

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: aree poligoni; diagonali quadrilateri; triangoli rettangoli; triangoli isosceli, scaleni e equilateri; cerchio e circonferenza; cerchi inscritti e circoscritti; volume solidi; sfera; misura tini e botti; poligoni inscritti con numero di lati dispari; ovali; ovoli; ingrandimento poligoni regolari; quadratura e trasformazione di poligoni

PIETRO CATANEO

Pietro Cataneo o Cattaneo (Siena c. 1510 – 1573) è stato un ingegnere militare w un matematico.

Pubblicò due opere: un trattato di architettura (“I primi quattro libri d’architettura”, Venezia, 1567) e un testo di matematica (“Le pratiche delle due prime matematiche”, Venezia 1569).

Il secondo testo è considerato in questo articolo ed è l’oggetto dell’APPENDICE I.

L’APPENDICE II è dedicata ai problemi geometrici contenuti nel *Primo Libro* del trattato “*I Sette libri dell’Architettura*” di Sebastiano Serlio

IL TRATTATO MATEMATICO

Quest’opera è divisa in quattro “libri”: i primi tre sono dedicati ai problemi tipici della matematica dell’abaco. Il quarto è riservato alla Geometria.

Note

- * Cataneo usa espressioni come “3 ½” per 3,5, senza scrivere alcun simbolo infisso come è “+”: qui si è sempre scritto “3 + ½” oppure “3,5”. Allo scopo di evitare errori o malintesi, i numeri misti come “3 + ½” sono spesso scritti racchiusi fra parentesi tonde e con il simbolo “+” infisso: (3 + ½).
- * Cataneo non usa la *virgola decimale*, come è richiesto da “3,5”.
- * I numeri misti, formati da un numero naturale e da una frazione propria sono quasi sempre racchiusi fra parentesi tonde: (3 + 1/7).
- * Per semplificare la scrittura, il simbolo di frazione è reso con la barra “/”, anziché con la barra orizzontale.
- * Cataneo usa per π il valore approssimato “3 1/7”: in questo articolo è quasi sempre usata l’equivalente frazione “22/7”.
- * La maggior parte delle figure è stata ridisegnata cercando di rispettare forme e proporzioni.
- * Alcuni argomenti sono ampliati con appositi riquadri graficamente evidenziati e contrassegnati con la dicitura APPROFONDIMENTO.

LA GEOMETRIA DI PIETRO CATANEO

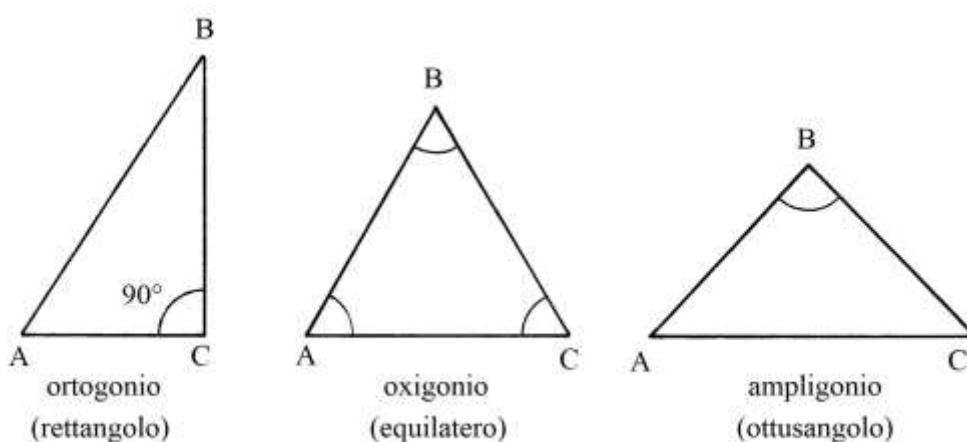
Un'introduzione è dedicata alla definizione di cinque enti geometrici: punto, linea, superficie, angolo, corpi solidi.

I problemi sono contenuti in *Proposizioni* numerate con numeri romani in progressione, da I a LV, per un totale di 55.

Non tutte le Proposizioni sono accompagnate da disegni: in questo articolo sono aggiunti alcuni schemi sui quali ai vertici delle figure sono apposte le lettere. Dato che Cataneo ha spesso usato lettere minuscole, in alcuni schemi è stata rispettata la sua scelta: in altre figure le lettere sono maiuscole.

I triangoli

I triangoli sono classificati in tre categorie:



* *ortogonio*, rettangolo nel vertice C;

* *oxigonio*, equilatero;

* *ampligonio*: ottusangolo, con angolo “ottuso”, più ampio di 90°, nel vertice B.

Stranamente, Cataneo non cita il triangolo scaleno con tutti e tre gli angoli di ampiezza minore di 90°.

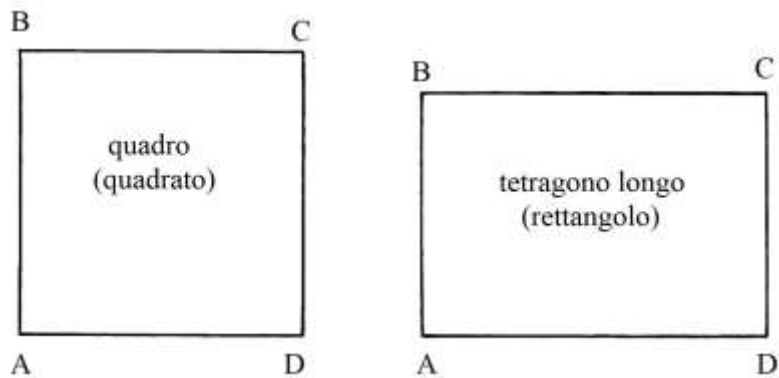
Cattaneo usa la terminologia tipica dei trattati medievali e rinascimentali di abaco e di geometria.

I quadrilateri

I quadrilateri sono organizzati in alcune categorie: i poligoni “quadrati” sono:

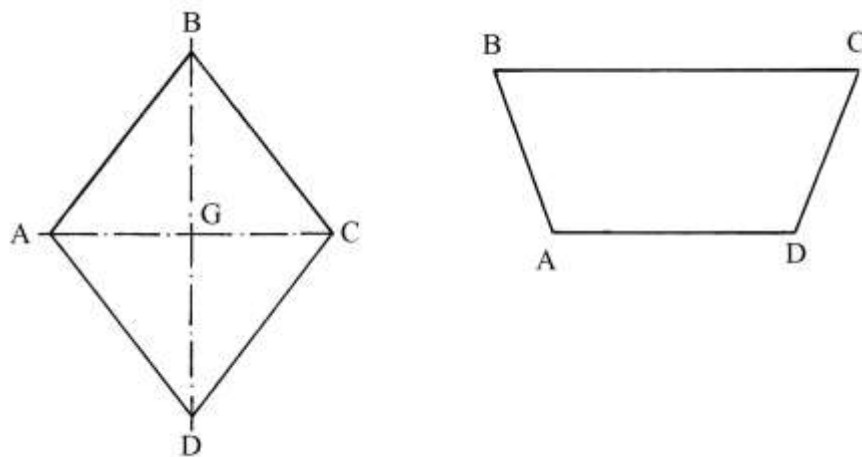
* il *quadro*: è il quadrato;

* il *tetragono lungo*: è il rettangolo.



I due quadrilateri hanno in comune una proprietà: possiedono quattro angoli retti.

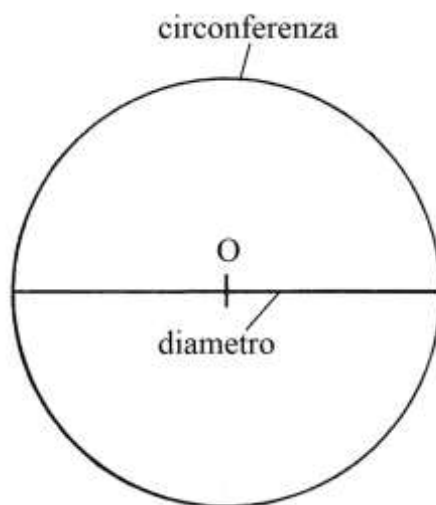
Il *rombo* ha lati di uguale lunghezza (come il quadrato) ma soltanto gli angoli opposti hanno uguali ampiezze:



Il trapezio isoscele è chiamato *romboide*.

Infine, è definito il *cerchio*: il suo centro O è equidistante da tutti i punti della linea, la circonferenza, che racchiude la superficie.

Un *diametro* divide il cerchio in due parti uguali:



PROPOSIZIONE I

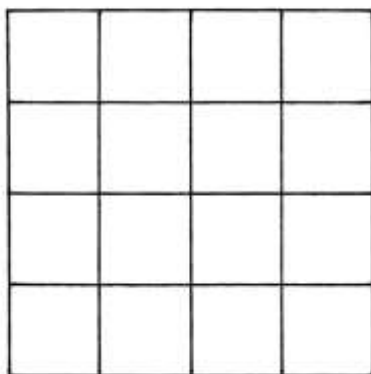
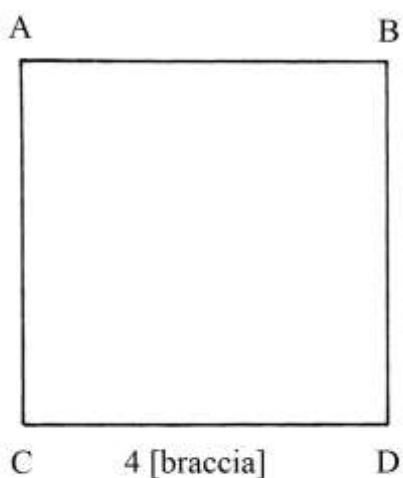
ABCD è un quadrato che ha lati lunghi 4 braccia.

L'area S è:

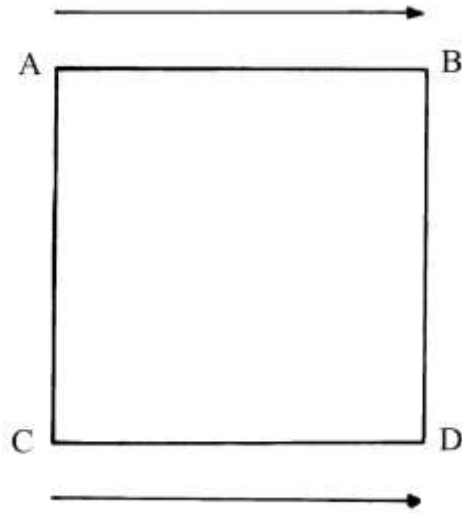
$$S = 4 * 4 = 16 \text{ braccia}^2.$$

Per verificare la correttezza del risultato, l'Autore propone di dividere i quattro lati in quattro parti uguali e di collegare i punti così fissati con 3 più 3 segmenti paralleli ai quattro lati: il quadrato risulta diviso in 16 quadretti tutti uguali con lati lunghi 1 braccio e area uguale a 1 braccio².

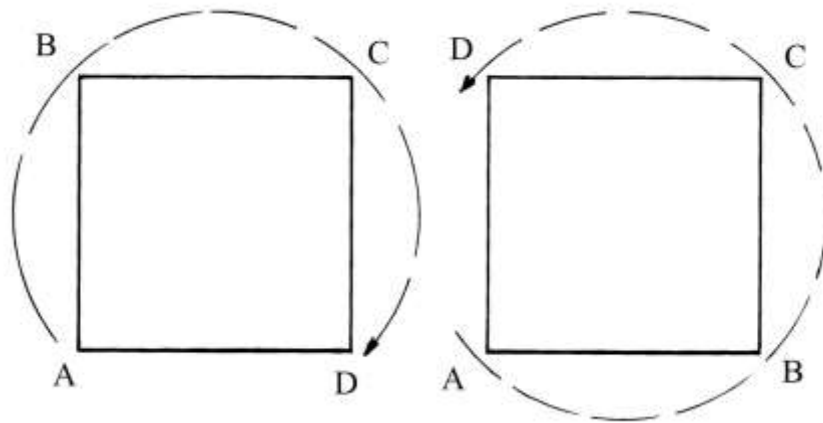
Il testo indica il quadrato con "ABCD": anche se esso andrebbe letto in senso orario come "ABDC". Le lettere apposte sulla figura originale sono state qui riprodotte e posizionate sugli stessi vertici come fatto dall'Autore: in questo caso egli ha usato le maiuscole.



La disposizione delle lettere non segue l'uso oggi più diffuso:



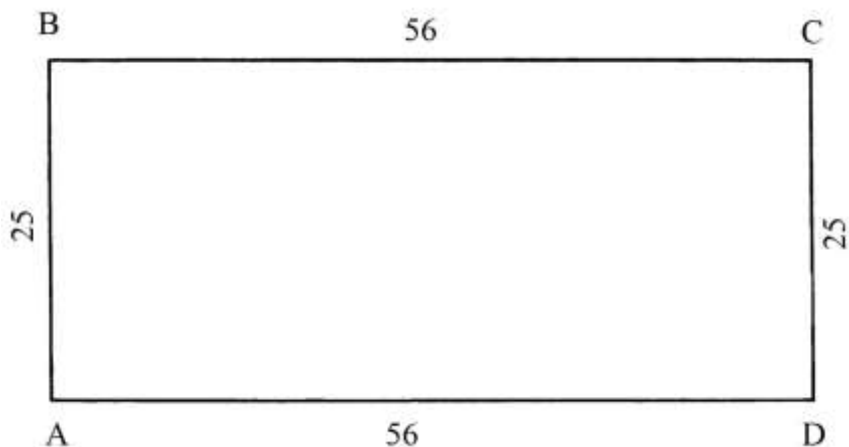
L'uso attuale è quello che rispetta un senso orario o antiorario:



PROPOSIZIONE II

Area di un rettangolo

Un “*tetragono lungo o quadrangolo*” ABCD è lungo 56 e largo 25.
 È chiesta la sua area (“*quadratura*”).



Nel testo non sono scritte le lettere ai vertici e non sono indicate unità di misura, lineari o superficiali.

L'area è:

$$S_{ABCD} = 56 * 25 = 1400.$$

PROPOSIZIONE III

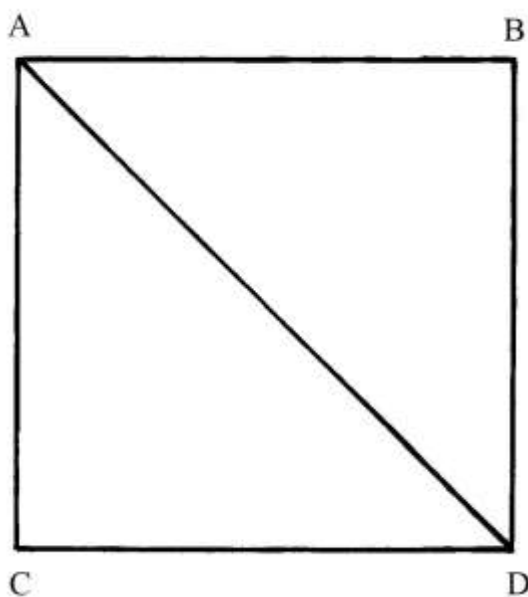
Lunghezza della diagonale di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 8: non è indicata alcuna unità di misura.

Il problema chiede la lunghezza della diagonale AD.

La soluzione è:

- * moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $8 * 8 = 64;$
- * moltiplicare per 2: $64 * 2 = 128;$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{128}$, lunghezza di AD.



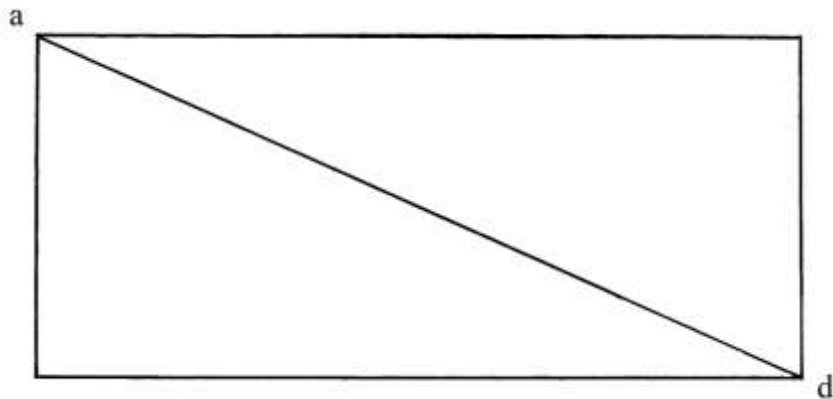
La procedura è sintetizzabile come segue:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128 \quad e$$

$$AD = \sqrt{128}.$$

PROPOSIZIONE IV [IIII]

Il problema richiama la Proposizione II e chiede la lunghezza della diagonale “ad” (che è così indicata nella figura originale).



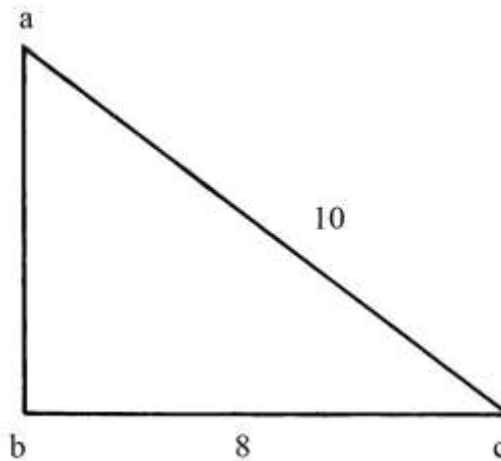
La soluzione è:

- * moltiplicare la lunghezza per sé stessa: $56 * 56 = 3136$;
- * moltiplicare la larghezza per sé stessa: $25 * 25 = 625$;
- * sommare i due quadrati: $3136 + 625 = 3761$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{3761}$, lunghezza della diagonale “ad”.

PROPOSIZIONE V

Cateto di un triangolo rettangolo

“abc” è un triangolo rettangolo: l’ipotenusa “ac” è lunga 10 e il cateto “bc” è lungo 8.



Il problema chiede la lunghezza del cateto verticale “ab”.

La soluzione è:

- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di “ac”: $10 * 10 = 100$;
- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di “bc”: $8 * 8 = 64$;
- * sottrarre il secondo quadrato dal primo: $100 - 64 = 36$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$, lunghezza di “ab”.

Il triangolo rettangolo “abc” ha lati le cui lunghezze formano la terna derivata 6-8-10 che proviene dalla primitiva 3-4-5.

PROPOSIZIONE VI

Altro cateto di un triangolo rettangolo

Lo stesso triangolo rettangolo della precedente Proposizione è l'oggetto di questo nuovo problema. Sono note le lunghezze di due lati:

- * l'ipotenusa "ac" che è 10;
 - * il cateto "bc" che è 8.
- È chiesta la lunghezza del cateto verticale "ab".

La soluzione è la seguente:

- * moltiplicare la lunghezza di "ac" per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
- * moltiplicare la lunghezza di "ab" per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
- * sottrarre il secondo quadrato dal primo: $100 - 36 = 64$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{64} = 8$, lunghezza di "bc".

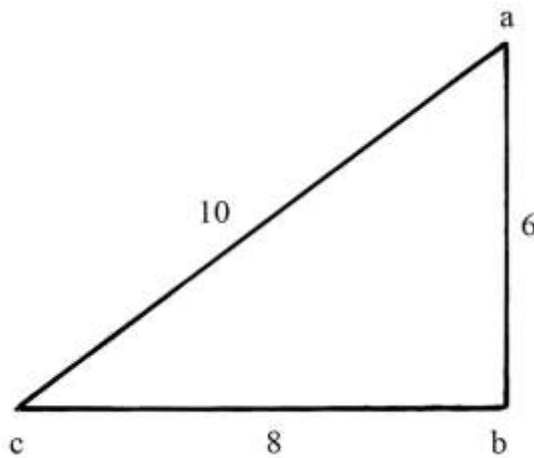
PROPOSIZIONE VII

Area di un triangolo rettangolo

Il solito triangolo rettangolo 6-8-10 è oggetto di questa nuova Proposizione. È chiesta la sua area.

La soluzione è:

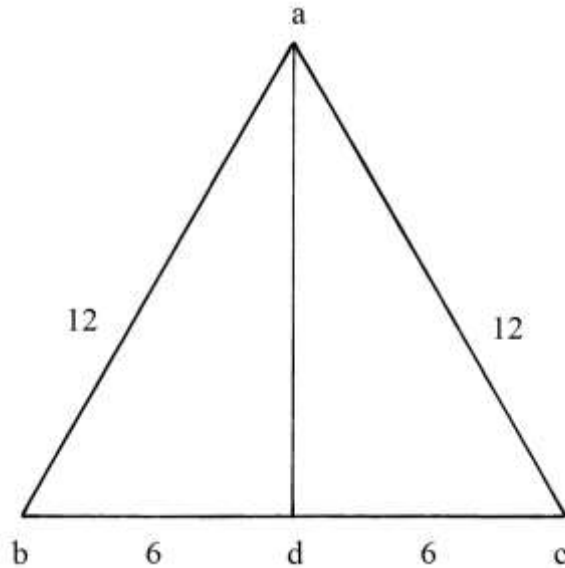
- * dividere per 2 la lunghezza del cateto "ab": $6/2 = 3$;
- * moltiplicare per la lunghezza del cateto "cb": $3 * 8 = 24$, area del triangolo rettangolo "abc".



PROPOSIZIONE VIII

Triangolo equilatero

"abc" è un triangolo equilatero che ha lati lunghi 12: non è indicata alcuna unità di misura.



Il problema chiede la lunghezza della “catetta” e cioè quella dell’altezza “ad”: è da notare l’uso del femminile per indicare il *cateto*.

“ad” divide “abc” in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: “abd” e “adc”.

L’area di ciascuno dei due triangoli è:

$$S_{abd} = (ad) * (bd)/2.$$

Sommando le aree dei due triangoli rettangoli si ottiene l’area dell’intero triangolo equilatero.

Nota nel trattato “L’architettura di Pietro Cataneo” l’Autore usa alcune volte il termine “*catetta*” e sembra attribuirgli il significato di linea verticale ottenuta con il *filo a piombo*

PROPOSIZIONE IX

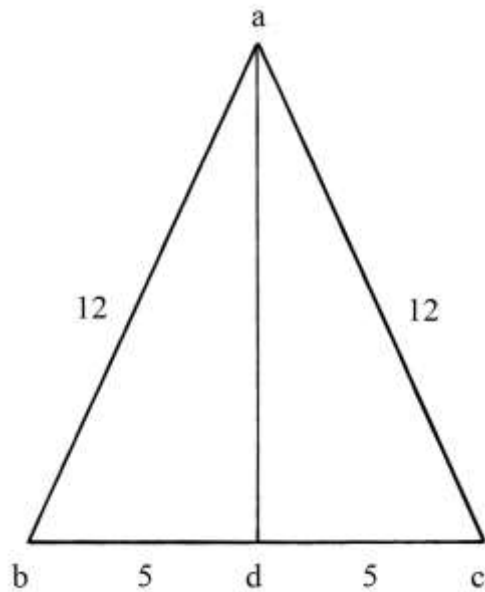
Triangolo isoscele

Un triangolo isoscele ha la base lunga 10 e i lati obliqui sono 12.

È chiesta la lunghezza della “catetta” “ad”:

$$ad^2 = ab^2 - bd^2 = 12^2 - 5^2 = 144 - 25 = 119 \quad e$$

$$ad = \sqrt{119}.$$



L'area del triangolo "abc" è:

$$S_{abc} = ad * bd = \sqrt{119 * 5} = \sqrt{(119 * 5)} = \sqrt{2975}.$$

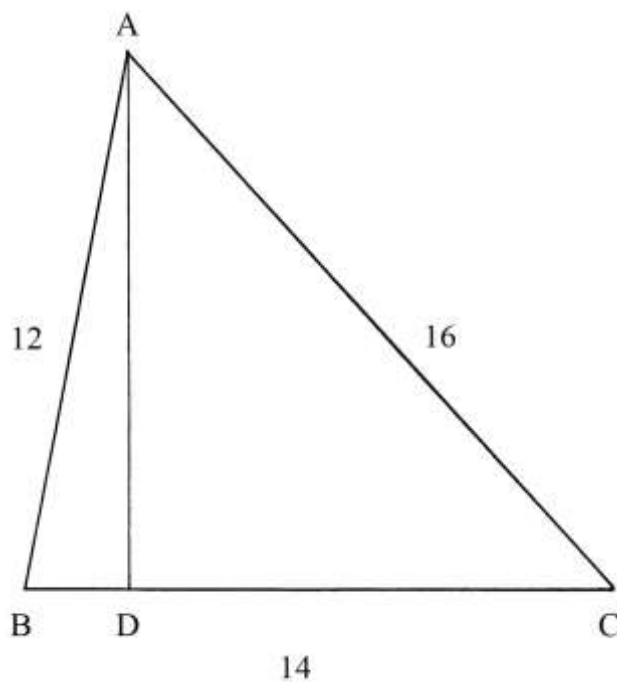
PROPOSIZIONE X

Altezza di un triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ("*diversilatero*") ha la base lunga 14 e i due lati obliqui 12 e 16. Le lunghezze dei lati formano una progressione aritmetica di ragione 2:

$$12 \rightarrow 12 + 2 \rightarrow \rightarrow 12 + 2 + 2 = 12 - 14 - 16.$$

Il problema chiede la lunghezza dell'altezza AD e l'area del triangolo.



Senza citarlo espressamente, Cataneo ricorre alle formule di Erone di Alessandria (I secolo d.C.) per calcolare la lunghezza di AD.

La lunghezza di BD è:

$$BD = [(AB^2 + BC^2) - AC^2]/(2 * BC) = (12^2 + 14^2 - 16^2)/(2 * 14) = (144 + 196 - 256)/28 = 84/28 = 3.$$

DC è lungo:

$$DC = BC - BD = 14 - 3 = 11.$$

La lunghezza di DC può essere ricavata anche da:

$$DC = [(AC^2 + BC^2) - AB^2]/(2 * BC) = (16^2 + 14^2 - 12^2)/(2 * 14) = (256 + 196 - 144)/28 = 308/28 = 11.$$

L'altezza è lunga:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 12^2 - 3^2 = 144 - 9 = 135 \quad e$$

$$AD = \sqrt{135}.$$

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = AD * BC/2 = \sqrt{135} * 14/2 = \sqrt{135} * 7 = \sqrt{(135 * 49)} = \sqrt{6615}.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

La lunghezza di AD può essere ricavata con l'aiuto dell'algebra elementare.

La lunghezza di BD è l'incognita "x":

$$BD = x \quad e$$

$$DC = BC - BD = 14 - x.$$

AD è il cateto comune ai triangoli rettangoli ABD e ADC:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 12^2 - x^2.$$

Ma AD è data anche da:

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = 16^2 - (14 - x)^2.$$

Uguagliando le due espressioni di AD² si ha:

$$12^2 - x^2 = 16^2 - (14 - x)^2$$

$$144 - x^2 = 256 - 196 + 28 * x - x^2$$

$$144 - 256 + 196 = 28 * x$$

$$84 = 28 * x$$

$$x = 84/28 = 3.$$

PROPOSIZIONE XI

Area di un triangolo scaleno

L'area del triangolo scaleno considerato nella precedente Proposizione può essere calcolata anche con la nota formula di Erone che evita il calcolo della lunghezza di un'altezza.

La procedura di Cataneo è riassunta nei seguenti passi:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| * sommare le lunghezze dei tre lati: | 12 + 14 + 16 = 42 [perimetro]; |
| * dividere per 2: | 42/2 = 21 [semiperimetro]; |
| * sottrarre da 21 la lunghezza di AB: | 21 - 12 = 9; |
| * sottrarre da 21 la lunghezza di BC: | 21 - 14 = 7; |
| * sottrarre da 21 la lunghezza di AC: | 21 - 16 = 5; |
| * moltiplicare le tre differenze: | 9 * 7 * 5 = 315; |
| * moltiplicare per il semiperimetro: | 315 * 21 = 6615; |
| * estrarre la radice quadrata: | $\sqrt{6615} \approx (81 + 1/3)$ area del triangolo ABC. |

Nota: Cataneo dà "71 + 1/3" per l'area del triangolo ABC.

----- APPROFONDIMENTO -----

La formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo di cui siano note soltanto le lunghezze dei lati viene così spiegata.

Le lunghezze dei tre lati sono:

* $AC = a;$

* $BC = b;$

* $AB = c.$

Il perimetro è indicato con "2 * p":

$$a + b + c = 2 * p.$$

Occorre considerare il *semiperimetro* p:

$$p = 2 * p/2 = (a + b + c)/2.$$

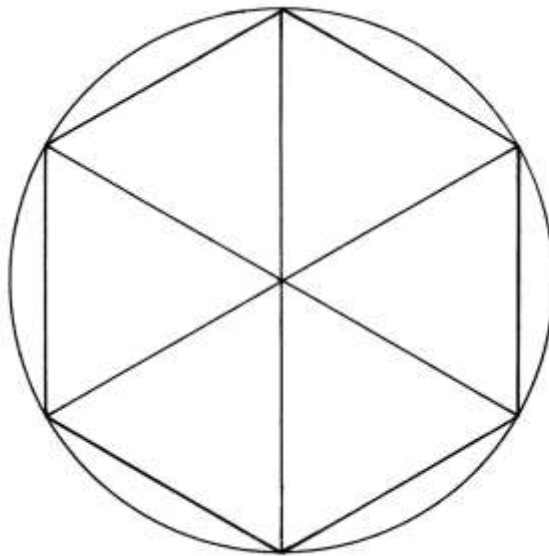
La formula di Erone per calcolare l'area S_{ABC} è:

$$S_{ABC} = \sqrt{[p * (p - a) * (p - b) * (p - c)]}$$

PROPOSIZIONE XII

Area di un esagono regolare

Un esagono regolare ha lati lunghi 16 braccia.



Cataneo fissa l'area di uno dei sei triangoli equilateri che compongono l'esagono in $\sqrt{12288}$ braccia².

Verifichiamo il dato con la formula di Erone.

Il perimetro di uno dei triangoli equilateri è:

$$16 + 16 + 16 = 48.$$

Il *semiperimetro* è: $48/2 = 24$.

L'area di un triangolo equilatero è:

$$S_{\text{TRIANGOLO}} = \sqrt{[24 * (24 - 16) * (24 - 16) * (24 - 16)]} = \sqrt{(24 * 8^3)} = \sqrt{12288} \text{ braccia}^2.$$

L'area dell'intero esagono è:

$$S_{\text{ESAGONO}} = 6 * S_{\text{TRIANGOLO}} = 6 * \sqrt{12288} = \sqrt{(36 * 12288)} = \sqrt{442368} \text{ braccia}^2.$$

Nota: Cataneo offre un risultato errato per l'area dell'esagono: $\sqrt{110592}$ braccia².

Questo dato è esattamente $\frac{1}{2}$ di quello corretto:

$$\sqrt{443268} = 2 * \sqrt{110592} = \sqrt{(4 * 110592)} = \sqrt{442368} \text{ braccia}^2.$$

PROPOSIZIONE XIII

Cataneo dedica questa Proposizione a una critica nei confronti di coloro che calcolano erroneamente l'area di un pentagono, di un ettagono o di un poligono regolare con un numero di lati maggiore, prendendo a modello il caso dell'esagono.

Infatti, solo l'esagono è scomponibile in triangoli equilateri: gli altri poligoni sono formati da triangoli isosceli.

Per calcolare le loro aree è necessario tener conto delle lunghezze dei raggi dei cerchi in cui i poligoni sono inscritti.



Nel caso del pentagono si hanno cinque triangoli isosceli: il raggio del cerchio circoscritto, OA, è anche un lato del triangolo isoscele OAB. OA è più *corto* del lato AB.

Nell'esagono, il raggio OA ha la stessa lunghezza del lato AB e per questo motivo il triangolo OAB è equilatero.

Nell'ettagono regolare, il raggio OA, che è anche un lato del triangolo OAB, è più *lungo* del lato AB.

A partire dall'ettagono tutti i poligoni regolari inscritti possiedono lati più *corti* dei raggi dei cerchi nei quali sono inscritti.

PROPOSIZIONE XIV [XIII]

Area di un cerchio

Cataneo ricorda l'impossibilità di calcolare esattamente l'area di un cerchio e ricorre alla soluzione approssimata di Archimede per il valore di π .

Il valore approssimato di π usato nel Medioevo e nel Rinascimento è:

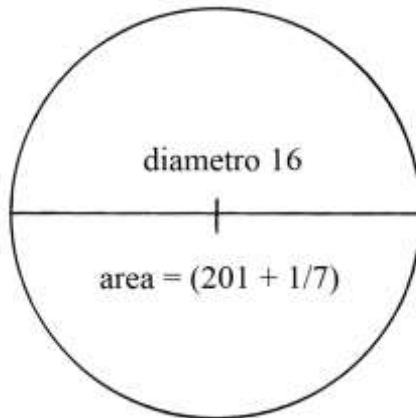
$$\pi \approx (3 + 1/7) = 22/7.$$

Cataneo calcola l'area di un cerchio con una formula:

$$S_{\text{CERCHIO}} = (\pi) * r^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2.$$

Nella formula, r è il raggio e d è il diametro del cerchio.

Un cerchio ha diametro lungo 16: è chiesta la sua area.



Essa è così calcolata:

- * moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $16 * 16 = 256$;
- * moltiplicare per 11: $256 * 11 = 2816$;
- * dividere per 14: $2816/14 = (201 + 1/7)$, area del cerchio.

Il problema non reca l'indicazione di alcuna unità di misura di lunghezza o di superficie. Cataneo accenna alle unità di misura dell'area del cerchio che possono essere "tavole e canne o braccia quadre" a seconda dell'unità lineare usata per misurare il diametro.

PROPOSIZIONE XV

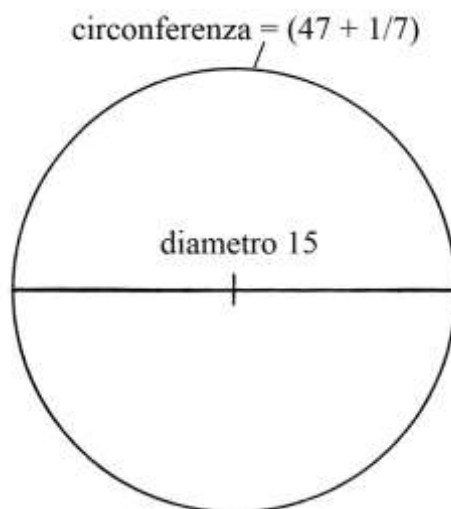
Lunghezza della circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha diametro d lungo 15: non è indicata alcuna unità di misura.

Il problema domanda la lunghezza della circonferenza.

La soluzione contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare il diametro per 22: $15 * 22 = 330$;
- * dividere per 7: $330/7 = (47 + 1/7)$ lunghezza della circonferenza.



La lunghezza c di una circonferenza è:

$$c = \pi * d = 22/7 * d = 22/7 * 330/7 = (47 + 1/7).$$

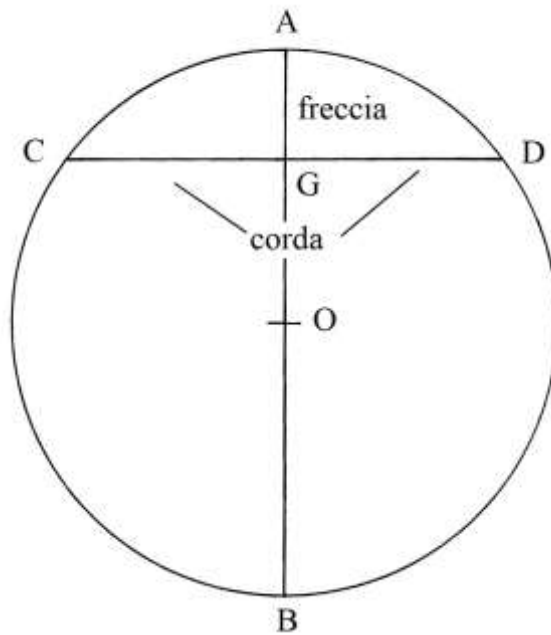
La procedura inversa è impiegata per ricavare la lunghezza del diametro conoscendo quella della circonferenza:

$$d = c/(22/7) = c * 7/22 = (47 + 1/7) * 7/22 = 15.$$

PROPOSIZIONE XVI

Diametro di un cerchio

Da un cerchio di diametro sconosciuto è tagliato un *segmento circolare* CADG che ha la corda CD lunga 16 e freccia (*saetta* per Cataneo) AG lunga 4.



Il problema chiede la lunghezza del diametro del cerchio.

La soluzione implica l'applicazione del *teorema delle corde* che Cataneo non cita.

Per questo teorema si ha la seguente proporzione:

$$AG : CG = GD : GD \quad \text{da cui:}$$

$$GB = (CG * GD)/AG = [(16/2) * (16/2)]/4 = 64/4 = 16.$$

Il diametro AB è lungo:

$$AB = AG + GB = 4 + 16 = 20.$$

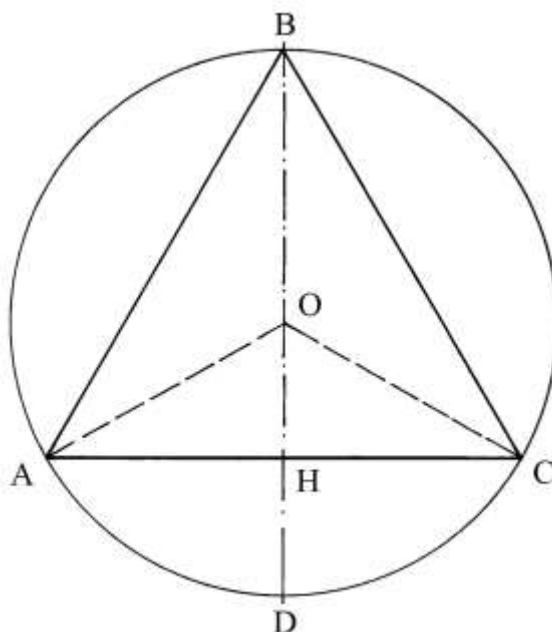
PROPOSIZIONE XVII

Cerchio circoscritto a un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 15 braccia. Il problema chiede il diametro del cerchio in cui può essere inscritto.

La soluzione usata da Cataneo contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $15 * 15 = 225;$
- * dividere per 3: $225/3 = 75;$
- * sommare con 225: $75 + 225 = 300;$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{300} = 10 * \sqrt{3}$ braccia, lunghezza del diametro del cerchio circoscritto.



----- APPROFONDIMENTO -----

ABC è il triangolo equilatero dato e BH è una sua altezza.

Il raggio del cerchio circoscritto è lungo OB che è i *due terzi* della lunghezza di BH. Ne consegue che il diametro BD risulta lungo:

$$BD = 2 * OB = 2 * (2/3) * BH = 4/3 * BH.$$

La lunghezza di BH è data da:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = AB^2 - (AC/2)^2 = AB^2 - (AB/2)^2 = 15^2 - (15/2)^2 = 15^2 - 7,5^2 = 225 - 56,25 = 168,75 \quad e$$

$$BH = \sqrt{168,75}.$$

Il diametro BD è lungo:

$BD = 4/3 * BH = 4/3 * \sqrt{168,75} = \sqrt{(16/9 * 168,75)} = \sqrt{300} = 10 * \sqrt{3}$ braccia, che è il risultato ottenuto da Cataneo.

PROPOSIZIONE XVIII

Cerchio inscritto in un triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ha lati lunghi 15, 17 e 18: la base orizzontale è lunga 18.

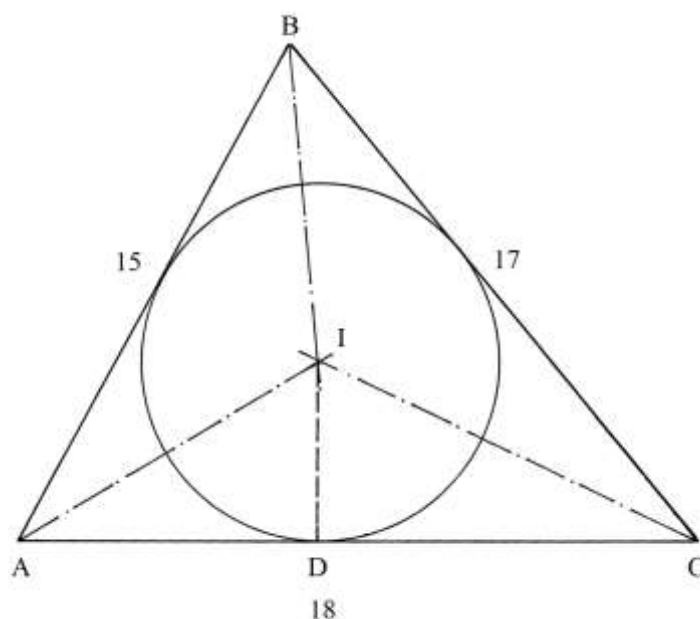
Vi deve essere inscritto il più grande cerchio possibile: il problema chiede il suo diametro.

Un problema simile, con lunghezze differenti, era contenuto nel trattato “*Aritmetica*” pubblicato a Firenze da Filippo Calandri nel 1491: forse questo testo è stato fra le fonti alle quali ha attinto Pietro Cataneo.

La soluzione offerta da Cataneo è assai sintetica e non fornisce alcun dato: l’Autore propone di calcolare l’area del triangolo, S, e dividerla per il semiperimetro, p:

S/p sarebbe il *diametro* del cerchio inscritto.

L’affermazione di Cataneo è errata perché “S/p” è la lunghezza del *raggio* del cerchio inscritto.



----- APPROFONDIMENTO -----

L'area del triangolo ABC può essere calcolata con la formula di Erone. Il perimetro $2 * p$ è:

$$2 * p = AB + BC + AC = 15 + 17 + 18 = 50 \quad e$$

$$P = 2 * p/2 = 50/2 = 25.$$

L'area S è:

$$S = \sqrt{[p * (p - AB) * (p - BC) * (p - AC)]} = \sqrt{[25 * (25 - 15) * (25 - 17) * (25 - 18)]} = \sqrt{(25 * 10 * 8 * 7)} = \sqrt{14000}.$$

La lunghezza del raggio del cerchio inscritto, $ID = r$, è data da:

$$r = S/p = (\sqrt{14000})/25 = \sqrt{(14000/625)} = \sqrt{(112/5)} = \sqrt{22,4}.$$

Il diametro d del cerchio è lungo il doppio del raggio r :

$$d = 2 * r = 2 * \sqrt{(112/5)} = \sqrt{(448/5)}.$$

Il centro del cerchio inscritto, I, è l'*incentro*: esso è determinato dall'intersezione delle bisettrici dei tre angoli interni.

Dal punto I abbassare la perpendicolare al lato AC: è ID.

Fare centro in I e con raggio ID tracciare una circonferenza che risulta tangente ai lati del triangolo.

PROPOSIZIONE XIX

Quadrato inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 braccia. Vi deve essere inscritto il più grande quadrato possibile.

La Proposizione non è accompagnata da alcuna schema.

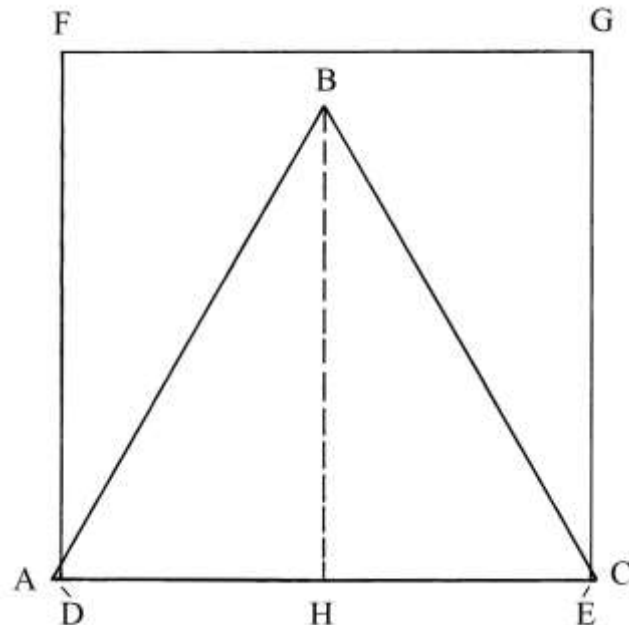
Il problema è simile ad uno contenuto nel citato trattato di Filippo Calandri.

La procedura impiegata da Cataneo è descritta in modo assai stringato e può essere riassunta nei passi seguenti:

- | | |
|---|---------------------------------|
| * moltiplicare la lunghezza di un lato per 3: | $12 * 3 = 36$ [è il perimetro]; |
| * moltiplicare per sé stesso: | $36 * 36 = 1296$; |
| * dividere per 3: | $1296/3 = 432$; |
| * sommare 1296 e 432: | $1296 + 432 = 1728$; |
| * estrarre la radice quadrata: | $\sqrt{1728}$; |

- * sottrarre il triplo della lunghezza di un lato [che è il perimetro del triangolo]:
 $(\sqrt{1728} - 36) [\approx 11,57]$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato inscritto.

Il risultato è *errato per eccesso*: non è possibile che il quadrato inscritto abbia lati lunghi 11,57 braccia, poco meno della lunghezza dei lati del triangolo!
 Nello schema che segue il quadrato DFGE ha lati lunghi 11,57 braccia.



----- APPROFONDIMENTO -----

Risolviamo il problema applicando la soluzione adottata da Filippo Calandri:

- * calcolare il perimetro del triangolo: $12 * 3 = 36;$
- * moltiplicare per sé stesso: $36 * 36 = 1296;$
- * dividere per 3: $1296/3 = 432;$
- * sommare 1296 e 432: $1296 + 432 = 1728;$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1728};$
- * sottrarre il perimetro del triangolo: $(\sqrt{1728} - 30)$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato inscritto.

È evidente che Cataneo ha *copiato* la soluzione da Filippo Calandri: sono entrambe errate.

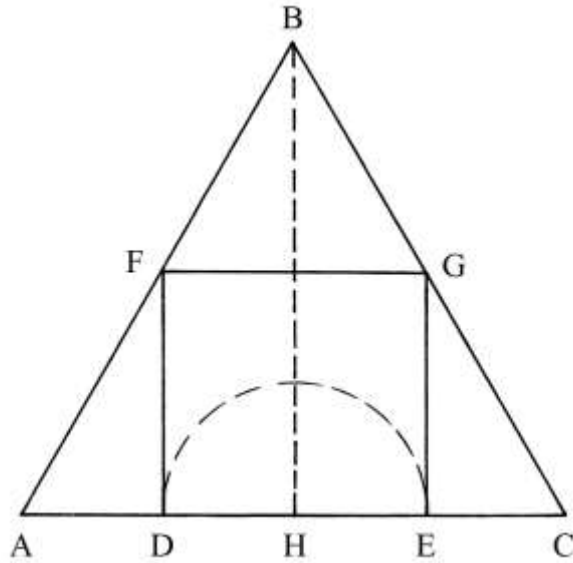
Suggeriamo l'aggiunta alla precedente procedura del seguente passo:

- * dividere per 2: $(\sqrt{1728} - 36)/2 \approx 11,57/2 \approx 5,785$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

Proviamo a costruire la soluzione utilizzando la lunghezza di 5,785 braccia.

