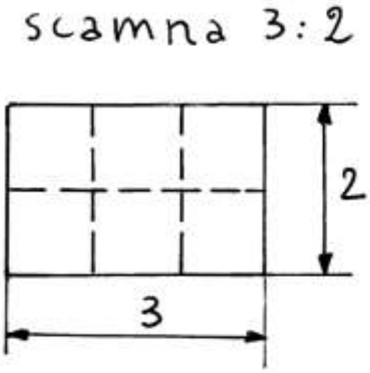


Le strisce rettangolari della scamnatio e della striga erano spesso organizzate in più grandi forme quadrate, che potevano risultare con i lati paralleli o perpendicolari rispetto a un asse (ad esempio un decumano perfettamente allineato lungo la direzione Est – Ovest):



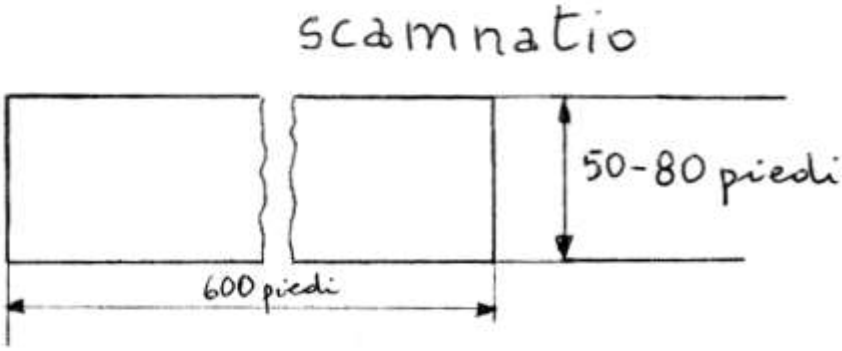
La differenza fondamentale fra la centuriazione e la divisione per scamnatio e striga era *fiscale*: la prima divideva il terreno in lotti quadrati (actus) e loro multipli sui quali venivano pagate imposte, mentre i lotti divisi per scamnatio e striga non pagavano tributi sulla proprietà fondiaria.

Secondo Igino Gromatico la forma della scamna (singolare *scamnum* e plurale *scamna*) era data da un rettangolo con i lati nel rapporto 3:2 :

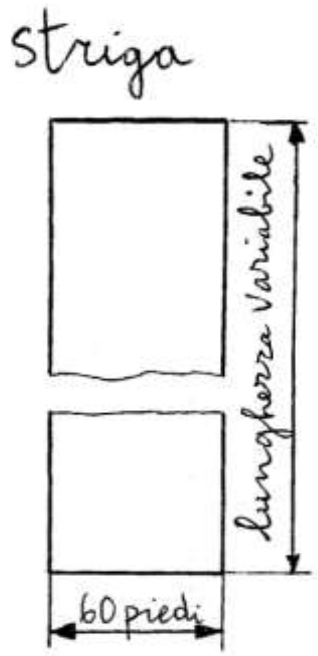


In realtà, quelle dimensioni erano puramente teoriche perché in alcune colonie fondate in Italia sono state individuate:

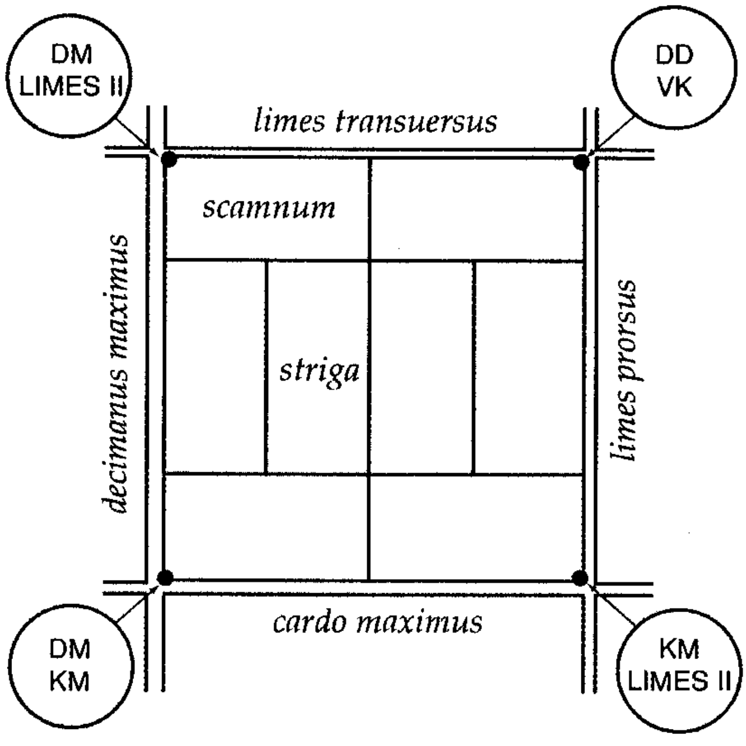
- *scamna* lunghe 600 piedi e larghe 50 – 80 piedi:



- *strigae* larghe 60 piedi e con lunghezze variabili:



La figura che segue è dovuta a Anne Roth Congès ed è a pagina 244 del testo “*Les Arpenteurs Romains*”, citato in bibliografia:



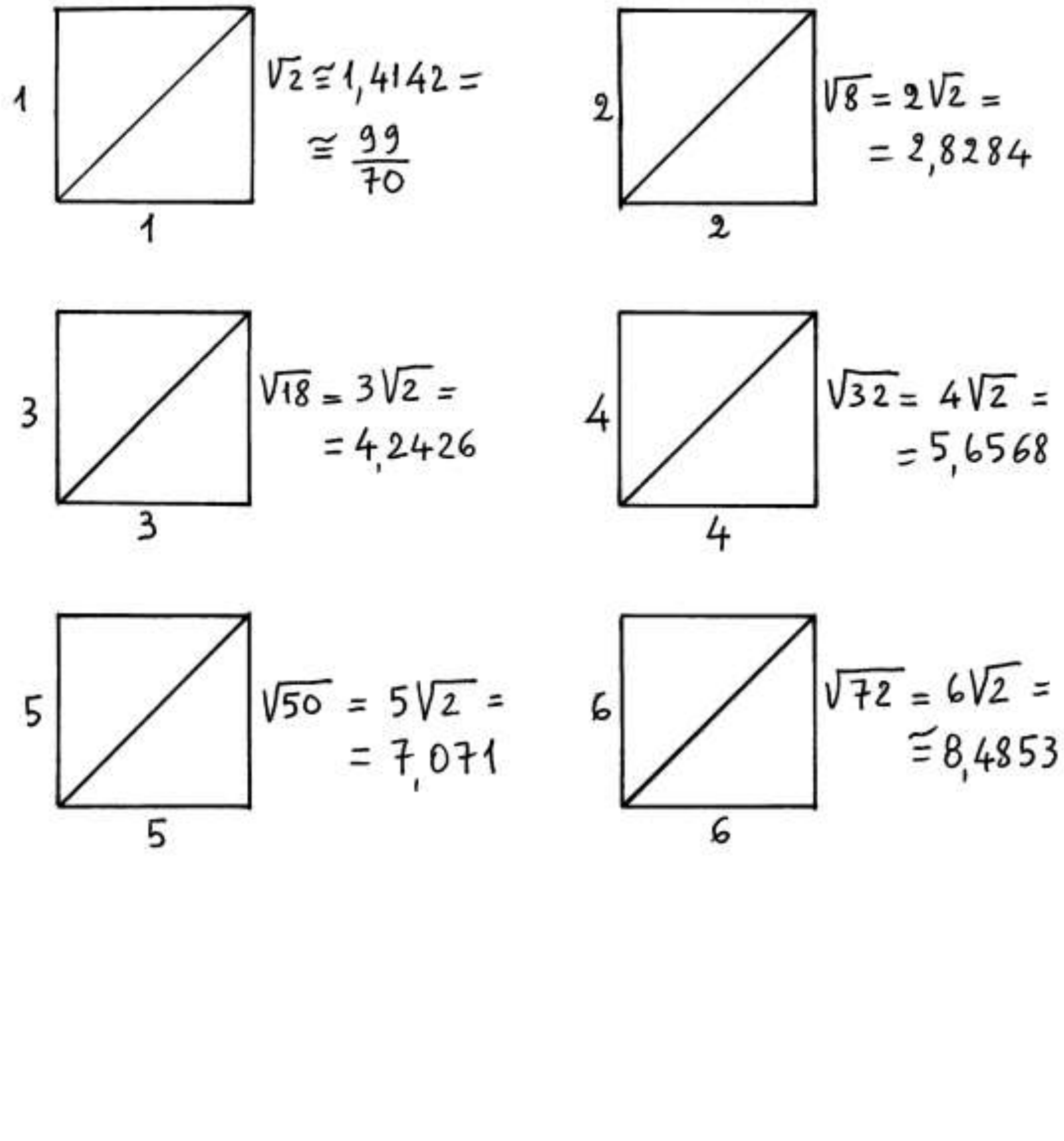
Un terreno di forma quadrata è diviso in 8 particelle: 4 sono *scamna* e 4 sono *strigae*. Le otto particelle sono disegnate con uguali dimensioni.