ABC è il triangolo equilatero con lati lunghi 12 braccia e BH è l'altezza relativa alla base

AC.



Con apertura uguale a 5,785 braccia fare centro in H e tracciare una semicirconferenza da D a E: DE è il primo lato del quadrato.

Da D e da E elevare le perpendicolari a AC fino a intersecare i lati AB e BC nei punti F e G.

DFGE è il quadrato inscritto: la costruzione fornisce un risultato leggermente *approssimato* perché il quadrilatero è un rettangolo: i lati DF e EG sono più corti dei lati DE e FG.

%%%%%%%%%

Utilizziamo l'algebra e la trigonometria elementari per risolvere il problema. La lunghezza del lato del quadrato, DE, è l'incognita:

$$DE = x.$$

Il segmento FG è parallelo al lato AC: ne consegue che BFG è un triangolo equilatero con lati lunghi quanto FG:

$$FG = DE = x.$$

Il triangolo ABC è ora diviso in *quattro* poligoni:

- * il quadrato DFGE;
- * il triangolo equilatero BFG;
- * i due triangoli rettangoli AFD e EGC.

Questi ultimi possiedono angoli di 30°, 60° e 90°:

- * $FDA = GEC = 90^\circ$;
- * $FAD = GCE = 60^\circ$;
- * $AFD = EGC = 30^\circ$.

Entrambi i triangoli rettangoli sono *metà* di un triangolo equilatero per cui si ha:

- * $AD = \frac{1}{2} * AF$ e
- * $EC = \frac{1}{2} * GC$.

La lunghezza di AF è:

$$AF = AB - FB = (12 - x).$$

AD è lungo:

$$AD = EC = (AC - DE)/2 = (12 - x)/2 = AF/2.$$

Fra le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo AFD vi sono relazioni trigonometriche:

$$\text{sen FAD} = \text{sen } 60^\circ = FD/AF = x/(12 - x).$$

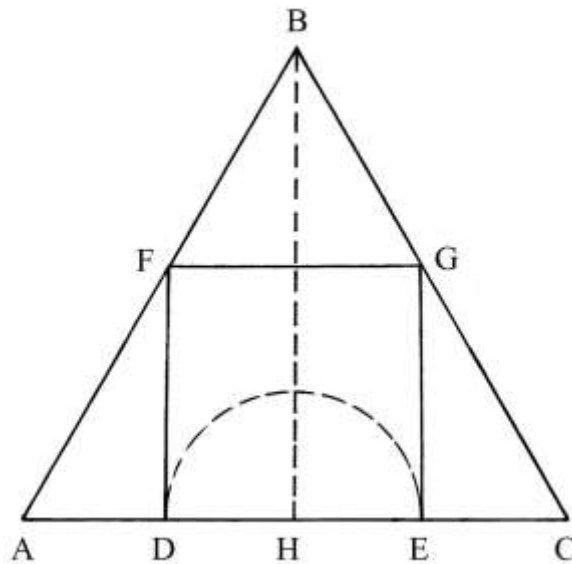
Ma $\text{sen } 60^\circ = (\sqrt{3})/2$.

Le due espressioni di "sen FAD" e di "sen 60°" si equivalgono:

$$\begin{aligned} x/(12 - x) &= (\sqrt{3})/2 \\ 2 * x/\sqrt{3} &= (12 - x) \end{aligned}$$

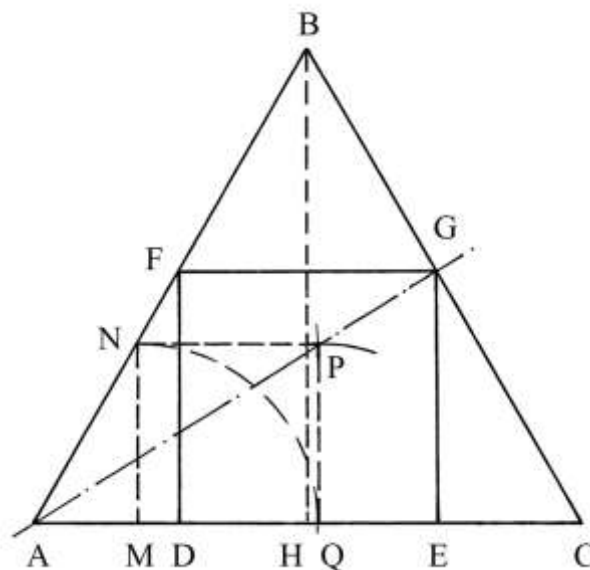
$$\begin{aligned}
2 * x &= \sqrt{3} * (12 - x) \\
2 * x &= 12 * \sqrt{3} - \sqrt{3} * x \\
x * (2 + \sqrt{3}) &= 12 * \sqrt{3} \\
x &= (12 * \sqrt{3}) / (2 + \sqrt{3}) = [(12 * \sqrt{3}) * (2 - \sqrt{3})] / [(2 + \sqrt{3}) * (2 - \sqrt{3})] = \\
&= [(12 * \sqrt{3}) * (2 - \sqrt{3})] / 1 = 24 * \sqrt{3} - 36 \approx 5,57 \text{ braccia.}
\end{aligned}$$

Il risultato è *approssimato* a causa della presenza nei calcoli del numero irrazionale $\sqrt{3}$: la lunghezza appena calcolata è vicinissima a offrire un risultato esatto, come mostra lo schema che segue:



DFGE è il *quadrato* costruito con lati lunghi $\approx 5,57$ braccia.

Lo stesso risultato corretto può essere ottenuto per via geometrica con la costruzione che è mostrata nella figura che segue:



Nel triangolo equilatero ABC costruire un generico quadrato MNPG con *tre* soli vertici posizionati su *due* lati del triangolo che sono AB e AC.

Tracciare la retta passante per A e per P: essa taglia il lato BC nel punto G.

Da G disegnare due segmenti paralleli a BH e a AC: sono GE e GF.

Da F abbassare la parallela a BH: è FD.

DFGE è il quadrato cercato.

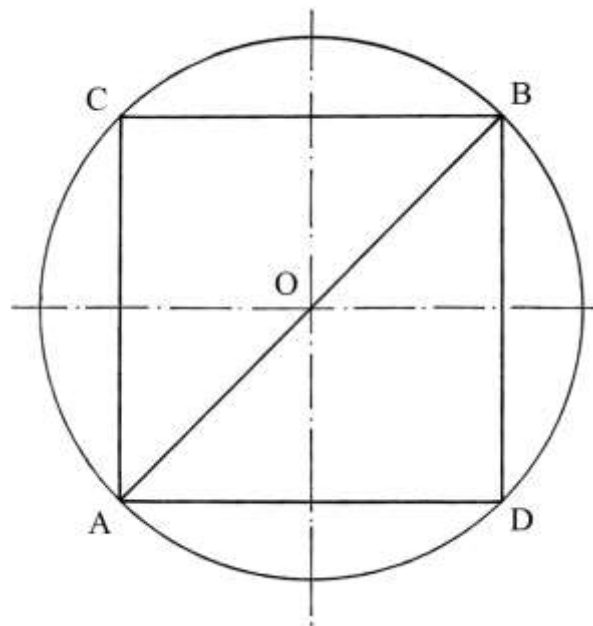
Questa costruzione geometrica conduce a un risultato uguale a quello ricavato con l'algebra e con la trigonometria: i quadrati DFGE delle due ultime figure sono perfettamente sovrapponibili.

PROPOSIZIONE XX

Quadrato inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 12: non è indicata alcuna unità di misura.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del più grande quadrato inscritto.



O è il centro del cerchio e AB è un suo diametro.

Ma AB è anche una delle due diagonali del quadrato inscritto ACBD.

La soluzione è:

- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro: $12 * 12 = 144$;
- * dividere per 2: $144/2 = 72$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{72}$, lunghezza dei lati di ABCD.

La soluzione è corretta.

La diagonale AB ha lunghezza che è data da:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (\sqrt{72})^2 + (\sqrt{72})^2 = 72 + 72 = 144 \quad e$$
$$AB = \sqrt{144} = 12.$$

PROPOSIZIONE XXI

La misura della terra

Cataneo descrive le unità di misura della terra usate a Siena, a Firenze e in quasi tutta la Toscana.

Unità recanti lo stesso nome, usate a Firenze e a Siena avevano valori abbastanza differenti.

Per le lunghezze, a Firenze erano usati due bracci:

- * il *braccio da panno*, lungo l'equivalente di 0,583626 metri;

- * il *braccio da terra*, la cui lunghezza era i 17/18 di quella del braccio da panno e cioè 0,551202 metri: esso era usato solo per la misura dei terreni.

Sempre a Firenze erano usati due multipli del braccio da panno:

- * la canna mercantile, equivalente a 4 braccia e a 2,3345 metri;
- * la pertica o canna agrimensoria, corrispondente a 5 braccia e a 2,918 metri.

Cataneo afferma che la *canna* usata a Siena era lunga 4 braccia senesi e la *tavola* era 6 braccia senesi.

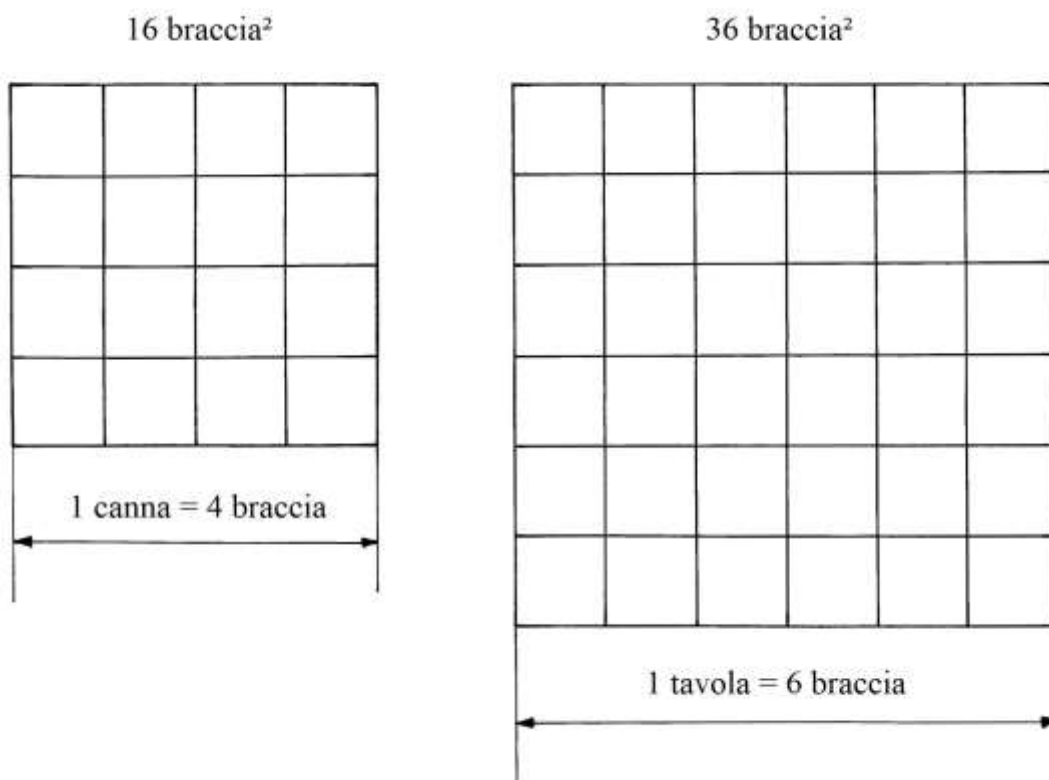
La *tavola* quale unità di misura lineare era pochissimo usata nel Medioevo e nel Rinascimento: il suo uso a Siena sembra costituire un'eccezione.

In quelle epoche, la *tavola* era un'unità di misura *superficiale* ed era largamente usata fuori della Toscana, con valori diversi da una località all'altra.

Prima della riforma introdotta in Toscana dal Granduca Pietro Leopoldo nel 1782, a Siena era usato il *braccio senese*, di lunghezza equivalente a 0,6011 metri.

Quindi, a Siena, la canna e la tavola equivalevano a:

- * 1 canna (lineare) = 4 braccia = $4 * 0,6011 = 2,4044$ metri;
- * 1 tavola (lineare) = 6 braccia = $6 * 0,6011 = 3,6066$ metri.



Una canna quadrata misurava l'area di un quadrato lungo 4 braccia e valeva:

$$1 \text{ canna}^2 = 16 \text{ braccia}^2.$$

Una tavola quadrata era l'area di un quadrato lungo 6 braccia:

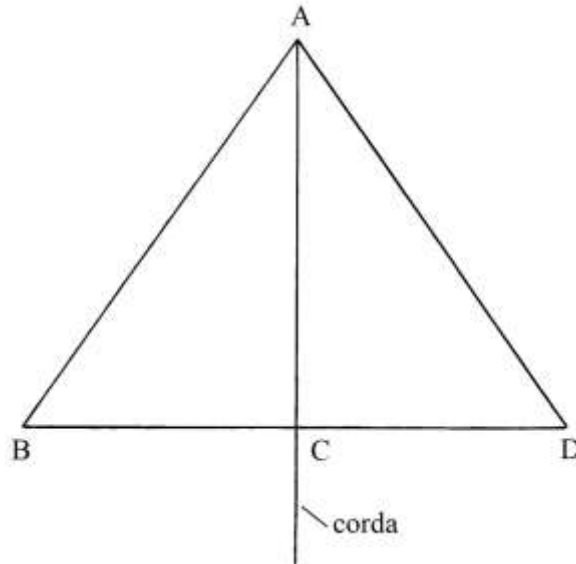
$$1 \text{ tavola}^2 = 36 \text{ braccia}^2.$$

PROPOSIZIONE XXII

Area di un triangolo

Un terreno ha la forma di un triangolo che non è rettangolo.

La base BD e l'altezza AC sono misurate con una *corda graduata*.



La base BD è lunga 45 tavole e l'altezza AC è 32.

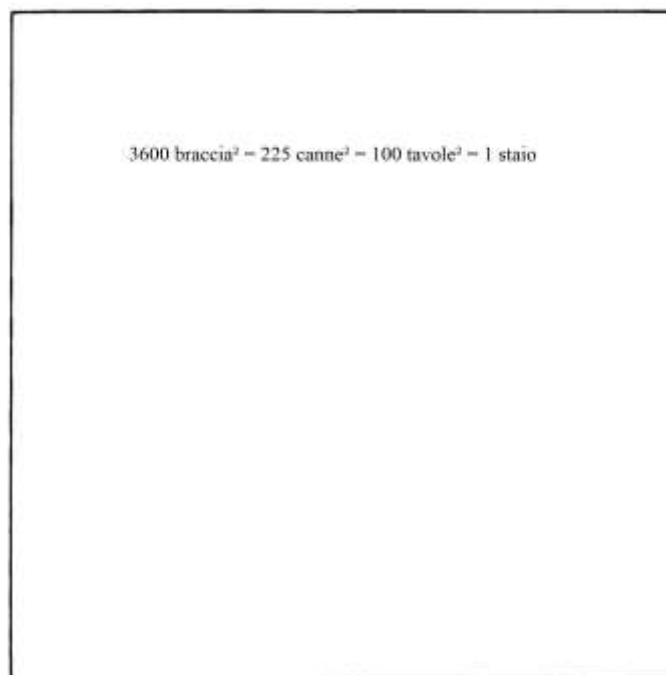
Il problema chiede l'area del triangolo.

L'area S è data da:

$$S = (AC/2) * BD = (32/2) * 45 = 16 * 45 = 720 \text{ tavole}^2 = (7 + 1/5) \text{ staia.}$$

A questo punto, Cataneo introduce l'unità superficiale *staio*: esso equivale all'area di un quadrato con lati lunghi

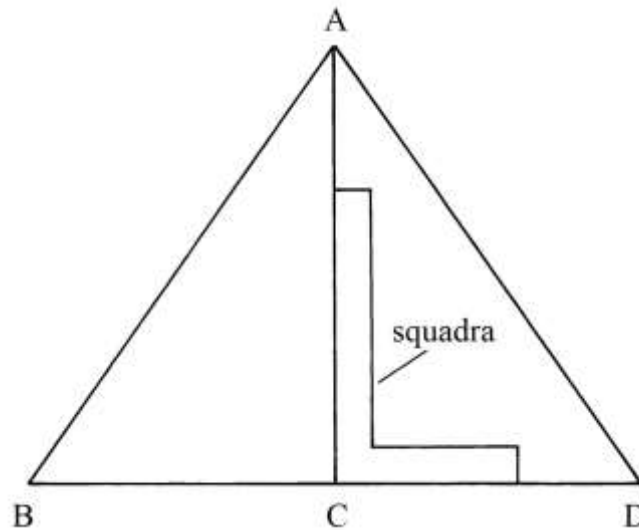
$$60 \text{ braccia} = 15 \text{ canne} = 10 \text{ tavole.}$$



$$60 \text{ braccia} = 15 \text{ canne} = 10 \text{ tavole}$$

Torniamo al problema. Cataneo suggerisce due differenti metodi di misurazione dell'altezza: il primo richiede una corda graduata che, fissata nel vertice, viene tirata verso il basso fino a incontrare perpendicolarmente la base nel punto C: AC è l'altezza del triangolo (la *catetta* secondo Cataneo).

Un secondo metodo è presentato nella figura che segue: l'Autore sembra suggerire l'uso di una squadra priva dell'ipotenusa:



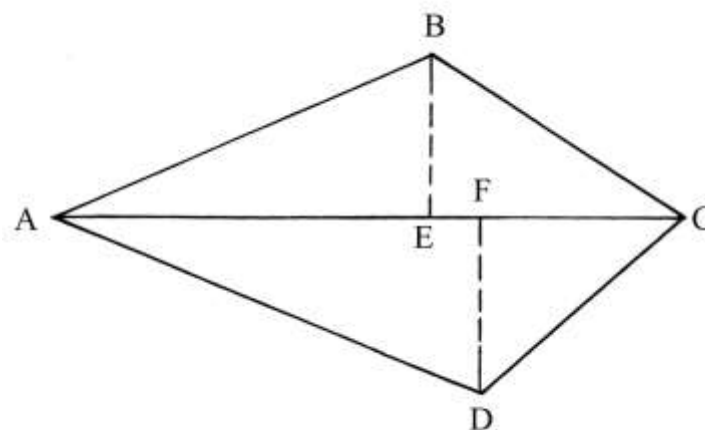
La squadra assolve a una funzione di supporto nei confronti della corda fissata in A: essa garantisce che gli angoli che AC forma con la base BD siano retti.

Dato che AC è lunga 32 tavole è piuttosto difficile immaginare l'esistenza di una squadra così grande.

PROPOSIZIONE XXIII

Campo a forma di quadrilatero

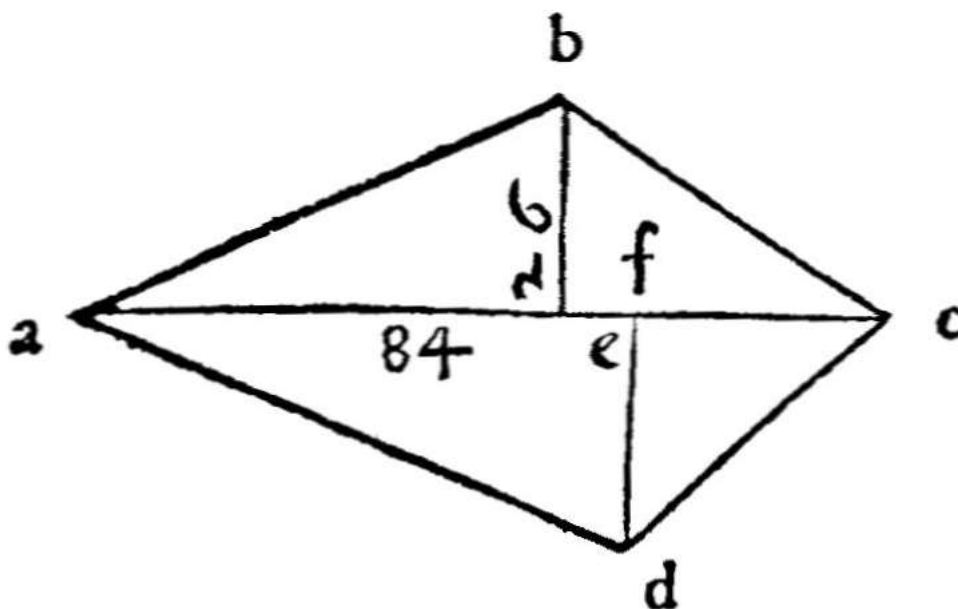
Un campo ha la forma di un *romboide*, un quadrilatero von lati di diversa lunghezza e angoli di differente ampiezza.



Per misurare il campo è necessario collegare i due vertici fra loro più lontani, quali sono A e C.

Dai vertici B e D sono abbassate le perpendicolari a AC: sono BE e DF, che risultano essere rispettivamente le altezze dei triangoli ABC e ACD.

È da notare il modo con cui Cataneo indica i vertici del quadrilatero nello schema che segue riprodotto dall'originale:



Nel testo egli designa i due triangoli come: "a.b.c." e "a.d.c.".

Le lunghezze misurate sono le seguenti:

- * AC = 84;
- * BE = 26;
- * DF = 30.

L'Autore non indica alcuna unità di misura: la successiva soluzione aiuta a individuare l'unità superficiale: la *tavola quadrata*.

Il calcolo dell'area è così ricavato:

$$S = AC * (BE + DF)/2 = 84 * (26 + 30)/2 = 84 * 56/2 = 84 * 28 = 2352.$$

È proposta una soluzione alternativa ed equivalente:

$$S_{ABC} = (BE/2) * AC = (26/2) * 84 = 13 * 84 = 1092;$$

$$S_{ACD} = (FD/2) * AC = (30/2) * 84 = 15 * 84 = 1260.$$

L'area dell'intero quadrilatero, S, è:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = 1092 + 1260 = 2352.$$

A questo punto della soluzione, l'Autore introduce l'unità di misura *tavola*²:

$$S = 2352 \text{ tavole}^2 = (23 \text{ staia} + 52 \text{ tavole}^2).$$

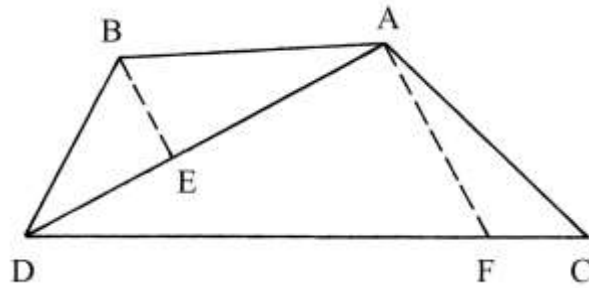
PROPOSIZIONE XXIV [XXIII]

Area di un terreno quadrangolare

Un terreno ha la forma di un quadrilatero che si avvicina a un trapezio scaleno.

Il problema chiede la sua area.

Essa è ottenuta scomponendo il quadrilatero in due triangoli che sono ricavati con il tracciamento di una delle due diagonali, come quella AD.

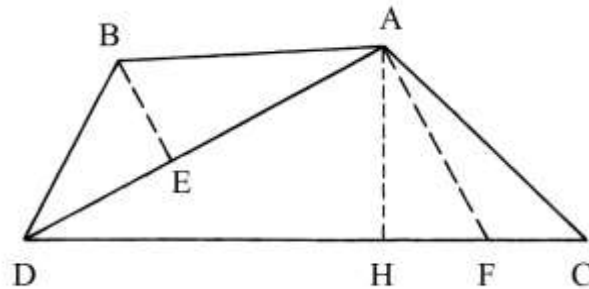


Dal punto B disegnare la perpendicolare a AD: BE è un'altezza del triangolo ABD.
L'area di ABD è:

$$S_{ABD} = AD * BE / 2.$$

Da A condurre la perpendicolare AF alla diagonale AD: sembra che Cataneo ritenga di calcolare l'area di ADC moltiplicando la lunghezza di AF per quella di DC e dividendo il risultato per 2.

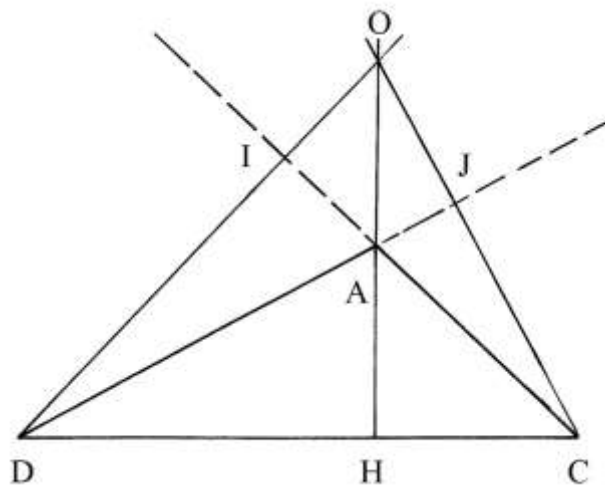
Ma S_{ADC} non è data da $(AF * DC / 2)$ perché AH non è un'altezza di ADC, mentre lo è AH:



----- APPROFONDIMENTO -----

Le altezze di un triangolo si incontrano in un punto che è chiamato *ortocentro*.

Nel caso di un triangolo ottusangolo come è ADC, esse si intersecano in un punto, che è sempre l'ortocentro, che però è *esterno* al triangolo:



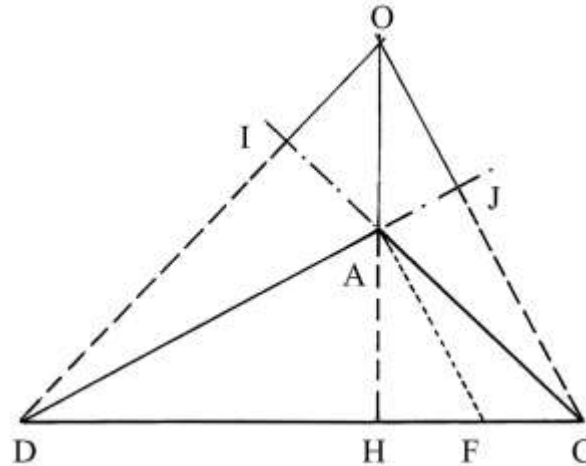
Per il punto A tracciare la perpendicolare a DC: AH è una delle tre altezze del triangolo ADC.

Prolungare verso l'alto i lati DA e CA. Dal punto D condurre la perpendicolare al prolungamento di CA: essa lo incontra in I e DI è la seconda altezza di ADC, ad esso *esterna*.

Dal punto C tracciare la perpendicolare al prolungamento di DA: è CJ è la terza altezza di ADC.

I prolungamenti delle tre altezze si incontrano nell'ortocentro O, punto esterno al triangolo ADC.

Lo schema che segue confronta le tre altezze AH, DI e CJ con la corda AF evidenziata da Cataneo:



AF è perpendicolare al lato AD ma non lo è rispetto a DC.
 Infine, AF è più corta rispetto all'altezza CJ alla quale è parallela.

L'area del triangolo ADC è:

$$S_{ADC} = DC * AH/2.$$

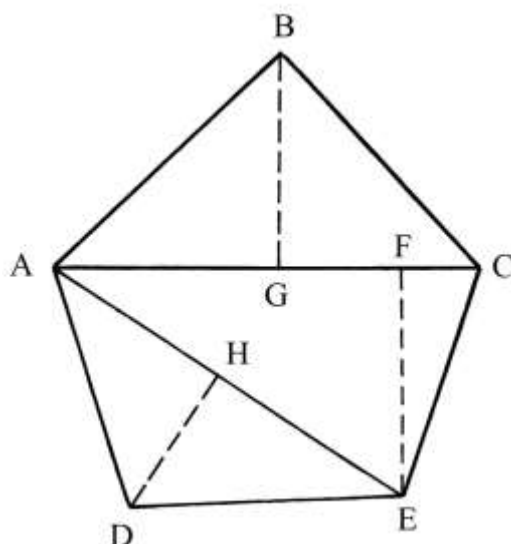
L'area dell'intero quadrilatero è:

$$S_{ACDB} = S_{ABD} + S_{ADC} = AD * BE/2 + DC * AH/2.$$

PROPOSIZIONE XXV

Misura di un campo di forma pentagonale

ABCED è un terreno che ha la forma di un pentagono non regolare.



L'Autore procede alla sua misurazione tralasciando quella delle lunghezze dei cinque lati e divide il poligono in tre triangoli scaleni con l'ausilio di due diagonali uscenti da un unico vertice, che è A: esse sono AC e AE.

Poi conduce tre altezze verso le due diagonali: BG, DH e EF.

Le lunghezze rilevate sono:

- * AC = 36 tavole;
- * AE = 28 tavole;
- * BG = 20 tavole;
- * DH = 12 tavole;
- * EF = 14 tavole.

L'area del pentagono è calcolata in due fasi: per prima è ricavata l'area del quadrilatero ABCE:

$$S_{ABCE} = AC * BG/2 + AC * FE/2 = AC * (BG/2 + EF/2) = 36 * (20/2 + 14/2) = 36 * (10 + 7) = 36 * 17 = 612 \text{ tavole}^2.$$

Cataneo ha calcolato l'area di ABCE sommando le aree dei triangoli ABC e ACE che hanno in comune il lato AC.

Nella seconda fase è ricavata l'area del residuo triangolo DAE:

$$S_{DAE} = AE * DH/2 = 28 * (12/2) = 28 * 6 = 168 \text{ tavole}^2.$$

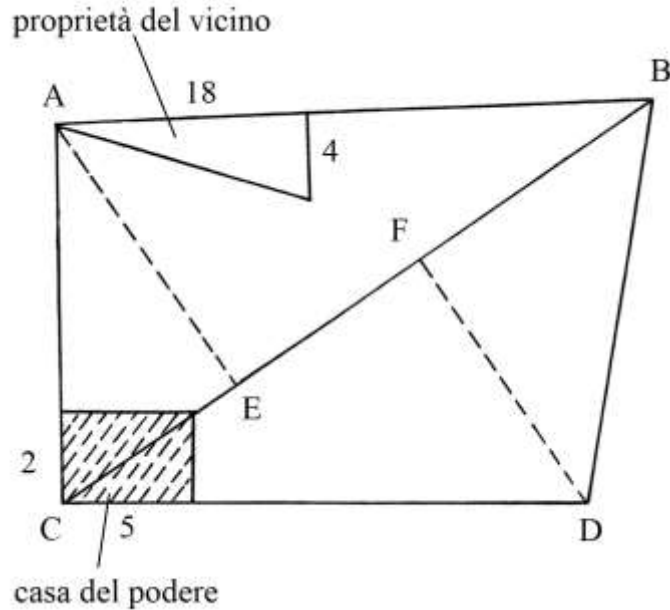
L'area S dell'intero terreno pentagonale è:

$$S = S_{ABCE} + S_{DAE} = 612 + 168 = 780 \text{ tavole}^2 = (7 + 4/5) \text{ staia} = (7 \text{ staia} + 80 \text{ tavole}^2).$$

PROPOSIZIONE XXVI

Area di un terreno di forma irregolare

Un terreno ha una forma che si avvicina a quella di un quadrilatero.



Nell'angolo in basso a sinistra vi è una casa che ha dimensioni di 2 per 5 tavole e in alto a sinistra si trova una porzione di proprietà di vicino, che ha la forma di un triangolo rettangolo con cateti lunghi 4 e 18 tavole.

Il problema chiede l'area del terreno.

Lo schema qui sopra riproduce l'originale ma come questo ultimo è chiaramente fuori scala.

La casa del podere ha area:

$$S_{\text{CASA}} = 5 * 2 = 10 \text{ tavole}^2.$$

L'area della porzione di proprietà del vicino è:

$$S_{\text{VICINO}} = 4 * 18/2 = 4 * 9 = 36 \text{ tavole}^2.$$

Per ricavare l'area lorda dell'intero quadrilatero occorre tracciare la diagonale CB.

Verso CB sono disegnate due perpendicolari a partire da A e da D: sono AE e DF che rappresentano le altezze rispettivamente dei triangoli ABC e BDC.

Le lunghezze misurate sono le seguenti e sono espresse in *tavole*:

- * CB = 40;
- * AE = 19;
- * DF = 20.

L'area lorda dell'intero terreno è:

$$S_{\text{LORDA}} = CB * (AE + DF)/2 = 40 * (19 + 20)/2 = 40 * 19,5 = 780 \text{ tavole}^2.$$

Nota: Cataneo fornisce il risultato errato di 760 tavole².

L'area netta del terreno, S, è:

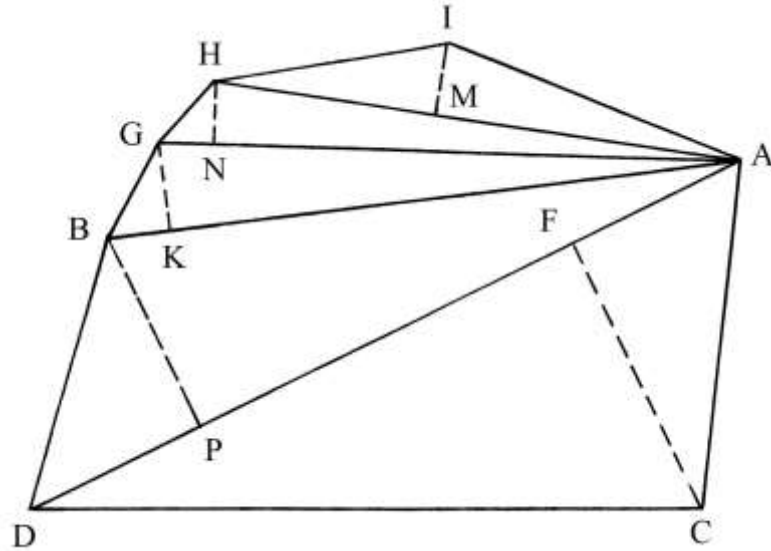
$$S = S_{\text{LORDA}} - S_{\text{CASA}} - S_{\text{VICINO}} = 780 - 10 - 36 = 734 \text{ tavole}^2 = \\ = (7 \text{ staia} + 34 \text{ tavole}^2).$$

Nota: per Cataneo l'area S è di 714 tavole².

PROPOSIZIONE XXVII

Area di un campo ettagonale

Un campo ha la forma di un ettagono non regolare con lati di assai differenti lunghezze.



Il problema domanda l'area del campo.

La misurazione è fatta dividendo il poligono in cinque triangoli scaleni con la tracciatura di quattro diagonali uscenti da un unico vertice, A: sono AD, AB, AG e AH.

Nei cinque triangoli così creati sono poi disegnate cinque altezze: CF, BP, GK, HN e IM.

Sommando le aree dei cinque triangoli si ottiene l'area dell'intero campo.

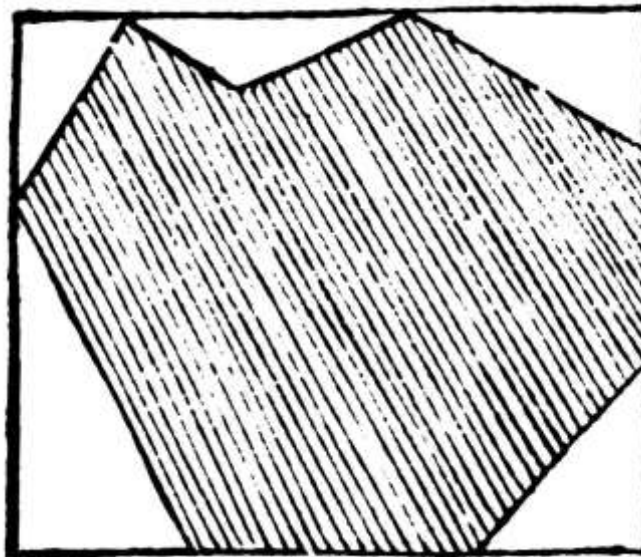
La divisione operata sull'ettagono è un esempio di triangolazione.

PROPOSIZIONE XXVIII

Misurazione dei boschi

La misura dell'area di un bosco può creare numerose difficoltà per l'impossibilità di penetrarvi.

La soluzione proposta da Cataneo è mostrata nello schema che segue, riprodotto dall'originale.

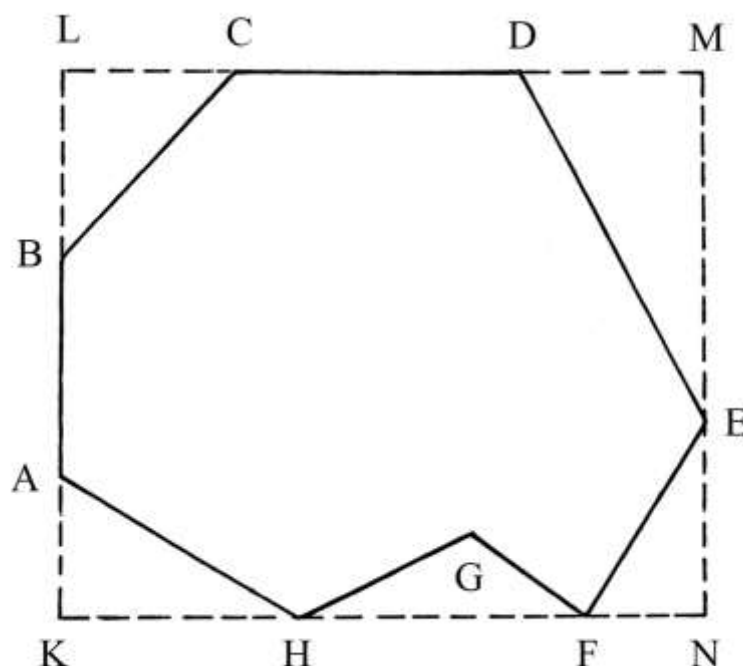


L'Autore suggerisce di inscrivere l'area del bosco in un immaginario quadrato o rettangolo, come è il caso qui presentato.

La superficie boschiva corrisponde alla parte tratteggiata.

La pianta del bosco ha la forma semplificata in un ottagono non regolare: è ABCDEFGH.

Esso è inscritto nel rettangolo KLMN:



L'area di KLMN è:

$$S_{KLMN} = KN * KL.$$

L'area del bosco è ottenuta sottraendo da quella di KLMN le aree occupate dai triangoli non boschivi:

- * KAH,
- * BLC;
- * DME;
- * FNE;
- * HGF.

In sintesi, l'area del bosco è:

$$S_{BOSCO} = S_{KLMN} - S_{KAH} - S_{BLC} - S_{DME} - S_{FNE} - S_{HGF}.$$

PROPOSIZIONE XXX

Calcolo dei volumi

La Proposizione descrive le unità usate per misurare il volume delle “cose corporee”:
colonne, piramidi, muri, tini, botti, fornaci, fosse per il grano.

Cataneo cita alcune unità di misura usate a Siena, a Firenze e in gran parte della Toscana.

Ecco una sintesi:

- * 1 braccio³ = 11 staia di vino = 11 staia di olio = 11 staia di cereali;
- * 1 braccio³ = 10 staia di calcina di gesso = 10 staia di inerti.

Lo staio aveva dei sottomultipli:

- * 1 staio = 4 quarti;
- * 1 quarto = 4 boccali per cui si ha:
1 staio = 16 boccali.

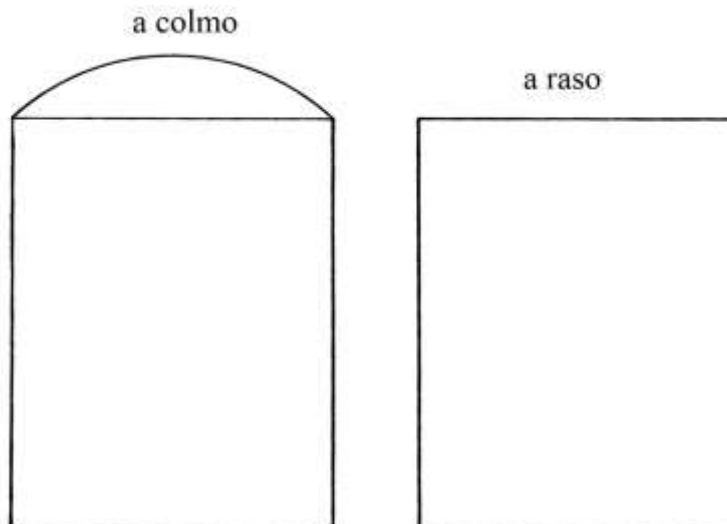
Infine, Cataneo afferma che 24 staia formano *un moggio*.

Come altri autori e maestri d'abaco toscani anche Cataneo chiama il "braccio cubico" *braccio quadro corporeo*.

----- APPROFONDIMENTO -----

I cereali, il vino e l'olio riempiono perfettamente un recipiente, mentre gli inerti non lo fanno: ciò giustifica il diverso valore che il braccio cubico aveva in relazione ai materiali contenuti.

Lo schema che segue mostra la differenza fra la misura *a colmo* e la misura *a raso*:



A causa delle frodi che venivano commesse alcuni Comuni toscani imposero l'uso della *misura a colmo* per la compravendita del grano: tutto ciò può aver avuto qualche influenza sui valori e sui multipli e sottomultipli dello staio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'uso della misura a colmo e a raso si è mantenuto nel funzionamento dei *Monti frumentari*: essi furono fondati in Italia a partire dalla fine del XV secolo per distribuire ai contadini poveri il grano e gli altri cereali dei quali avevano bisogno per le semine.

Il prestito avveniva con la consegna di contenitori contenenti le sementi, riempiti *a raso*. La restituzione delle sementi avveniva dopo i raccolti con recipienti riempiti *a colmo*.

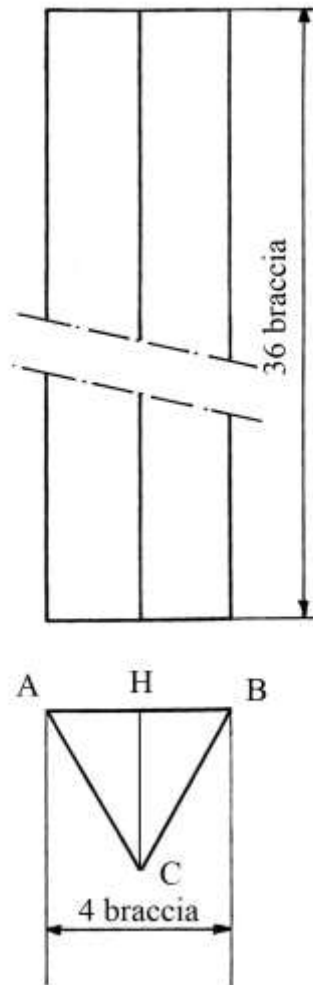
La differenza fra il riempimento a raso e quello a colmo era l'interesse per le sementi prestate.

Volume di una colonna triangolare

Una colonna ha base a forma di triangolo equilatero con lati lunghi 4 braccia.

Il solido è un prisma alto 36 braccia.

Il problema domanda il suo volume.



Per calcolare l'area della base occorre conoscere la lunghezza dell'altezza CH:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 4^2 - (4/2)^2 = 16 - 4 = 12 \quad e$$

$$CH = \sqrt{12} \text{ braccia.}$$

L'area S della base è:

$$S = AB * CH/2 = 4 * (\sqrt{12})/2 = 2 * \sqrt{12} = \sqrt{48} \text{ braccia}^2.$$

Il volume V del solido è:

$$V = S * 36 = (\sqrt{48}) * 36 = \sqrt{62208} = \sqrt{(3 * 16)} * 36 = 4 * 36 * \sqrt{3} = 144 * \sqrt{3} \text{ braccia}^3.$$

PROPOSIZIONE XXXI

Volume di un prisma a base quadrata

Cataneo chiama i cilindri e i prismi tutti con la stessa definizione di *colonne*.

Un prisma ha base quadrata con lati lunghi 3 braccia ed è alto 28 braccia.

Il problema chiede il suo volume.

L'area S della base è:

$$S = 3 * 3 = 9 \text{ braccia}^2.$$

Il volume V è:

$$V = S * 28 = 9 * 28 = 252 \text{ braccia}^3.$$

PROPOSIZIONE XXXII

Volume di una piramide a base quadrata

Una piramide ha base quadrata con lati lunghi 3 braccia ed è alta 18 braccia.

Il problema domanda il suo volume.

L'area S della base è:

$$S = 3 * 3 = 9 \text{ braccia}^2.$$

Il volume V è:

$$V = (S * 18)/3 = 9 * 18/3 = 9 * 6 = 54 \text{ braccia}^3.$$

Nota: Cataneo fornisce per il volume un risultato errato: 84 braccia³ (forse è un errore di stampa?).

PROPOSIZIONE XXXIII

Volume di una cassa

Una cassa è lunga 4 braccia e larga 3. La sua altezza è 2 braccia.

Il problema domanda quanto grano può contenere.

La base ha area S che è:

$$S = 4 * 3 = 12 \text{ braccia}^2.$$

Il volume V è:

$$V = S * \text{altezza} = 12 * 2 = 24 \text{ braccia}^3 \text{ di grano.}$$

Questo valore è poi convertito nei multipli del braccio³:

$$V = 24 \text{ braccia}^3 = 24 * 11 \text{ staia} = 264 \text{ staia} = 264/24 \text{ moggia} = 11 \text{ moggia di grano.}$$

PROPOSIZIONE XXXIV [XXXIII]

Misura dei muri

I muri retti venivano misurati in *canne quadre corporee* e cioè in canne cubiche (canne³).

Un artigiano ha costruito un muro lungo 20 braccia, alto 12 e spesso (1 + ½).

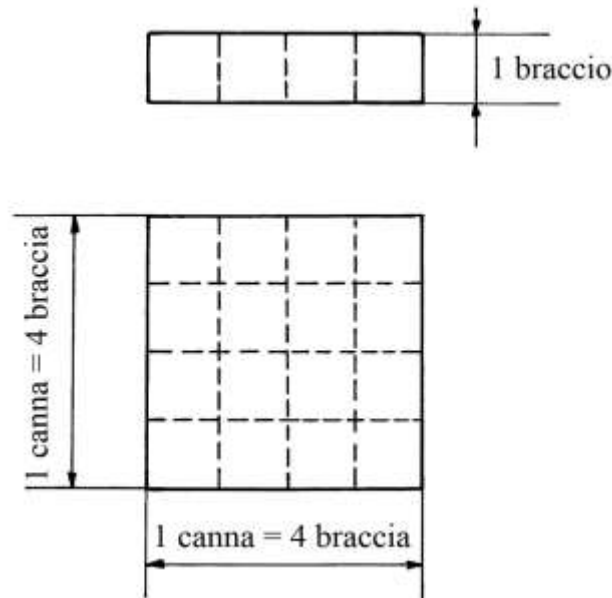
Il problema chiede il suo volume V:

$$V = 20 * 12 * (1 + \frac{1}{2}) = 360 \text{ braccia}^3.$$

Cataneo poi converte il risultato in *canne quadre corporee* stimando che una canna di questo genere equivalga a 16 braccia³:

$$V = 360/16 = (22 \text{ canne}^3 + 8 \text{ braccia}^3).$$

L'ipotizzata canna quadra corporea utilizzata da Cataneo avrebbe la forma mostrata nello schema che segue:



Essa è un prisma a base quadrata, con lati lunghi 4 braccia o una canna lineare e con altezza uguale a 1 braccio: secondo i moderni criteri il prisma ha volume di 16 braccia³.

L'equivalenza

$16 \text{ braccia}^3 = 1 \text{ canna quadra corporea}$ era una caratteristica della metrologia di Siena?

Questa unità di misura non è citata neanche nel grosso volume di Ronald Edward Zupko.

Solo uno storico della metrologia, e in particolare di quella usata nel Medioevo e nel Rinascimento a Siena, può fornire una risposta valida.

Forse, la *canna quadra corporea* senese è un altro esempio dell'applicazione del metodo delle "linee larghe" così bene descritto dallo storico della matematica danese Jens Høyrup?

----- APPROFONDIMENTO -----

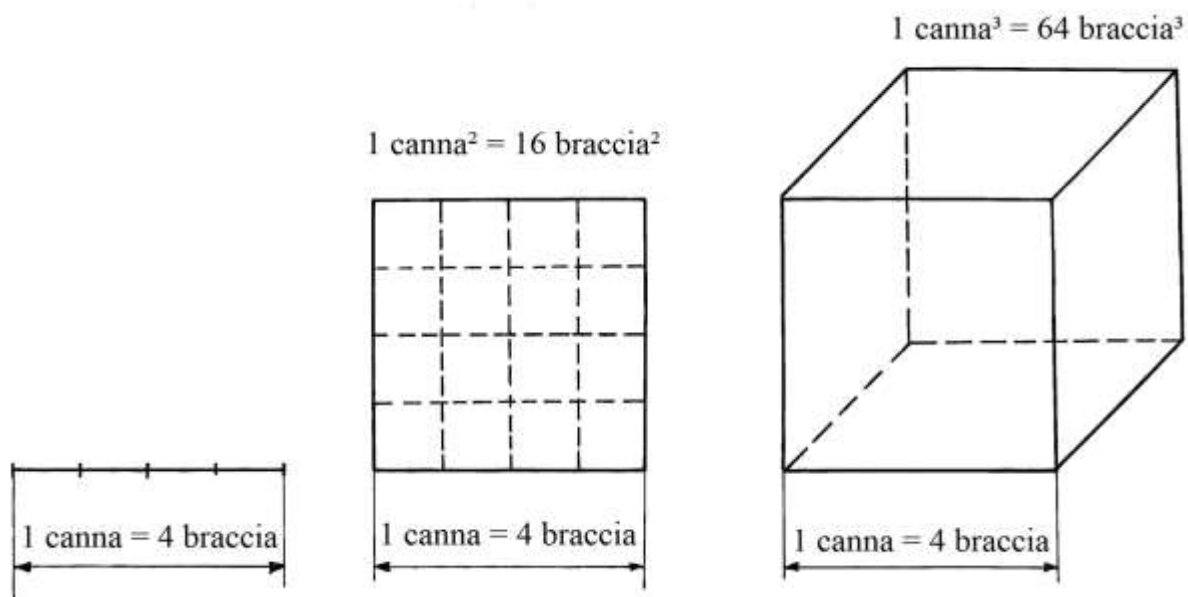
Nella precedente Proposizione XXI Cataneo aveva affermato che la *canna* usata a Siena era lunga 4 braccia.

Un quadrato con lati lunghi 1 canna ha area di 1 canna² che equivale a 16 braccia².

Su di un quadrato con lati lunghi 1 canna è costruito un cubo che ha altezza 1 canna.

Se esistesse oggi la canna, quella cubica avrebbe la forma e il valore di seguito spiegati e mostrati.

Il volume del cubo è 1 canna³ che equivale a $4^3 = 64 \text{ braccia}^3$:



%%%%%%%%%

Due matematici toscani, vissuti nel secolo successivo a quello di Pietro Cataneo, nella soluzione di problemi geometrici uguali o simili a quelli dell'Autore senese hanno utilizzato la stessa equivalenza:

$$16 \text{ braccia}^3 = 1 \text{ canna quadra corporea} \quad \text{oppure}$$

$$16 \text{ braccia quadre corporee} = 1 \text{ canna quadra corporea.}$$

I due matematici sono Lorenzo Forestani (1585 – 1660?) e Giuseppe Ciacchi (XVI secolo).

Nell'edizione stampata a Siena nel 1682 del trattato del Forestani (*“Pratica d'Arithmetica e Geometria”*) è usata la citata equivalenza (ad esempio a p. 641).

Nelle *“Regole generali d'abbaco”* del Ciacchi, testo pubblicato a Firenze nel 1679, è impiegata quella equivalenza nella soluzione di alcuni “Quesiti” contenuti alle pp. 374-377.

Essi erano stati influenzati dall'opera di Cataneo, oppure i due matematici prendevano atto dell'uso di una unità volumetrica per così dire “un po' strana” quale l'equivalenza più volte citata?

PROPOSIZIONE XXXV

Aree di muraglie e altro

A Siena, a Firenze e in tutto il resto della Toscana i muratori misuravano le superfici dei muri e degli *scialbi* [termine toscano che significa “intonaco”], i tetti, i palchi e i legnami in canne di 4 braccia.

Il metodo di misura è uguale a quello usato per i campi di terra.

PROPOSIZIONE XXXVI

Misura degli edifici

La misura del volume degli edifici veniva fatta prendendo in considerazione due facce opposte e misurando da fuori.

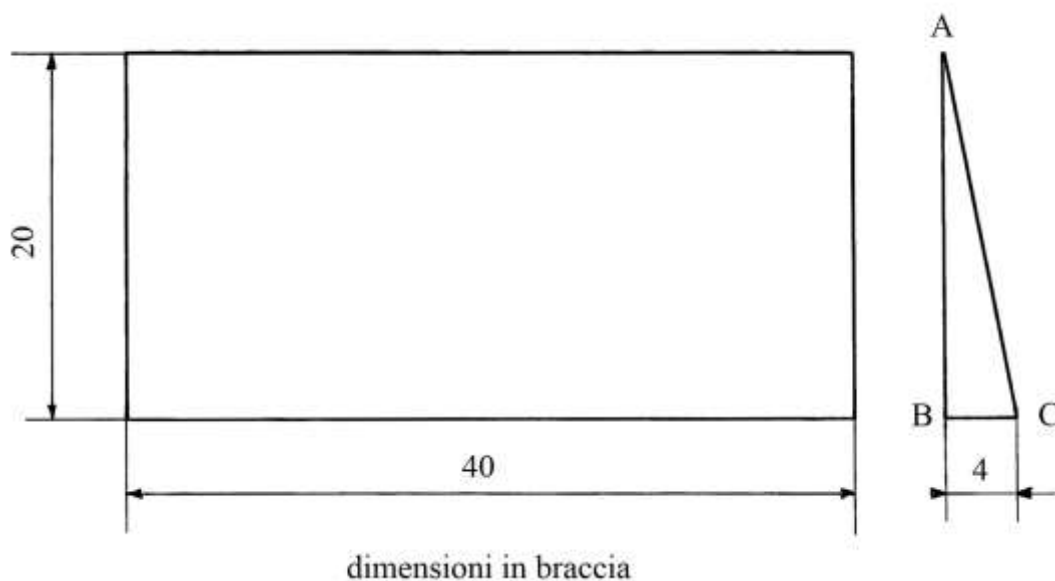
Le porte e le finestre facevano parte del volume pieno.

PROPOSIZIONE XXXVII

Misura delle scarpe dei muri

La *scarpa* era una struttura difensiva che rinforzava le mura esterne di castelli e forti.

Consisteva in un muro inclinato poggiato alla struttura del castello e aveva profilo triangolare: più spesso alla base e più sottile in cima.



Cataneo fa l'esempio di una scarpa lunga 40 braccia, alta 20 e spessa 4 braccia alla base. Nel vertice A la larghezza è zero.

L'Autore calcola la superficie S come segue:

$$S = 20 * 40 = 800 \text{ braccia}^2 = 800/16 = 50 \text{ canne}^2.$$

Dato che l'ipotenusa AC è più lunga dell'altezza AB = 20 braccia, la superficie effettiva della scarpa – il cui profilo è rappresentato dal triangolo rettangolo ABC – va calcolata come segue,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 20^2 + 4^2 = 400 + 16 = 416 \quad \text{e}$$

$$AC = \sqrt{416} \text{ braccia.}$$

L'area della scarpa è:

$$S_{AC} = AC * 40 = \sqrt{416} * 40 \approx 20,4 * 40 = 816 \text{ braccia}^2.$$

Può darsi che a Siena all'epoca in cui scriveva Cataneo l'area della superficie esterna della scarpa fosse calcolata trascurando l'inclinazione:

$$S = AB * 40 = 20 * 40 = 800 \text{ braccia}^2.$$

La soluzione del problema si conclude con il calcolo del costo della muratura espresso in soldi e in denari.

PROPOSIZIONE XXXVIII

Volume di un cubo

Una pietra ha sei facce quadrate: è un cubo (un “dado”).

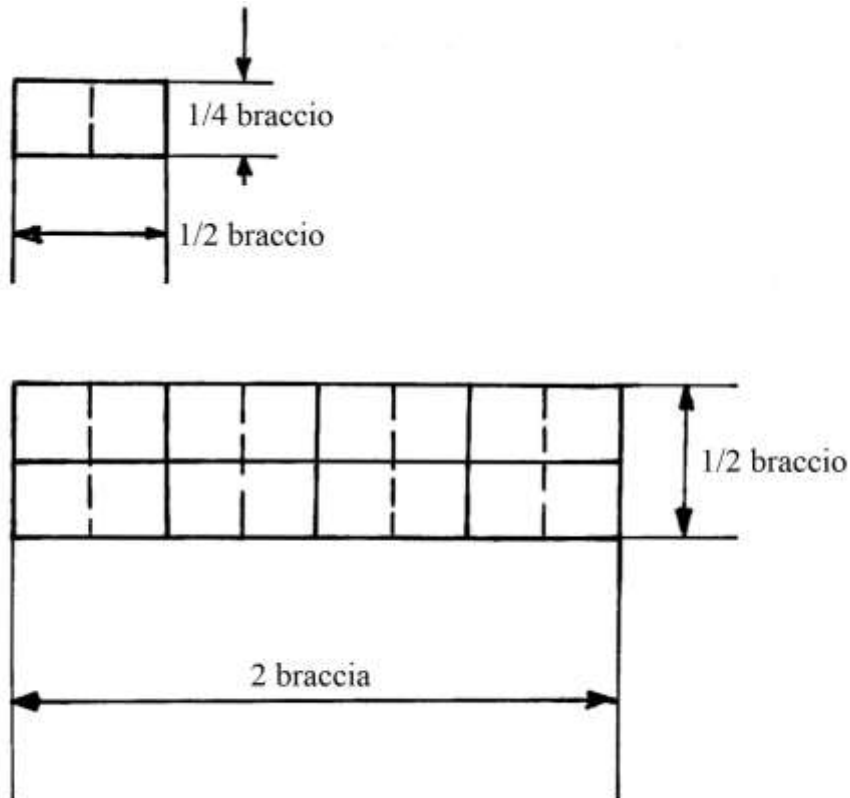
Gli spigoli sono lunghi 6 braccia: il volume V della pietra è:

$$V = 6^3 = 216 \text{ braccia}^3.$$

PROPOSIZIONE XXXIX

Pavimentazione di una sala

In tutta la Toscana e a Siena i mattoni usati erano lunghi $\frac{1}{2}$ braccio e larghi $\frac{1}{4}$. La loro superficie forma un doppio quadrato e cioè un *bislungo* secondo il termine largamente usato dagli abacisti toscani.



Accostando otto di questi mattoni si ottiene un rettangolo lungo 2 braccia e largo $\frac{1}{2}$: la sua superficie S è:

$$S = 2 * \frac{1}{2} = 1 \text{ braccio}^2.$$

La superficie di 1 braccio^2 è coperta da *otto* mattoni.

Il pavimento di una sala è lungo 20 braccia ed è largo 14.

Il problema chiede il numero dei mattoni occorrenti per coprire il pavimento. La sua superficie è:

$$S_{\text{PAVIMENTO}} = 20 * 14 = 280 \text{ braccia}^2.$$

Dato che coprire un braccio quadrato occorrono 8 mattoni, per rivestire l'intero pavimento occorrono N mattoni:

$$N = 8 * S_{\text{PAVIMENTO}} = 8 * 280 = 2240 \text{ mattoni.}$$

Un'altra soluzione è possibile: calcolare l'area della faccia di un singolo mattone e dividere l'area del pavimento per questo dato:

* $S_{\text{MATTONE}} = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ braccia}^2;$

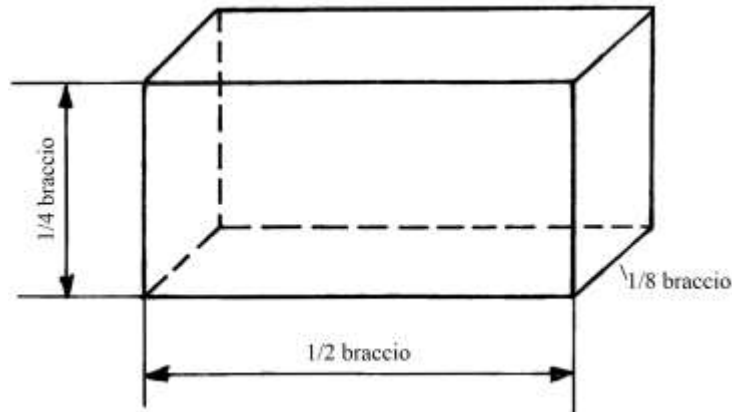
* $N = S_{\text{PAVIMENTO}} / S_{\text{MATTONE}} = 280 / (\frac{1}{8}) = 280 * 8 = 2240 \text{ mattoni.}$

PROPOSIZIONE XL

Mattoni occorrenti per costruire un muro

Deve essere costruito un muro con dei mattoni: la sua lunghezza è di 35 braccia, è alto 8 e spesso 2 braccia.

I mattoni hanno le dimensioni superficiali utilizzate nella soluzione della precedente Proposizione (1/2 per 1/4): l'Autore fornisce anche il loro spessore che indica in 1/8 di braccio.



Il problema domanda il numero dei mattoni.

Il volume V del muro è:

$$V = 35 * 8 * 2 = 560 \text{ braccia}^3.$$

Il volume di un singolo mattone è:

$$V_{\text{MATTONE}} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \text{ braccio}^3.$$

Il numero N dei mattoni che occorrono per costruire il muro è:

$$N = V/V_{\text{MATTONE}} = 560/(\frac{1}{64}) = 560 * 64 = 35840.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Cataneo indica inizialmente la lunghezza del muro uguale a 35 braccia, ma poi calcola altezza e spessore per 25.

I risultati che offre per il volume (400 braccia^3) e per il numero dei mattoni (25600) sono diversi da quelli ricavati sulla base della lunghezza uguale a 35 braccia.

PROPOSIZIONE XLI

Volume di una sfera

Una sfera ha diametro d lungo 8 braccia.

Sono chieste la sua superficie e il suo volume.

Cataneo parte dal calcolo dell'area del cerchio massimo della sfera:

$$S_{\text{CERCHIO}} = \frac{11}{14} * d^2 = \frac{11}{14} * 8^2 = (50 + \frac{2}{7}) \text{ braccia}^2.$$

Poi moltiplica questa area per la lunghezza del braccio r della sfera, con $r = d/2 = 8/2 = 4$ braccia:

$$S_{\text{SFERA}} = S_{\text{CERCHIO}} * r = (50 + \frac{2}{7}) * 4 = (201 + \frac{1}{7}) \text{ braccia}^2.$$

Oggi l'area della superficie di una sfera è calcolata con la formula:

$$S_{\text{SFERA}} = 4 * \pi * r^2 \approx 4 * \frac{22}{7} * 4^2 = \frac{88}{7} * 16 = (201 + \frac{1}{7}) \text{ braccia}^2.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

La formula usata da Cataneo per calcolare l'area della superficie della sfera è *sbagliata*:
* è errata da un punto di vista dimensionale perché moltiplicando l'area del cerchio massimo (espressa in braccia²) per una lunghezza come quella del raggio (in braccia lineari) si ottiene un valore che è misurabile in braccia³ e non in braccia² e quindi è un volume e non una superficie;
* la formula ha fornito un risultato esatto nel caso presentato da Cataneo perché il raggio r della sfera è lungo 4, come "4" è il coefficiente della corretta formula per il calcolo dell'area:

$$S_{\text{SFERA}} = "4" * \pi * r^2 = (r) * 22/7 * r^2.$$

A conferma di quanto affermato, facciamo l'ipotesi di una sfera con diametro d lungo 10 braccia e r lungo 5 e applichiamo il metodo impiegato da Cataneo:

$$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7) \text{ braccia}^2.$$

$$S_{\text{SFERA}} = S_{\text{CERCHIO}} * r = (78 + 4/7) * 5 = (392 + 6/7) \text{ braccia}^2.$$

Usiamo la formula corretta:

$$S_{\text{SFERA}} = 4 * \pi * r^2 \approx 4 * 22/7 * 5^2 = 88/7 * 25 = (314 + 2/7) \text{ braccia}^2.$$

Applicando il metodo di Cataneo l'area è risultata più grande di un rapporto R pari a:

$$R = (392 + 6/7)/(314 + 2/7) = r/4 = 5/4.$$

Il volume V della sfera è calcolato da Cataneo con la seguente formula:

$$V = d/6 * S_{\text{SFERA}} = 8/6 * (201 + 1/7) = (268 + 4/21) \text{ braccia}^3.$$

Da un punto di vista dimensionale la formula è corretta: moltiplicando una lunghezza (il diametro) per una superficie si ottiene un volume:

$$[\text{braccia}] * [\text{braccia}^2] = [\text{braccia}^3].$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Verifichiamo la correttezza della formula usata da Cataneo per calcolare il volume.

Oggi la formula che viene usata è:

$$V = 4/3 * \pi * r^3.$$

Ricordiamo la formula per l'area:

$$S_{\text{SFERA}} = 4 * \pi * r^2.$$

Il rapporto fra il volume e l'area di una sfera è:

$V/S_{\text{SFERA}} = (4/3 * \pi * r^3)/(4 * \pi * r^2) = r/3 = (d/2)/3 = d/6,$ che è il coefficiente usato da Cataneo.

PROPOSIZIONE XLII

Acqua contenuta in un pozzo

Un pozzo ha diametro d lungo 6 braccia ed è profondo 21 braccia.

Il problema chiede il volume dell'acqua che può contenere.

L'area S della sezione trasversale è:

$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 6^2 = (28 + 2/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume V del pozzo è:

$V = S * 21 = (28 + 2/7) * 21 = 594 \text{ braccia}^3,$ volume dell'acqua che il pozzo può contenere.

Il volume è poi convertito in staia secondo il rapporto $1 \text{ braccio}^3 = 11 \text{ staia}$:

$$V = 594 * 11 = 6534 \text{ staia.}$$

24 staia formano 1 moggio e il volume è:

$$V = 6534/24 = (272 \text{ moggio} + 6 \text{ staia}).$$

PROPOSIZIONE XLIII

Volume di una colonna cilindrica

Una colonna cilindrica ha diametro di 4 braccia ed è alta 27.

Il problema chiede il suo volume.

L'area S della sezione circolare è:

$$S = 11/14 * 4^2 = (12 + 4/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume V è:

$$V = S * 27 = (12 + 4/7) * 27 = (339 + 3/7) \text{ braccia}^3.$$

PROPOSIZIONE XLIV [XLIII]

Volume di un cono

Un cono (una *piramide tonda* secondo Cataneo) ha la base circolare con diametro lungo 4 braccia. Il solido è alto 14 braccia.

L'area S della base è:

$$S = 11/14 * 4^2 = (12 + 4/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume V è:

$$V = (S * 14)/3 = (58 + 2/3) \text{ braccia}^3.$$

PROPOSIZIONE XLV

Volume di un monte di grano

Al centro di una sala è un monte di grano: il diametro della sua base è lungo 3 braccia ed è alto 2 braccia.

La forma che il monte assume è assimilata a quella di un cono.

Il problema chiede il volume del grano.

L'area della base S è:

$$S = 11/14 * 3^2 = (7 + 1/14) \text{ braccia}^2.$$

Il volume del monte è:

$$V = (S * 2)/3 = (7 + 1/14) * 2/3 = (4 + 5/7) \text{ braccia}^3.$$

Il volume espresso in staia è:

$$V = (4 + 5/7) * 11 = (51 + 6/7) \text{ staia, volume del grano.}$$

PROPOSIZIONE XLVI

Volume di un altro monte di grano

Un monte di grano è adagiato a un muro e ha la forma di un semicono.

La base è un semicerchio e ha diametro d lungo 3 braccia, come spiega la doppia proiezione ortogonale che segue.

L'altezza h del monte è di 2 braccia.

Il problema chiede il volume del grano.

L'area della base, S , è:

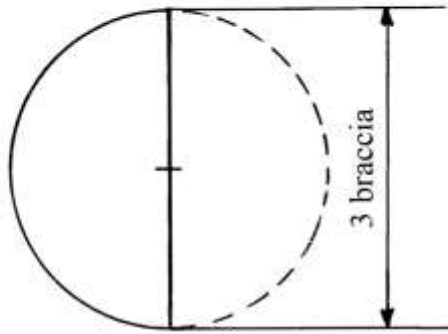
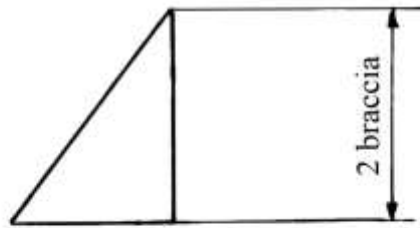
$$S = (11/14 * d^2)/2 = 11/14 * 3^2/2 = 11/28 * 9 = (3 + 15/28) \text{ braccia}^2.$$

Il volume del monte è:

$$V = (S * h)/3 = (3 + 15/28) * 2/3 = (2 + 5/14) \text{ braccia}^3.$$

In *staia* il volume del monte di grano è:

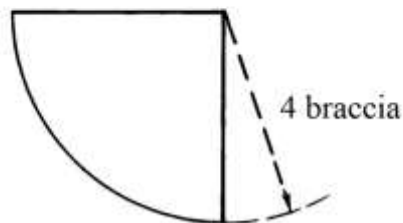
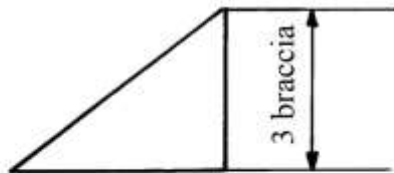
$$V = (2 + 5/14) * 11 = (25 + 13/14) \text{ staia.}$$



PROPOSIZIONE XLVII

Volume di un monte di grano ad angolo

Un monte di grano è stato creato in un angolo retto formato da due pareti verticali di uno stanzone.



Visto dall'alto, la base del monte ha la forma di un quarto di cerchio con raggio r lungo 4 braccia. Il monte è alto 3 braccia.

L'area S della base è:

$$S = (\pi * r^2)/4 = 22/7 * 4^2/4 = 22/7 * 4 = 88/7 = (12 + 4/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume V del monte è:

$$V = (S * 3)/3 = (12 + 4/7) * 3 = (12 + 4/7) \text{ braccia}^3.$$

Infine, il volume è convertito in staia:

$$V = (12 + 4/7) * 11 = (138 + 2/7) \text{ staia.}$$

Il volume espresso in *moggia* è:

$$V = (138 + 2/7)/24 = 5 \text{ moggia} + (18 + 2/7) \text{ staia.}$$

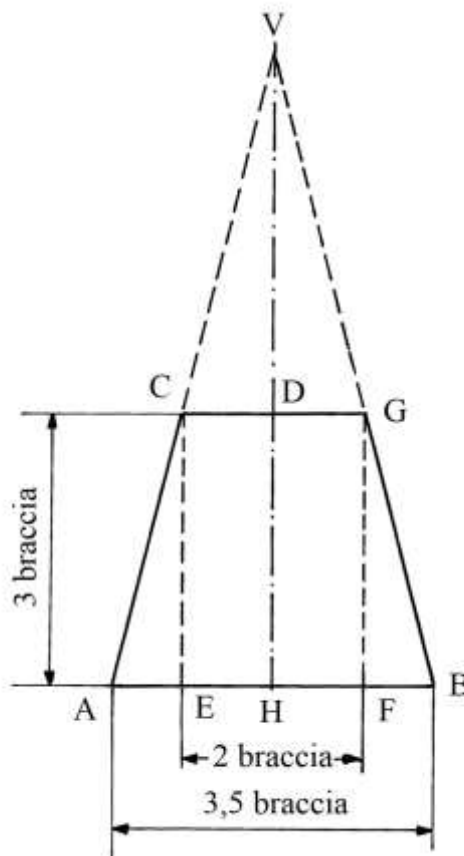
Nota: i problemi contenuti nella precedente Proposizione e in questa sono risolti da Cataneo in modo leggermente diverso: i risultati finali sono corretti. Egli calcola i volumi dei monti come fossero dei coni interi e poi moltiplica i risultati per la frazione che l'area della base forma rispetto a quella del cerchio intero.

PROPOSIZIONE XLVIII

Volume di un tino

Un tino ha forma circolare: il suo fondo ha diametro di $(3 + \frac{1}{2})$ braccia, la bocca ha diametro lungo 2 e l'altezza è 3 braccia.

Il solido ha la forma di un tronco di cono rovesciato e cavo.



Il tronco di cono proviene da un cono sezionato con un piano passante per i punti C e D.

Cataneo calcola il volume del tino con una procedura che sottrae il cono asportato da quello dell'intero cono.

Prolungare verso l'alto gli spigoli (o *apotemi* AC e BD): essi si incontrano nel punto V che è il vertice del cono da cui è stato tagliato CVG.

Dal punto V tracciare l'asse di simmetria VDH.

Dai punti C G abbassare le perpendicolari a AB: sono CE e GF.

I triangoli ACE e CVD sono simili per cui si ha:

$$AE : CE = CD : VD.$$

AE è lungo:

$$AE = FB = (AB - CG)/2 = (3,5 - 2) = 0,75 \text{ braccia.}$$

CD è lungo:

$$CD = CG/2 = 2/2 = 1 \text{ braccio.}$$

La proporzione diviene:

$$0,75 : 3 = 1 : VD \quad \text{da cui si ha:}$$

$$VD = (3 * 1)/0,75 = 4 \text{ braccia.}$$

Il cono AVB ha altezza:

$$VH = VD + DH = 4 + 3 = 7 \text{ braccia.}$$

L'area della base AB è:

$$S_{AB} = 11/14 * 3,5^2 = 9,625 \text{ braccia}^2.$$

Il volume dell'intero cono AVB è:

$$V_{AVB} = S_{AB} * VH/3 = 9,625 * 7/3 = (22 + 11/14) \text{ braccia}^3.$$

L'area della bocca del tino, CDG, è:

$$S_{CG} = 11/14 * 2^2 = 44/14 = (3 + 1/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume del cono asportato è:

$$V_{CVG} = S_{CG} * VD/3 = (3 + 1/7) * 4/3 = (4 + 4/21) \text{ braccia}^3.$$

Il volume del tronco di cono è:

$$V_{ACGB} = V_{AVB} - V_{CVG} = (22 + 11/14) - (4 + 4/21) = (18 + 25/42) \text{ braccia}^3, \text{ volume}$$

del tino: per la sola parte frazionaria, Cataneo dà un risultato leggermente diverso.

Il volume espresso in *staia* è:

$$V_{ACGB} = (18 + 25/42) * 11 = (204 + 23/42) \text{ staia.}$$

Infine, Cataneo ricorda che all'epoca in Toscana 4 *staia* erano equivalenti a una *soma* per cui il volume del tino era:

$$V_{ACGB} = (204 + 23/42)/4 = (51 \text{ some} + 23/42 \text{ staia}).$$

L'Autore conclude con un dato: se il tino è riempito di uve, il vino che si poteva ricavare era uguale a *due terzi* del volume.

----- APPROFONDIMENTO -----

Oggi il volume di un tronco di cono è calcolata con una formula:

$$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + r^2 + R * r) \quad \text{dove:}$$

- * h è l'altezza del tronco di cono;
- * R è il raggio della base;
- * r è il raggio della bocca.

PROPOSIZIONE XLIX

Tenuta di una botte

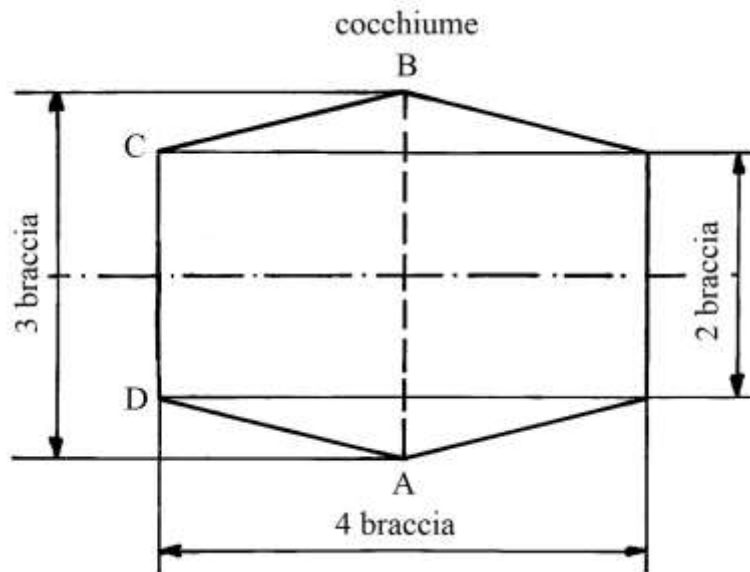
Una botte ha i due fondi circolari di uguali dimensioni: il loro diametro è lungo 2 braccia.

Al cocchiere il diametro è di 3 braccia.

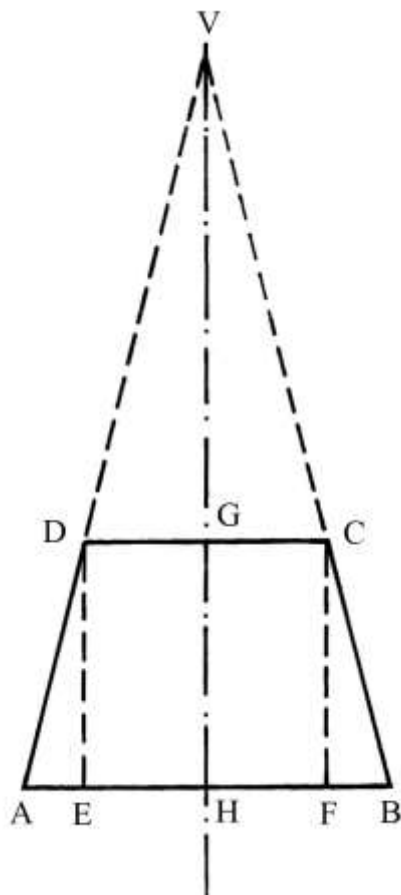
La distanza fra i due fondi è di 4 braccia: è la lunghezza della botte, talvolta chiamata altezza.

La botte è formata da due tronchi di cono di uguali dimensioni e uniti lungo la base passante per il cocchiere.

Il problema chiede il volume della botte.



La soluzione è simile a quella usata nel caso della precedente Proposizione. Deve essere ricavato il volume di uno dei due tronchi di cono e poli moltiplicare per due. Di seguito semplifichiamo la procedura usata da Cataneo.



ADCB è la metà sinistra della botte. Da D e da C abbassare le perpendicolari a AB: sono DE e CF.

Prolungare verso l'alto gli apotemi AD e BC: essi si incontrano nel punto V dal quale va tracciato l'asse di simmetria VGH.

I triangoli ACE e CGV sono simili e si ha la seguente proporzione:

$$AE : DE = DG : GV.$$

AE è lungo:

$$AE = (AB - EF)/2 = (AB - DC)/2 = (3 - 2)/2 = \frac{1}{2} \text{ braccio.}$$

DE è la metà della lunghezza della botte: $4/2 = 2$ braccia.

DG è lungo:

$$DG = DC/2 = 2/2 = 1 \text{ braccio.}$$

La proporzione diviene:

$$\frac{1}{2} : 2 = 1 : GV \quad e$$

$$GV = (2 * 1)/(1/2) = 4 \text{ braccia.}$$

L'altezza VH è:

$$VH = GH + GV = 2 + 4 = 6 \text{ braccia.}$$

Il fondo CD ha area:

$$S_{CD} = 11/14 * CD^2 = 11/14 * 2^2 = (3 + 1/7) \text{ braccia}^2.$$

L'area della sezione al cocchiere AB è:

$$S_{AB} = 11/14 * AB^2 = 11/14 * 3^2 = (7 + 1/14) \text{ braccia}^2.$$

Il volume del cono che ha altezza VH è:

$$V_{VH} = S_{AB} * VH/3 = (7 + 1/14) * 6/3 = (14 + 1/7) \text{ braccia}^3.$$

Il volume del cono con altezza GV è:

$$V_{GV} = S_{CD} * GV/3 = (3 + 1/7) * 4/3 = (4 + 4/21) \text{ braccia}^3.$$

Il volume del tronco di cono ADCB è:

$$V_{ADCB} = V_{VH} - V_{GV} = (14 + 1/7) - (4 + 4/21) = (9 + 20/21) \text{ braccia}^3.$$

Il volume dell'intera botte è il doppio di quello di ADCB:

$$V_{BOTTE} = 2 * V_{ADCB} = 2 * (9 + 20/21) = (19 + 19/21) \text{ braccia}^3.$$

Cataneo converte il risultato in staia:

$$V_{BOTTE} = 11 * (19 + 19/21) = (218 + 20/21) \text{ staia.}$$

Infine lo trasforma in some:

$$V_{BOTTE} = (218 + 20/21)/4 = [54 \text{ some} + (2 + 20/21 \text{ staia})].$$

PROPOSIZIONE L

Altro modo di misurare tini e botti

In questa Proposizione, Cataneo usa il plurale femminile *le tina* per indicare i *tini*.

A Siena e nella maggior parte della Toscana vi era l'uso di misurare un tino di forma tronco conica facendo la media aritmetica fra le lunghezze dei diametri al fondo e alla bocca.

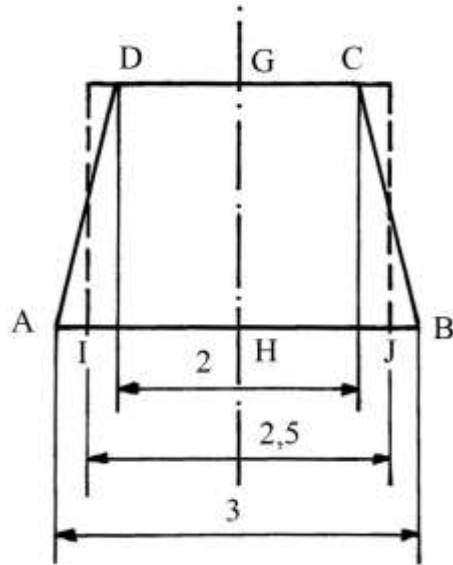
Il solido veniva assimilato a un cilindro con diametro lungo quanto quella media aritmetica.

L'Autore riprende in parte il problema descritto nella precedente Proposizione e assimila la semibotte – il tronco di cono ADCB – a un cilindro che ha la stessa altezza $GH = 2$ braccia e diametri IJ che è la media aritmetica fra le lunghezze di AB e di DC:

$$IJ = (AB + DC)/2 = (3 + 2)/2 = 2,5 \text{ braccia.}$$

L'area del cerchio di diametro IJ è:

$$S_{IJ} = 11/14 * 2,5^2 = (4 + 51/56) \text{ braccia}^2.$$



Il volume del cilindro che ha base IJ è:

$$V_{IJ} = S_{IJ} * GH = (4 + 51/56) * 2 = (9 + 23/28) \text{ braccia}^3.$$

Il risultato è leggermente differente da quello calcolato in precedenza per il tronco di cono:

$$V_{ADCB} = (9 + 20/21) \text{ braccia}^3.$$

Il valore $(9 + 23/28)$ è leggermente *inferiore* a quello corretto $(9 + 20/21)$: la differenza è dovuta al metodo *approssimato* usato in questa Procedura L.

PROPOSIZIONE LI

Le fosse per il grano

Le fosse per contenere erano circolari e con una caratteristica: erano più larghe alla base che alla bocca e a metà altezza erano ancora più grandi.

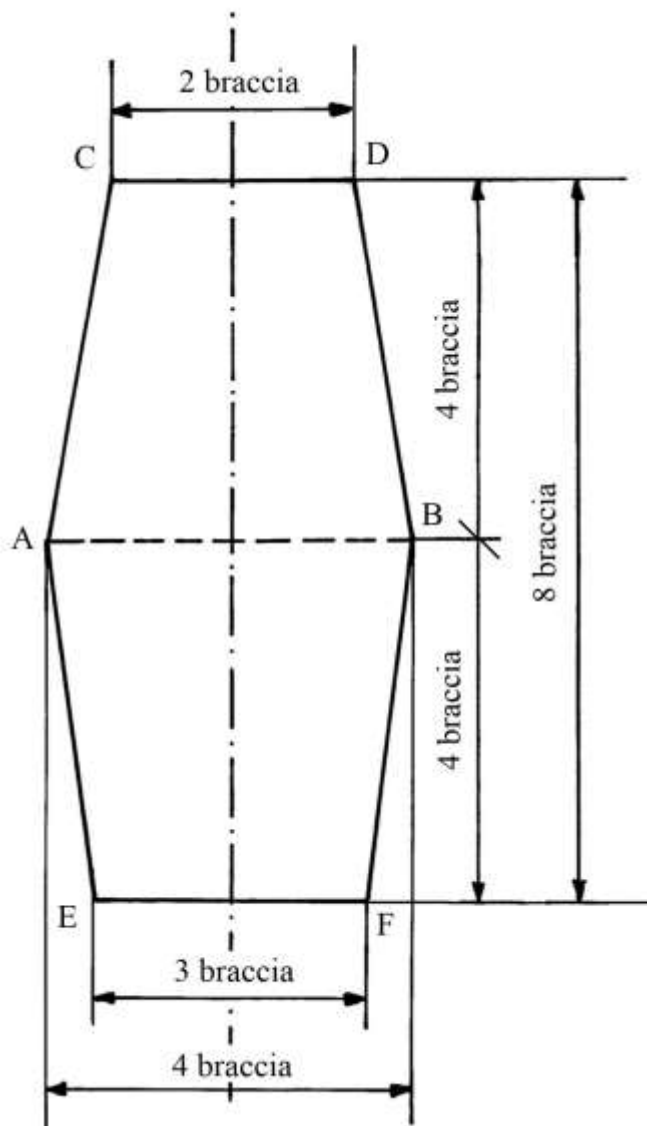
Una di queste fosse è profonda 8 braccia, al fondo ha diametro 3, alla bocca 2 e a metà altezza 4 braccia.

Il problema chiede il volume del grano che può contenere.

Cataneo propone di utilizzare la procedura impiegata per risolvere il problema della Proposizione XLIX.

La fossa è formata da due tronchi di cono: ACDB e ABFE.

Andrebbero calcolati i volumi dei due coni dai quali derivano i due tronchi: Cataneo non offre alcun dato numerico e si limita a suggerire un metodo.



----- APPROFONDIMENTO -----

Per risolvere il problema in maniera rapida, utilizziamo la formula, già citata, oggi impiegata per calcolare il volume di un tronco di cono:

$$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + r^2 + R * r) \approx 1/3 * 22/7 * h * (R^2 + r^2 + R * r) = 22/21 * h * (R^2 + r^2 + R * r).$$

Per il tronco di cono ACDB si hanno i seguenti dati:

- * h = 4 braccia;
- * $R = AB/2 = 4/2 = 2$ braccia;
- * $r = CD/2 = 2/2 = 1$ braccio.

Il volume di ACDB è:

$$V_{ACDB} = 22/21 * 4 * (2^2 + 1^2 + 2 * 1) = 88/21 * 7 = 88/3 = (29 + 1/3) \text{ braccia}^3.$$

Per il tronco di cono ABFE i dati sono:

- * h = 4 braccia;
- * $R = AB/2 = 4/2 = 2$ braccia;
- * $r = EF/2 = 3/2 = 1,5$ braccia.

Il volume di ABFE è:

$$V_{ABFE} = 22/21 * 4 * (2^2 + 1,5^2 + 2 * 1,5) = 88/21 (4 + 2,25 + 3) = 88/21 * 9,25 = (38 + 16/21) \text{ braccia}^3.$$

Il volume dell'intera fossa è:

$$V_{\text{FOSSA}} = V_{\text{ACDB}} + V_{\text{ABFE}} = (29 + 1/3) + (38 + 16/21) = (68 + 2/21) \text{ braccia}^3.$$

Dato che il grano era comunemente misurato in *staia* e un braccio³ equivaleva a 11 staia, il volume del grano è:

$$V_{\text{GRANO}} = (68 + 2/21) * 11 = (749 + 1/21) \text{ staia}.$$

PROPOSIZIONE LII

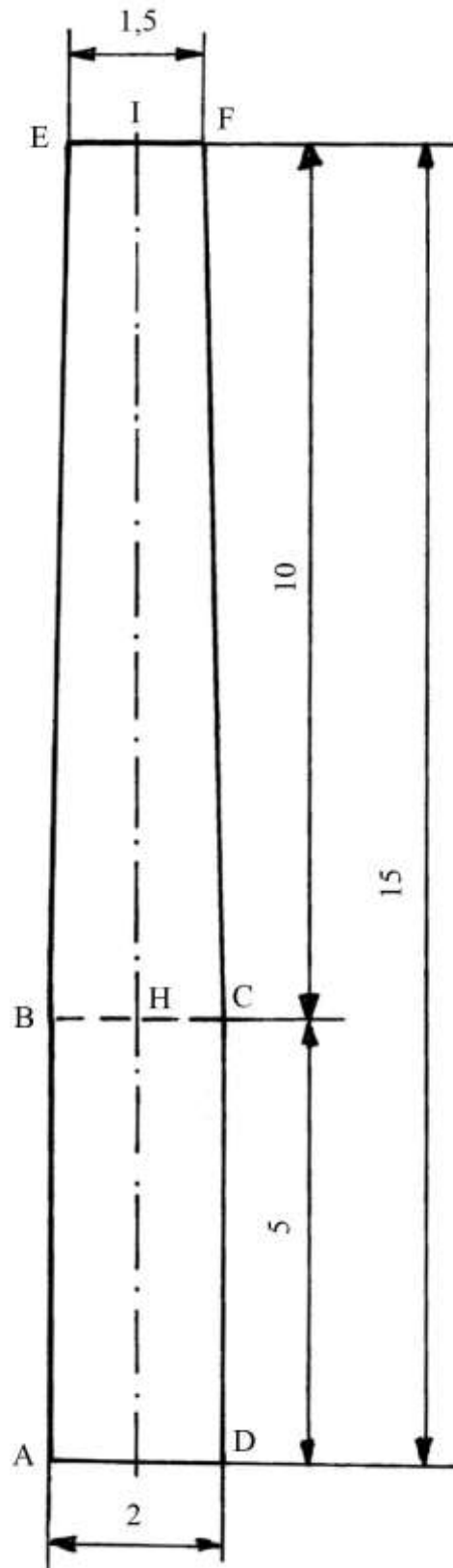
Volume di una colonna

Una colonna è alta 15 braccia e la sua base ha diametro di 2.

Nella parte bassa, essa è fornata da un cilindro che è alto 5 braccia e cioè un terzo dell'altezza complessiva.

La parte superiore della colonna è alta 10 braccia ed è rastremata: ha la forma di un tronco di cono e la sommità ha diametro lungo $(1 + 1/2)$ braccia.

Il problema chiede il volume dell'intera colonna.



dimensioni espresse in *braccia*

La base AD ha area che è data da:

$$S_{AD} = 11/14 * AD^2 = 11/14 * 2^2 = 44/14 = (3 + 1/7) \text{ braccia}^2.$$

La parte cilindrica ABCD ha volume che è:

$$V_{ABCD} = S_{AD} * 5 = (3 + 1/7) * 5 = (15 + 5/7) \text{ braccia}^3.$$

La parte tronco conica ha un volume che Cataneo calcola con lo stesso metodo impiegato nella soluzione della Proposizione XLIX.