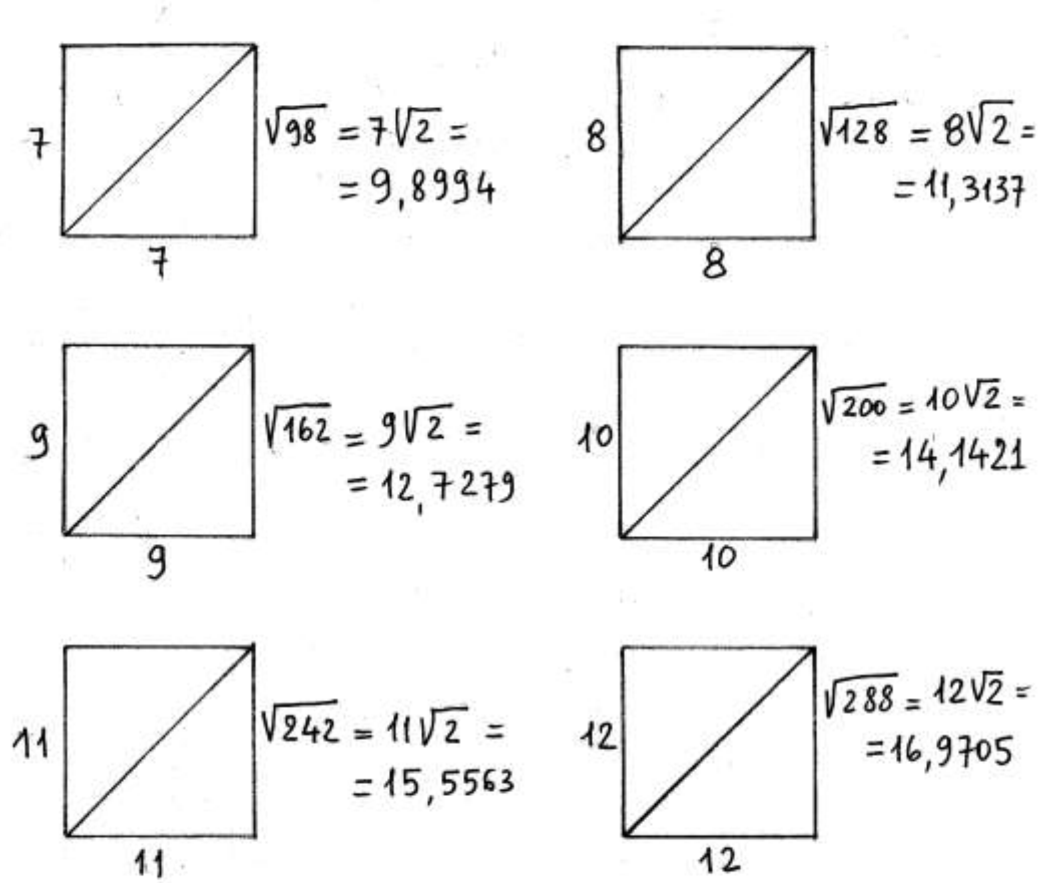
Radici quadrate di numeri interi

Il calcolo della radice quadrata di numeri interi può essere ottenuto, per via geometrica, con approssimazione accettabile per gli usi tecnici, mediante la costruzione di quadrati con lati di lunghezza definita da numeri interi.

I Romani moltiplicavano le lunghezze dei cateti per dei numeri interi abbastanza grandi, fino a ottenere la lunghezza della diagonale approssimabile a un numero intero.

Le due tavole che seguono mostrano alcuni esempi:





Ad esempio, il quadrato con lato lungo 12 ha diagonale lunga $\sqrt{288} = 16{,}9705$.
Il numero 289 (1 + 288) è un quadrato perfetto:

$289 = 17^2$ e di conseguenza la diagonale del quadrato di lato 12 può essere approssimata *per eccesso* a 17.

Un quadrato con il lato lungo 24 unità ha diagonale lunga $\sqrt{1152} = 33{,}9411$ che può essere approssimato per eccesso a 34.

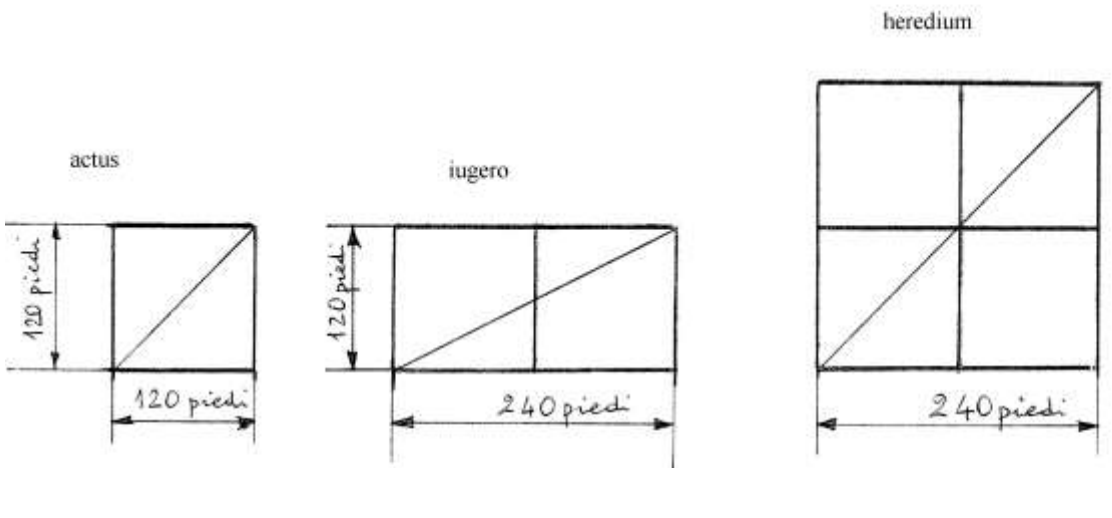
Proseguendo nella serie dei multipli, un quadrato che ha il lato lungo 120 (piedi) ha diagonale lunga $\sqrt{28800} = 169{,}7056$ che può essere approssimato per eccesso a 170.

La tabella che segue riassume tutti i valori:

lunghezza lato quadrato	quadrato della diagonale ($lato^2 + lato^2$)	lunghezza della diagonale	lunghezza approssimata per difetto della diagonale
1	2	$\sqrt{2}$	1,4142
2	8	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	2,8284
3	18	$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	4,2426
4	32	$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$	5,6568
5	50	$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$	7,071
6	72	$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$	8,4853
7	98	$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$	9,8994
8	128	$\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$	11,3137
9	162	$\sqrt{162} = 9\sqrt{2}$	12,7279
10	200	$\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$	14,1421
11	242	$\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$	15,5563
12	288	$\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$	16,9705