Ecco riassunti i suoi passi: il triangolo BEG è rettangolo ed è simile al triangolo rettangolo EIV (non completato per mancanza di spazio nella figura che segue). Si ha la proporzione:

$$BG : EI = EG : VI$$

$$BG = (BC - EF)/2 = (2 - 1,5)/2 = 0,25 [1/4] \text{ braccia.}$$

$$EI = EF/2 = 1,5/2 = 0,75 [3/4] \text{ braccia.}$$

$$EG = IH = 10 \text{ braccia.}$$

Nella proporzione, la lunghezza di VI è l'incognita:

$$VI = (EI * EG)/BG = (0,75 * 10)/0,25 = 7,5/0,25 = 30 \text{ braccia.}$$

L'area della sezione trasversale EIF è:

$$S_{EIF} = 11/14 * EF^2 = 11/14 * 1,5^2 = (1 + 43/56) \text{ braccia}^2.$$

Il volume del cono EIFV è:

$$V_{EIFV} = (S_{EIF} * VI)/3 = (1 + 43/56) * 30/3 = (17 + 19/28) \text{ braccia}^3.$$

Deve ora essere calcolato il volume dell'intero cono con altezza

$$h = VI + IH = 30 + 10 = 40 \text{ braccia.}$$

La base BGHC ha area uguale a quella della base AD:

$$S_{BGHC} = 11/14 * BC^2 = 11/14 * 2^2 = 44/14 = 22/7 = (3 + 1/7) \text{ braccia}^2.$$

Il volume dell'intero cono VH è:

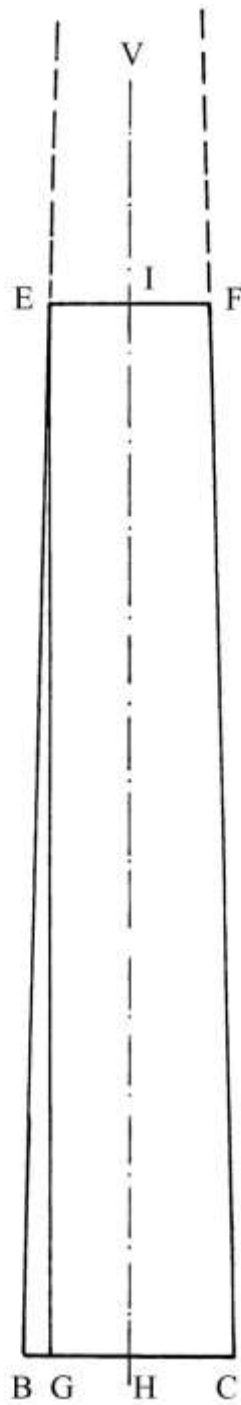
$$V_{VH} = S_{BGHC} * VH/3 = (3 + 1/7) * 40/3 = (41 + 19/21) \text{ braccia}^3.$$

Il volume del tronco di cono EFCB è:

$$V_{EFCB} = V_{VH} - V_{EIFV} = (41 + 19/21) - (17 + 19/28) = (24 + 19/84) \text{ braccia}^3.$$

Il volume dell'intera colonna è:

$$V_{COLONNA} = V_{ABCD} + V_{EFCB} = (15 + 5/7) + (24 + 19/84) = (39 + 79/84) \text{ braccia}^3.$$



----- APPROFONDIMENTO -----

Utilizziamo la formula moderna per calcolare il volume del tronco di cono EFCB:

$$\begin{aligned}
 V_{EFCB} &= \frac{1}{3} * \pi * HI * (BH^2 + EI^2 + BH * EI) = \\
 &= \frac{1}{3} * \frac{22}{7} * 10 * (1^2 + 0,75^2 + 1 * 0,75) = \frac{220}{21} * (1 + 0,5625 + 0,75) = \\
 &= \frac{220}{21} * 2,3175 = 24,2785 \text{ braccia}^3.
 \end{aligned}$$

Il risultato è pressoché uguale a quello calcolato con la procedura di Cataneo:

$$V_{EFCB} = (24 + \frac{19}{84}) \text{ braccia}^3 \approx 24,2262 \text{ braccia}^3.$$

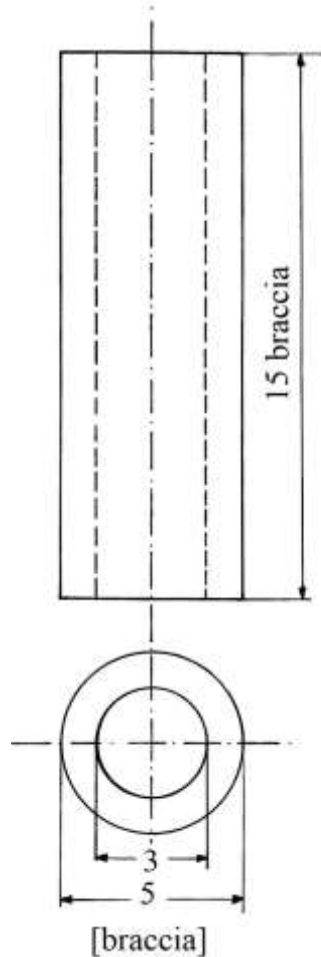
PROPOSIZIONE LIII

Volume di una muraglia circolare

Un pozzo circolare ha diametro interno lungo 3 braccia e lo spessore del muro è 1 braccio.

Il pozzo è profondo 15 braccia.

Il problema chiede il volume della muratura.



L'area del cerchio interno è:

$$S_{\text{INTERNO}} = \frac{11}{14} * 3^2 = \frac{99}{14} = (7 + \frac{1}{14}) \text{ braccia}^2.$$

L'area del cerchio esterno è:

$$S_{\text{ESTERNO}} = \frac{11}{14} * 5^2 = \frac{275}{14} = (19 + \frac{9}{14}) \text{ braccia}^2.$$

L'area della corona circolare che forma la sezione orizzontale della muratura è:

$$S_{\text{CORONA}} = S_{\text{ESTERNO}} - S_{\text{INTERNO}} = (19 + \frac{9}{14}) - (7 + \frac{1}{14}) = (12 + \frac{8}{14}) = (12 + \frac{4}{7}) \text{ braccia}^2.$$

Il volume della muratura è:

$$V = S_{\text{CORONA}} * \text{profondità} = (12 + \frac{4}{7}) * 15 = (188 + \frac{4}{7}) \text{ braccia}^3.$$

Cataneo converte il risultato in *canne quadre corporee* secondo il rapporto già visto:

$$1 \text{ canna quadra corporea} = 16 \text{ braccia}^3.$$

Il volume della muratura è:

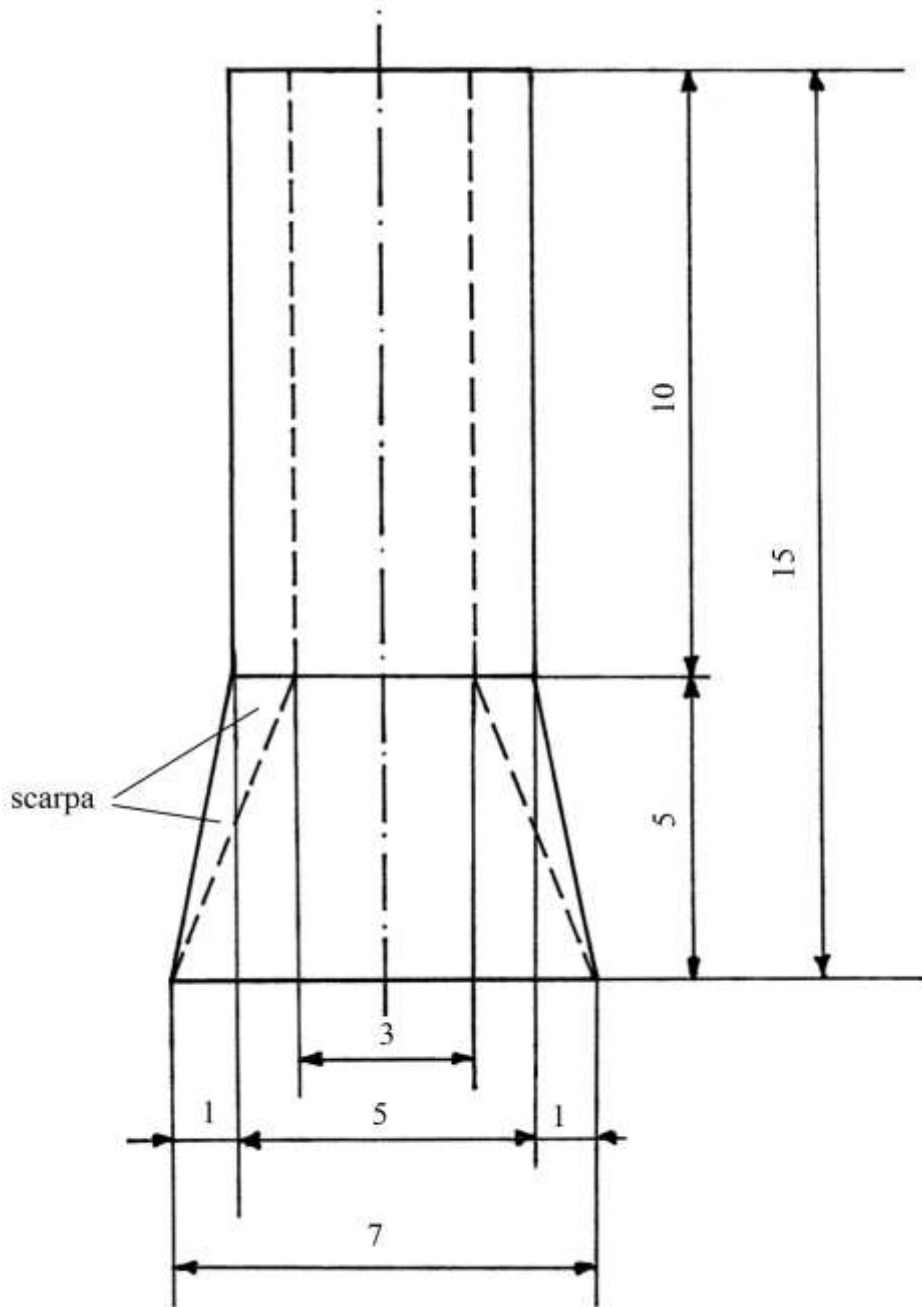
$$V = (188 + \frac{4}{7})/16 = [11 \text{ canne quadre corporee} + (12 + \frac{4}{7}) \text{ braccia}^3].$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Cataneo propone poi una modifica della struttura muraria del pozzo: vi è costruita una *scarpa* che occupa un terzo della profondità (un terzo di 15 braccia) e alla base ha spessore di 1 braccio.

Nel trattato originale non è mostrato alcuno schema in sezione o in pianta in grado di descrivere il mutamento apportato.

Lo schema di seguito proposto è una pura ipotesi: la scarpa è posizionata nella parte inferiore del pozzo: non è certo che questa soluzione sia una corretta interpretazione della limitata descrizione che ne fa l'Autore.



dimensioni in braccia

Cataneo utilizza la seguente procedura per calcolare il volume della scarpa, procedura che è qui riorganizzata:

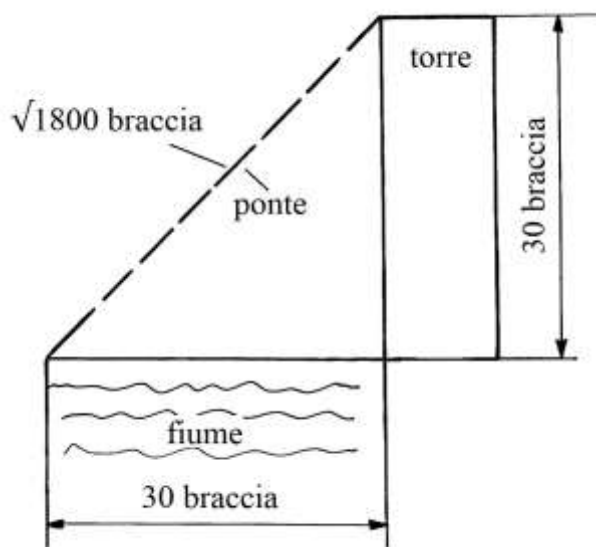
- * raddoppiare lo spessore della scarpa: $1 * 2 = 2$ braccia;
 - * sommare con il diametro esterno: $2 + 5 = 7$;
 - * moltiplicare per sé stesso: $7 * 7 = 49$;
 - * moltiplicare per 11/14: $49 * 11/14 = (38 + 1/2)$;
 - * moltiplicare per 5 [altezza del tratto di pozzo interessato dalla presenza della scarpa]: $(38 + 1/2) * 5 = (192 + 1/2)$;
 - * moltiplicare il diametro 5 per sé stesso: $5 * 5 = 25$;
 - * moltiplicare per 11/14: $25 * 11/14 = (19 + 9/14)$;
 - * moltiplicare per l'altezza 5: $(19 + 9/14) * 5 = (98 + 3/14)$;
 - * sottrarre l'ultimo volume da $(192 + 1/2)$: $(192 + 1/2) - (98 + 3/14) = (94 + 2/7)$;
 - * dividere per 2: $(94 + 2/7)/2 = (47 + 1/7)$ braccia³, volume della scarpa;
 - * dividere per 16: $(47 + 1/7)/16 = 2$ canne quadre corporee + $(15 + 1/7)$ braccia³.
-

PROPOSIZIONE LIV [LIIII]

Ponte su di un fiume

Una torre è alta 30 braccia ed è collocata sulla riva di un fiume largo 30 braccia.

Deve essere costruito un ponte che vada dalla cima della torre alla riva opposta del fiume: il problema chiede la sua lunghezza.



Il ponte è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con cateti lunghi 30 braccia. La sua lunghezza L è:

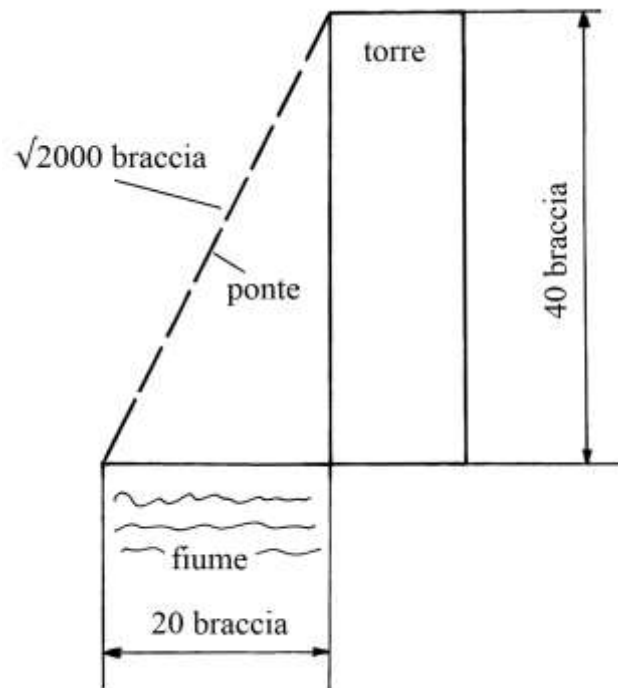
$$L^2 = 30^2 + 30^2 = 900 + 900 = 1800 \quad e$$

$$L = \sqrt{1800} \text{ braccia } [\approx 42,43 \text{ braccia}].$$

PROPOSIZIONE LV

Un altro ponte

Il problema è simile al precedente: la torre è alta 40 braccia e il fiume è largo 20.



Il ponte che collega la cima della torre e la riva opposta del fiume è lungo:

$$L^2 = 40^2 + 20^2 = 1600 + 400 = 2000 \quad e$$

$$L = \sqrt{2000} \text{ braccia } [\approx 44,72 \text{ braccia}].$$

APPENDICE I

=====

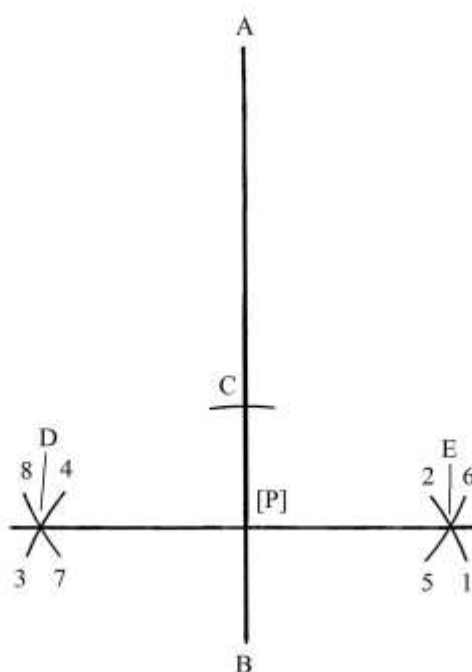
Nel trattato “*L’architettura di Pietro Cataneo Senese*” pubblicato a Venezia nel 1567, il *Libro Settimo* è dedicato alle “*cose di Geometra*”. Il Libro è l’oggetto di questa Appendice.

Anche in questo trattato, i problemi sono indicati con l’espressione “*Proposizione*” e sono sempre ordinati in numerazione romana.

Proposizione prima

Costruzione di un angolo retto

Il problema propone la costruzione di un angolo retto senza l’uso dell’archipendolo e impiegando solo il compasso e una squadra.



Nel Trattato di Architettura Cataneo appone quasi sempre lettere maiuscole ai vertici delle figure.

AB è un segmento verticale (Cataneo lo chiama “la catetta”) verso il quale deve essere costruita una retta perpendicolare: la loro intersezione crea quattro angoli retti che l’Autore non contrassegna e che nello schema è qui indicato con [P].

Forse, Cataneo definisce *catetta* la verticale ottenuta con l’impiego del filo a piombo.

Con apertura di compasso scelta a piacere fare centro in B e tracciare tre archi: quello che fissa C e gli archi 1-2 e 3-4.

Con la stessa apertura fare centro in C e disegnare gli archi 5-6 e 7-8.

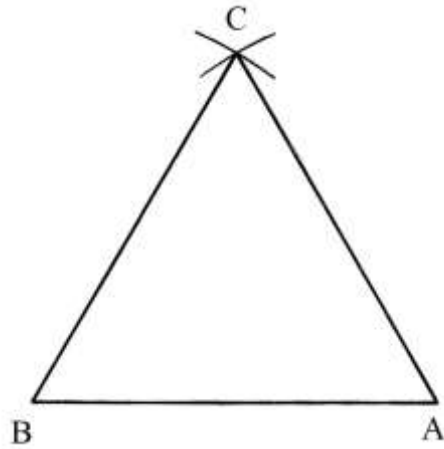
Le coppie di archi si incontrano nei punti D e per i quali passa la perpendicolare a AB che la taglia nel punto [P].

In [P] sono costruiti *quattro* angoli retti: A[P]D, A[P]E, B[P]E e B[P]E.

PROPOSIZIONE II

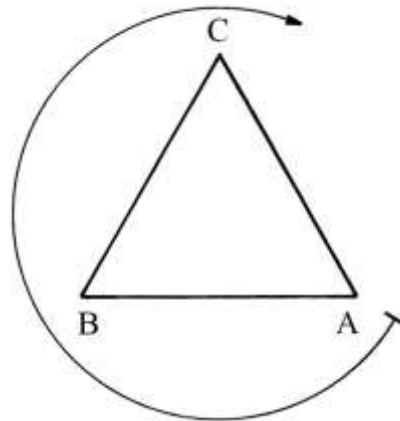
Costruzione di un triangolo equilatero dato un lato

La prima costruzione del triangolo equilatero che Cataneo propone non è quella del poligono inscritto in un cerchio.



AB è il primo lato. Fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare due archi che si incontrano in C: ABC è il triangolo equilatero desiderato.

Nello schema qui sopra e nell'originale, le lettere sono apposte in senso antiorario:

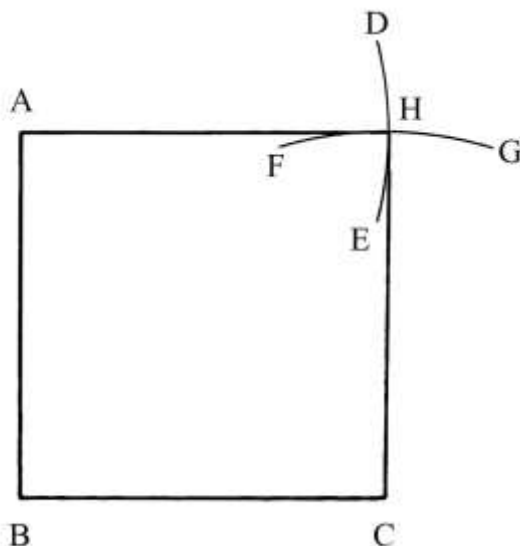


PROPOSIZIONE III

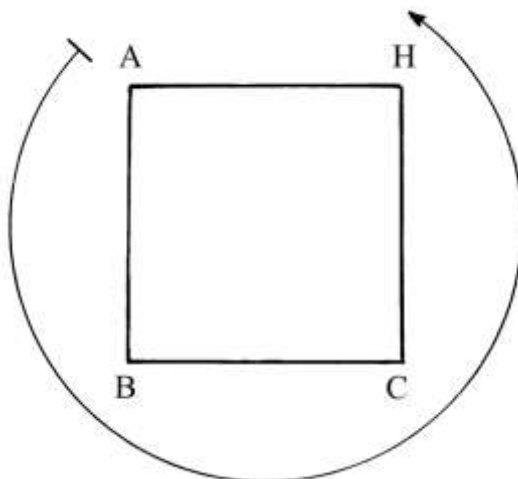
Costruzione di un quadrato dato il lato

AB e BC sono i primi due lati di un quadrato da costruire: essi hanno uguale lunghezza. Cataneo non spiega il modo con cui ha tracciato l'angolo retto nel vertice B: forse dà per scontate la conoscenza e l'applicazione della costruzione descritta nella *Proposizione prima*.

Con apertura $AB = BC$ fare centro in A e in C e tracciare gli archi DE e FG: essi si intersecano in H che il quarto vertice del quadrato ABCH.



Anche in questo caso le lettere sono apposte in senso *antiorario*:



PROPOSIZIONE IV [IIII]

Costruzione dell'ottagono regolare

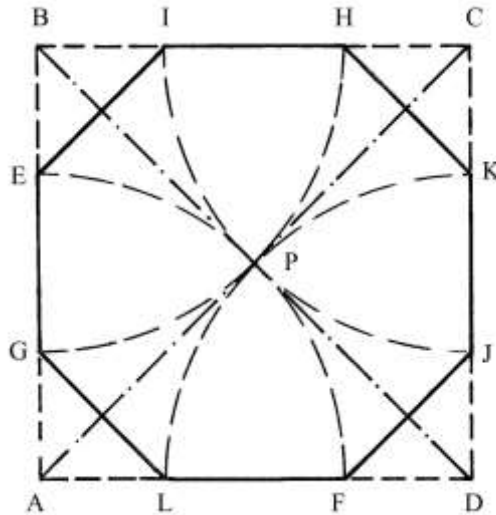
Nella figura originale non sono scritte le lettere.

È dato il quadrato ABCD.

Tracciare le diagonali AB e BD che si incontrano nel punto P.

Con raggio AP fare centro nei quattro vertici del quadrato e disegnare quattro archi che tagliano i lati nei punti E, F, G, H, I, J K e L.

GEIHKJFL è l'ottagono regolare.



PROPOSIZIONE V

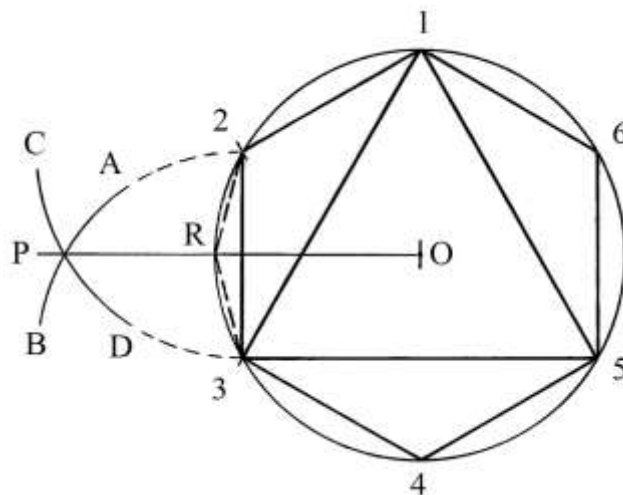
La Proposizione accenna alla possibilità e alle difficoltà che l'iscrizione in un cerchio di un poligono con un numero di lati maggiore di quattro comportano.

Fa eccezione l'esagono regolare i cui lati hanno lunghezza uguale a quella del raggio del cerchio circoscritto.

PROPOSIZIONE VI

Triangolo equilatero e esagono inscritti

La costruzione del triangolo equilatero inscritto è fatta a partire da quella dell'esagono inscritto.



Rispetto allo schema originale sono aggiunte alcune lettere e tracciati altri segmenti. O è il centro del cerchio e 1 e 4 sono due vertici opposti della circonferenza che sono connessi dal diametro verticale 1-4 (non tracciato).

Con apertura 0-1 fare centro in 1 e in 4 e fissare i punti 2, 6, 3 e 5.

1-2-3-4-5-6 è l'esagono inscritto e 1-3-5 è un triangolo equilatero inscritto.

È da notare che anche in questo caso, i numeri scritti ai vertici dell'esagono sono disposti in senso antiorario a partire dall'alto:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6.$$

Con raggio 2-3 (che è lungo quanto 0-1) fare centro in 2 e in 3 e tracciare gli archi AB e CD che si incontrano in P: per P e per O disegnare una linea che taglia la circonferenza in R.

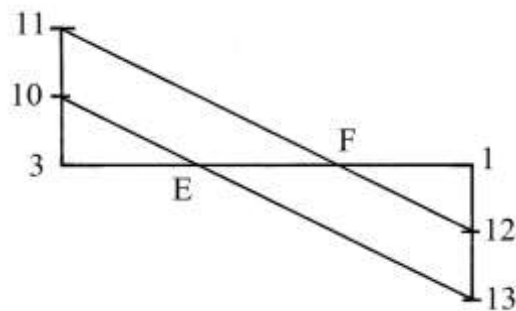
R-2 e R-3 sono due lati del dodecagono regolare inscritto (che non è completato).

Cataneo suggerisce poi la costruzione del poligono regolare con 24 lati che deriva dal dodecagono.

----- APPROFONDIMENTO -----

Cataneo propone di inscrivere nel cerchio un *ennagono* a partire dal triangolo equilatero inscritto, semplicemente dividendo in *tre* parti uguali i lati di questo ultimo poligono.

La divisione in tre parti uguali del lato 3-1 è facilissima, come mostra lo schema che segue:



Agli estremi di 3-1 disegnare due segmenti di uguale lunghezza e orientati in senso opposto e fissare i punti 10, 11, 12 e 13 con i seguenti rapporti:

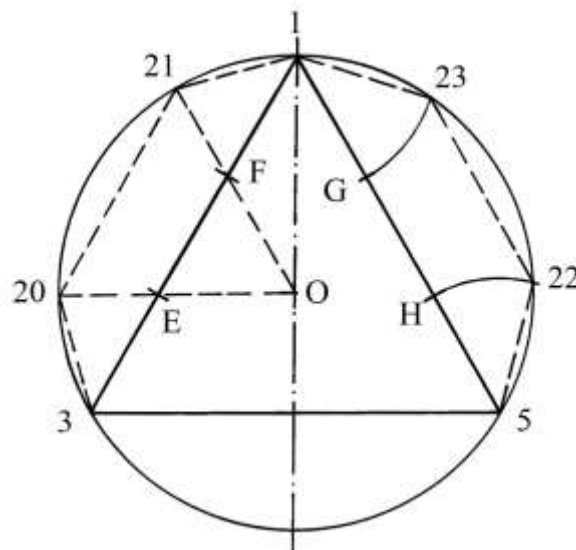
$$(3 - 10) = (10 - 11) = (1 - 12) = (12 - 13).$$

Tracciare i segmenti 11-12 e 10-13: essi tagliano 3-1 in due punti: E e F.

Vale la relazione:

$$3-E = EF = F-1 = (3-1)/3.$$

Nello schema che segue i lati 1-3 e 1-5 del triangolo equilatero sono divisi in tre parti uguali: da O tracciare due raggi passanti per E e per F.



Le corde 3-20, 20-21 e 21-1 hanno lunghezze assai differenti e *non* possono essere tre lati consecutivi di un enneagono regolare.

A destra è proposta una diversa soluzione: con il compasso fare centro in G e in H e con raggio G-1 = H-5 tracciare due archi che incontrano la circonferenza nei punti 22 e 23.

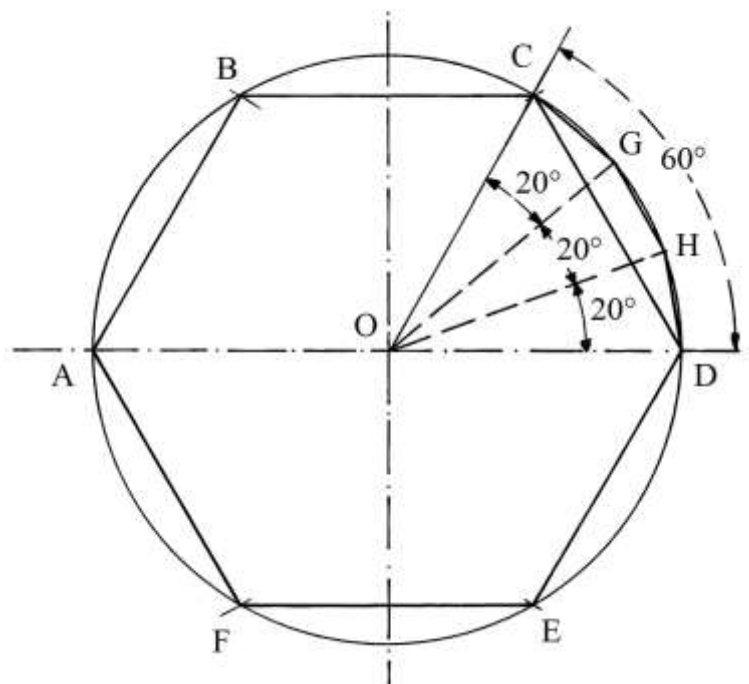
Le corde 1-23, 23-22 e 22-5 hanno lunghezze differenti e non sono tre lati di un ennagono regolare.

La corretta soluzione è data dalla divisione in tre parti uguali dell'angolo 1-O-5 che è ampio 120° , ma ciò non è possibile con riga e compasso.

L'ennagono regolare è costruibile con metodi approssimati: nei tempi recenti si sono aggiunti altri metodi che forniscono soluzioni esatte quali quelle rappresentate dagli *origami*.

Cataneo suggerisce la costruzione del poligono di 18 lati (oggi conosciuto come *ottadecagono*) dividendo in tre parti uguali gli archi che sottendono i sei lati di un esagono regolare inscritto, ma non fornisce alcun esempio concreto.

Lo schema che segue presenta l'inizio della costruzione dell'ottadecagono inscritto. ABCDEF è un esagono regolare inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA.



COD è l'angolo sotteso dal lato CD ed è ampio 60° e cioè *un sesto* dell'angolo giro.

I lati dell'ottadecagono sottendono un angolo che è ampio:

$$360^\circ/18 = 20^\circ.$$

La costruzione di questo poligono è realizzabile con l'aiuto di un goniometro: sono ottenuti gli angoli COG, GOH e HOD, tutti di ampiezza uguale a 20° .

Le corde CG, GH e HD sono i primi tre lati dell'ottadecagono regolare.

Cataneo disponeva di un goniometro oppure conosceva soltanto gli strumenti della famiglia degli astrolabi? Era in gradi di dividere un angolo di 60° in tre parti uguali?

%%%%%%%%%

La costruzione approssimata di un ennagono inscritto poteva essere fatta a partire da quella dell'ottagono regolare inscritto.

A parità di lunghezza del raggio del cerchio circoscritto, aumentando il numero dei lati dei poligoni inscritti diminuisce la loro lunghezza: il lato di un ennagono è leggermente più corto di quello di un ottagono inscritto nello stesso cerchio.

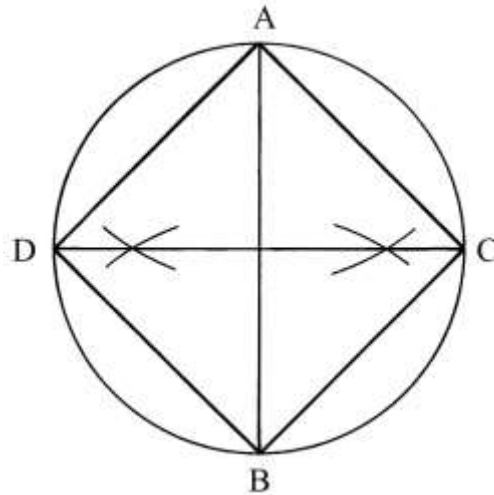
Per tentativi può essere ricavata la lunghezza dei lati di un ennagono inscritto.

PROPOSIZIONE VII

Quadrato inscritto in un cerchio

AB è il diametro verticale di un cerchio di centro O: è la “catetta A.B.”

È da notare il metodo che Cataneo usa per indicare un segmento: “A.B.” e “C.D.”. Le lettere sono sempre seguite da un punto: l’uso + talvolta utilizzato anche per indicare un numero come “12.”.



Tracciare la circonferenza di centro O e raggio $OA = OB$.

Fare centro nei punti A e B con raggio a piacere e disegnare i quattro archi che si incrociano nei punti 1 e 2: per questi punti passa il diametro CD.

Collegare in successione i quattro vertici.

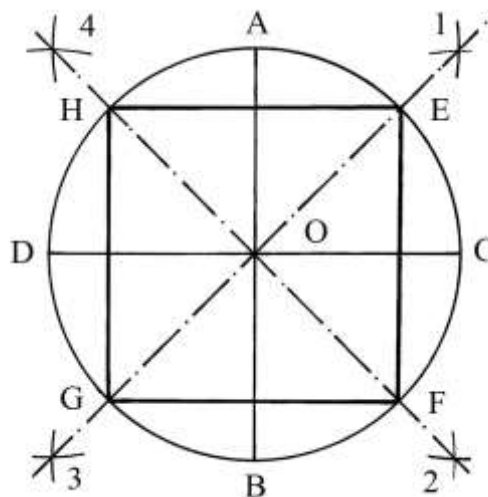
ACBD è il quadrato inscritto.

PROPOSIZIONE VIII

Altro metodo per disegnare un quadrato inscritto in un cerchio

È dato un cerchio di centro O.

AB è il diametro verticale e CD quello orizzontale, che secondo Cataneo sono disegnati con la costruzione descritta nella precedente Proposizione.



Con apertura a piacere fare centro nei punti A, C, B e D e tracciare otto archi che si intersecano nei punti 1, 2, 3 e 4.

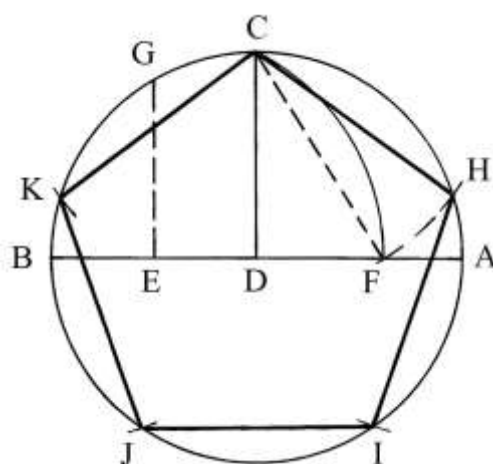
Disegnare le rette passanti per le coppie di punti 1-3 e 2-4: esse tagliano la circonferenza nei punti E, G, F e H, che sono i vertici del quadrato EFGH.

Rispetto al quadrato costruito con il metodo presentato nella precedente Proposizione, questo quadrilatero ha solo lati orizzontali e verticali: a parità di diametro del cerchio circoscritto, i due quadrati hanno uguali dimensioni.

PROPOSIZIONE IX [VIII]

Pentagono, decagono e eptagono inscritti

Il testo utilizza la costruzione del pentagono regolare inscritto proposta da Claudio Tolomeo (100 – 168 circa).



AB è il diametro orizzontale di un cerchio di centro D e DC è un raggio ad esso perpendicolare.

E è il punto medio del raggio DB.

EG è la perpendicolare al diametro BA.

Fare centro in E e con raggio EC tracciare un arco da C fino a incontrare in F il diametro BA.

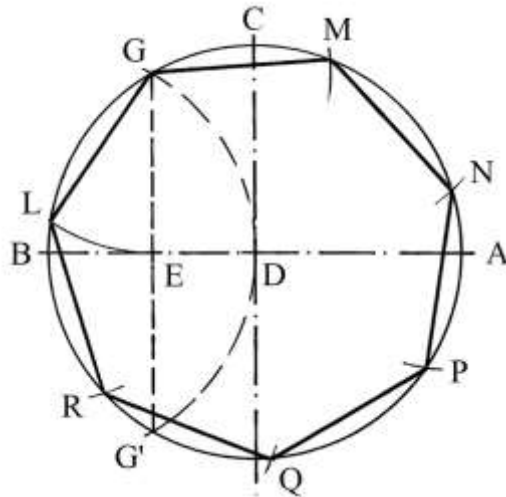
La corda CF è la lunghezza del lato del pentagono inscritto CHIJK.

È da notare che Cataneo appone ai vertici le lettere senza rispettare la loro successione nell'alfabeto, quasi in maniera casuale. Inoltre, perché contrassegna il diametro AB muovendo da destra e andando verso sinistra: era forse mancino?

Nello stesso schema, il segmento EG è la lunghezza dei lati dell'ettagono (*eptagono* secondo Cataneo) approssimato inscritto nel cerchio di centro D: la costruzione è dovuta a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

Fare centro in G e con raggio GE tracciare un arco da E a L. Riportare poi da G in senso orario sulla circonferenza la lunghezza di GE: LGMNPQR è l'ettagono inscritto nel cerchio di centro D.

Il poligono è leggermente approssimato.

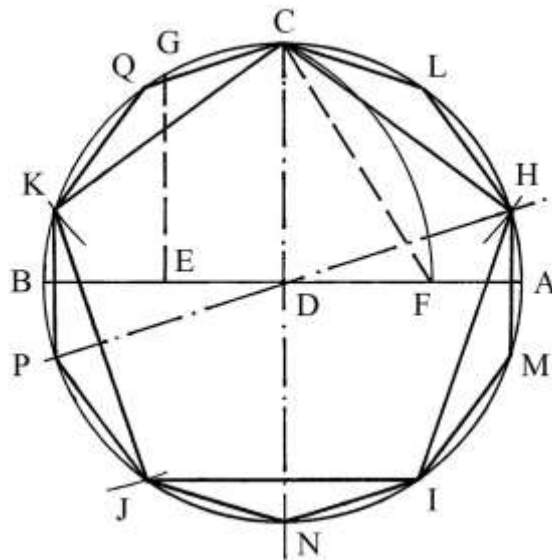


Lo schema che segue mostra un esagono regolare – AIG'BGH – inscritto nel cerchio di centro D e raggio DA.

GE è la lunghezza approssimata dei lati dell'ettagono inscritto: ma GE è anche un'altezza del triangolo equilatero BGD ed ha la stessa di KD che è un *apotema* dell'esagono AIG'BGH.

Cataneo spiega poi che il segmento DF nella precedente costruzione del pentagono inscritto è lungo quanto i lati del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio DC.

Riportando la lunghezza di DF sulla circonferenza di raggio DC, a partire da C, si ottengono i vertici del decagono regolare inscritto CLHMINJPKQ.



Una soluzione più sbrigativa è accennata nella figura qui sopra: il diametro passante per H e D taglia la circonferenza nel punto P che è uno dei vertici del decagono. Lo stesso accade al diametro CDN.

Gli altri vertici del decagono possono essere fissati tracciando altri diametri.

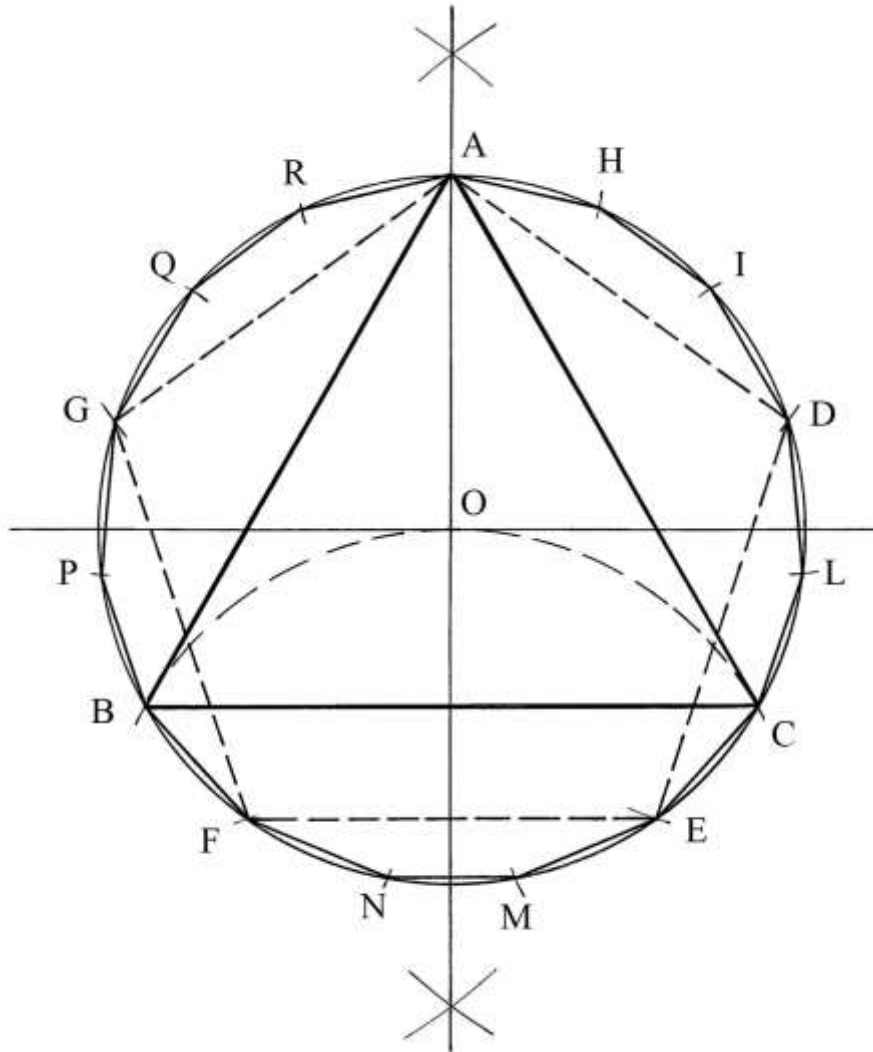
----- APPROFONDIMENTO -----

La costruzione del pentadecagono regolare

Il pentadecagono è il poligono che contiene 15 lati.

Il pentadecagono regolare inscritto è disegnabile per via *indiretta*, dopo aver tracciati nello stesso cerchio il triangolo equilatero ABC e il pentagono ADEFG, avendo cura che i due poligoni abbiano un vertice in comune che in questo caso è A.

Le corde che congiungono le coppie di vertici B-F e C-E sono i primi due lati del pentadecagono AHIDLCEMNFBPQR:



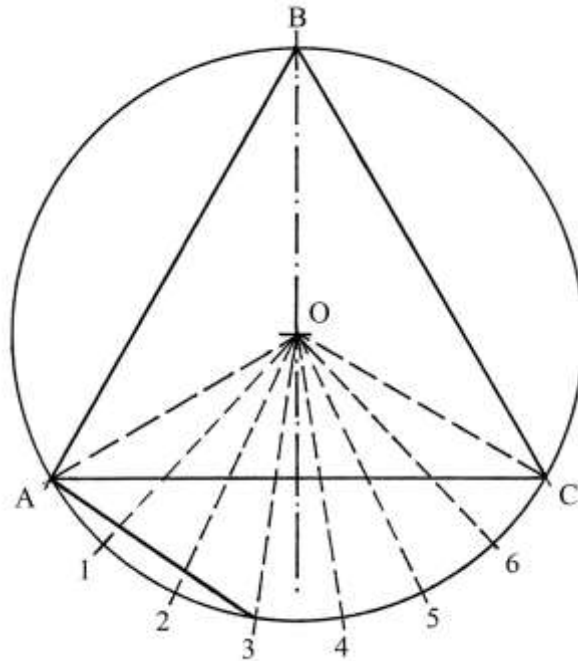
PROPOSIZIONE X

Regola generale per inscrivere in un cerchio i poligoni

Cataneo riconosce che alcuni poligoni non possono essere iscritti in un cerchio ottenendo figure con lati di lunghezza perfettamente uguali: tali sono l'ettagono, l'ennagono, l'endecagono (11 lati) e il tridecagono (13 lati).

Egli suggerisce una costruzione approssimata basata su quella del triangolo equilatero inscritto, ma non fornisce alcun esempio né un qualsiasi schema: tutte le figure che accompagnano questa Proposizione sono dovute all'autore di questo articolo.

La procedura proposta per l'ottagono è la seguente:



ABC è il triangolo inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA.

L'arco AC deve essere diviso in *sette* parti uguali: esse sono delimitate dai punti:

A, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e C.

Tracciare la corda A-3: essa è sottesa da un arco di circonferenza che è lungo *tre* volte ciascuno dei sette archi.

L'angolo AO3 è ampio:

$$AO3 = 3 * (AOC/7) = 3 * (120/7) = 360^\circ/7.$$

A-3 è la lunghezza del lato di un ottagonio.

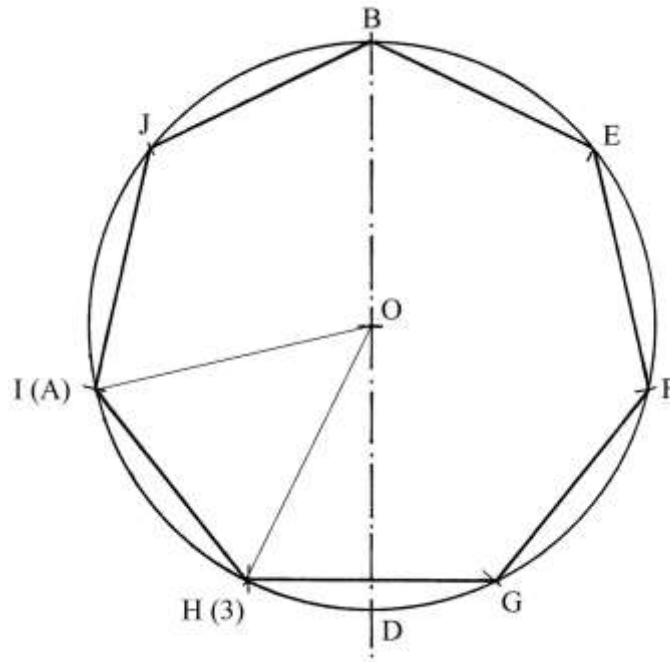
Disegnare una seconda circonferenza con lo stesso raggio della precedente e tracciare il diametro verticale DB.

Dal vertice B riportare in senso orario la lunghezza della corda A-3: BEFGHIJ è l'ottagono regolare inscritto nel cerchio di centro O.

L'angolo IOH è ampio un settimo dell'angolo giro:

$$IOH = (360/7)^\circ.$$

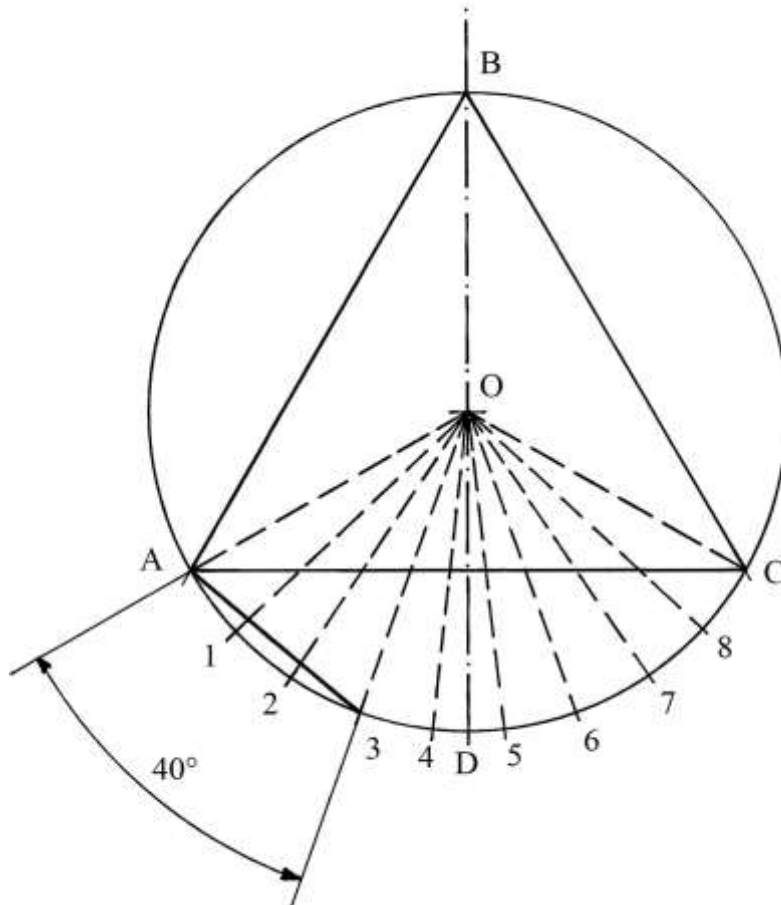
È la stessa ampiezza dell'angolo AO3.



Cataneo prosegue proponendo l'applicazione del metodo alla costruzione di poligoni con numero di lati maggiore.

Nel caso dell'ennagono, l'angolo sotteso da un nono dell'arco AOC è ampio:

$$AO1 = AOC/9 = 120^\circ/9 = 40^\circ/3 = (13 + 1/3)^\circ.$$



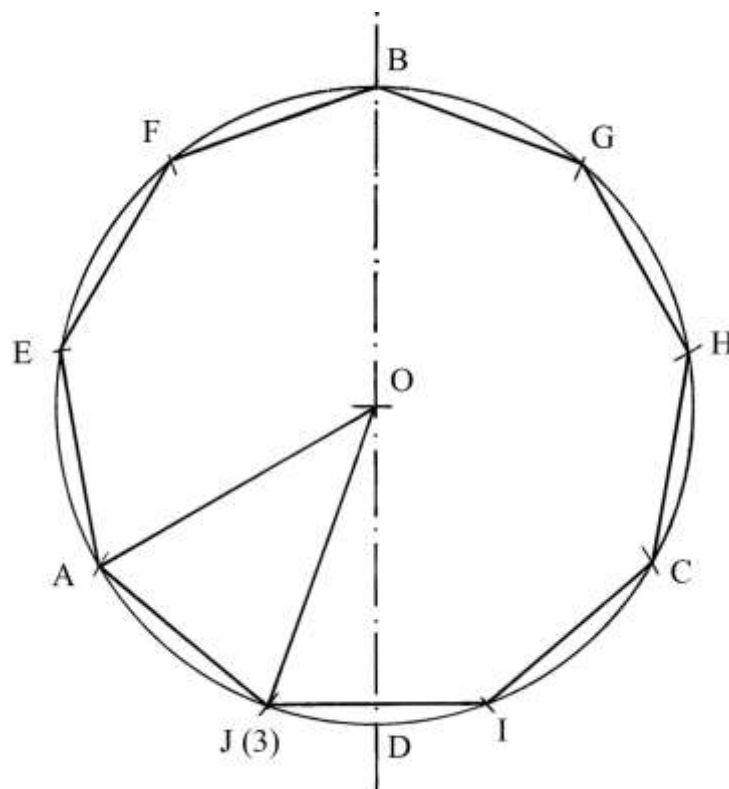
L'angolo $AO3$ comprende tre dei nove angoli nei quali è diviso AOC ed è ampio:

$$AO3 = 3 * (40/3)^\circ = 40^\circ = AOC/3 = 120^\circ/3 = 40^\circ.$$

La corda A-3 è un lato dell'ennagono regolare.

Da notare un dato di fatto: i vertici A, B e C sono comuni al triangolo equilatero e all'ennagono.

Lo schema che segue presenta l'ennagono inscritto con lati lunghi quanto la corda A-3:



La tabella che segue riassume i dati relativi ai diversi poligoni costruibili:

Nome del poligono	Numero dei lati	Numero parti divisioni arco corrispondente a 120°	Numero parti scelte
Ettagono	7	7	3
Ennagono	9	9	3
Endecagono	11	11	3
Tridecagono	13	13	3

Nota: la difficoltà che presenta il metodo proposto da Cataneo è la divisione in parti uguali (7, 9, 11, 13, ...) dell'arco di circonferenza sotteso da un lato del triangolo equilatero. In teoria il metodo è corretto, ma in pratica è di difficile attuazione.

PROPOSIZIONE XI

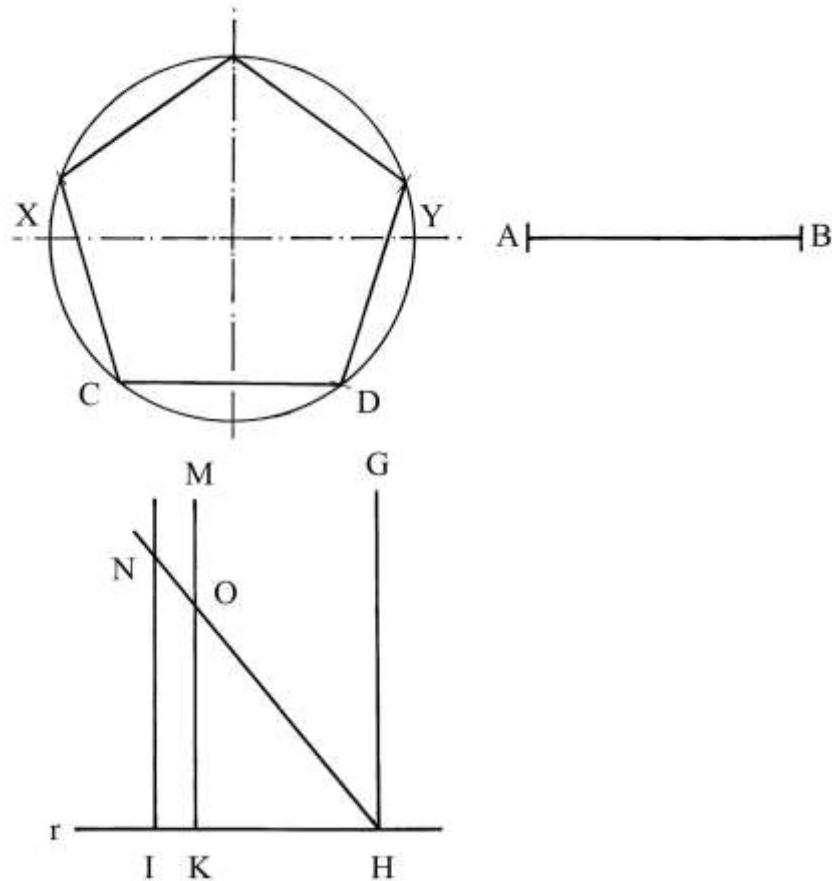
Costruzione di un poligono regolare data la lunghezza di un lato

Cataneo presenta l'esempio del pentagono regolare o "equilatero", costruito a partire da un lato di cui è nota la lunghezza.

Deve essere disegnato un pentagono inscritto in un cerchio di diametro incognito: AB è la lunghezza del lato.

Costruire un pentagono inscritto in un cerchio di raggio a piacere.

Il diametro del cerchio è XY e un lato del poligono è CD, che è più corto di AB.



Tracciare una retta orizzontale, r , di lunghezza a piacere e fissare un punto su di essa: è H.

Da H elevare la perpendicolare alla retta r : è GH e la sua lunghezza è a piacere.

Da H riportare sulla retta r verso sinistra la lunghezza di CD:

$$HI = CD.$$

Misurare la lunghezza del raggio del cerchio, che è $XY/2$, e fare centro in H per fissare il punto K:

$$HK = XY/2.$$

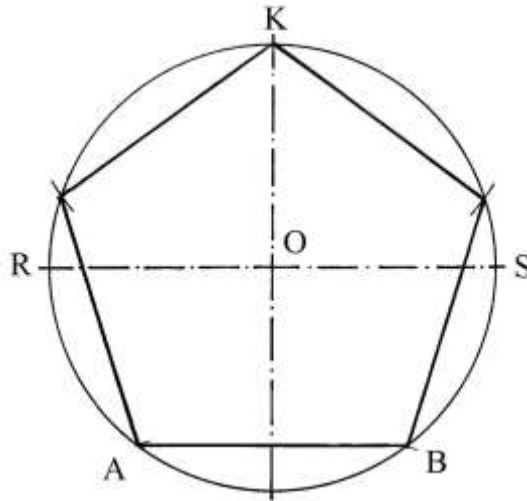
Da K tracciare verso l'alto la parallela a GH: è KM.

Elevare da I la perpendicolare alla r : essa risulta parallela a GH e a KM. A partire da I fissare il punto N a distanza

$$IN = AB.$$

Collegare N con H: NH taglia KM nel punto O.

KO è il raggio del cerchio in cui è inscritto il pentagono con lati lunghi quanto AB:



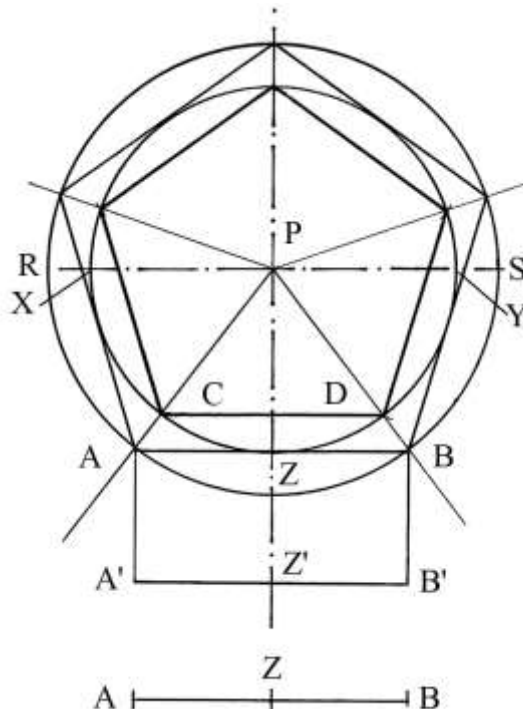
Il diametro del cerchio è RS:
 $RS = 2 * OK.$

La procedura proposta da Cataneo è un po' macchinosa: anche dispiegando tutta la cura possibile non è certo che il risultato sia assolutamente esatto.

----- APPROFONDIMENTO -----

Una soluzione abbastanza semplice è di seguito descritta.

Due pentagoni regolari che hanno lati con differenti dimensioni sono due figure simili che possono essere disegnate condividendo lo stesso centro P: sono due poligoni concentrici.



XY è il diametro del cerchio interno: in esso è costruito un pentagono regolare di cui CD è il lato orizzontale.

Dal centro P tracciare le semirette passanti per i cinque vertici del pentagono.

AB è il lato del pentagono che deve essere disegnato e Z è il suo punto medio.

Parallelamente al lato CD tracciare una linea lunga quanto AB: è A'B' e il punto medio Z' deve essere posizionato sull'asse di simmetria verticale.

Da A' e B' condurre verso l'alto due linee parallele all'asse di simmetria verticale: esse incontrano i prolungamenti delle semirette PC e PD nei punti A e B.

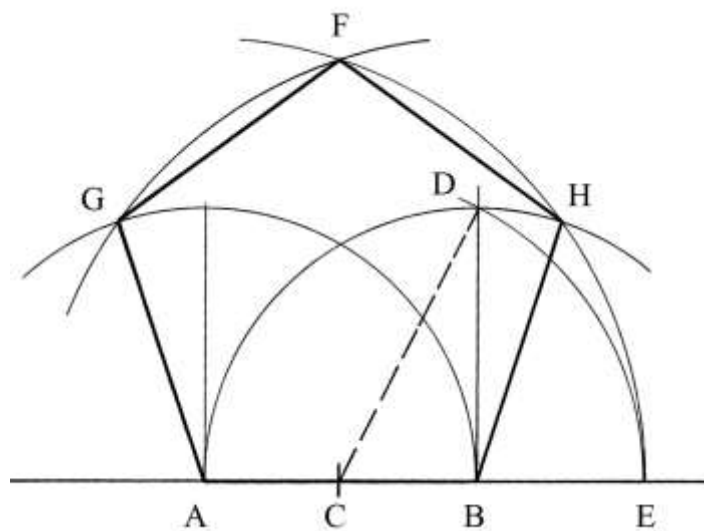
AB è il primo del pentagono da disegnare.

Fare centro in P e con raggio PA = PB tracciare la circonferenza sulla quale sono posizionati gli altri tre vertici del pentagono con lati lunghi quanto AB.

%%%%%%%%%

Una seconda soluzione per l'iscrizione in un cerchio di un pentagono regolare di cui è nota la lunghezza dei lati che è AB, è qui descritta con l'aiuto dei due schemi che seguono.

AB è il primo lato, orizzontale: prolungarlo verso destra.



Fissare il punto medio di AB: è C.

Da A e da B elevare le perpendicolari a AB.

Fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare due archi: quello di centro B taglia la perpendicolare nel punto D.

Collegare C con D.

Fare centro in C e con raggio CD disegnare un arco da D fino a incontrare in E il prolungamento di AB.

AE è la lunghezza di ciascuna delle cinque diagonali del pentagono da costruire.

Con apertura AE fare centro in A e in B e tracciare due archi che si incontrano in F e tagliano i due primi archi nei punti G e H.

AGFHB è il pentagono regolare con lati lunghi quanto quello AB.

Il pentagono può ora essere inscritto in un cerchio.

Il suo centro O è dato dall'intersezione delle cinque altezze del pentagono. Fissare i punti medi dei cinque lati: sono C, K, L, I e J.

Collegare i vertici del pentagono con i punti medi dei lati opposti: AI, GJ, FC, HK e BL. Le cinque altezze si incontrano nel punto O che è il centro del cerchio circoscritto ed anche di quello inscritto nel pentagono: questo secondo cerchio non è disegnato.

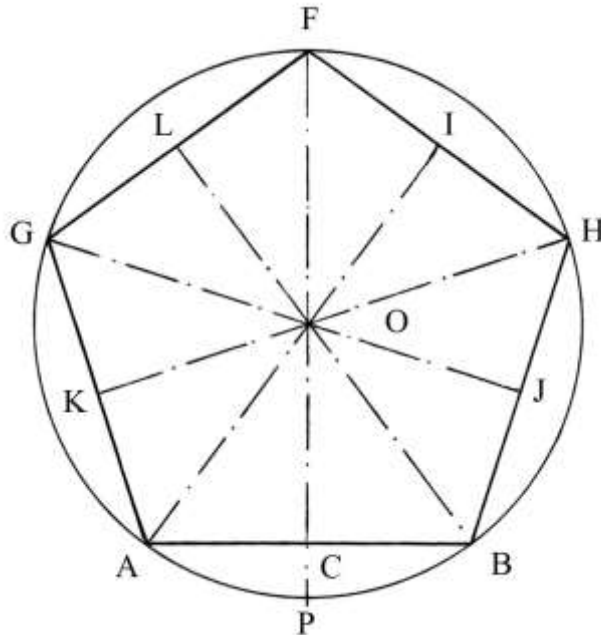
OF è il raggio del cerchio circoscritto.

OC è un *apotema* del pentagono ed è il raggio del cerchio inscritto nel pentagono che risulta tangente nei suoi punti medi: C, K, L, I e J.

L'altezza FC è data da:

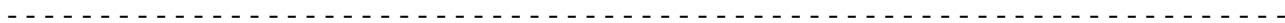
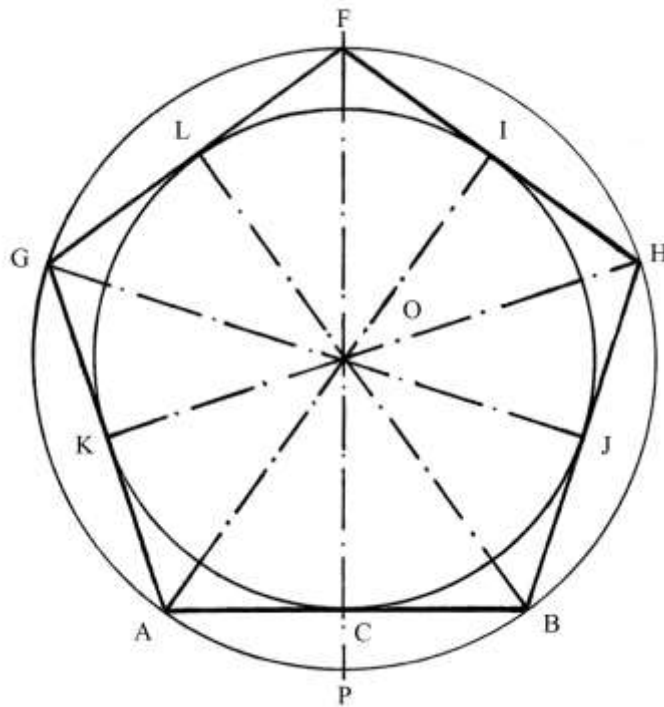
$$FC = FO + OC.$$

FC è lunga quanto la somma delle lunghezze dei raggi dei cerchi circoscritto (FO) e inscritto (OC).



%%%

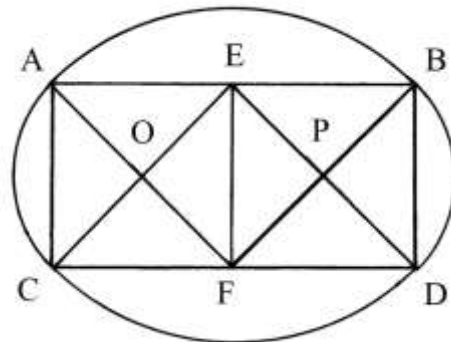
Nella figura che segue è pure disegnato il secondo cerchio, inscritto nel pentagono, con raggio lungo quanto l'apotema OC:



PROPOSIZIONE XII

Costruzione dell'ovale

Il primo ovale proposto da Cataneo è costruito da un doppio quadrato:



ABCD è un rettangolo formato da un doppio quadrato: AEFC e EBDF.

Tracciare le quattro diagonali dei quadrati: AF, CE, ED e FB. Esse si incontrano nei punti O e P.

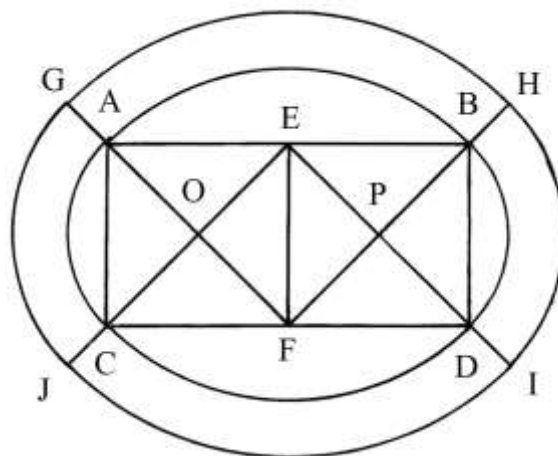
Fare centro in E e in F e con raggio EC = FA disegnare due archi: sono CD e AB.

Poi fare centro in O e in P e con raggio OA raccordare i due precedenti archi tracciando quelli AC e BD.

%%%%%%%%%

La figura che segue mostra due ovali concentrici: la diagonale FA è prolungata verso l'alto di una lunghezza uguale a AG.

Fare centro in F e in E e con raggio OG disegnare gli archi GH e IJ.

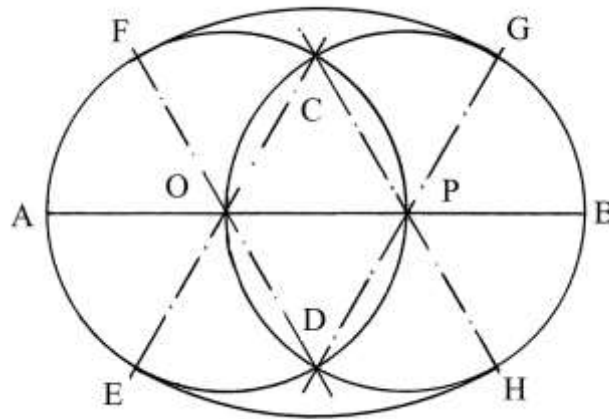


Infine, fare centro in O e in P e con raggio OG tracciare gli archi GJ e IH.

PROPOSIZIONE XIII

Ovale con due circonferenze

La costruzione è basata su due circonferenze di raggio uguale che si intersecano per formare una mandorla.



Tracciare una linea orizzontale e fissarvi il punto O: con raggio OA disegnare una circonferenza. AP è un suo diametro.

Con la stessa apertura di compasso fare centro in P e tracciare una seconda circonferenza. Le due circonferenze si intersecano nei punti C e D.

Gli archi di circonferenza DOC e DPC delimitano una figura chiusa che nel Medioevo era nota come *mandorla*.

Disegnare i diametri passanti per O, P, C e D: sono COE, CPH, DOF e DPG.

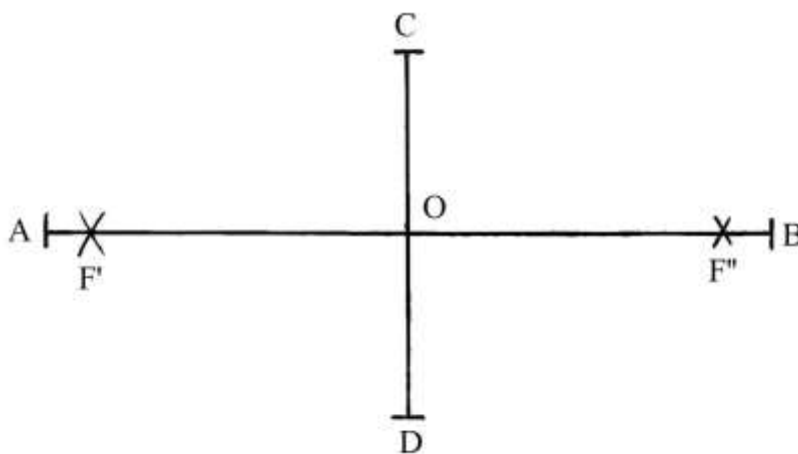
Fare centro in C e in D e con raggio CE tracciare gli archi EH e FG.

L'ovale è completato.

PROPOSIZIONE XIV [XIII]

Costruzione dell'ovale con una corda

L'Autore chiama *figura ovale* o *ovato* la curva chiusa che è conosciuta come *ellisse*. I suoi punti possiedono una proprietà: essi hanno distanze da due punti interni situati sull'asse maggiore, i *fuochi*, la cui somma è costante e uguale alla lunghezza dello stesso asse maggiore.



Cataneo si limita a fissare il rapporto fra le lunghezze degli assi: quello maggiore, AB, è lungo il doppio di quello minore, CD.

I due si intersecano nel loro punto medio, O.

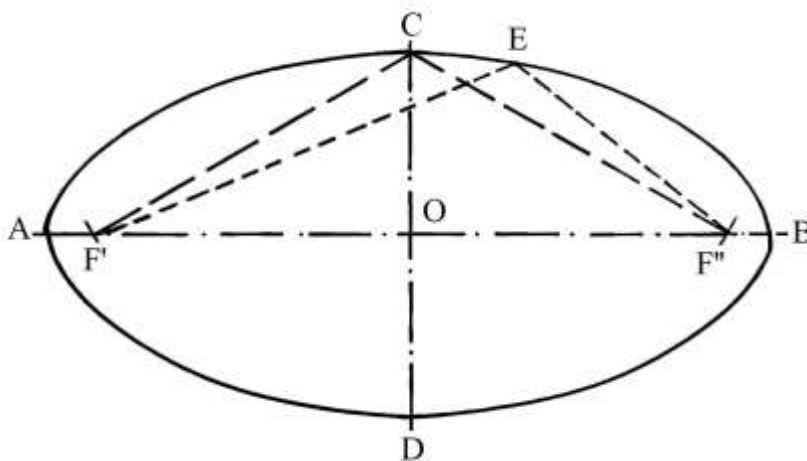
I fuochi sono collocati sull'asse maggiore e sono fra loro simmetrici. La loro posizione è determinata con il compasso: misurare la lunghezza del semiasse maggiore (OA oppure OB) e con

questa apertura fare centro in C e in D e tracciare quattro archi che fissano i punti F' e F'', che sono i due *fuochi*.

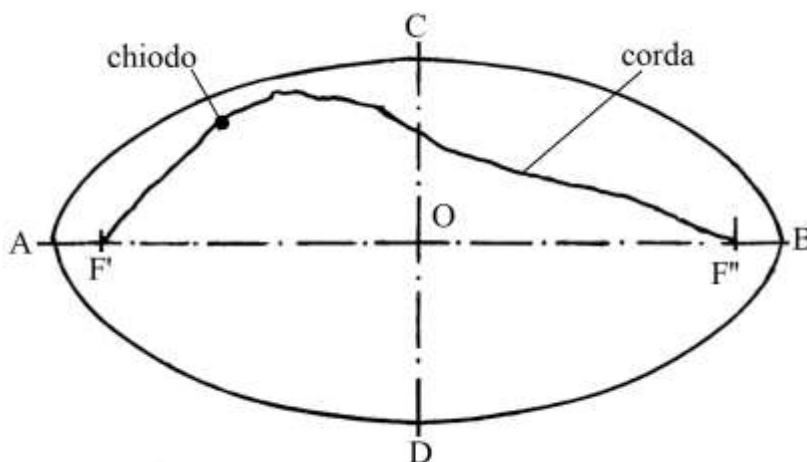
Nota: le ellissi disegnate negli schemi che seguono sono un po' *approssimate*.

Nel trattato di Cataneo non è mostrata alcuna ellisse.

Lo schema che segue presenta quattro segmenti: le lunghezze di (F'C + CF'') e (F'E + EF'') sono uguali e equivalgono alla lunghezza dell'asse maggiore AB.



Cataneo suggerisce di tracciare la curva con l'aiuto di una corda, seguendo il metodo del giardiniere. Gli estremi di una corda con lunghezza uguale a quella dell'asse maggiore AB sono fissati nei due fuochi. Un chiodo o uno stiletto sono legati alla corda e possono scorrere lungo di essa: tenendo in trazione la corda, il chiodo, spostandosi, disegna sul terreno una curva che è un'ellisse.

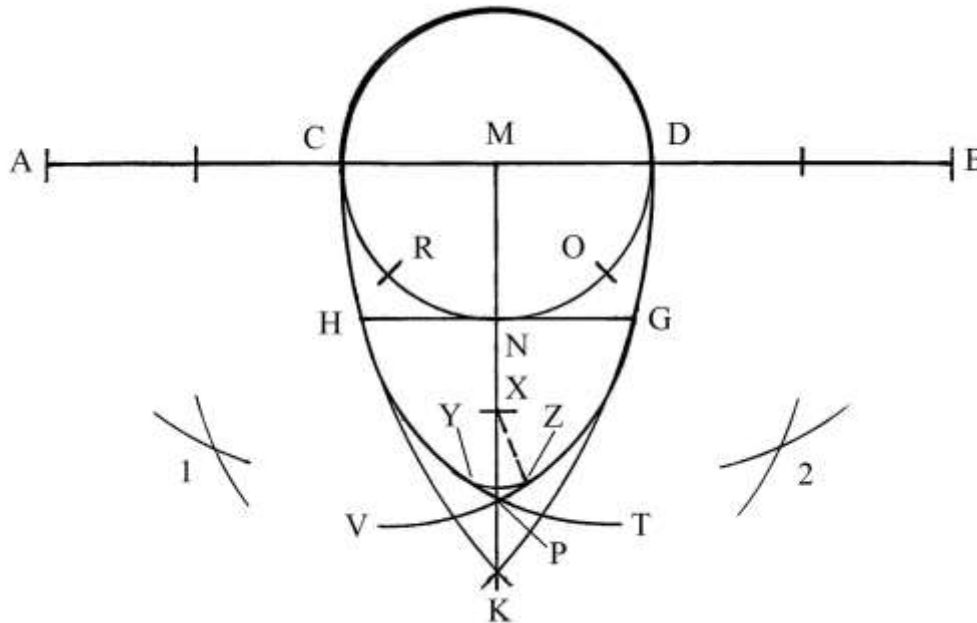


PROPOSIZIONE XV

Figura ovale diminuita

Cataneo chiama *figura ovale diminuita* la curva che oggi è conosciuta come *ovolo*. Si tratta di una curva chiusa, policentrica, formata da archi di circonferenza raccordati.

L'Autore propone una costruzione che, in breve, è assai lunga e complessa.



Tracciare una linea orizzontale, AB, e dividerla in sei parti uguali.

Fare centro in M e con raggio $MC = MD = AB/6$ disegnare una circonferenza.

Dal punto M abbassare la perpendicolare a AB.

Fare centro in A e in B e con raggio $AD = CB$ tracciare due archi da C e da D fino a farli incrociare nel punto K che è posizionato sulla perpendicolare abbassata da M.

Per il punto N condurre la parallela a AB: è HG.

Fare centro in C, in N e in D e con raggio a piacere disegnare quattro archi che si intersecano nei punti 1 e 2: per questi ultimi passano le bisettrici degli angoli CMN e DMN che nello schema non sono mostrate e che servono per stabilire i punti R e O sulla circonferenza di centro M.

Fare centro in R e poi in O con apertura $RG = OH$ e tracciare due archi da G e da H fino a farli incontrare nel punto P.

Fissare il punto medio di NP: è X.

Fare centro in X e raccordare i due ultimi archi con YZ.

CDGZYHC è la curva chiusa proposta da Cataneo.

----- APPROFONDIMENTO -----

Tutti i manuali di disegno geometrico offrono un ventaglio di costruzioni relative all'ellisse, all'ovale e all'ovolo.

Quella che qui è presentata è un semplice metodo per costruire un *ovolo*.

È data la lunghezza dell'asse minore, $AD = d$.

Disegnare una circonferenza di centro O e diametro AB.

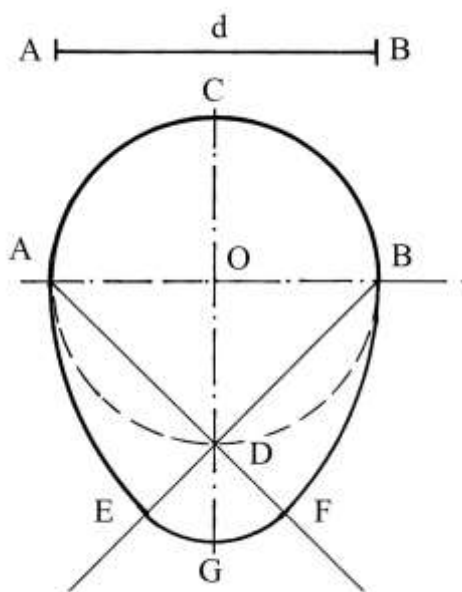
Tracciare la perpendicolare a AB passante per il centro O: su di essa è il diametro CD.

Disegnare le corde AD e BD e prolungarle verso il basso.

Fare centro in A e poi in B e con raggio AB tracciare due archi da A e da B fino a incontrare i prolungamenti delle due corde in E e in F.

Infine, fare centro in D e con raggio $DE = DF$ disegnare l'arco EGF che accorda AE e BF.

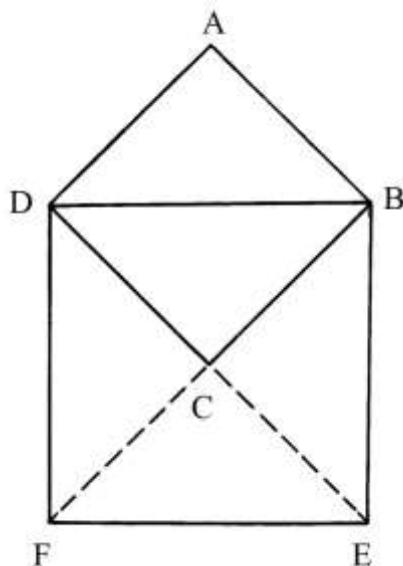
CG è l'asse maggiore dell'ovolo ACBFG, costruito con archi di circonferenza raccordati.



PROPOSIZIONE XVI

Raddoppio di un quadrato

È dato un quadrato, ABCD, e deve essere costruito un secondo quadrato con area doppia.



L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = AB^2.$$

La sua diagonale DB è lunga:

$$DB^2 = AB^2 + AD^2 = 2 * AB^2 \quad e$$

$$DB = AB * \sqrt{2}.$$

Sulla diagonale DB è costruito il quadrato DBEF. La sua area è:

$$S_{DBEF} = DB^2 = (AB * \sqrt{2})^2 = 2 * AB^2.$$

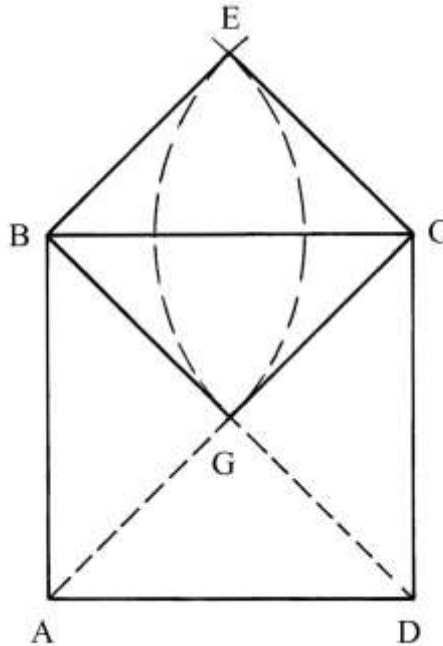
Il quadrato DBEF ha area doppia di quella di ABCD.

%%%%%%%%%

Cataneo accenna anche alla possibilità di costruire un quadrato che abbia area uguale alla metà di un altro ma non fornisce alcuno schema.

La figura che cerca di colmare questa lacuna.

ABCD è un quadrato e deve esserne costruito un altro con area uguale alla metà.



L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = AB^2.$$

Disegnare le diagonali AC e BD: esse si incontrano nel centro (e baricentro) G.

Fare centro in B e in C con raggio BG e tracciare due archi che si intersecano in E.

GBEC è il quadrato che ha area uguale a metà di quella di ABCD.

BG è lungo:

$$BG = BD/2 = (AB * \sqrt{2})/2 = AB/\sqrt{2}.$$

L'area di GBEC è:

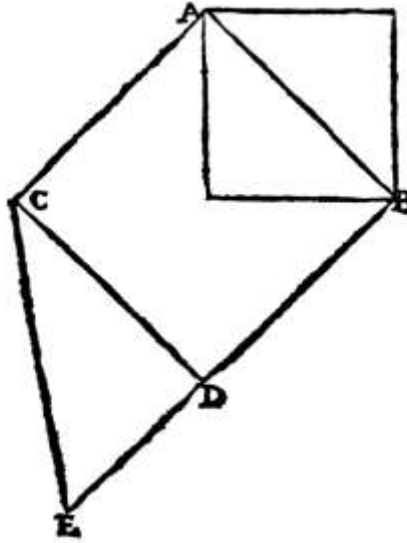
$$S_{GBEC} = BG^2 = (AB/\sqrt{2})^2 = AB^2/2.$$

PROPOSIZIONE XVII

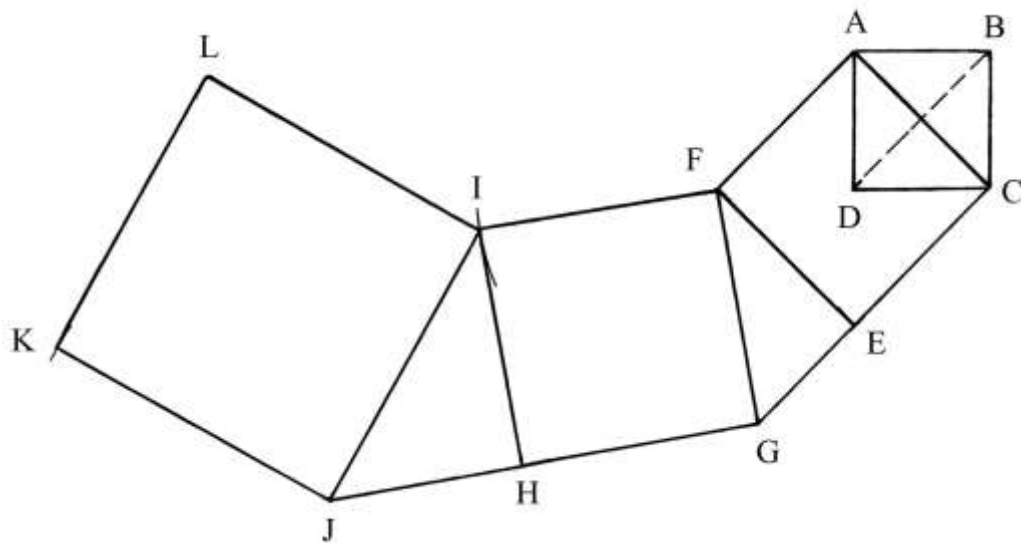
Quadrato triplo e quintuplo di uno dato

Cataneo propone la costruzione di quadrati di area tripla e quintupla di uno dato.

La figura che segue riproduce l'originale da p. 159 del "Trattato di architettura". Lo schema è piuttosto povero:



Proponiamo una diversa interpretazione della soluzione del problema.
 ABCD è il quadrato iniziale e AC e DB sono le sue diagonali.



Sulla diagonale AC è costruito il quadrato ACEF che, come visto nella soluzione della precedente Proposizione, ha area doppia di quella di ABCD.

Fissiamo tutti i dati necessari per continuare la costruzione:

- * $S_{ABCD} = AB^2$;
- * $AC = AB \cdot \sqrt{2}$;
- * $S_{ACEF} = AC^2 = 2 \cdot AB^2 = 2 \cdot S_{ABCD}$.

Prolungare verso il basso il lato CE; da E riportare in G la lunghezza di AB.

Collegare F con G: FEG è un triangolo rettangolo la cui ipotenusa FG è lunga:

$$FG^2 = FE^2 + EG^2 = AC^2 + AB^2 = (AB \cdot \sqrt{2})^2 + AB^2 = 2 \cdot AB^2 + AB^2 = 3 \cdot AB^2$$

e $FG = AB \cdot \sqrt{3}$.

Su FG costruire il quadrato FGHI: la sua area è:

$$S_{FGHI} = FG^2 = (AB \cdot \sqrt{3})^2 = 3 \cdot AB^2 = 3 \cdot S_{ABCD}.$$

FGHI è il quadrato di area tripla di quella di ABCD.

Prolungare verso sinistra il lato GH; da H riportare in J la lunghezza di AC.
Collegare I con J.

IHJ è un triangolo rettangolo e la sua ipotenusa IJ è lunga:

$$IJ^2 = IH^2 + HJ^2 = FG^2 + AC^2 = (AB * \sqrt{3})^2 + (AB * \sqrt{2})^2 = 3 * AB^2 + 2 * AB^2 = 5 * AB^2$$

$$IJ = AB * \sqrt{5}.$$

Sull'ipotenusa IJ disegnare il quadrato IJKL. Esso ha area:

$$S_{IJKL} = IJ^2 = 5 * AB^2 = 5 * S_{ABCD}.$$

Questo ultimo quadrato ha area quintupla di quella del quadrato iniziale ABCD.

----- APPROFONDIMENTO -----

Il contenuto della Proposizione XVII sembra riecheggiare una certa conoscenza da parte di Pietro Cataneo dell'opera del matematico Teodoro di Cirene (vissuto fra il 465 e il 398 a.C.).

Cirene è una località dell'attuale Libia orientale.

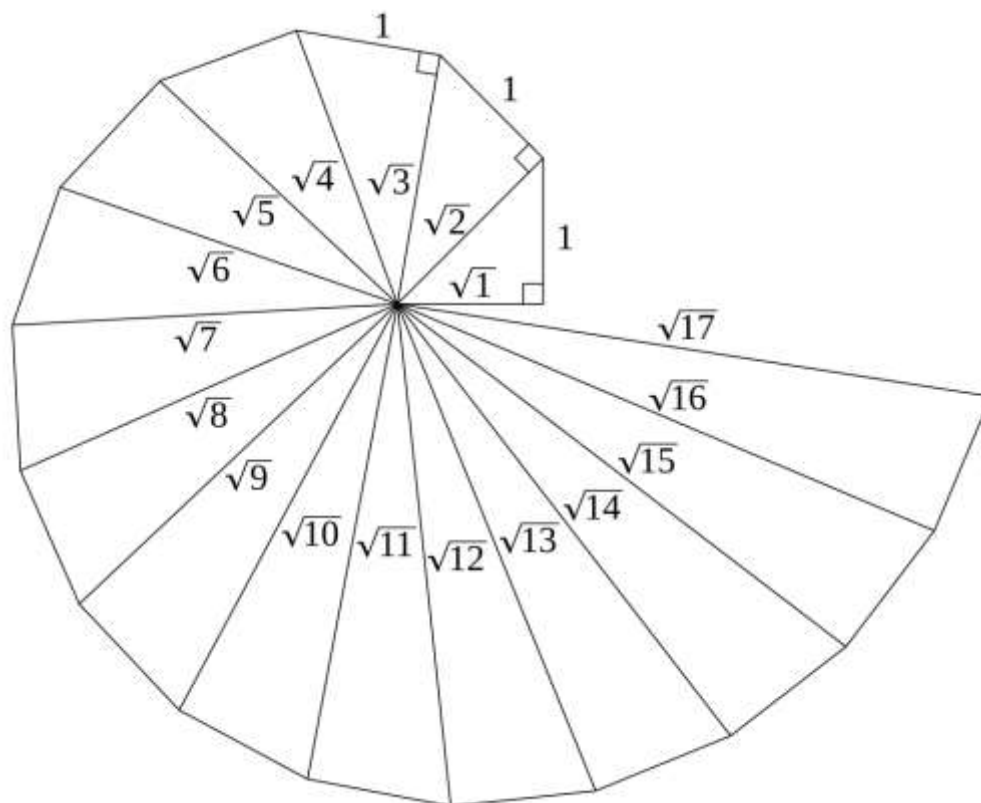
Teodoro fu un importante geometra: fra l'altro, dimostrò che le radici quadrate nei numeri compresi fra 3 e 17 (esclusi 4, 9 e 16 che sono quadrati perfetti) sono numeri irrazionali e cioè non possono essere espressi con numeri interi o frazioni di numeri interi.

Teodoro propose un metodo geometrico e non aritmetico (vista l'impossibilità) per disegnare le lunghezze delle radici quadrate di un numero intero qualsiasi.

La figura che segue (riprodotta da

https://it.wikipedia.org/wiki/Spirale_di_Teodoro#/media/File:Spiral_of_Theodorus.svg)

spiega la sua struttura:



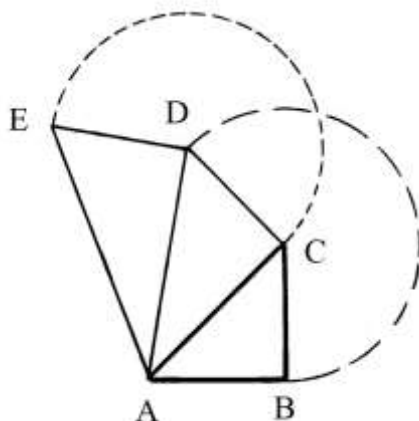
L'inizio è costituito da un triangolo rettangolo isoscele che ha cateti lunghi convenzionalmente "1": l'ipotenusa è lunga $\sqrt{2}$.

L'ipotenusa lunga $\sqrt{2}$ è un cateto del secondo triangolo: l'altro cateto è lungo 1. L'ipotenusa di questo secondo triangolo rettangolo è lunga:

$$\sqrt{[(\sqrt{2})^2 + 1^2]} = \sqrt{(2 + 1)} = \sqrt{3}.$$

La forma di questa costruzione richiama una *spirale*: essa è antioraria.

Lo schema che segue descrive l'inizio della spirale antioraria:



ABC è il triangolo rettangolo isoscele che origina la spirale: esso è la metà di un quadrato di lati lunghi come AB e diviso lungo la diagonale AC.

AB e BC sono i due cateti e hanno uguale lunghezza convenzionalmente fissata in “1”.

L'ipotenusa AC è lunga:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad e$$

$$AC = \sqrt{2}.$$

Dal punto C elevare la perpendicolare a AC. Fare centro in C e con raggio CB tracciare un arco da B fino a fissare il punto D: AD è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ACD. Essa è lunga:

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 = AC^2 + CB^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3 \quad e$$

$$AD = \sqrt{3}.$$

Da D disegnare la perpendicolare a AD. Fare centro in D e con raggio DC (= CB) tracciare un arco da C fino a fissare il punto E.

AE è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADE ed è lunga:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 \quad e$$

$$AE = \sqrt{4} = 2.$$

%%%%%%%%%

“Per numero” e “per linea”

In alcuni trattati di architettura e di ingegneria italiani del XVI secolo compaiono le espressioni dei due differenti metodi impiegati per la soluzione di problemi:

- * “Per numero” quando la soluzione è ottenuta per via aritmetica.
- * “Per linea”: questo metodo richiede l'applicazione di tecniche geometriche o geometrico-meccaniche (con strumenti meccanici specializzati o “macchine matematiche”) per risolvere un problema.

Questa seconda espressione ha fatto la sua comparsa nella seconda edizione del trattato di Pietro Cataneo sull'architettura.

Gran parte dei metodi descritti in questo articolo rientrano fra quelli “per linea” perché impiegano metodi geometrici o meccanico-geometrici e gli eventuali calcoli aritmetici presenti hanno soltanto lo scopo di verificare il risultato.

La costruzione delle radici quadrate di numeri che non sono quadrati perfetti può essere ottenuta solo per via geometrica (“per linea”): esse possono essere ricavate con il compasso e con una riga, non necessariamente graduata.

Samuel Gessner è un ricercatore che opera presso l’Università di Lisbona (Portogallo). Si è interessato, fra l’altro, allo studio di alcuni trattati italiani di architettura del Rinascimento fra i quali rientrano quelli di Sebastiano Serlio (circa 1475 – 1554), di Pietro Cataneo (circa 1510 – 1573) e di Andrea Palladio (1508 – 1580).

Diversi contributi di Gessner sono molto importanti e alcuni di essi sono citati nella *Bibliografia*.

Secondo Gessner, i problemi costruttivi e metrologici sono affrontati nei trattati con due metodi diversi:

- * per numero;
- * per linea.

Il primo metodo richiede l’uso dell’aritmetica, il secondo quello della geometria.

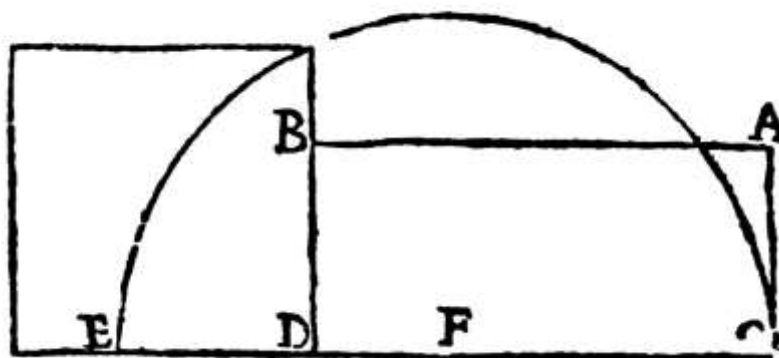
Non è possibile ricavare la lunghezza della diagonale di un quadrato *per numero* perché è un numero irrazionale, ma con la geometria – *per linea* – è possibile determinarla e riportarla con l’ausilio di un compasso.

Quasi tutte le Proposizioni contenute nel *Trattato di architettura* di Cataneo sono risolte geometricamente (*per linea*). Fa eccezione la soluzione del problema della porta da costruire contenuta nella Proposizione XXX, soluzione che è ricavata *per numero*.