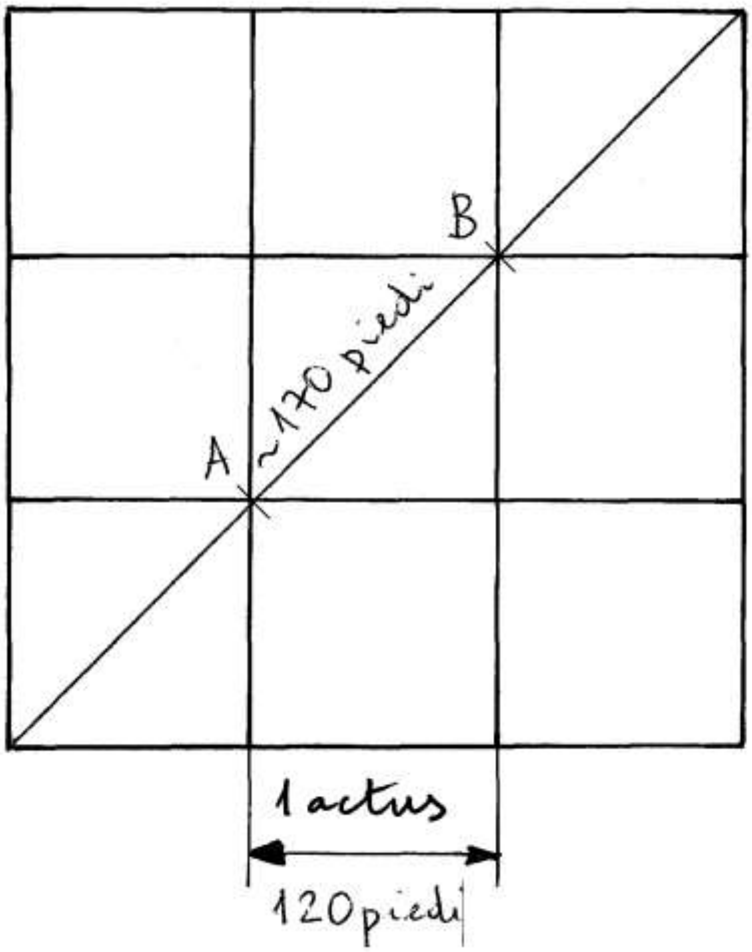
I valori riportati nelle quattro colonne sono crescenti secondo progressioni aritmetiche con differenti *ragioni*.

Le diagonali delle tre unità base di superficie usate nella centuriazione romane sono descritte nella figura che segue e riassunte nella successiva tabella:



superficie	lunghezza lati in *piedi*	lunghezza diagonale in *piedi*	lunghezza diagonale in *metri*
actus	120 x 120	169,705 ≈ 170	50,18
iugero	240 x 120	268,328	79,34
heredium	240 x 240	339,411	100,36

La verifica della lunghezza della diagonale AB di un actus, uguale a circa 170 piedi, poteva essere effettuata con 17 misurazioni in serie effettuate con la *pertica decempeda*:



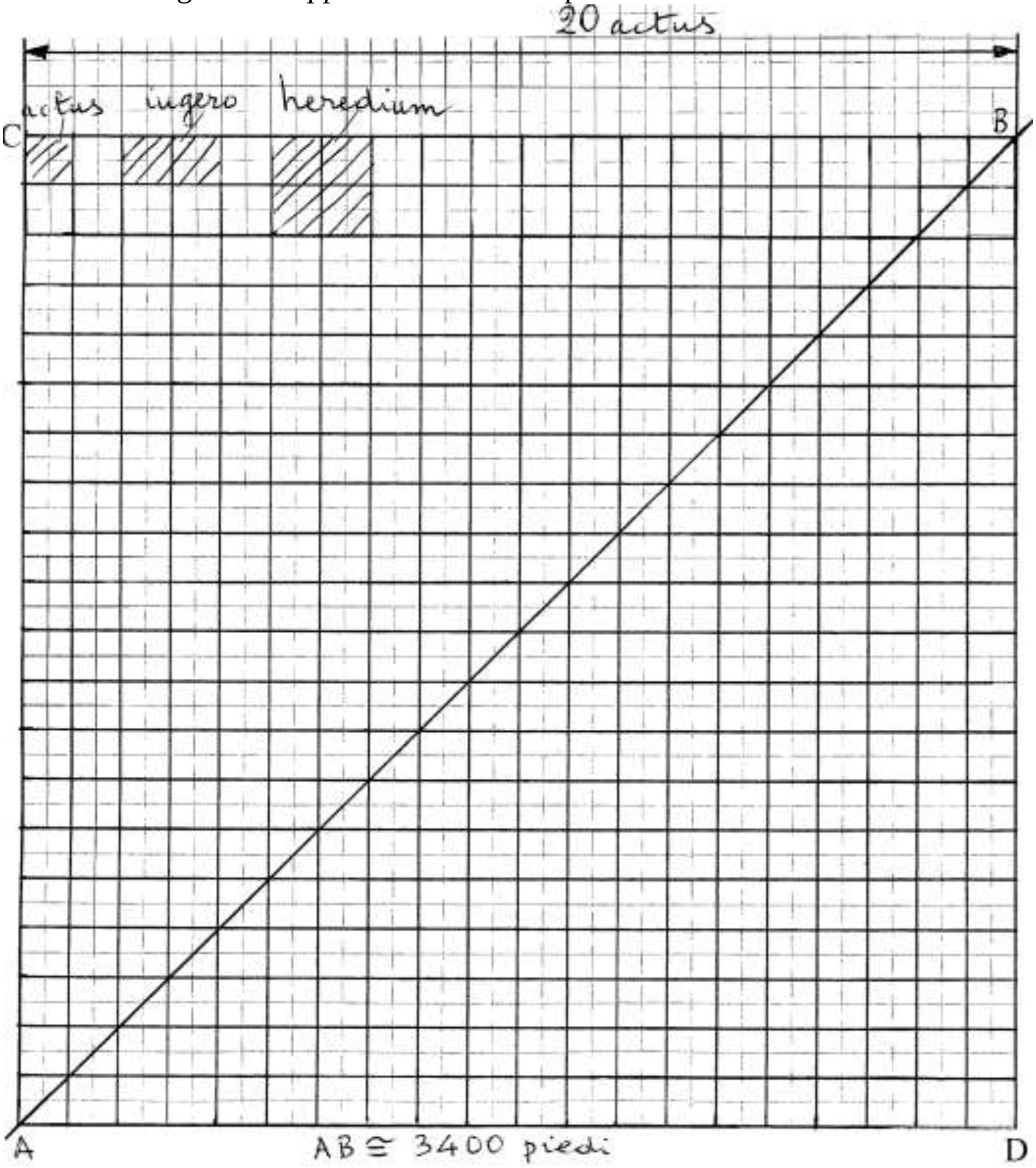
La lunghezza della diagonale AB di una *centuria* è pari a 20 volte quella della diagonale di un actus e cioè 169,705 * 20 = 3394,1 piedi, valore che può essere arrotondato a 3400 piedi. Infatti