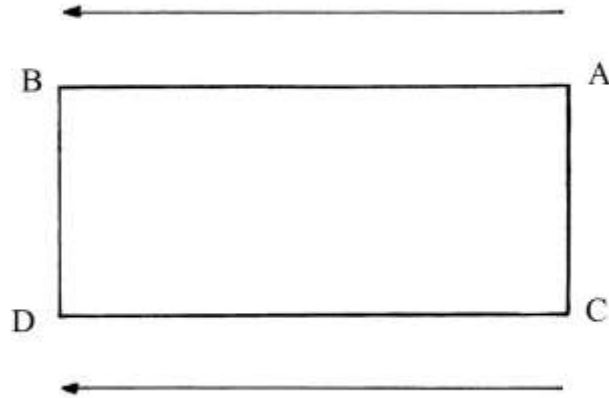
PROPOSIZIONE XVIII

Conversione di un quadrilatero in un quadrato

Un quadrilatero, ABCD, deve essere trasformato in un quadrato di uguale area.

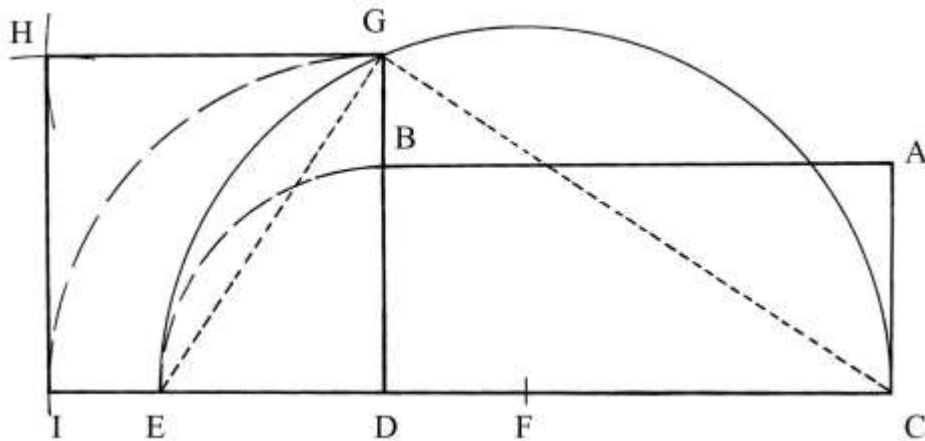


Nel testo, Cataneo definisce il quadrilatero con l’espressione “A.B.C.D.”, ma è evidente che le lettere sono apposte e lette da destra verso sinistra e non in senso orario:



Forse Cataneo era mancino?

ABDC è un rettangolo e la sua conversione in un quadrato equivalente è abbastanza semplice: è sufficiente applicare il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli.



Il testo originale di Cataneo fornisce una descrizione molto sintetica del problema e non cita il teorema di Euclide.

Lo schema qui sopra amplia quello originale e lo stesso intende fare la spiegazione che segue.

Prolungare verso sinistra il lato CD e verso l'alto quello DB.

Fare centro in D e con raggio DB tracciare l'arco BE.

Determinare il punto medio di EC: è F.

Fare centro in F e con raggio $FE = FC$ disegnare una semicirconfenza da E a C: essa taglia il prolungamento di DB nel punto G.

Collegare G con E e con C: EGC è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio di centro F.

Il citato secondo teorema di Euclide afferma che l'altezza GD è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei due cateti (EG e GC) sull'ipotenusa EC: sono ED e DC.

La proporzione è espressa come segue:

$$ED : DG = DG : DC \quad \text{da cui}$$

$$DG^2 = ED * DC.$$

Ma "ED * DC" può essere scritta come

$$ED * DC = BD * DC, \text{ che è la formula dell'area del rettangolo ABCD.}$$

Il segmento DG è lungo:

$$DG = \sqrt{(ED * DC)} = \sqrt{(BD * DC)}.$$

DG è la lunghezza del lato del quadrato DGHI che ha area uguale a:

$$S_{DGHI} = DG^2 = [\sqrt{(BD * DC)}]^2 = BD * DC = S_{ABCD}.$$

L'area di DGHI è uguale a quella di ABCD.

----- APPROFONDIMENTO -----

L'esempio che segue è solo un esercizio, non contenuto nei trattati di Pietro Cataneo. Il suo scopo è dimostrare la necessità di impiegare metodi geometrici e non aritmetici per risolvere alcuni problemi.

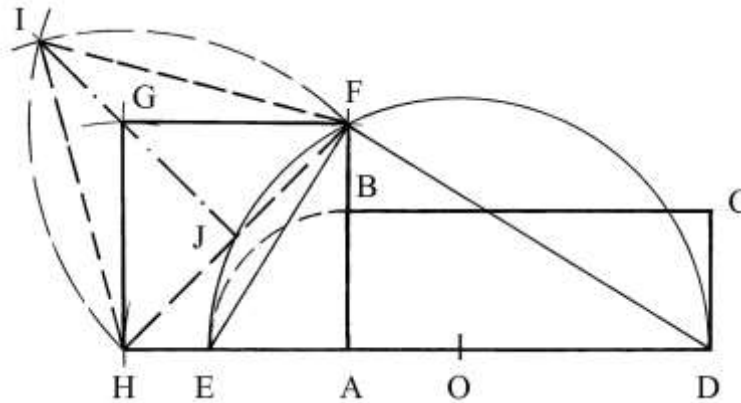
È dato un rettangolo, ABCD, e le sue dimensioni sono:

* AB = 3;

* AD = 8.

La sua area è:

$$S_{ABCD} = 3 * 8 = 24.$$



Deve essere trasformato in un quadrato di area uguale: per via aritmetica (“per numero”) non è possibile ricavare l’esatta lunghezza del lato ℓ del quadrato equivalente:

$$\ell = \sqrt{(S_{ABCD})} = \sqrt{24} = \sqrt{(4 * 6)} = 2 * \sqrt{6} = 2 * \sqrt{2} * \sqrt{3}.$$

La lunghezza di ℓ è espressa da un numero che, fra l’altro, è il prodotto di due irrazionali:

$$\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{3}.$$

Occorre risolvere il problema per via geometrica (“per linea”).

Su di una diagonale del quadrato equivalente deve poi essere costruito un triangolo equilatero.

Applicando il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, si ottiene la conversione del rettangolo ABCD nel quadrato AFGH che ha area uguale.

Su una diagonale del quadrato, ad esempio quella FH, deve essere costruito un triangolo equilatero.

La diagonale FH ha lunghezza che è data da:

$$FH^2 = FA^2 + AH^2 = (\sqrt{24})^2 + (\sqrt{24})^2 = 24 + 24 = 48 \quad \text{e}$$

$$FH = \sqrt{48} = \sqrt{(16 * 3)} = 4 * \sqrt{3}.$$

Il triangolo equilatero è HFI e i suoi lati sono lunghi come la diagonale FH.

IJ è una delle tre altezze del triangolo.

Fra la lunghezza di un’altezza e quella di un lato di un triangolo equilatero esiste un rapporto fisso:

$$\text{altezza/lato} = IJ/FH = (\sqrt{3})/2.$$

La lunghezza di IJ è:

$$IJ = FH * (\sqrt{3})/2 = (4 * \sqrt{3}) * (\sqrt{3})/2 = 4 * (\sqrt{3})^2/2 = 4 * 3/2 = 6.$$

Solo i lati del rettangolo ABCD e le altezze del triangolo equilatero HFI hanno lunghezze espresse da numeri interi.

L'area del triangolo HFI è:

$$S_{HFI} = FH * IJ/2 = (4 * \sqrt{3}) * 6/2 = 12 * \sqrt{3}.$$

Fra le aree dei tre poligoni vi sono delle proporzioni:

$$S_{ABCD} : S_{AFGH} : S_{HFI} = 24 : 24 : 12 * \sqrt{3} = 2 : 2 : \sqrt{3}.$$

L'area di HFI è più piccola di quelle di ABCD e di AFGH.

PROPOSIZIONE XIX [XVIII]

E

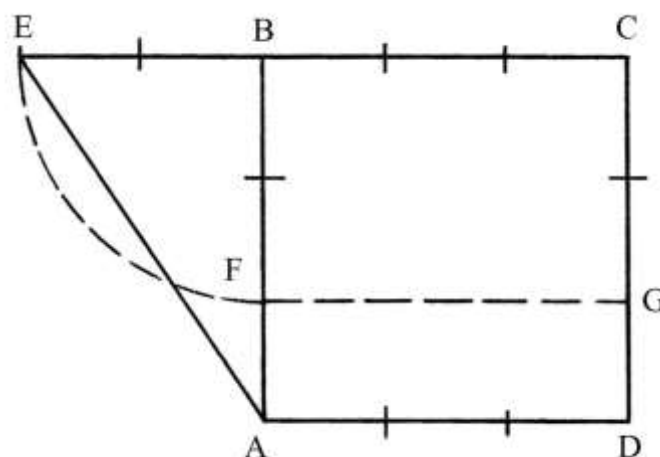
PROPOSIZIONE XX

Le due Proposizioni sembrano essere collegate: il testo di Cataneo è, per entrambe, poco chiaro e i schemi aiutano ben poco.

Di seguito viene proposta una soluzione che speriamo faccia chiarezza.

----- APPROFONDIMENTO -----

È dato un quadrato, ABCD, al quale deve essere unito il triangolo rettangolo ABE, che deve avere area uguale a *un terzo* di quella del quadrato. Il problema chiede di determinare la lunghezza dei lati del quadrato risultante dalla loro fusione.



I lati di ABCD sono divisi in *tre* parti uguali.

Prolungare verso sinistra il lato BC. Fare centro in B e con raggio $BF = 2/3 * BA$ tracciare l'arco FE.

ABE è il triangolo rettangolo che deve essere unito con il quadrato ABCD.

ABE ha cateti lunghi:

- * BA;
 - * $EB = 2/3 * BA$.
- L'area di ABE è:

$$S_{ABE} = BA * EB/2 = BA * (2/3 * BA)/2 = BA^2/3.$$

L'area del quadrato ABCD è:

$$S_{ABCD} = AB^2.$$

Da un punto di vista aritmetico AB e BA hanno uguale lunghezza.

Il rapporto fra le aree di ABE e di ABCD è:

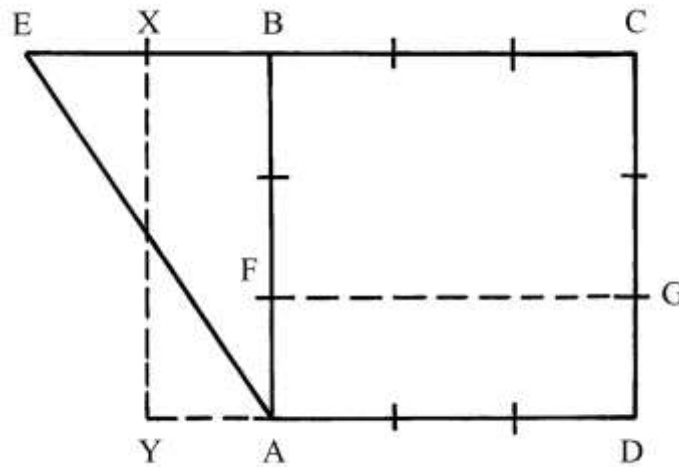
$$S_{ABE}/S_{ABCD} = (BA^2/3)/(AB^2) = 1/3.$$

Per essere unito con il quadrato ABCD, il triangolo ABE deve essere trasformato in un altro quadrato.

Il primo passo è la trasformazione di ABE in un rettangolo: esso ha la stessa area di AFGD:

$$S_{AFGD} = AF * AD = (1/3 * AB) * AB = AB^2/3.$$

Una soluzione per così dire "geometrica" di questo problema è presentata nella figura che segue:



Prolungare verso sinistra il lato DA. Fissare il punto medio di EB: è X. Da X abbassare la parallela a BA: è XY.

Il rettangolo XBAY ha lati lunghi:

- * $XY = AB;$
- * $XB = EB/2 = 2/3 * BA/2 = BA/3.$

L'area di XBAY è:

$$S_{XBAY} = XY * XB = AB * BA/3 = AB^2/3.$$

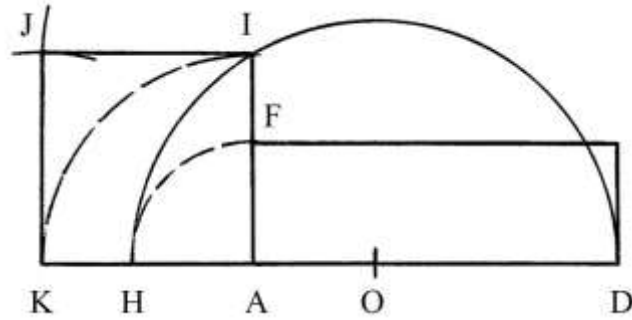
L'area di XBAY è uguale a quella di ABE e di AFGD.

Alcune costruzioni sui triangoli e sulla loro trasformazione in altre figure erano presenti nel 1° libro (*"Di Geometria"*) del *"Trattato di Architettura"* pubblicato nel 1545 da Sebastiano Serlio (1475 – 1554), autore e testo ben noti a Pietro Cataneo.

Possiamo ora procedere alla conversione del rettangolo AFGD in un quadrato equivalente.

Disegnare il rettangolo AFGD e prolungare verso sinistra il lato AD e verso l'alto quello

AF:



Fare centro in A e con raggio AF tracciare l'arco FH.

Determinare il punto medio di HD: è O. Fare centro in O e con raggio OH = OD disegnare una semicirconferenza da H a D: essa taglia il prolungamento di AF nel punto I.

AI è la lunghezza del lato del quadrato AIJK che è equivalente al rettangolo AFGD.

La lunghezza di AI è:

$$AH : AI = AI : AD$$

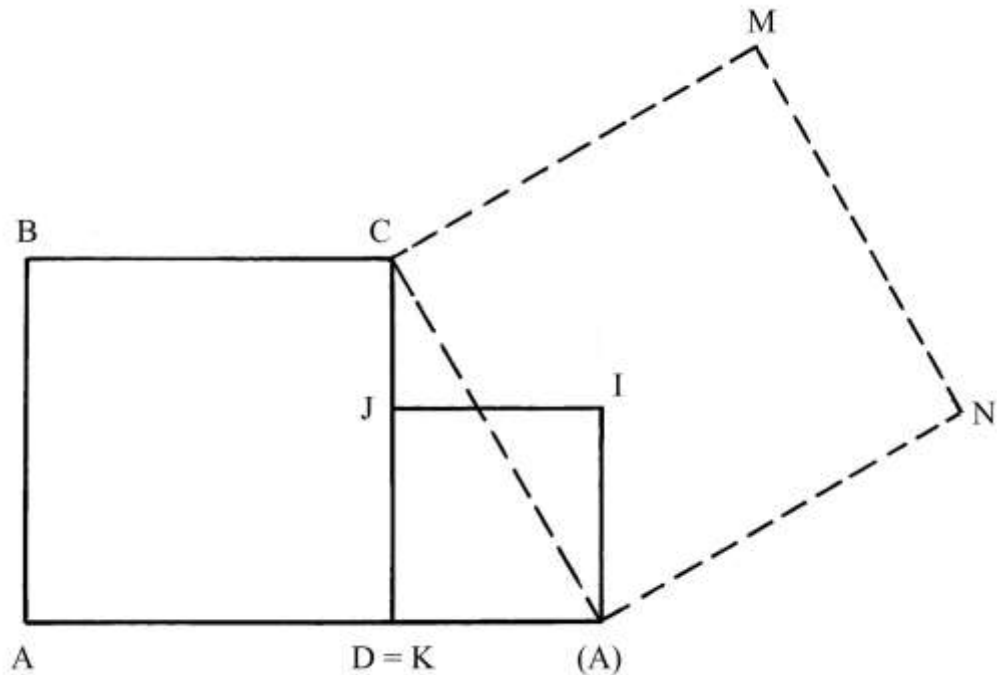
$$AI^2 = AH * AD = AF * AD = (1/3 * AB) * AB = 1/3 * AB^2 \quad e$$

$$AI = AB/\sqrt{3}.$$

Il quadrato AIJK ha area:

$S_{AIJK} = AI^2 = 1/3 * AB^2$: il quadrato ha area uguale a quella del rettangolo AFGD, a quella del rettangolo XBAY e a quella del triangolo ABE.

Occorre ora unire i quadrati ABCD e AIJK.



Disegnare il quadrato ABCD e prolungare verso destra il lato AD.

A partire dal vertice D riprodurre il quadrato AIJK: il vertice J si trova sul lato DC.

Collegare C con (A): C(A) è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha cateti lunghi:

* CD = AB;

* D(A) = K(A) = AI = AB/√3.

La lunghezza di C(A) è:

$$C(A)^2 = CD^2 + [K(A)]^2 = AB^2 + AI^2 = AB^2 + (AB/\sqrt{3})^2 = AB^2 * 4/3 e$$

$$C(A) = \sqrt{AB^2 * 4/3} = 2 * AB/\sqrt{3}.$$

Sull'ipotenusa C(A) costruire il quadrato CMN(A). La sua area è:

$$S_{CMN(A)} = C(A)^2 = AB^2 * 4/3 = AB^2 + AB^2/3 = S_{ABCD} + S_{ABE}.$$

Il quadrato CMN(A) è il risultato finale della fusione fra il quadrato ABCD e il triangolo ABE.

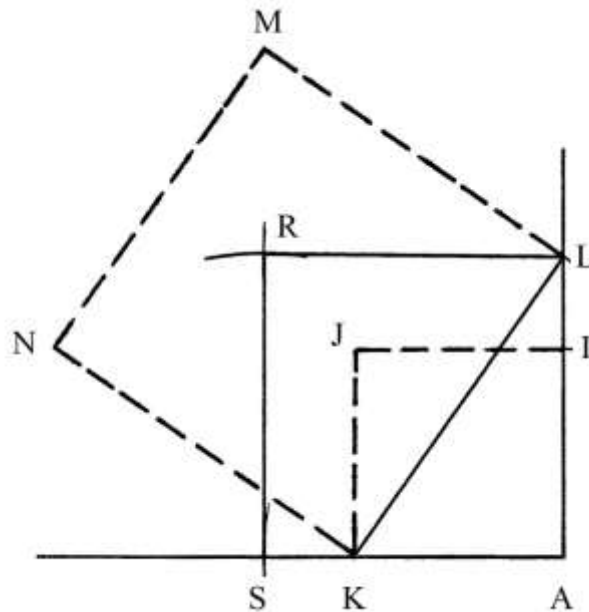
%%%%%%%%%

Il problema affrontato nella Proposizione XX è l'opposto del precedente.

Dal quadrato ABCD deve essere sottratta l'area occupata da un poligono che è uguale a un terzo.

L'area da detrarre è rappresentata dal quadrato AIJK già ricavato in precedenza.

Costruire il quadrato AIJK e prolungare verso l'alto il lato AI e verso sinistra quello AK.



Con il compasso misurare sul penultimo schema la lunghezza del lato AB: con questa apertura fare centro in K e disegnare un arco che taglia il prolungamento di AI in L.

KLMN è un quadrato che ha le stesse dimensioni di quello ABCD.

AL è un lato del quadrato risultante dalla sottrazione dell'area di AIJK da quella di KLMN (che è uguale a quella di ABCD).

ALRS è il quadrato cercato.

AKL è un triangolo rettangolo e AL ne è un cateto; la sua lunghezza è data da:

$$AL^2 = KL^2 - AK^2 = AB^2 - AK^2.$$

Ma $AK = AI = AB/\sqrt{3}$.

Quindi si ha:

$$AL^2 = AB^2 - (AB/\sqrt{3})^2 = AB^2 - AB^2/3 = 2/3 * AB^2.$$

La conclusione è: l'area del quadrato ALRS è uguale all'area di ABCD meno l'area del triangolo rettangolo ABE, appositamente trasformato nel quadrato equivalente AIJK.

PROPOSIZIONE XXI

Trasformazione di un quadrato in un rettangolo equivalente

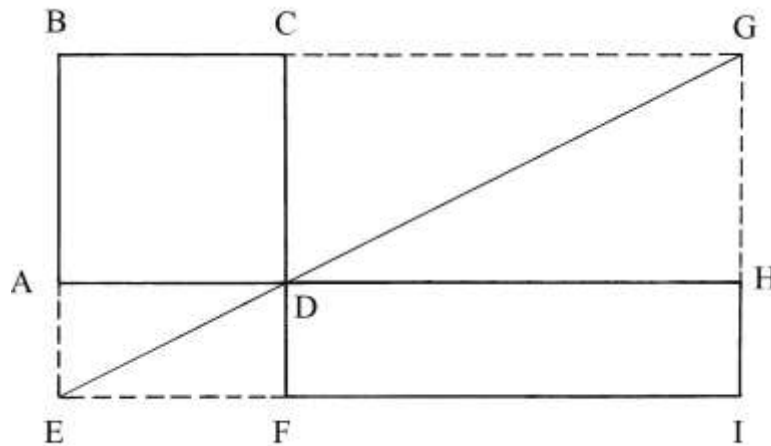
ABCD è un quadrato che deve essere trasformato in un rettangolo di cui è nota solo la larghezza, AE.

Prolungare verso destra i lati BC e AD e verso il basso i lati BA e CD.

AE è posizionata sul prolungamento di BA.

Dal punto E tracciare la parallela al lato AD: essa fissa il punto F.

DF è il primo lato del rettangolo equivalente.



Disegnare la diagonale ED e prolungarla fino a incontrare in G il prolungamento di BC.

Da G abbassare la perpendicolare al prolungamento di AD: sono fissati i punti H e I.

FDHI è il rettangolo che ha area uguale a quella del quadrato ABCD.

La lunghezza di FI è:

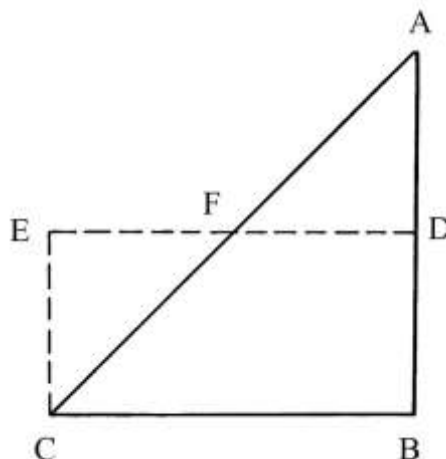
$$FI = S_{ABCD}/AE = AB^2/AE.$$

PROPOSIZIONE XXII

Conversione di un triangolo in un quadrato equivalente

ABC è un triangolo rettangolo che nell'esempio è anche isoscele: il metodo proposto vale per tutti i tipi di triangoli.

ABC deve essere trasformato in un quadrato di area uguale.



Cataneo propone di risolvere il problema “*per linea*” e cioè con un metodo geometrico. Stabilire il punto medio del cateto AB: è D. Da questo punto tracciare verso sinistra una linea parallela a CB.

Dal punto C elevare la perpendicolare a BC.

Tracciare il segmento ED che incontra l’ipotenusa CA nel suo punto medio F.

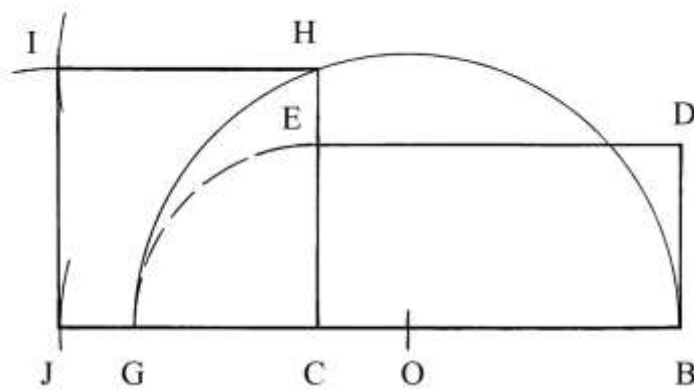
Il rettangolo CEDB ha area uguale a quella del triangolo ABC: i triangoli rettangoli AFD e CEF hanno uguali dimensioni: l’area che viene tolta a ABC (il triangolo AFD) è aggiunta come CEF a CFDB per formare il rettangolo CEDB.

Cataneo conclude proponendo di convertire il rettangolo CEDB in un quadrato equivalente con il metodo impiegato nella soluzione della Proposizione XVIII.

----- APPROFONDIMENTO -----

Procediamo alla conversione di CEDB in un quadrato.

Utilizziamo la costruzione già impiegata.



Prolungare verso sinistra il lato BC e verso l’alto quello CE.

Fare centro in C e con raggio CE disegnare un arco da E fino a G. Stabilire il punto medio di GB: è O.

Fare centro in O e con raggio $OG = OB$ tracciare una semicirconferenza che taglia in H il prolungamento di CE.

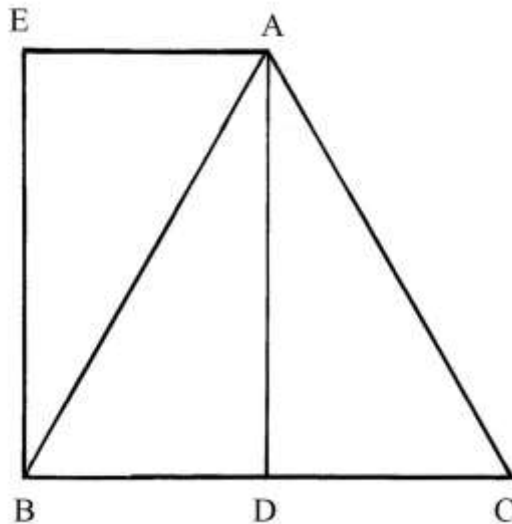
CH è un lato del quadrato CHIJ che ha area uguale a quella di CEDB e quindi uguale a quella del triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XXIII

Trasformazione di un triangolo equilatero in un quadrato

ABC è un triangolo equilatero e AD è una sua altezza.

Il triangolo deve essere trasformato in un quadrato avente la stessa area.



Il rapporto fra la lunghezza di un lato e quella di un'altezza è un numero irrazionale:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{e}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La presenza del numero irrazionale $\sqrt{3}$ in quel rapporto impone l'uso di un metodo geometrico ("per linea") per ottenere la conversione del triangolo equilatero in un quadrato equivalente.

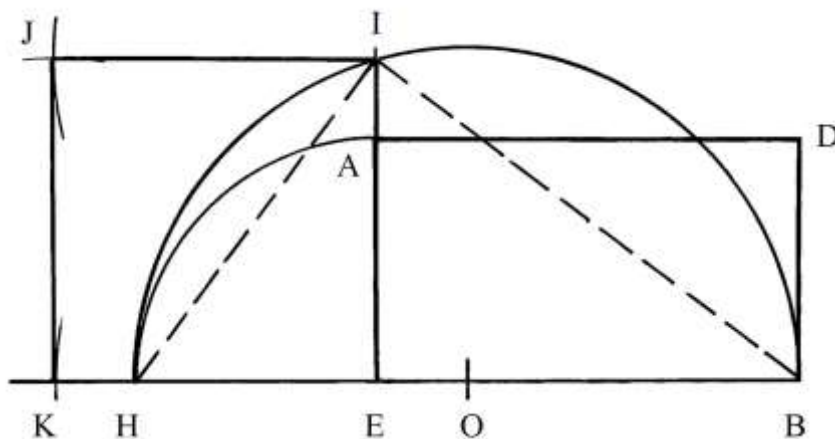
Questa Proposizione è ripresa dal *Trattato* di Sebastiano Serlio, citato in precedenza.

Come Serlio, Cataneo suggerisce due soluzioni. La prima è mostrata nella precedente figura.

Da A traccia verso sinistra la parallela a BC e da Innalzare la parallela a AD (e perpendicolare a BC). I due segmenti si incontrano in E.

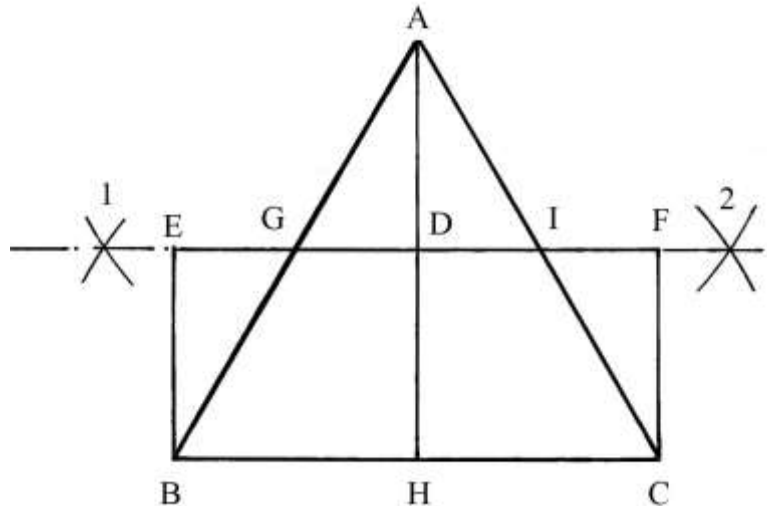
Il rettangolo BEAD ha area uguale a quella del triangolo equilatero ABC: infatti, il triangolo BEA ha le stesse dimensioni del triangolo ADC.

Il rettangolo BEAD è convertito nel quadrato IEKJ con il metodo già utilizzato:



%%

La seconda soluzione è presentata nello schema che segue:



Costruire l'asse dell'altezza AH: con raggio a piacere fare centro in A e in H e tracciare quattro archi di circonferenza che si incontrano nei punti 1 e 2.

La retta passante per 1 e per 2 divide AH in due parti uguali: $AD = DH$.

Dai vertici B e C innalzare le parallele a AH fino a incontrare l'asse 1-2 nei punti E e F.

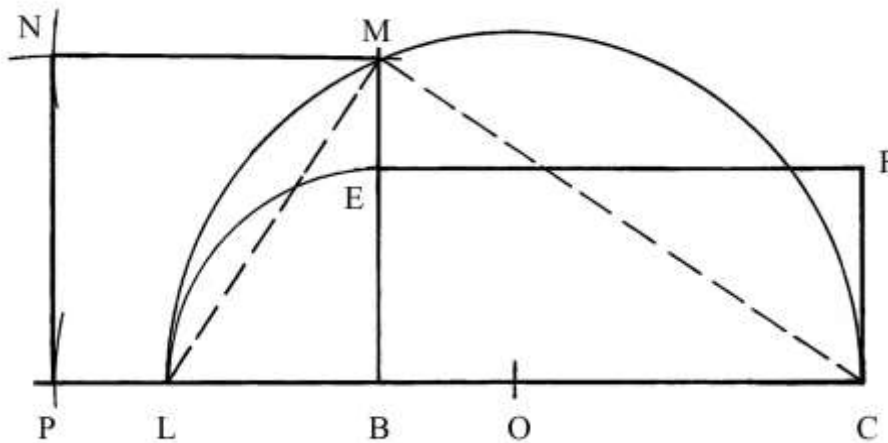
Il rettangolo BEFC ha area uguale a quella del triangolo equilatero ABC e può essere trasformato in un quadrato equivalente con il metodo già spiegato.

Le due coppie di triangoli presenti nella figura hanno aree uguali:

* AGD e BEG;

* AID e CFI.

La figura che segue presenta la conversione di BEFC nel quadrato BMNP che ha area uguale.



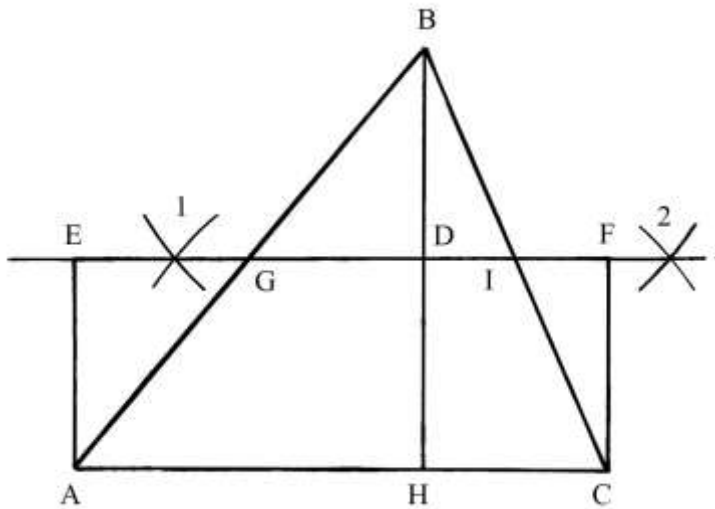
Il rettangolo BEAD della penultima figura ha dimensioni diverse da quelle del rettangolo BEFC della figura qui sopra: i due quadrilateri hanno aree uguali perché entrambi hanno area uguale a quella del triangolo equilatero.

Il quadrato IEKJ della penultima figura e il quadrato BMNP contenuto nell'ultima figura hanno aree uguali: entrambi sono il risultato della conversione del triangolo equilatero ABC.

PROPOSIZIONE XXIV [XXIII]

Quadratura di un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno e BH è una sua altezza.

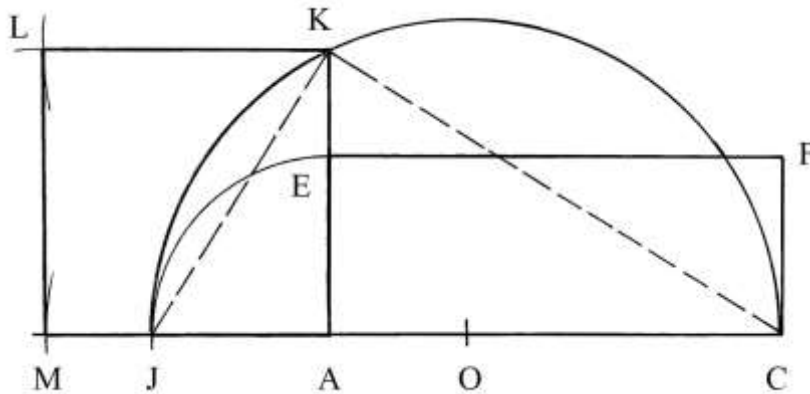


Il triangolo è trasformato nel rettangolo equivalente AEFC con il metodo usato nella soluzione dell'ultimo problema.

I triangoli rettangoli AEG e GBD hanno aree uguali.

Anche i triangoli rettangoli BDI e CFI hanno aree fra loro uguali.

Il rettangolo AEFC è poi trasformato nel quadrato AKLM usando il metodo impiegato più volte:

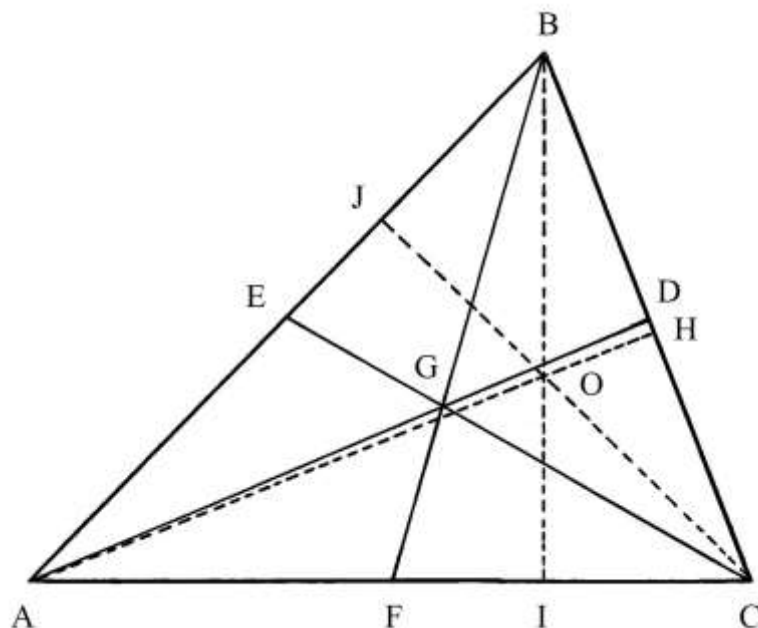


PROPOSIZIONE XXV

Tracciatura delle mediane in un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno.

Lo schema che segue è leggermente modificato rispetto a quello contenuto nel Trattato.



Cataneo vuole disegnare una “catetta” che vada dal vertice A al punto medio del lato opposto che è BC: il punto medio è D e il segmento è AD.

AD è oggi chiamata *mediana*.

Poi viene fissato il punto medio di AB, che è E: CE è la seconda mediana del triangolo.

Le due mediane si incontrano in G, punto che oggi è conosciuto come il *baricentro* del triangolo.

La terza mediana è BF ed è ottenuta tracciando un segmento uscente da B e passante per G: F è il punto medio del lato AC.

Sembrava che, in precedenza, Cataneo con il termine “catetto” e/o “catetta” indicasse un segmento *perpendicolare* a un altro, quale è un’altezza di un triangolo generico.

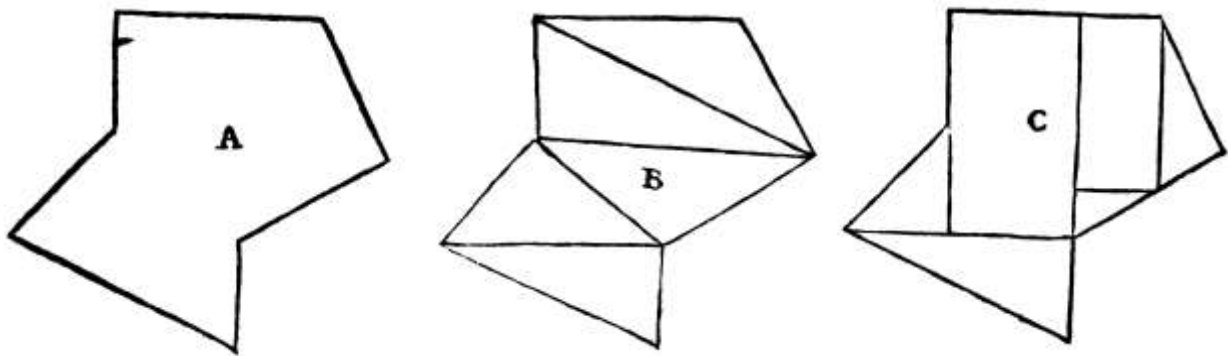
Nello schema precedente, le altezze sono AH, BI e CJ: esse sono perpendicolari ai lati che raggiungono e si intersecano nel punto O che è l’*ortocentro* del triangolo. Un’altezza è il segmento più corto che collega un vertice con il lato opposto.

Solo nel triangolo equilatero il baricentro G e l’ortocentro O coincidono.

PROPOSIZIONE XXVI

Quadratura di una superficie

È dato un poligono non regolare delimitato da sette lati, “A”.

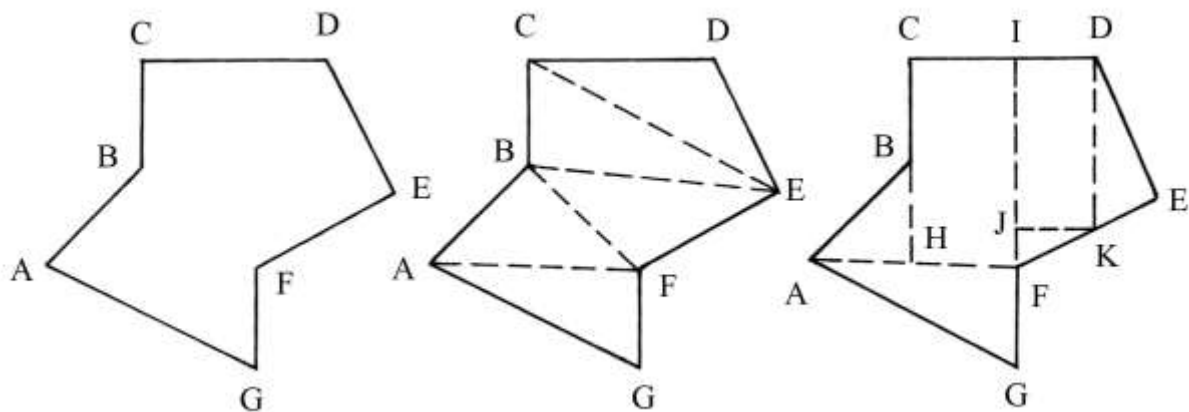


Deve essere ricavata la sua superficie.

Cataneo suggerisce due diverse soluzioni:

- * al centro, "B", il poligono è diviso in *cinque* triangoli scaleni;
- * a destra, "C", la superficie è ripartita in *due* rettangoli e in *quattro* triangoli rettangoli.

La figura che segue presenta le possibili ripartizioni del poligono non regolare ABCDEFG:



In entrambe le possibili suddivisioni i triangoli e i rettangoli devono essere singolarmente trasformati in altrettanti quadrati da assemblare per ricavare un unico quadrato.

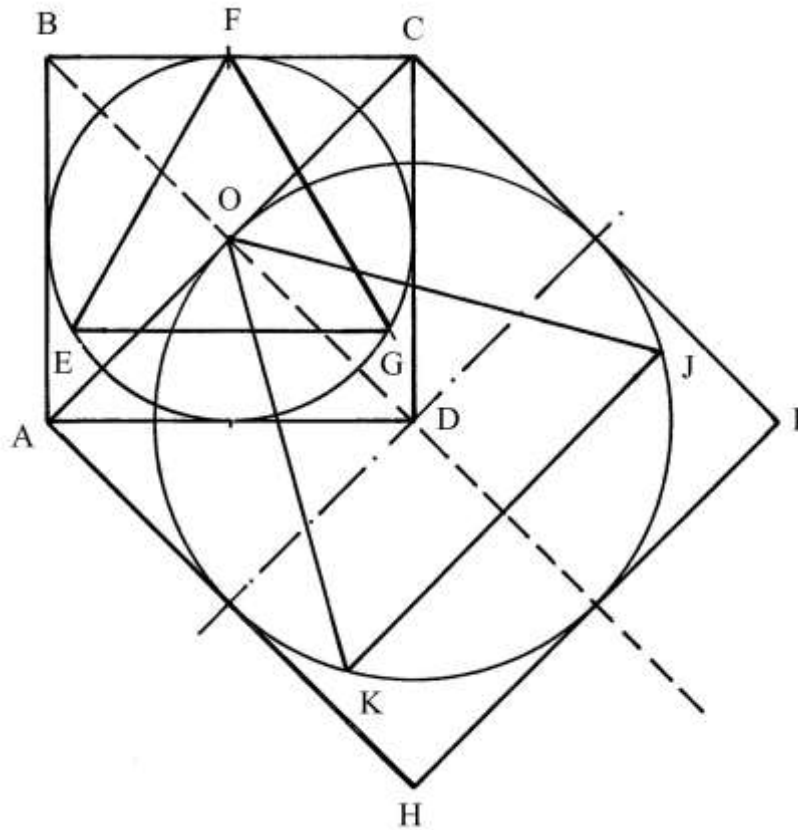
PROPOSIZIONE XXVII

Duplicazione di un poligono regolare

La Proposizione propone la duplicazione di due distinti insiemi di figure piane: il primo contiene un quadrato circoscritto a un cerchio in cui è inscritto un triangolo equilatero.

Il secondo insieme prevede un pentagono regolare in luogo del triangolo inscritto.

Lo schema che segue presenta il primo insieme di poligoni.



ABCD è il quadrato e AC è una delle due diagonali.

Nel quadrato è inscritto un cerchio di centro O e raggio OF, che ha lunghezza uguale a metà di quella del lato AB.

EFG è un triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

La costruzione è leggermente modificata rispetto all'originale.

Tracciare la diagonale BOD e prolungarla verso il basso.

Dai vertici A e C disegnare le perpendicolari a AC; da A e da C riportare la lunghezza di AC. Sono fissati i punti H e I.

ACIH è un quadrato che ha lati lunghi:

$$AC = AB * \sqrt{2}.$$

L'area di ACIH è:

$$S_{ACIH} = AC^2 = (AB * \sqrt{2})^2 = 2 * AB^2 = 2 * S_{ABCD}.$$

Fare centro in D e con raggio DO tracciare una circonferenza che è tangente nei punti medi del quadrato ACIH.

OJK è un triangolo equilatero inscritto nel secondo cerchio.

Il secondo cerchio ha raggio OD che è lungo:

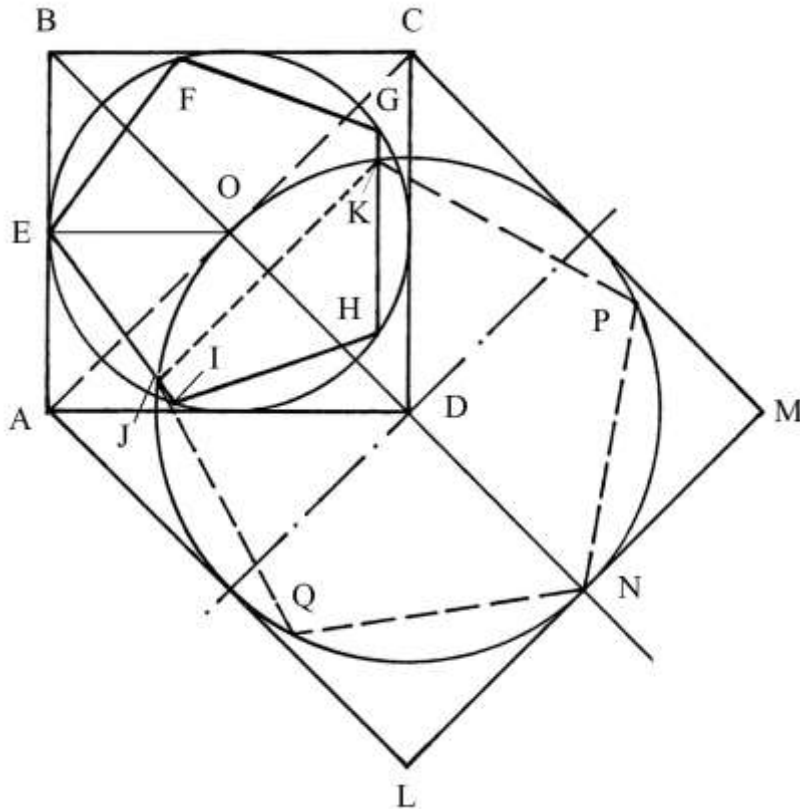
$$OD = OF * \sqrt{2}.$$

L'area del cerchio di centro D è doppia di quella del cerchio di centro O e raggio OF.

Infine, anche il triangolo equilatero KOJ ha area doppia di quella del triangolo EFG.

%%%

Lo schema che segue presenta un pentagono inscritto in un cerchio a sua volta inscritto in un quadrato.



ABCD è il quadrato in cui è inscritto il cerchio di centro O e raggio OE lungo la metà del lato AB.

Nel cerchio è inscritto il pentagono EFGHI: il vertice E è il punto medio del lato AB e il lato GH è parallelo al lato CD del quadrato.

Tracciare la diagonale AC e quella BD che è prolungata verso il basso.

Fare centro in D e con raggio DO disegnare una circonferenza che taglia due lati del pentagono (EI e GH) rispettivamente nei punti J e K: JK è il primo lato del secondo pentagono.

Dai vertici A e C condurre le perpendicolari a AC: fare centro in A e in C e con raggio AC fissare i punti L e M. ACML è il secondo quadrato e N è il punto medio del lato LM.

Sulla seconda circonferenza riportare a partire da J e K la lunghezza del lato JK.

JKPNQ è il secondo pentagono inscritto: esso ha area doppia di quella del pentagono EFGHI.

Pure il quadrato ACML ha area doppia del quadrato ABCD e anche il cerchio di centro D e raggio DO ha area doppia di quella del cerchio di centro O e raggio OE.

PROPOSIZIONE XXVIII

Duplicazione di un cerchio

La duplicazione di un cerchio è possibile usando due diversi metodi.

Il primo ricalca la procedura usata nella soluzione dei due problemi della precedente Proposizione.

ABCD è un quadrato circoscritto a un cerchio dato: il centro comune è O e il diametro è lungo quanto il lato AB.

Tracciare le diagonali AC e BD e prolungare questa ultima verso il basso.

Fare centro in D e con raggio DO disegnare una seconda circonferenza.

Il raggio OD è lungo:

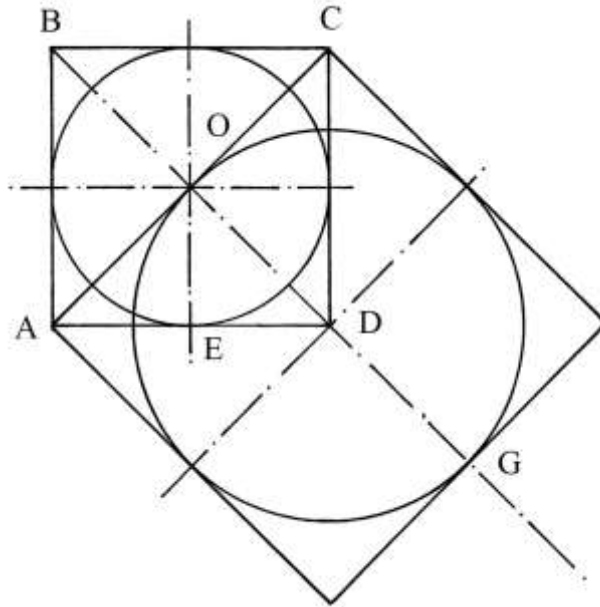
$$DO^2 = OE^2 + OF^2 = OE^2 + OE^2 = 2 * OE^2 = 2 * (AB/2)^2 = AB^2/2$$

e

$$DO = AB/\sqrt{2}.$$

Il diametro OG è lungo:

$$OG = 2 * DO = 2 * AB/\sqrt{2} = \sqrt{2} * AB.$$



L'area del cerchio di centro O e raggio OE è:

$$S_O = \pi * OE^2 = 22/7 * OE^2 = 22/7 * (AB/2)^2 = 22/28 * AB^2 = 11/14 * AB^2.$$

L'area del cerchio di centro D e raggio DO è:

$$S_{DO} = \pi * DO^2 = 22/7 * (AB/\sqrt{2})^2 = 22/7 * AB^2/2 = 11/7 * AB^2.$$

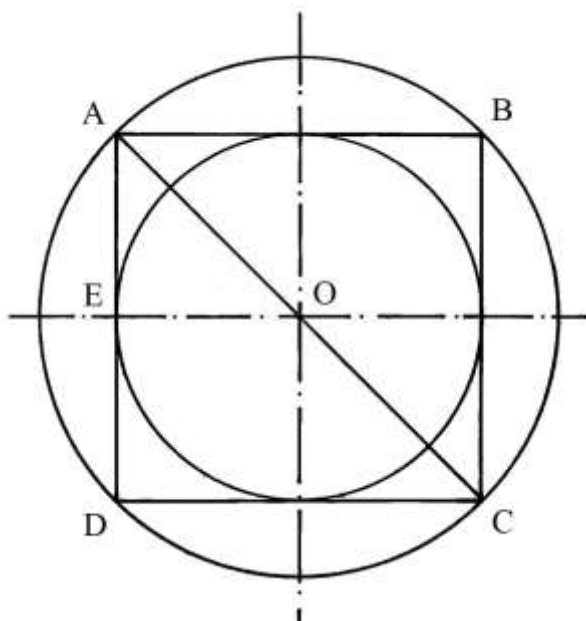
L'area del secondo cerchio è il doppio dell'area del primo:

$$S_{DO}/S_O = (11/7 * AB^2)/(11/14 * AB^2) = (1/7)/(1/14) = 2.$$

%%

ABCD è un quadrato al cui interno è inscritto un cerchio di centro O e raggio

$$OE = AB/2.$$



AC è una diagonale del quadrato ed è il diametro di un secondo cerchio circoscritto al quadrato e concentrico al primo cerchio.

La diagonale AC è lunga:

$$AC = AB * \sqrt{2}.$$

Il cerchio di diametro AC ha area doppia di quella del cerchio di raggio OE.

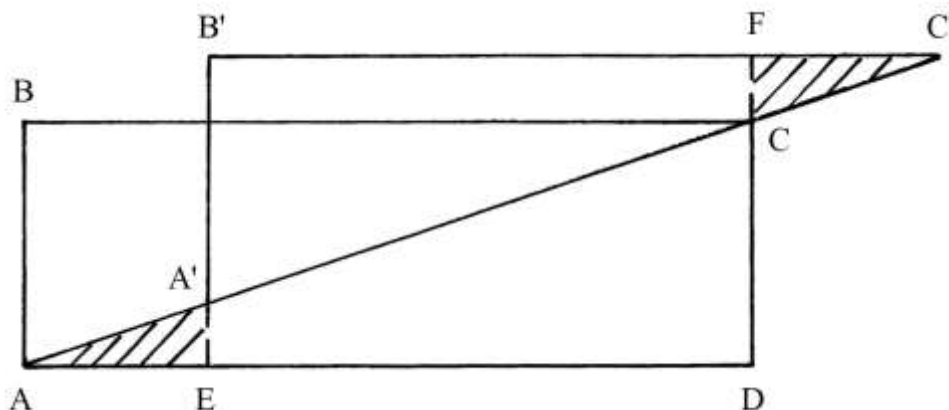
PROPOSIZIONE XXIX [XXVIII]

Modificare una tavola di legno

Deve essere realizzata una porta di legno alta 9 *palmi* e larga 5 *palmi*. A disposizione c'è solo una tavola lunga 12 *palmi* e larga 4 *palmi*.

Benché il palmo non fosse molto usato in Toscana quale unità di misura della lunghezza, sembra che valesse *mezzo braccio*.

La soluzione proposta da Cataneo è ricostruita nello schema che segue, leggermente modificato rispetto a quello originale.



ABCD è la tavola di legno: AB è larga 5 *palmi* e AD è lunga 9 *palmi*.

La tavola viene tagliata lungo la diagonale AC.

Il triangolo rettangolo ABC viene fatto scorrere lungo AC verso destra di 3 palmi:

$$AE = 3 \text{ palmi.}$$

A'B'C' è la nuova posizione assunta dal triangolo ABC.

B'E è lungo 5 palmi e B'F è lungo:

$$B'F = AD - AE = 12 - 3 = 9 \text{ palmi.}$$

Il rettangolo EB'FD ha dimensioni di 9 per 5 palmi che sono quelle richieste per la porta da costruire.

----- APPROFONDIMENTO -----

Occorre determinare la lunghezza di A'E.

AA'E e FCC' sono due triangoli rettangoli.

AA'E e ACD sono due triangoli rettangoli simili e per loro vale la seguente proporzione:

$$AE : AD = A'E : CD, \quad \text{da cui}$$

$$A'E = AE * CD/AD = 3 * 4/12 = 1 \text{ palmo.}$$

L'area della tavola iniziale è:

$$12 * 4 = 48 \text{ palmi}^2.$$

L'area della porta da costruire è:

$$9 * 5 = 45 \text{ palmi}^2.$$

La differenza fra le due aree è:

$$48 - 45 = 3 \text{ palmi}^2, \text{ che è la superficie della tavola che residua dopo i tagli.}$$

I tagli sono rappresentati dai triangoli rettangoli AA'E e CC'F: essi hanno uguali dimensioni.

L'area di AA'E è:

$$S_{AA'E} = AE * A'E/2 = 3 * 1/2 = 1,5 \text{ palmi}^2.$$

L'area dei due triangoli che formano lo scarto è:

$S_{AA'E} + S_{CC'F} = 1,5 + 1,5 = 3 \text{ palmi}^2$, superficie uguale alla differenza fra l'area della tavola e quella della porta.

La soluzione di questo problema è ottenuta da Cataneo per *via aritmetica* ("per numero").

PROPOSIZIONE XXX

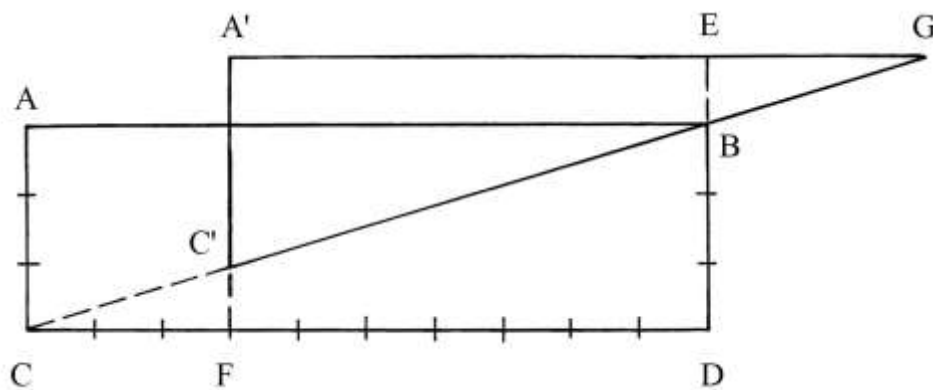
La falsa soluzione del Serlio

La Proposizione critica la soluzione proposta da Serlio nel primo libro del suo trattato "I Sette libri dell'architettura" per la costruzione di una porta utilizzando una tavola di legno.

Serlio esercitò una certa influenza su Cataneo: il contenuto del Trattato del Senese pare largamente ispirato all'opera di Serlio.

La qualità dei disegni è migliore nel trattato di Serlio: le figure di Cataneo sono un po' primitive.

Serlio deve ricavare una porta alta 7 *piedi* e larga 4 da una tavola di legno lunga 10 e larga 3 piedi:



Lo schema di Cataneo riproduce quello di Serlio. ABCD è la tavola di legno: AC è largo 3 piedi e CD è lungo 10 piedi.

La tavola viene tagliata lungo la diagonale CB e il triangolo rettangolo CAB scorre verso destra di 3 piedi fino ad assumere la posizione indicata con C'A'G.

A'F è lungo 4 piedi e FD è 7 piedi: queste sono le dimensioni della porta.

La tavola ha area di: $10 * 3 = 30$ piedi² e la porta ha area di

$$7 * 4 = 28 \text{ piedi}^2.$$

Il problema sollevato da Cataneo è che la differenza fra le due aree è $(30 - 28)$ è di 2 piedi², mentre le aree dei due triangoli rettangoli scartati, CC'F e EBG, sono complessivamente di 3 piedi²: il problema è insolubile.

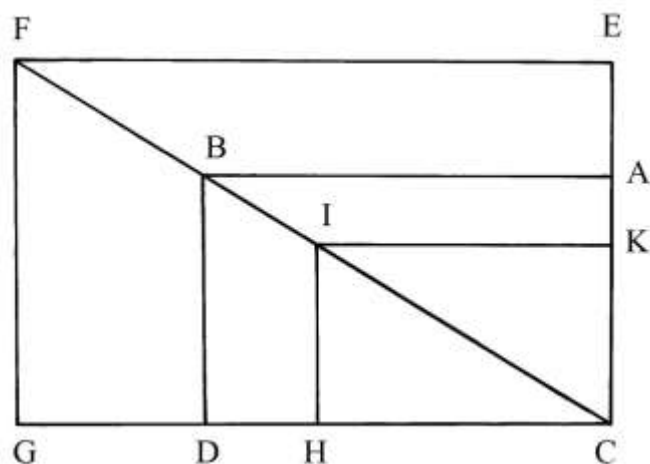
Infine, Cataneo inizia la descrizione del problema usando il *piede* quale unità di misura delle lunghezze e alla fine del testo impiega il *braccio* che è ben più lungo del piede.

PROPOSIZIONE XXXI

Quadrilateri simili

ABDC è un rettangolo: le sue proporzioni sono ritenute piacevoli.

Sono richiesti altri due rettangoli, uno più grande e l'altro più piccolo, con le stesse proporzioni di ABDC.



Tracciare la diagonale CB e superare il vertice B.

Prolungare verso l'alto il lato AC e verso sinistra quello CD.

GC è la lunghezza di un rettangolo più grande di quello ABDC. Da G condurre la perpendicolare a CG fino a incontrare il prolungamento di CB in F. Da questo punto tracciare la parallela a GC fino a tagliare in E il prolungamento di CA.

GFEC è il rettangolo simile a quello ABDC e più grande.

Per costruire un rettangolo più piccolo di quello ABDC, con lunghezza CH, procedere come fatto per disegnare il rettangolo GFEC.

HIKC è il terzo rettangolo.

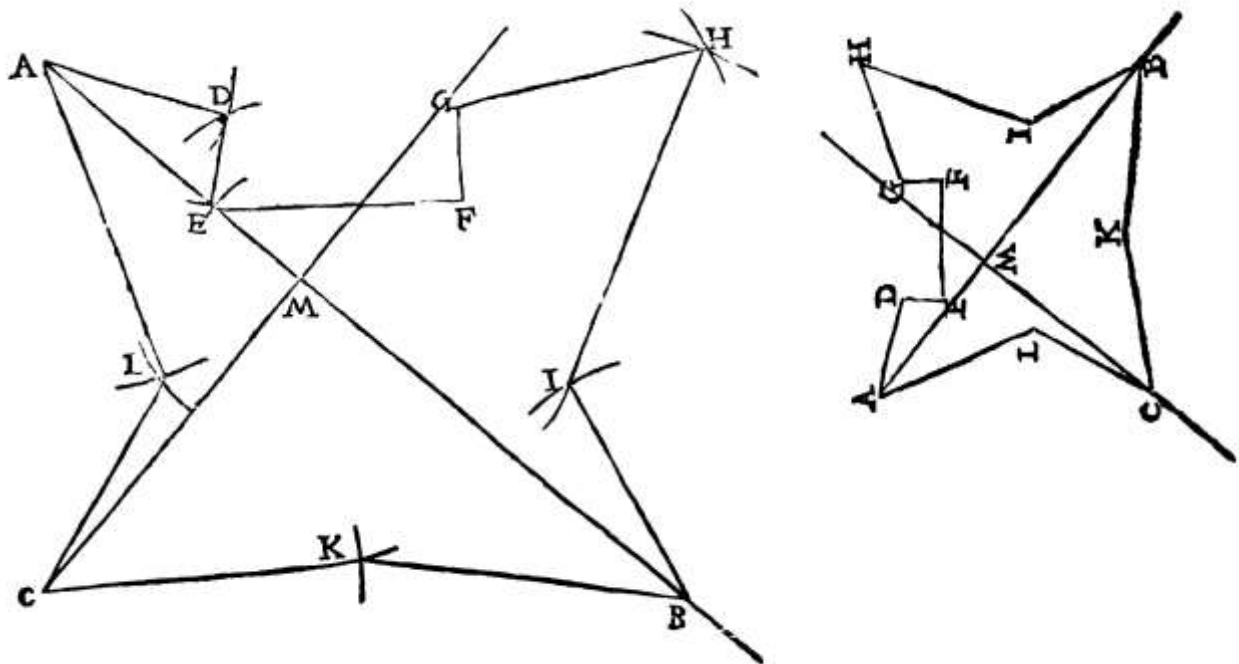
Fra le dimensioni dei tre rettangoli intercorre una proporzione:

$$GC : DC : HC = CE : CA : CK.$$

PROPOSIZIONE XXXII

Duplicazione di una figura piana qualsiasi

Devono essere raddoppiate le lunghezze dei lati della figura a destra nello schema originale di Cataneo: sembra possa trattarsi della pianta di una fortificazione.



A sinistra è lo schema con le dimensioni aumentate.

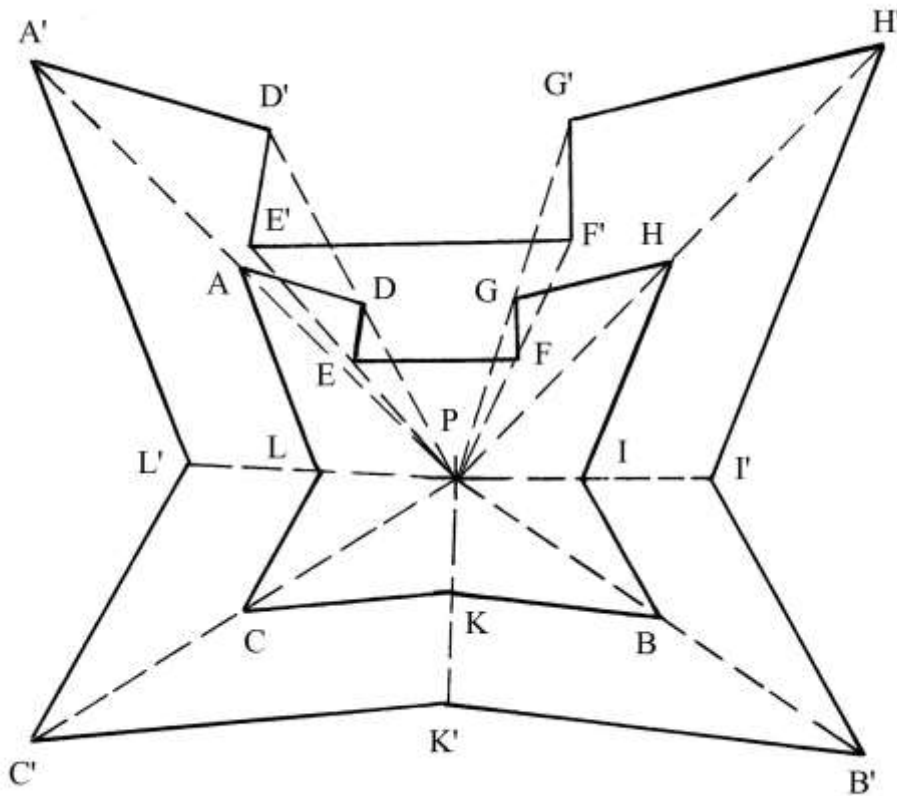
Cataneo propone di tracciare due assi fra loro perpendicolari passanti per il maggior numero possibile di vertici della figura: essi si incrociano nel punto interno M.

I due assi sono poi riportati nella figura ingrandita, a sinistra.

Con una procedura un po' macchinosa e con l'impiego di *due* compassi l'Autore ricava la figura ingrandita.

Nel testo originale la figura è indicata come ABCDEFGHIKLM, ma le lettere sono apposte ai vertici in modo casuale.

Una soluzione più semplice del problema dell'ingrandimento è presentata nello schema che segue:



Scegliere un punto all'interno del poligono, P, il più possibile al centro.
 Dal punto P tracciare semirette passanti per gli *undici* vertici della figura.
 Sulle semirette fissare i punti a distanza doppia di quella dei vertici della figura da P: ad esempio, il punto A' dista da P il doppio di AP:
 $A'P = 2 * AP$.
 Collegare i punti A'D'E'F'G'H'I'B'K'C'L': il poligono esterno ha lati lunghi il doppio di quello interno e area *quadrupla*.

PROPOSIZIONE XXXIII

Accrescimento e diminuzione di figure

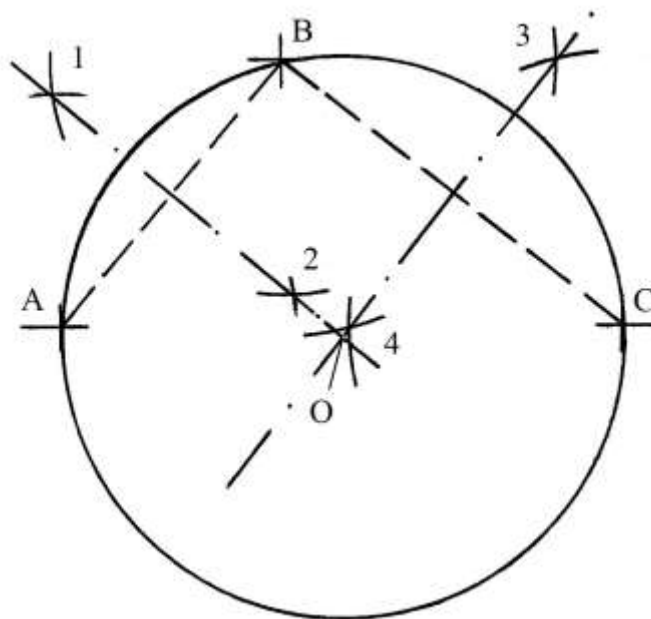
Per ingrandire o rimpicciolire figure piane, Cataneo propone di usare dei reticolati formati da piccoli quadrati.



PROPOSIZIONE XXXIV [XXXIII]

Sono dati tre punti – A, B e C – che non sono collocati sulla stessa retta.

Deve essere determinato il centro dell'arco (o dell'intera circonferenza) passante per tutti e tre i punti.



Collegare A con B e B con C.

Fare centro in A e in B e tracciare quattro archi di circonferenza che si incrociano in 1 e in 2: per questi punti passa l'asse della corda AB.

Poi, fare centro in B e in C e disegnare altri quattro archi che si incontrano nei punti 3 e 4: l'asse passante per 3 e per 4 interseca quello 1-2 in un punto, O, che è il centro della circonferenza passante per A, B e C.

APPENDICE II

=====

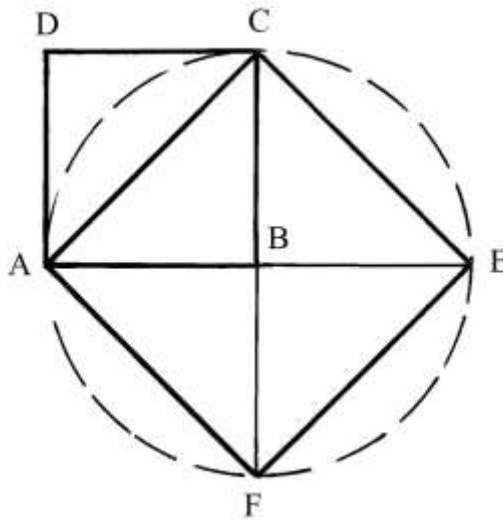
Sebastiano Serlio (circa 1475 – 1554) è stato un importante architetto del Rinascimento.

A più riprese pubblicò il trattato “I Sette libri dell’Architettura”: il primo libro è dedicato alla *geometria pratica*.

In questo Libro sono contenute alcune costruzioni geometriche che in parte sono state inserite nel successivo trattato di Pietro Cataneo.

Quadrato doppio di un altro

ABCD è un quadrato e deve esserne costruito un altro che abbia area doppia.



Prolungare verso destra il lato AB e verso il basso quello CB.

Fare centro in B e con raggio BA = BC disegnare una circonferenza che taglia i prolungamenti in E e in F.

ACEF è il quadrato che ha lati lunghi quanto la diagonale AC del quadrato ABCD.

AC è lunga:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2 * AD^2 \text{ e}$$

$$AC = AD * \sqrt{2}.$$

L’area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = AD^2.$$

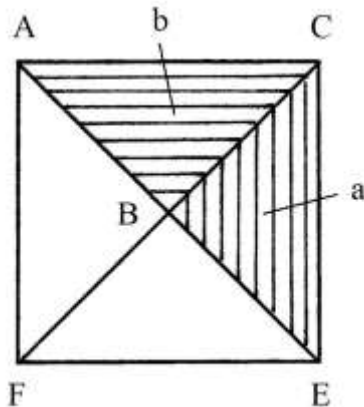
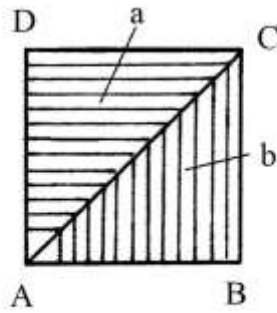
L’area di ACEF è il doppio di quella di ABCD:

$$S_{ACEF} = AC^2 = (AD * \sqrt{2})^2 = 2 * AD^2 = 2 * S_{ABCD}.$$

Il metodo qui proposto è leggermente diverso da quello di Serlio: egli non traccia la circonferenza di centro B.

%%%%%%%%%

Un secondo metodo è accennato da Serlio:



ABCD è un quadrato che ad opera della diagonale AC è diviso in due identici triangoli rettangoli isosceli: ADC (“a”) e ABC (“b”).

Essi sono poi uniti lungo il lato BC che forma una *semidiagonale* del quadrato ACEF che ha area doppia di quella di ABCD.

Le lettere “a” e “b” indicano la posizione dei due triangoli isosceli nei due quadrati.

Riflettendo il triangolo rettangolo ACE lungo la diagonale AE si ottiene il triangolo rettangolo isoscele AEF che completa il quadrato doppio ACEF.

Cerchio di area doppia di uno dato

È dato un cerchio di centro O e raggio OA: deve essere costruito un secondo cerchio concentrico al primo e di area doppia.

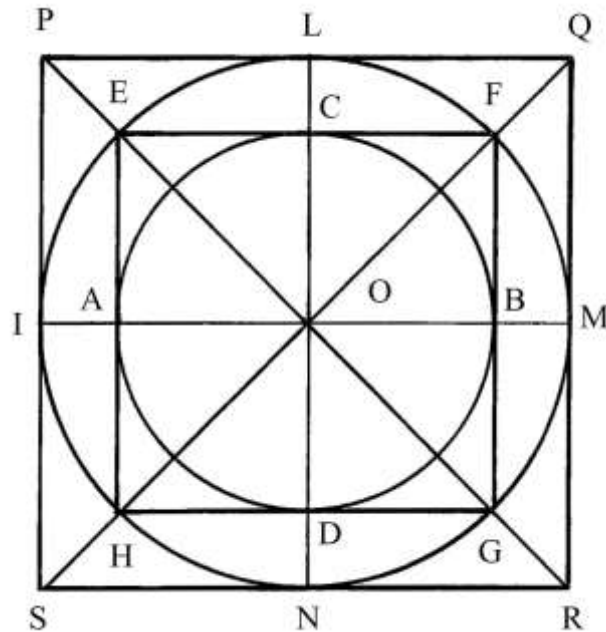
Prolungare il diametro AB verso destra e verso sinistra e tracciare il diametro verticale CD, perpendicolare a AB, prolungando anche esso verso l’esterno.

Disegnare il quadrato circoscritto al cerchio: è il poligono EFGH.

Tracciare le diagonali EG e HF e prolungarle verso l’esterno.

Fare centro in O e, con raggio OE, disegnare una circonferenza che taglia i due diametri fra loro perpendicolari nei punti I, L, M e N.

Per questi ultimi quattro punti tracciare quattro segmenti paralleli ai lati del quadrato EFGH: è costruito il quadrato PQRS.



Il quadrato EFGH ha area:

$$S_{EFGH} = EF^2.$$

Il quadrato PQRS ha area:

$$S_{PQRS} = PQ^2.$$

Ma PQ è:

$$PQ = 2 * PL = 2 * OL \text{ e}$$

$$OL = OE = EG/2.$$

EG è una diagonale del quadrato EFGH ed è lunga:

$$EG = EF * \sqrt{2}.$$

Quindi si ha:

$$OL = OE = (EF * \sqrt{2})/2 = OA * \sqrt{2}.$$

Ne consegue:

$$PQ = 2 * OL = 2 * (EF * \sqrt{2})/2 = EF * \sqrt{2}.$$

L'area di PQRS è:

$$S_{PQRS} = PQ^2 = (EF * \sqrt{2})^2 = 2 * EF^2.$$

L'area di PQRS è il doppio di quella di EFGH.

Il cerchio di centro O e raggio OA ha area:

$$S_{OA} = \pi * OA^2 = 22/7 * OA^2.$$

Il cerchio esterno che ha raggio OL ha area:

$$S_{OL} = \pi * OL^2 = 22/7 * OL^2.$$

Ma $OL = OE = OA * \sqrt{2}$. Ne consegue:

$$S_{OL} = 22/7 * (OA * \sqrt{2})^2 = 22/7 * 2 * OA^2 = 44/7 * OA^2.$$

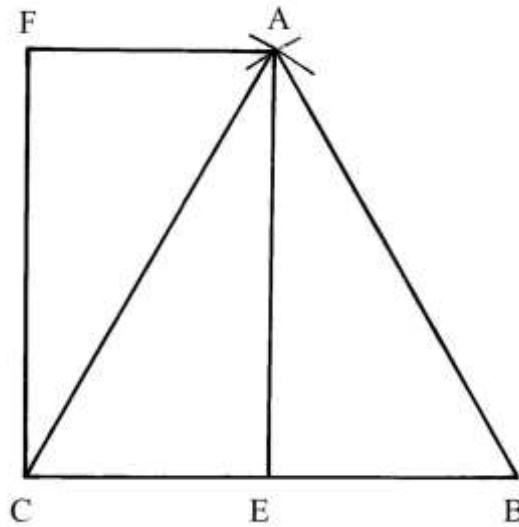
Il rapporto fra le aree dei due cerchi è:

$$S_{OL}/S_{OA} = (44/7 * OA^2)/(22/7 * OA^2) = 2.$$

Il cerchio esterno ha area doppia di quella del cerchio interno: l'affermazione è ovvia, considerando che essi sono inscritti in due quadrati (PQRS e EFGH) le cui aree stanno anche nel rapporto 2 : 1.

Rettangolo di area equivalente a quella di un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero e AE è una sua altezza:



Serlio usa la lettera E per indicare il punto medio del lato CB, che è il piede dell'altezza AE: è prassi comune oggi indicare il piede dell'altezza con la lettera H.

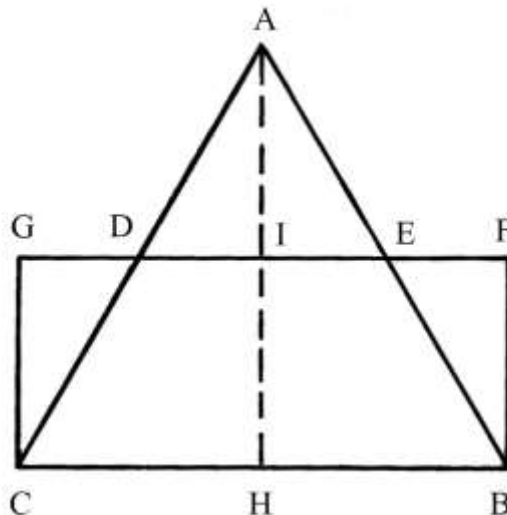
ABC deve essere trasformato in un rettangolo di area uguale.

Da C innalzare la perpendicolare a CB e da condurre verso sinistra la parallela a CB: le due linee si incontrano in F. Il triangolo AFC ha area uguale a quella di ABE.

Il rettangolo AFCE ha area uguale a quella del triangolo equilatero ABC.

Altro rettangolo equivalente a un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero e AH è l'altezza relativa alla base BC.



Determinare i punti medi dei lati AC e AB: sono rispettivamente D e E.

Per D e per E tracciare la parallela alla base CB.

Dai vertici B e C elevare le perpendicolari a CB: sono BF e CG.

I è il punto medio dell'altezza AH.

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = CB * AH/2 = CB * IH.$$

L'area del rettangolo CGFB è:

$$S_{CGFB} = CB * CG = CB * HI. = CB * IH.$$

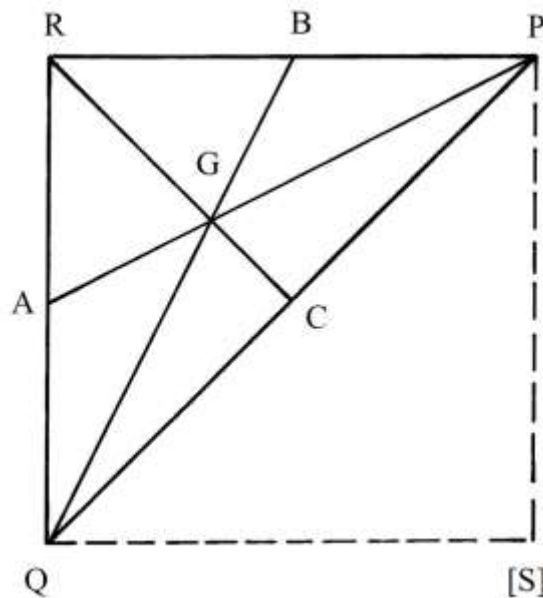
L'area di ABC e quella di CGFB sono uguali.

Divisione di un triangolo rettangolo isoscele in parti uguali

PQR è un triangolo rettangolo isoscele che è ricavato dalla divisione del quadrato QRP[S] lungo la diagonale QP.

Determinare i punti medi dei tre lati: sono A, B e C.

Collegare A, B e C con i vertici opposti: sono disegnate le *mediane* AP, BQ e CR. Esse si incontrano nel punto G, che è il *baricentro* del triangolo.

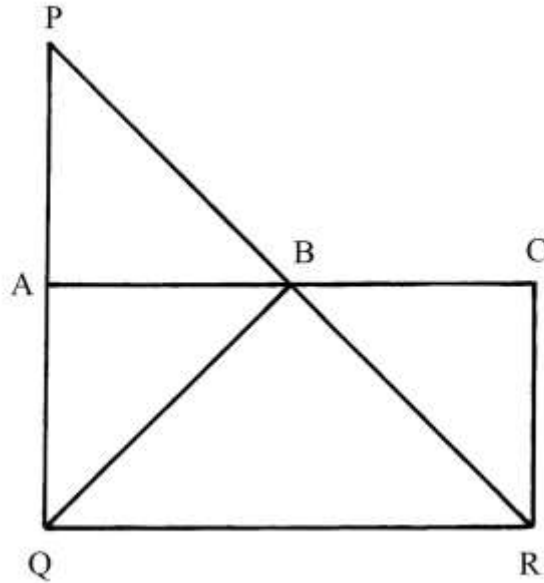


PQR è diviso in due parti uguali in tre diverse combinazioni di triangoli:

- * la coppia RCQ e RCP;
- * la coppia RBQ e BPQ;
- * la coppia QAP e ARP.

Rettangolo equivalente a un triangolo rettangolo isoscele

Il solito triangolo rettangolo isoscele PQR deve essere trasformato in un rettangolo equivalente.



Determinare il punto medio del lato PQ: è A. Da A tracciare una linea parallela a QR: essa taglia in B l'ipotenusa PR.

Dal vertice R elevare la perpendicolare a QR che incontra in C la linea passante per A e per B.

L'area di PQR è:

$$S_{PQR} = QR * PQ/2 = QR * AQ.$$

L'area del rettangolo QACR è:

$$S_{QACR} = QR * AQ.$$

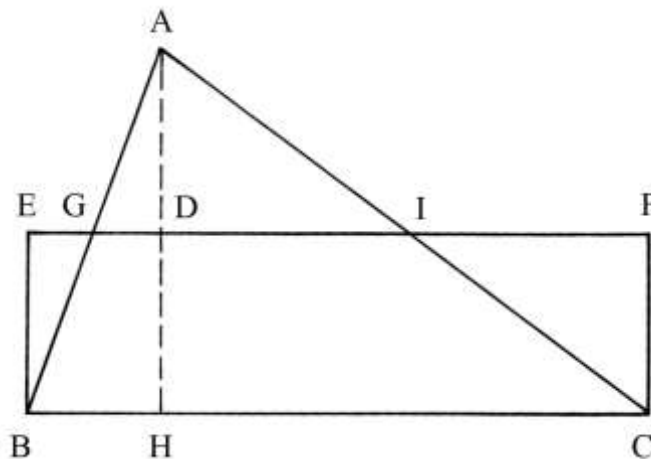
Le aree dei due poligoni sono uguali.

Rettangolo equivalente a un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno e AH è una sua altezza.

Deve essere disegnato un rettangolo che abbia area uguale.

Determinare il punto medio di AH: è D. Per il punto D tracciare una parallela a BC e dai vertici B e C elevare due perpendicolari alla stessa base BC. Sono fissati i punti E e F.



EF divide i lati AB e AC nei loro punti medi che sono G e I.

I triangoli rettangoli BEG e GDA hanno aree uguali.
 Anche i triangoli rettangoli CFI e ADI hanno aree fra loro uguali.
 L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = BC * AH/2 = BC * DH.$$

L'area del rettangolo BEFC è:

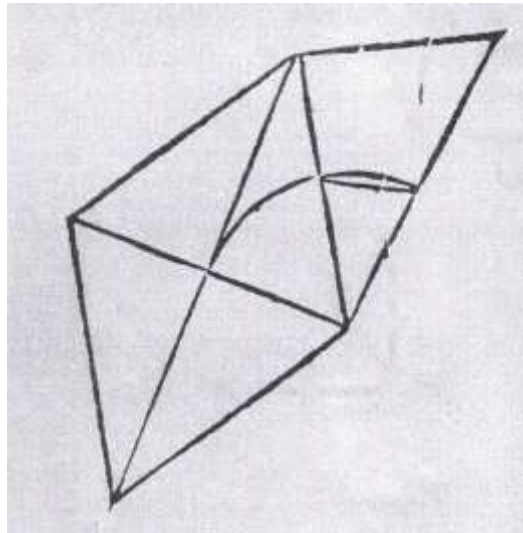
$$S_{BEFC} = BC * BE = BC * DH.$$

I due poligoni hanno aree uguali.

Triangolo piramidale

Serlio propone una costruzione che è a dir poco strana e non spiegata.

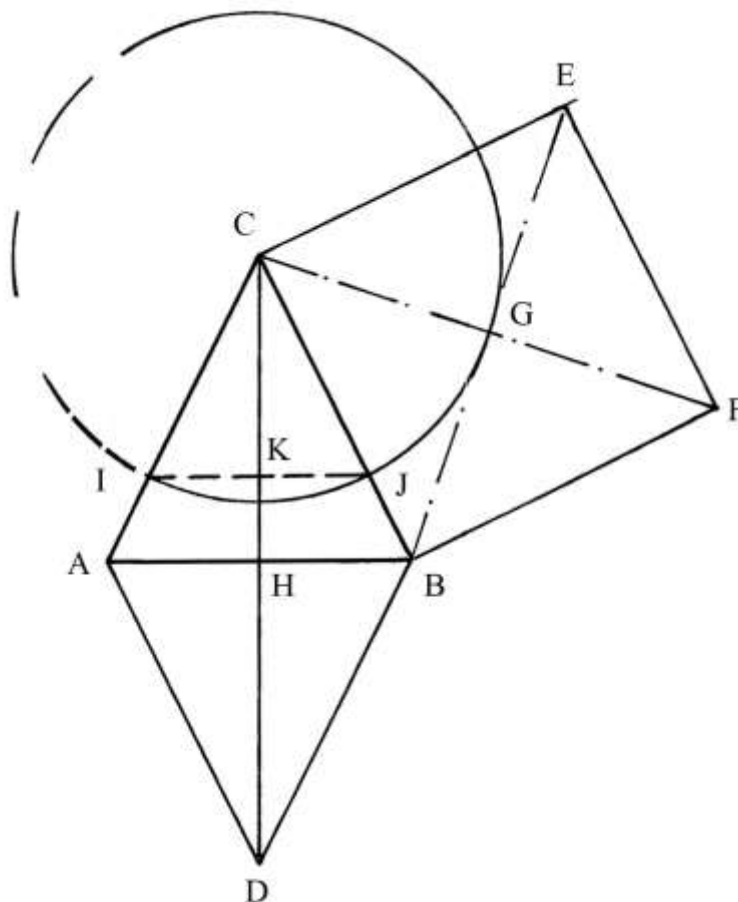
Egli definisce la figura interessata con un'espressione: "triangolo piramidale"; esso avrebbe due lati di uguale lunghezza.



Al centro dello schema non si trova un semplice triangolo isoscele, ma un *rombo*.

Nello schema che segue i quattro lati del rombo hanno, ovviamente, lunghezze uguali:

$$AC = CB = AD = BD.$$



Su di un lato obliquo del triangolo isoscele ACB , CB , costruire il quadrato $CEFB$ e tracciare le diagonali BE e CF : esse si incontrano nel punto G .

Fare centro in C e con raggio CG disegnare una circonferenza che taglia i lati AC e BC nei punti I e J .

Il triangolo ACB è diviso in due poligoni:

- * il triangolo isoscele CIJ ;
- * il trapezio isoscele $AIJB$.

Si può ipotizzare che i due poligoni abbiano aree uguali e pari a metà dell'area del triangolo isoscele ACB .

La divisione del triangolo ACB in due poligoni di aree uguali era lo scopo della costruzione di Serlio?

----- APPROFONDIMENTO -----

La costruzione che segue serve a dividere in due parti di aree uguali il triangolo isoscele ACB , con una corda parallela alla base AB .

CH è l'altezza relativa al lato AB .

Prolungare verso l'alto il lato AC e fissare il punto medio dello stesso lato: è L .

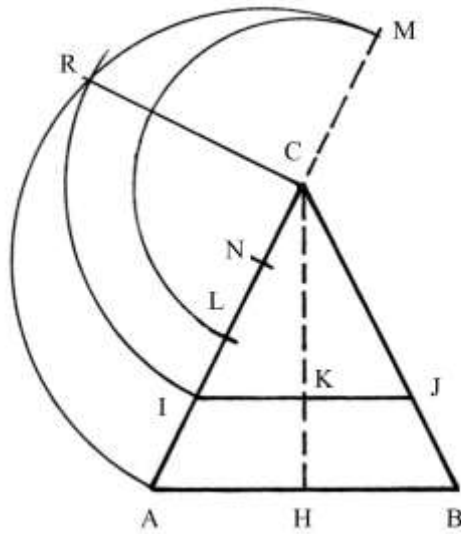
Fare centro in C e con raggio CL tracciare una semicirconferenza da L fino a fissare M .

Determinare il punto medio di AM : è N .

Dal vertice C condurre la perpendicolare a CA .

Fare centro in N e con raggio $NA = NM$ disegnare una semicirconferenza da A a M : essa taglia in R la perpendicolare a AC .

Infine, fare centro in C e con raggio CR tracciare un arco da R fino a stabilire il punto I .



Da I condurre la parallela a AB: è IKJ.

ABC è diviso in due poligoni che hanno aree uguali:

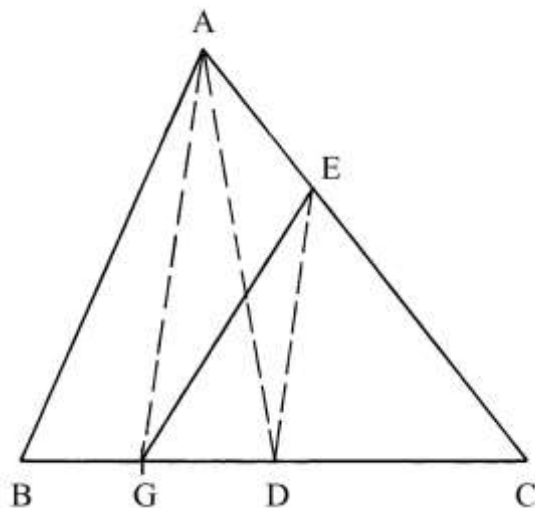
- * il triangolo isoscele ICJ;
- * il trapezio isoscele AIJB.

Il risultato di questa costruzione corrisponde esattamente all'ipotesi presentata nella penultima figura.

La costruzione era nota almeno fino dal Medioevo.

Divisione di un terreno triangolare in due parti uguali

ABC è un terreno di forma triangolare. Sul lato BC è situato un pozzo, indicato con G.



Il terreno deve essere diviso in due parti uguali per permettere a entrambi i proprietari di accedere direttamente al pozzo.

Collegare A con G.

Fissare il punto medio del lato BC: è D. Tracciare la mediana AD.

Dal punto D disegnare la parallela a GA: è DE.

Collegare G con E. GE divide ABC in due poligoni che hanno aree uguali:

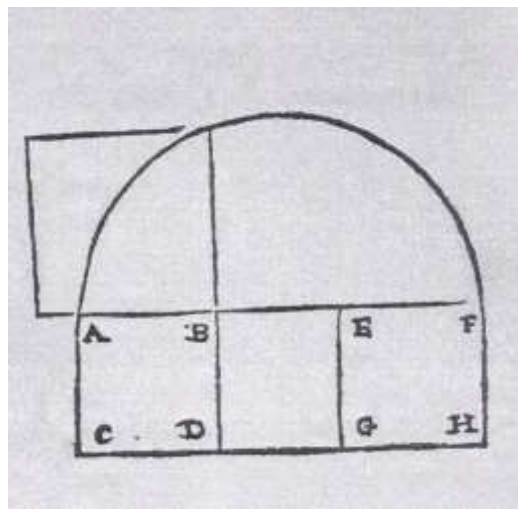
- * il quadrilatero AEGB;
- * il triangolo EGC.

La trasformazione dei due poligoni in quadrati dimostrerebbe che le loro aree sono uguali.

Quadrato generato dalla unione di altri quadrati

Il problema è descritto da Serlio in modo un po' oscuro e lo schema contenuto nel suo trattato non aiuta.

La figura che segue riproduce lo schema originale di Serlio:

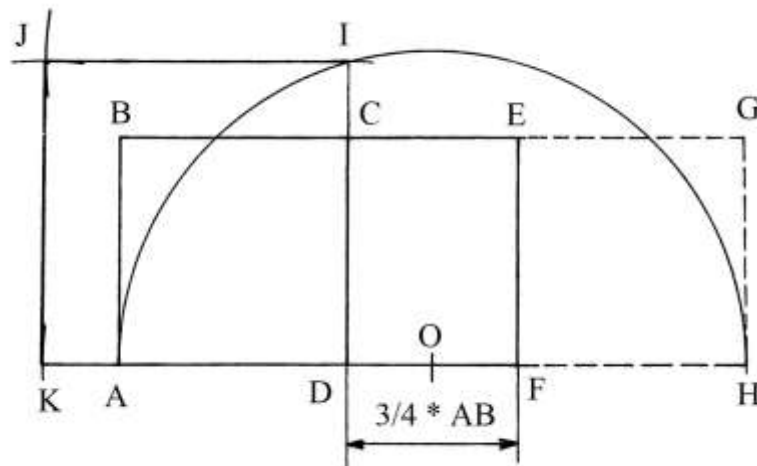


Devono essere uniti in un unico quadrato il quadrato ABCD e un altro che ha area uguale a *tre quarti* ($3/4$) di quella di ABCD.

Sembra che Serlio abbia applicato, senza citarlo, il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli.

Procediamo in altro modo.

ABCD è il quadrato: prolungare verso destra i lati AD e BC.



Il quadrato di area uguale a $3/4$ di quella di ABCD può essere facilmente trasformato in un rettangolo di area equivalente: DCEF ha lunghezza DC, lunga quanto AB, e larghezza DF pari a $3/4$ di AB.

L'area di DCEF è:

$$S_{DCEF} = DC * DF = AB * (3/4 * AB) = 3/4 * AB^2.$$

A partire da EF costruire un secondo quadrato di dimensioni uguali a quelle di ABCD: è EGHF.

Prolungare verso l'alto DC e verso sinistra DA.

Determinare il punto medio di AH: è O.

Fare centro in O e con raggio OA = OH disegnare una semicirconferenza da A a H: essa incontra in I il prolungamento di DC.