AD = BD = 2400 piedi

La lunghezza di AB è data da:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} =$$
$$= \sqrt{2400^2 + 2400^2} =$$
$$= \sqrt{11.520.000} \cong$$
$$\cong 3.394 \longrightarrow 3400 \text{ piedi}$$

La lunghezza è *approssimata* a 3400 piedi.



Bibliografia sulla centuriazione

1. Adam Jean-Pierre, "L'arte di costruire presso i Romani. Materiali e tecniche", trad. it, Milano, Longanesi, X edizione, 2011, pp. 369.
2. Bacci Mauro, "Centuriazione romana. Il caso di Firenze (Florentia), s.l. (ma Firenze), Edizioni Press & Archeos, 2013, pp. 105.
3. Balbus, "Presentation systématiques de toutes les figures", a cura di Jean Yves Guillaumin, Napoli, Jovene Editore, 1996, pp. 217.
4. Bernal Martin, "Atena nera". Le radici afroasiatiche della civiltà classica, trad. it., Milano, il Saggiatore, 2011, pp. 504.
5. Bortolotti Ettore, "Storia della matematica elementare", in "Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi", Milano, Hoepli, ristampa anastatica, 1962, vol. 3° - parte 2.a, pp. 539-750.
6. Buscherini Stefano, "Nel segno di Urania". Introduzione alla trigonometria greca e al calcolo delle corde, Milano – Udine, Mimesis, 2009, pp. 67.
7. Caravello Gianni, "Il Graticolato Romano" , "IL-GRATICOLATO-ROMANO-x-sito-Mirano_OK.pdf", 2013, pp. 29
8. Caressa Paolo, "La matémática de los romanos: una vindicación" [in spagnolo], aprile 2012. http://www.caressa.it/pdf/matematica-romani.pdf
9. Caressa Paolo, "La matematica degli antichi Romani (I)", in "XlaTangente", n. 38, 2013, pp. 17 – 20.
10. Caressa Paolo, "La matematica degli antichi Romani (II)", in "XlaTangente" , n. 39, giugno 2013, pp. 17 – 19.
11. Castagnoli Ferdinando, "Le ''formae'' delle colonie romame e le miniature dei codici gromatici", Reale Accademia d'Italia, Roma, *Memorie della classe di scienze morali e storiche,* Serie VII – Volume IV – Fasc. 4, 1943, pp. 83 – 118.
12. Castagnoli Ferdinando, "Le ricerche sui resti della centuriazione", Roma, Edizioni di Storia e Letteratura, 1958, pp. 45.
13. Columella Lucio Giunio Moderato, "L'arte dell'agricoltura e Libro sugli alberi", trad. dal latino di Rosa Calzecchi Onesti – Introduzione e note di Carlo Carena, edizione bilingue a fronte, Torino, Einaudi, 1977, pp. XXIII+1060.
14. Cuomo Serafina, "Ancient mathematics", Londra – New York, Routledge, 2001, pp. xii-290.
15. Del Lungo Stefano, "La pratica agrimensoria nella tarda antichità e nell'alto medioevo", Spoleto, Centro Italiano di Studi sull'Alto Medioevo, 2004, pp. XIII-824.
16. Della Corte Matteo, "Groma", in "Monumenti Antichi", Accademia Nazionale dei Lincei, volume XXVIII, Milano, Ulrico Hoepli Editore, 1922, pp. 5-100.
17. Docci Mario e Migliari Riccardo, "Disegno architettonico antico e moderno" ("1997_disegno_architettonico_antico_lr.pdf", pp. 8).
18. Frontin [Frontino], "Frontin. L'Œuvre Gromatique", "Commission des Communautés Européennes – Action Cost G2 "Paysages Antiques et Structures Rurales"", Luxembourg, 1998, pp. XIX-120.
19. Hygin l'arpenteur, "L'étabilissement des limites" (traduzione francese), Napoli, Jovene Editore, 1996, pp. XIV-188.
20. Joseph George Gheverghese, "C'era una volta un numero. La vera storia della matematica", trad. it. della seconda edizione, Milano, Il Saggiatore, 2003, pp. 444.
21. Joseph George Gheverghese, "The Crest of the Peacock", third edition, Princeton – New Jersey (USA), Princeton University Press, 2011, pp. xxvii-561.
22. Lewis M. J. T., "Surveying Instruments of Greece and Rome", New York, Cambridge University Press, 2001, pp. xx-389.

23. "Les arpenteurs romains". Hygin le Gromatique – Frontin, Parigi,a cura di Jean-Yves Guillaumin, Les Belles Lettres, 2005, pp. 265.
24. Lopes Pegna Mario, "Firenze dalle origini al Medioevo", Firenze, Del Re, seconda edizione, 1974, pp. 459.
25. Magli Giulio, "On the orientation of Roman towns in Italy", http://arxiv.org/ftp/physics/papers/0703/0703213.pdf
26. Maor Eli, "Trigonometric Delights", Princeton, Princeton University Press (USA), 1998, pp. xiv-236.
27. "Misurare la terra: centuriazione e coloni nel mondo romano", a cura di Salvatore Settis, Modena, Franco Cosimo Panini, nuova edizione aggiornata, 2003, pp. 334.
28. "Misurare la terra: centuriazione e coloni nel mondo romano. Il caso Veneto", a cura di Luciano Bosio, Modena, Edizioni Panini, ristampa, 1989, pp. 230.
29. Palladino Franco – Sicoli Salvatore, "Angoli linee stelle". Origini e sviluppo della trigonometria, Roma, Aracne, edizione aggiornata, 2012, pp. 250.
30. Peterson John W.M., "Trigonometry in Roman cadastres", in "Mathématiques dans l'Antiquité" (a cura di J.-Y. Guillaumin), St-Étienne, Université de St-Étienne, 1992, pp. 185-203.
31. Pichot André, "La nascita della scienza", trad. it., Bari, Edizioni Dedalo, 1993, pp. 646.
32. Quilici Lorenzo – Quilici Gigli Stefania, "Introduzione alla topografia antica", Bologna, Il Mulino, 2004, pp. 210.
33. Rosada Guido, "Arte (mestiere?) dell'*Agrimensor*", in "Histria Antiqua", 19/2010, pp. 125-152.
34. Roth Congès Anne, "Modalités pratique d'implantation des cadastres romains : quelques aspects" (Quintarios Claudere. Perpendre. Cultellare. Varare : la construction des cadastres sur une diagonale et ses traces dans le Corpus agrimensorum), in *Mélanges de l'École française de Rome* Antiquité T. 108, N° 111, 1996, pp. 299 – 422.
35. Rykwert Joseph, "L'idea di città", trad. it., Milano, Adelphi, seconda edizione, 2011, pp. XXVI-306.
36. Toneatto Lucio, "Codices Artis Mensoriae", Spoleto, Centro Italiano di Studi sull'Alto Medioevo, 1994-1995, 3 tomi di pp. XIV – V – XIII + 1495.