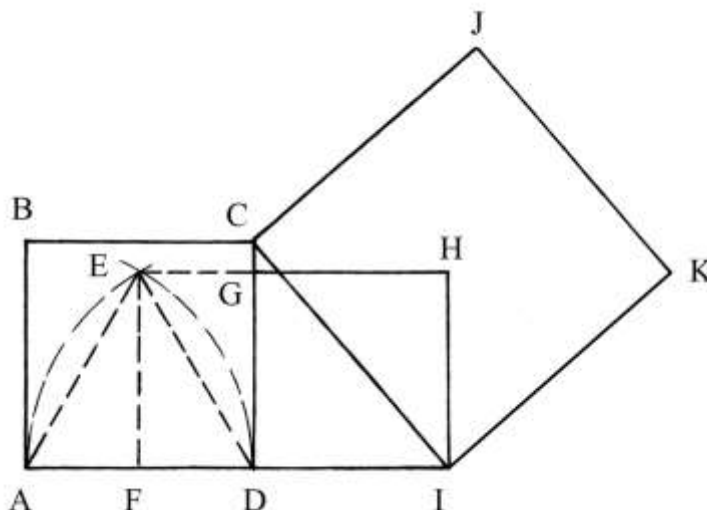
DI è la lunghezza del lato del quadrato DIJK che ha area uguale alla somma di quelle di ABCD e di DCEF.

È stato applicato il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli.

----- APPROFONDIMENTO -----

Esiste una soluzione più semplice.

ABCD è il quadrato al quale deve essere unito un secondo quadrato di area uguale a *tre quarti*.



L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = AB^2.$$

L'area del secondo quadrato è:

$$S_{SECONDO} = 3/4 * S_{ABCD} = 3/4 * AB^2.$$

Il lato ℓ del secondo quadrato ha lunghezza che è:

$$\ell = \sqrt{(3/4 * AB^2)} = AB * (\sqrt{3})/2.$$

Sul lato AD costruire il triangolo equilatero AED, con lati lunghi AD = AB.

Dal vertice E tracciare l'altezza EF: la sua lunghezza è:

$$EF = AD * (\sqrt{3})/2 = AB * (\sqrt{3})/2.$$

EF è lunga quanto i lati del secondo quadrato con area uguale a *tre quarti* di quella di ABCD: il secondo quadrato può essere costruito per via geometrica (per linea") e non per via aritmetica ("per misura") per la presenza del numero irrazionale " $\sqrt{3}$ ".

Prolungare verso destra il lato AD.

Da E disegnare verso destra la parallela a AD che taglia in G il lato CD.

Con il compasso riportare da G la lunghezza di GD = EF e costruire il quadrato DGHI, che è il quadrato di area uguale a 3/4 di quella di ABCD; infatti:

$$S_{DGHI} = DG^2 = EF^2 = [AB * (\sqrt{3})/2]^2 = 3/4 * AB^2.$$

Collegare C con I. CDI è un triangolo rettangolo i cui cateti sono lunghi quanto i lati dei due quadrati da unire:

* $CD = AB$;

* $DI = GD$.

La lunghezza dell'ipotenusa CI è:

$$CI^2 = CD^2 + DI^2 = AB^2 + GD^2 = AB^2 + [AB * (\sqrt{3})/2]^2 = AB^2 + 3/4 * AB^2 = 7/4 * AB^2$$

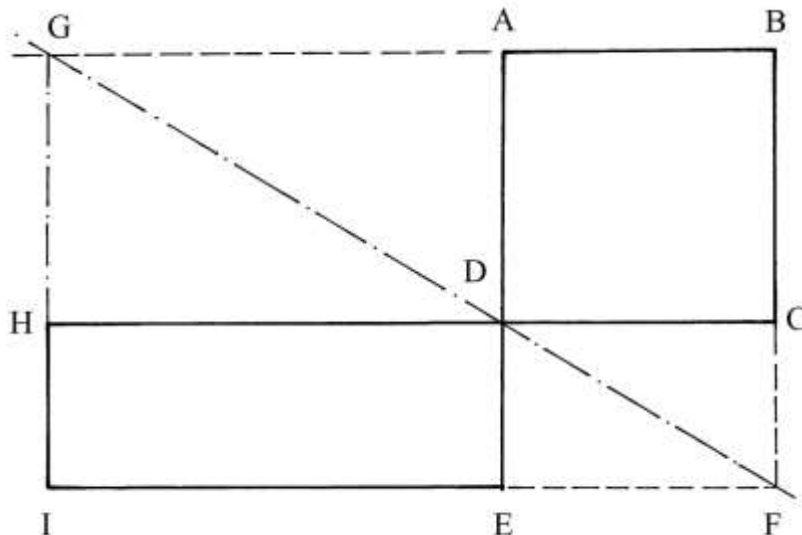
$$CI = AB * (\sqrt{7})/2.$$

Costruire il quadrato CJKI che ha area uguale alla somma delle aree dei quadrati ABCD e DGHI.

Infine è possibile confrontare le dimensioni del quadrato CJKI con quelle del quadrato DIJK della penultima figura: esse devono essere uguali.

Trasformazione di un quadrato in un rettangolo equivalente

ABCD è un quadrato che deve essere trasformato in un rettangolo di area uguale: è data la larghezza del rettangolo da costruire, che è DE.



Prolungare verso sinistra i lati AB e DC e verso il basso AD e BC.

Da D riportare in E la larghezza del rettangolo da costruire.

Dal punto E tracciare una linea parallela a DC: è fissato il punto F.

Per i punti F e D disegnare una retta che incrocia in G il prolungamento di BA.

Dal punto G abbassare la parallela a ADE: sono stabiliti i punti H e I.

Il rettangolo HDEI ha area uguale a quella del quadrato ABCD.

APPROFONDIMENTO

La stessa costruzione può essere ricavata in altro modo.

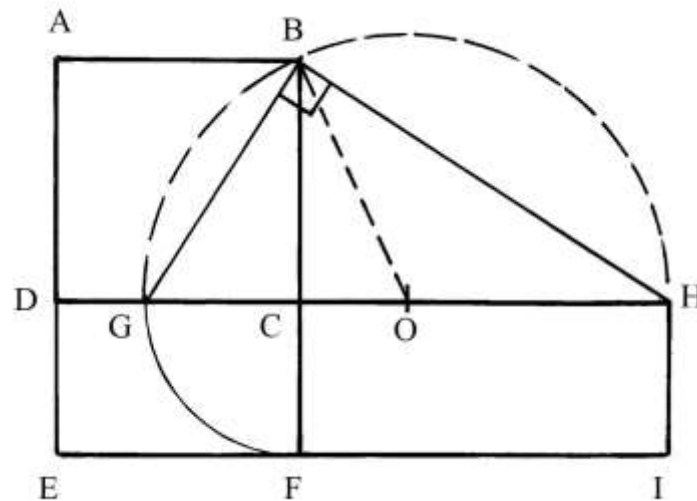
ABCD è il solito quadrato: deve essere costruito un rettangolo con la stessa area e larghezza uguale a DE, segmento posto sul prolungamento di AD.

Prolungare il lato DC verso destra e quello BC verso il basso.

Da E tracciare un segmento parallelo a DC: esso fissa il punto F.

Fare centro in C e con raggio CF (= DE) disegnare un arco di circonferenza da F fino a intersecare il lato DC nel punto G.

Tracciare il segmento GB e, perpendicolarmente ad esso, disegnare un segmento da B fino a incrociare il prolungamento di DC in un nuovo punto, H.



GBH è un triangolo rettangolo con angolo retto nel vertice B: GB e BH sono i due *cateti* e GH è l'*ipotenusa*.

Per il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli il segmento BC (altezza del triangolo rettangolo GBH rispetto all'ipotenusa GH) è *medio proporzionale* fra GC e CH:

$$GC : BC = BC : CH \quad \text{da cui}$$

$$BC^2 = GC * CH.$$

L'area del quadrato ABCD è:

$$S_{ABCD} = BC^2 \quad \text{e quella del rettangolo CHIF è:}$$

$$S_{CHIF} = CF * CH = GC * CH.$$

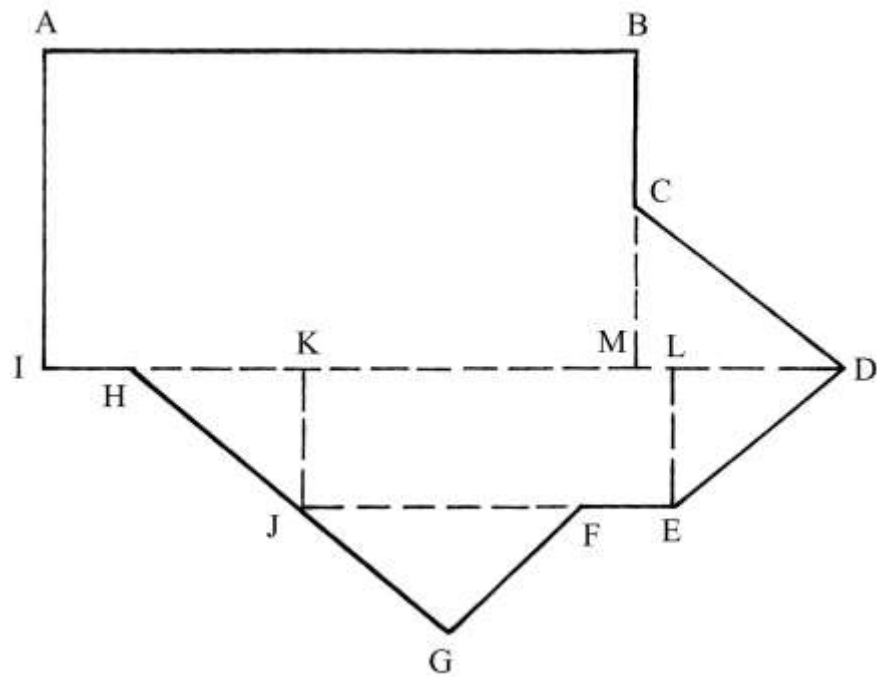
Il rettangolo CHIF ha la stessa area del quadrato ABCD.

O è il punto medio dell'ipotenusa GH: fare centro in O e con raggio $OG = OB = OH$ disegnare una semicirconfenza da G a H e passante per B: GBH è un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconfenza e a questo caso si applica il citato teorema di Euclide.

Misurazione di un terreno di forma irregolare

Un terreno ha la forma di un poligono non regolare con *nove* lati: ABCDEFGHI.

Per misurarlo esso viene scomposto in rettangoli e triangoli.



Collegare H con D. Prolungare EF verso sinistra fino a incontrare in J il lato HG.

Da J tracciare la perpendicolare JK verso la corda HD.

Da C e da E disegnare le perpendicolari a HD: sono CM e EL.

Il terreno è ora suddiviso nei seguenti poligoni:

- * il rettangolo ABMI;
- * il rettangolo JKLE;
- * il triangolo HKJ;
- * il triangolo JGF;
- * il triangolo ELD;
- * il triangolo CDM.

La superficie del terreno è data dalla somma delle aree dei rettangoli e dei triangoli nei quali è scomposto: si tratta di poligoni per i quali è facile calcolare le aree.

Proprietà del quadrato

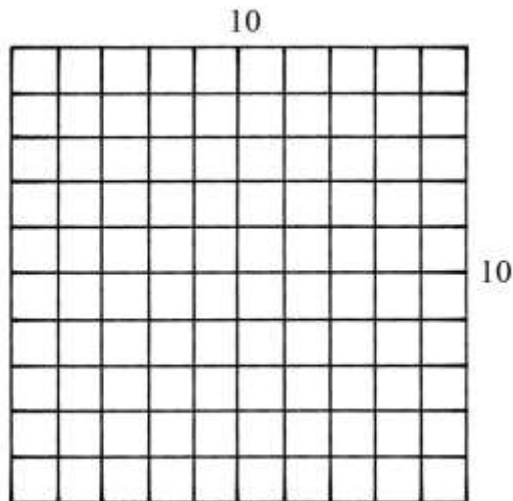
Un quadrato ha lati lunghi 10 unità: il suo perimetro p è lungo:

$$p = 10 * 4 = 40.$$

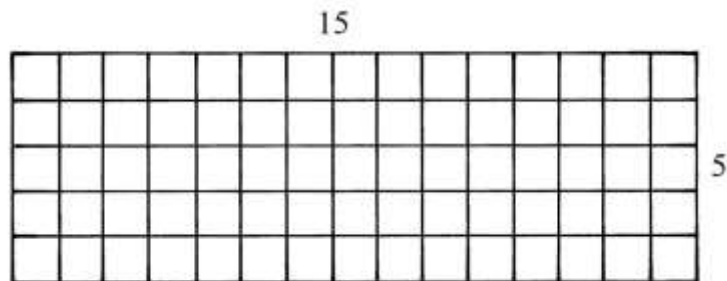
La sua area è:

$$S_{10 * 10} = 10^2 = 100.$$

Esso è formato da 100 piccoli quadrati di uguali dimensioni: $1 * 1$.



Nello schema che segue è presentato un rettangolo lungo 15 e largo 5:



Il suo perimetro è:

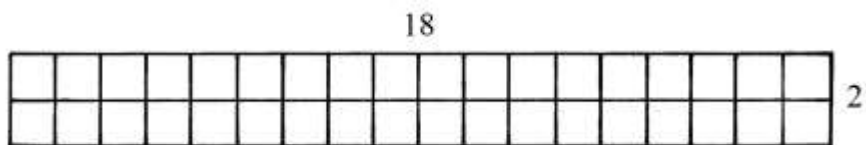
$$p = 15 + 5 + 15 + 5 = 40.$$

La sua area è:

$$S_{15 \times 5} = 15 * 5 = 75.$$

Il rettangolo è formato da soltanto 75 quadrati di dimensioni $1 * 1$.

Infine, il rettangolo che segue è lungo 18 e largo 2:



Il suo perimetro è:

$$p = 18 + 2 + 18 + 2 = 40.$$

La sua area è:

$$S_{18 \times 2} = 18 * 2 = 36.$$

Questo terzo quadrilatero contiene solo 36 quadrati di dimensioni $1 * 1$.

I tre poligoni hanno perimetri di uguale lunghezza, 40 unità: sono *isoperimetrici*. Il quadrato ha l'area massima fra i tre quadrilateri.

----- APPROFONDIMENTO -----

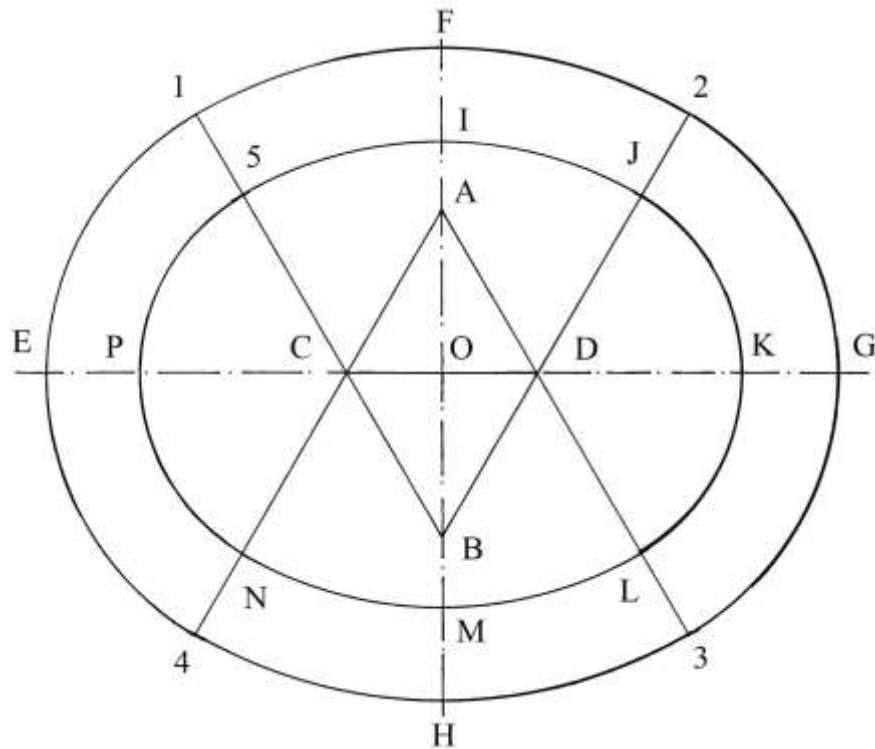
La tabella che segue riassume i dati relativi a 10 quadrilateri con perimetro lungo 40 unità:

Lunghezze lati	Aree	Perimetro
10 * 10	100	40
9 * 11	99	40
8 * 12	96	40
7 * 13	91	40
6 * 14	84	40
5 * 15	75	40
4 * 16	64	40
3 * 17	51	40
2 * 18	36	40
1 * 19	19	40

Costruzione dell'ovale

Serlio propone *quattro* diversi metodi per costruire un ovale.

Il primo richiede la presenza di due triangoli equilateri uniti lungo un lato, CD, orizzontale.



ADBC è un rombo che possiede la proprietà di avere la diagonale minore, CD, lunga quanto i suoi quattro lati:

$$CD = AC = AD = CB = DB.$$

Tracciare gli assi di simmetria fra loro perpendicolari e passanti per AB e CD.

Prolungare verso l'esterno i lati AC, BC, AD e BD.

Sul prolungamento di BC fissare due punti sono 1 e 5: per questi punti devono passare due ovali concentrici.

Fare centro in B con raggio B-1 e tracciare l'arco 1-2.

Con la stessa apertura fare centro in A e disegnare l'arco 3-4.

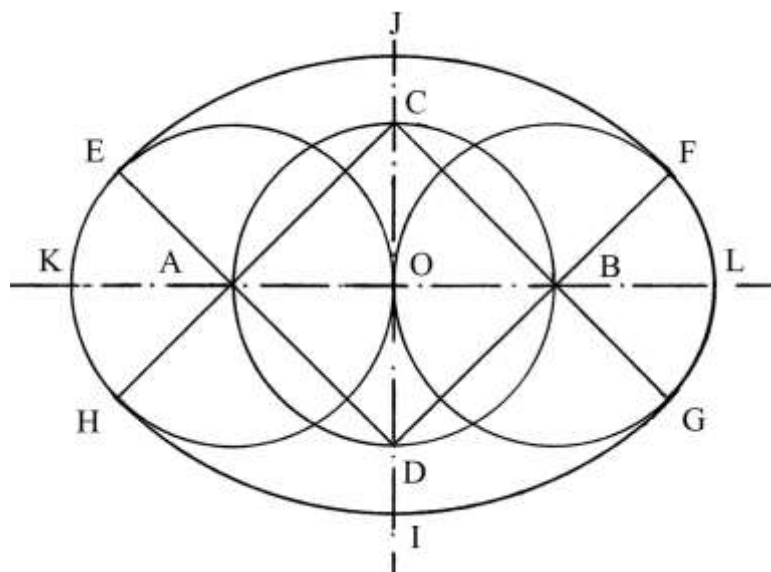
Fare centro in C e poi in D e con raggio C-1 tracciare gli archi 1-4 e 2-3 che raccordano i due precedenti archi.

E1F2G3H4 è un ovale e EG e FH sono i suoi assi.

Ripetere la precedente procedura a partire dal centro B con raggio B-5. Il secondo ovale è interno e concentrico al primo ed è P5IJKLMN.

%%

Il secondo metodo è basato sulla presenza di un quadrato con le diagonali disposte orizzontalmente e verticalmente:



AB e CD sono le diagonali del quadrato ACBD; prolungarle verso l'esterno.

Prolungare pure i lati del quadrato.

Fare centro in A e in B e disegnare due circonferenze di raggio $OA = OB$, fra loro tangenti in O, che tagliano i prolungamenti dei lati del quadrato nei punti E, F, G e H.

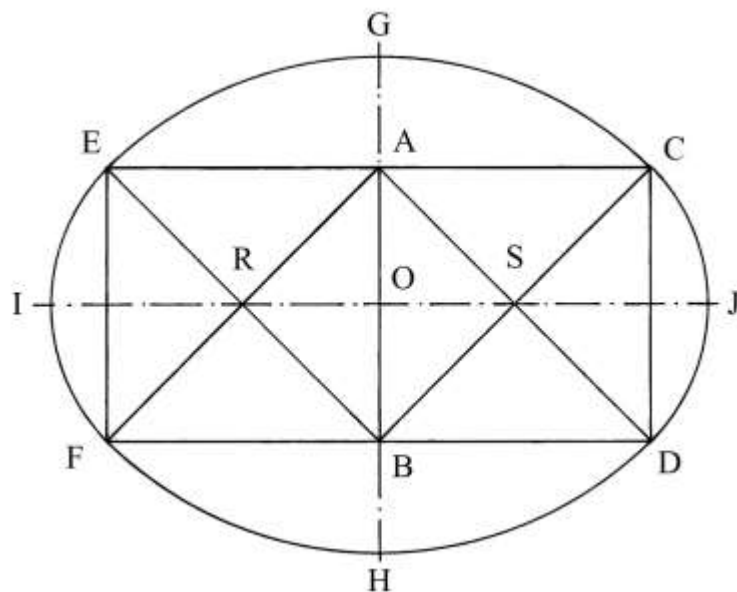
Fare centro in C e in D e con raggio $CH = DE$ tracciare due archi: sono HIG e EKF: essi raccordano gli archi di EKH e FLG.

%%

Il terzo metodo usa due quadrati di uguali dimensioni uniti lungo il loro comune lato verticale AB.

I due quadrati sono ACDB e ABFE.

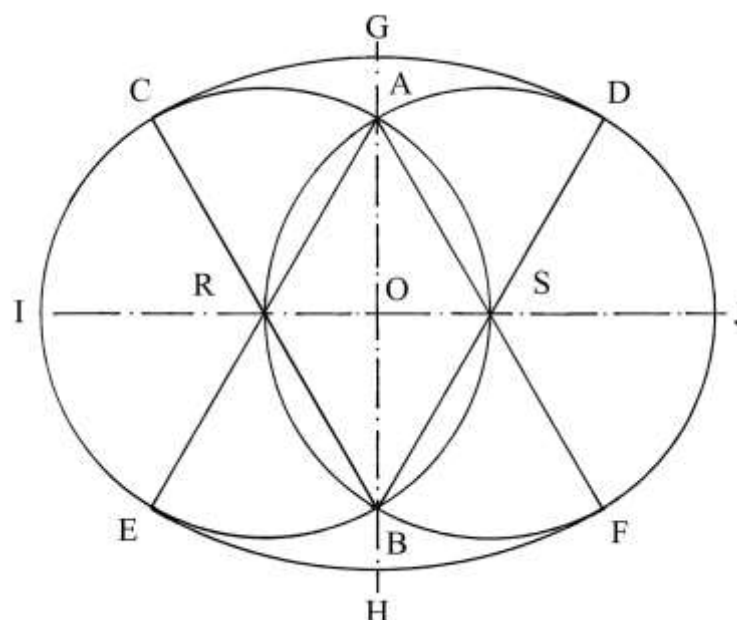
Tracciare le diagonali dei due quadrati (che si intersecano nei centri R e S) e i due assi di simmetria verticale (passante A, O e B) e orizzontale (per i punti R, O e S).



Con raggio $AF = BE$ fare centro in A e in B e disegnare gli archi FHD e EGC.
 Poi fare centro in R e in S e con raggio $RE = SC$ tracciare gli archi EF e CD che raccordano i primi due.

%%%

Il quarto metodo è basato su due circonferenze i cui centri R e S giacciono sull'altra curva. Le due circonferenze si intersecano nei punti A e B.



RASB è un rombo formato da un doppio triangolo equilatero, già utilizzato nella costruzione del primo ovale, pur se in modo diverso.

Prolungare i quattro lati del rombo fino a intersecare le circonferenze nei punti C, D, E e F.

Fare centro in A e poi in B con raggio $AE = BC$ e tracciare gli archi EHF e CGD che raccordano gli archi CIE e DJF.

GH è l'asse minore dell'ovale e IJ è il suo asse maggiore.

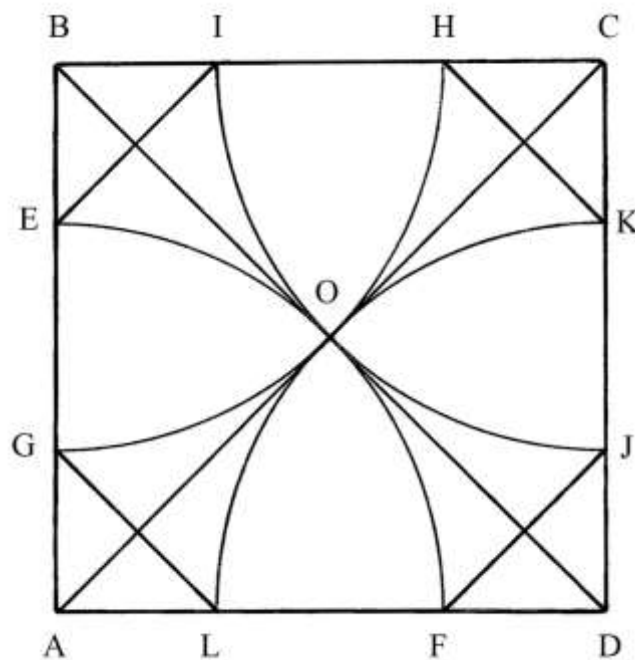
----- APPROFONDIMENTO -----

Costruzioni degli ovali uguali o simili ai quattro metodi proposti da Sebastiano Serlio si ritrovano in numerosi trattati di Autori successivi, fra i quali è lo stesso Pietro Cataneo, e in testi moderni di disegno geometrico.

Ulteriori e dettagliati approfondimenti sugli ovali sono contenuti nel libro di Edoardo Dotto citato in bibliografia.

Ottagono regolare inscritto in un quadrato

ABCD è un quadrato: al suo interno deve essere inscritto un ottagono regolare.



Tracciare le diagonali AC e BD: esse si incontrano nel punto O.

Con raggio AO fare centro nei quattro vertici del quadrato e disegnare gli archi di circonferenza EF, GH, IJ e KL: i quattro archi sono a due a due tangenti nel centro O.

Collegare le coppie di punti EI, HK, JF e LG.

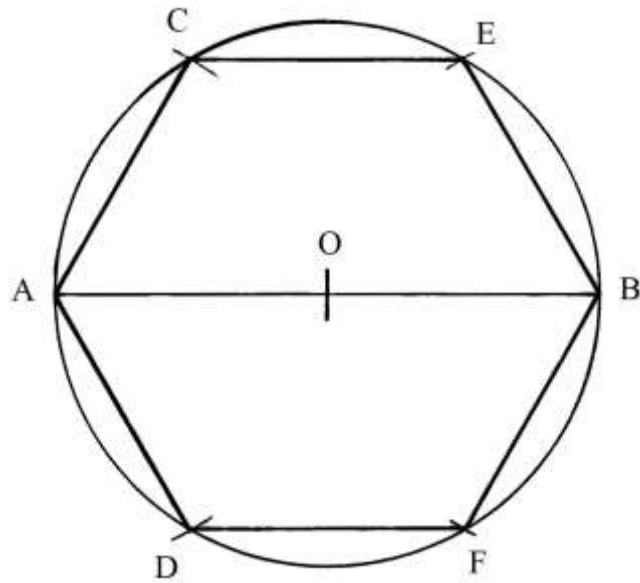
GEIHKJFL è l'ottagono regolare inscritto.

Esagono regolare inscritto

Disegnare una circonferenza di centro O e diametro AB.

Con apertura $OA = OB$ fare centro in A e in B e tracciare quattro archi che tagliano la circonferenza nei punti C, D, E e F.

ACEBFD è l'esagono inscritto nel cerchio di centro O.

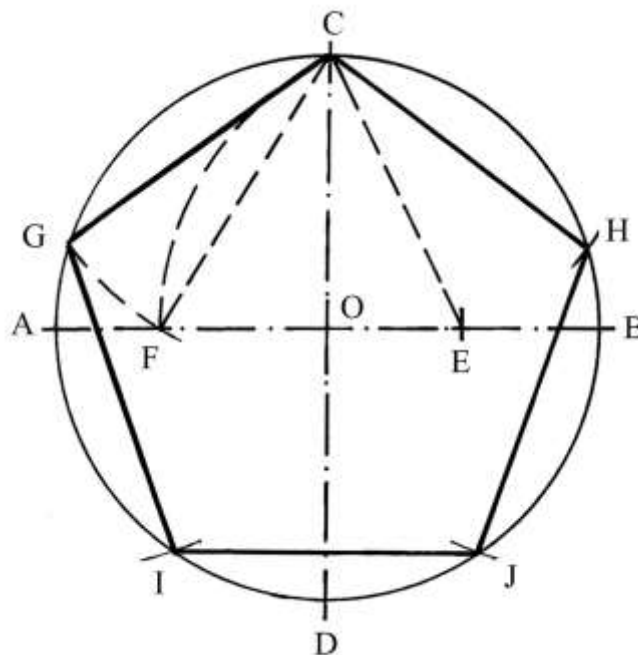


Infine, Serlio afferma che il nome “*seste*” attribuito al compasso in molte parti d’Italia derivi precisamente dalla costruzione dell’esagono inscritto: il *semidiametro* OA sarebbe la “...sesta parte della circonferenza...”, affermazione che non è del tutto esatta. In realtà, il raggio OA è la sesta parte del perimetro dell’esagono.

Pentagono

Serlio sostiene che la costruzione del pentagono sia più difficile perché questo poligono ha un numero di lati *dispari* e maggiore di 3.

Il metodo che l’Autore propone per ricavare il pentagono inscritto risale a Claudio Tolomeo (100 – 168 circa).



Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA: AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari.

Fissare il punto medio del raggio OB: è E. Collegare E con C.

Fare centro in E e con raggio EC tracciare l'arco CF: la corda CF è la lunghezza dei lati del pentagono.

Fare centro in C e con raggio CF tracciare l'arco FG e l'arco che fissa H.

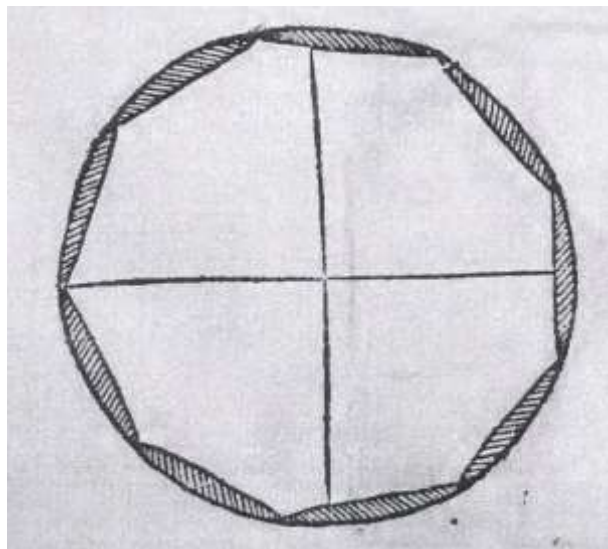
Con la stessa apertura fare centro in G e in H e fissare i punti I e J.

GCHJI è il pentagono regolare inscritto.

Costruzione dell'ennagono inscritto

Serlio propone un metodo per la costruzione di un ennagono regolare (approssimato) inscritto in un cerchio.

Non presenta alcuno schema ma soltanto il risultato finale:



Nel testo, l'Autore propone di dividere in *quattro* parti uguali la circonferenza: per chiarire il metodo, nella figura che segue è stato inscritto nel cerchio di centro il quadrato ABCD, con i lati orizzontali o verticali.

L'arco AED è lungo un quarto della circonferenza. Serlio propone di dividerlo in *nove* parti uguali, perché nove è il numero dei lati del poligono da costruire; deve essere tracciata una corda, A-4, che sottenda quattro dei nove piccoli archi.

A differenza di Cataneo che usava la divisione della circonferenza in *tre* parti uguali, Serlio usa la ripartizione in quattro parti: anche per considerazioni dovute ai periodi di attività e alle date di pubblicazione delle opere dei due Autori, si può ragionevolmente sostenere che la fonte di Cataneo sia stata Serlio. Sarebbe interessante conoscere se il metodo sia originale di Serlio o se egli si sia ispirato ad altra fonte.

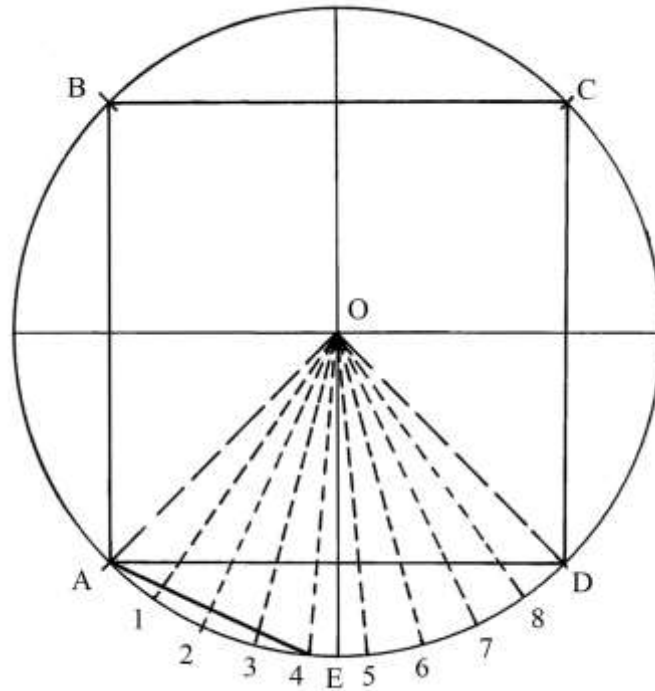
Come Cataneo, anche Serlio attribuisce al suo metodo un valore generale per la costruzione di poligoni inscritti con numero di lati dispari.

La corda A-4 è la lunghezza del lato dell'ennagono inscritto. L'angolo AOD è ampio:

$$AOD = (360/4)^\circ = 90^\circ.$$

Ciascuno degli angoli ricavati dalla divisione di AED in nove parti è ampio:

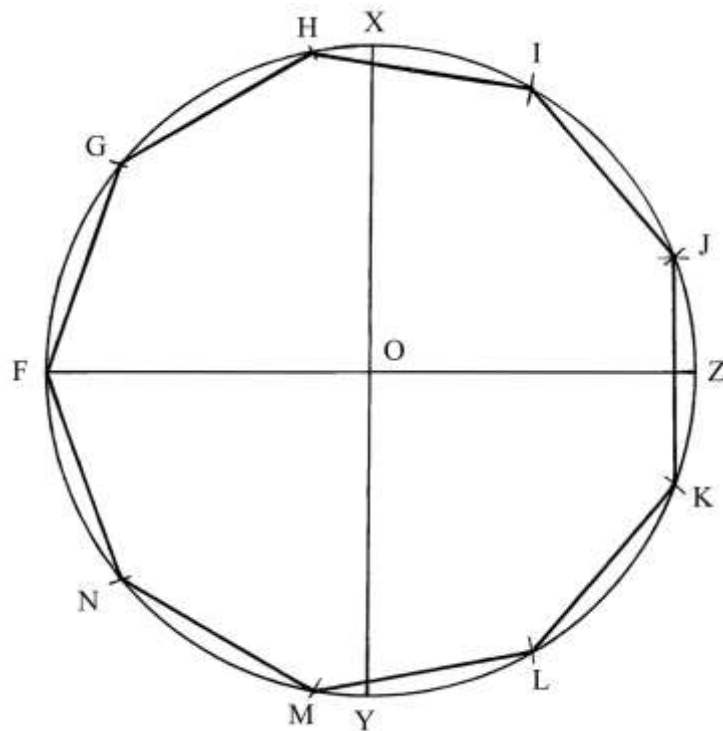
$$AO-1 = AOD/9 = (90/9)^\circ = 10^\circ.$$



L'angolo AO-4 è:

$AO-4 = 4 * (AO-1) = 4 * 10^\circ = 40^\circ$, che è l'ampiezza dell'angolo al centro del cerchio sotteso dal lato di un ennagono.

Disegnare una seconda circonferenza con centro in O e raggio uguale a quello della precedente:



FZ e XY sono due diametri fra loro perpendicolari.

A partire dal vertice F riportare sulla circonferenza, in senso orario, la lunghezza della corda A-4 misurata sul penultimo schema: FGHIJKLMN è l'ennagono regolare inscritto, approssimato ma molto preciso.

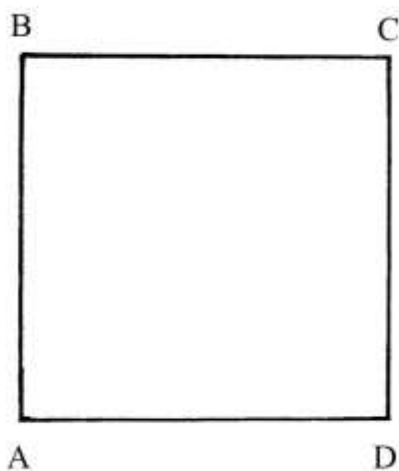
L'angolo FOG è ampio:

$$FOG = (360/9)^\circ = 40^\circ.$$

Le proporzioni quadrangolari

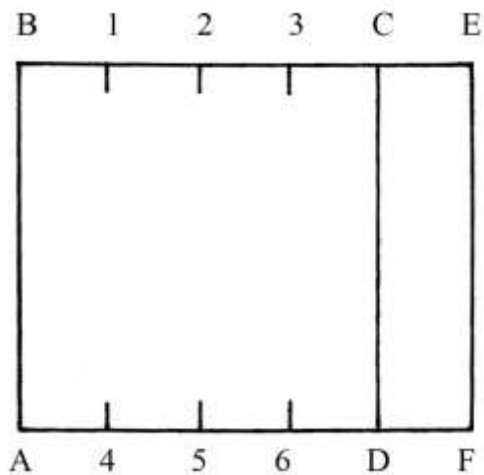
Serlio presenta sette diversi esempi di proporzioni che chiama *quadrangolari*.

La prima è rappresentata dal quadrato perfetto, con lati tutti di uguale lunghezza e quattro angoli retti.



%%%%%%%%%

La seconda proporzione è chiamata *sesquiquarta* perché è formata da un quadrato e da un suo quarto (CEFD):



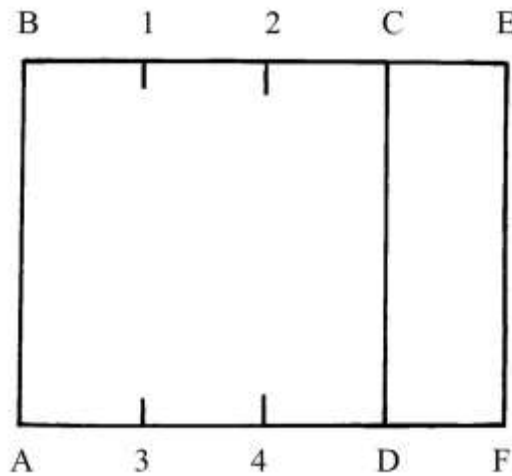
I lati BC e AD sono divisi in quattro parti uguali: CE è lungo quanto C-3.

ABEF è un rettangolo i cui lati sono lunghi in proporzione 5 : 4:

$$AF : EF = 5 : 4.$$

%%%

La terza proporzione è una *sesquiterza* ed è formata da un quadrato e da un suo terzo:



CE è lungo quanto C-2 che è *un terzo* di BC.

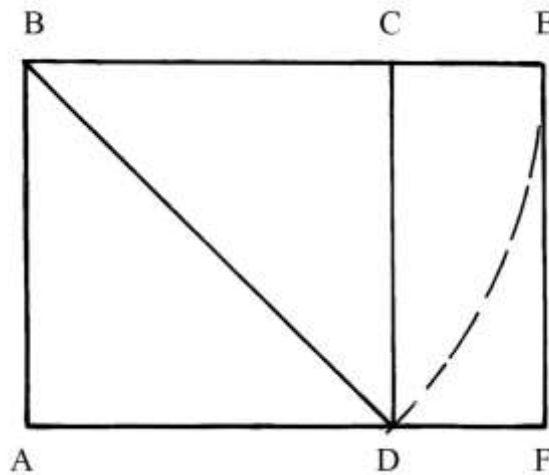
ABEF è un rettangolo i cui lati sono lunghi in proporzione 4 : 3:

$$AF : EF = 4 : 3.$$

%%%

Serlio chiama la quarta proporzione *diagonea*: nel quadrato ABCD è tracciata la diagonale BD.

Prolungare verso destra i lati AD e BC.



Fare centro in B e con raggio BD disegnare l'arco DE e poi il rettangolo CEFD.

La lunghezza di BD è un numero irrazionale:

$$BD = AD * \sqrt{2}.$$

La lunghezza di CE è:

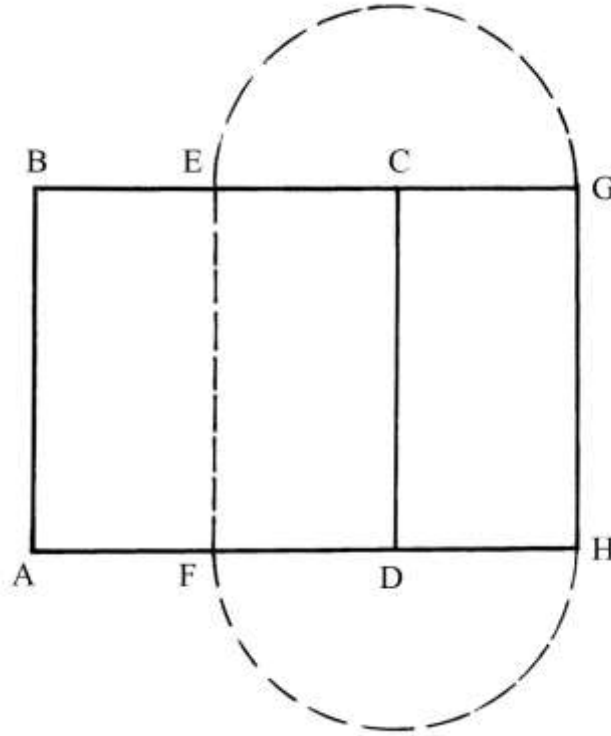
$CE = BE - BC = BD - AB = AB * \sqrt{2} - AB = AB * (\sqrt{2} - 1)$, che è anch'esso un numero irrazionale.

ABEF è un rettangolo con i lati le cui lunghezze sono in proporzione:

$$BE : AB = AB * \sqrt{2} : AB = \sqrt{2} : 1.$$

%%%%%%%%%

La quinta proporzione è detta *sesquialtera*: ABCD è il solito quadrato; E e F sono i punti medi dei lati BC e AD.



Prolungare verso destra i lati AD e BC.

Fare centro in C e in D e con raggio $CE = DF$ tracciare due semicirconferenze da E a G e da F a H.

Il rettangolo CGHD ha lati lunghi:

- * $CG = DH = BC/2 = AB/2$;
- * $GH = AB$.

L'area di CGHD è:

$$S_{CGHD} = CG * GH = (AB/2) * AB = AB^2/2.$$

L'area del rettangolo ABGH è:

$$S_{ABGH} = S_{ABCD} + S_{CGHD} = AB^2 + AB^2/2 = 3/2 * AB^2.$$

%%%%%%%%%

La sesta proporzione è chiamata *superbiparziante*.

I lati del quadrato ABCD sono divisi in *tre* parti uguali e ad esso è aggiunto il rettangolo CEFD che ha lati lunghi:

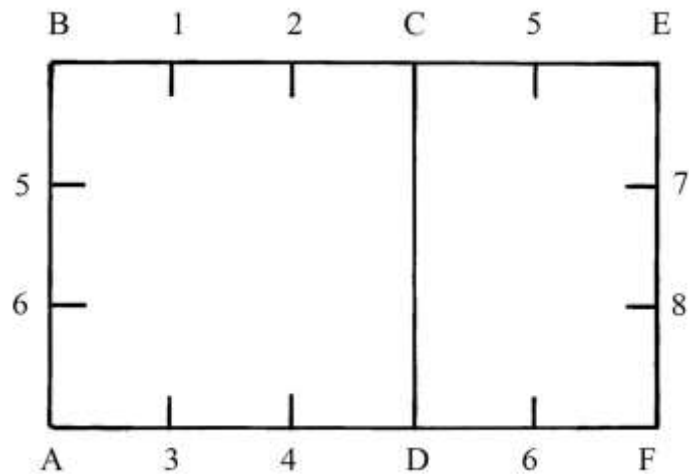
- * $CE = 2/3 * BC = 2/3 * AB$;
- * $EF = AB$.

L'area del rettangolo CEFD è:

$$S_{CEFD} = CE * EF = (2/3 * AB) * AB = 2/3 * AB^2.$$

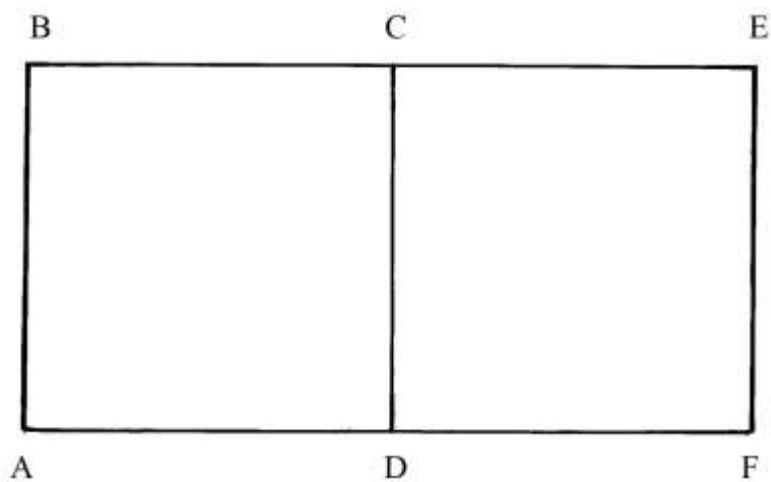
L'area del rettangolo ABEF è:

$$S_{ABEF} = S_{ABCD} + S_{CEFD} = AB^2 + 2/3 * AB^2 = 5/3 * AB^2.$$



%%

La settima proporzione è *doppia*: al quadrato ABCD è stato unito un secondo quadrato, CEFD, di uguali dimensioni:



L'area di ABEF è:

$$S_{ABEF} = AB * AF = AB * (AD + DF) = AB * (2 * AB) = 2 * AB^2.$$

Bibliografia

1. Calandri Filippo, "Aritmetica", Firenze, Lorenzo Morgiani e Johann Petri, 1491-1492, 104 carte.
2. Calandri Filippo, "Aritmetica". Secondo la lezione del Codice 2669 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze, Firenze, Edizioni della Cassa di Risparmio di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, 1969, pp. XXXIV + 222.
3. Calandri Pietro Maria, "Compendium de agrorum corporumque dimensione", in "I due trattati dell'Agricoltura e della Coltivazione delle Viti", di Giovanvettorico Soderini, a cura di Alberto Bacchi Della Lega, Bologna, Romagnoli Dall'Acqua, 1902, pp. da 291 a 346.
4. Cataneo Pietro, "Le pratiche delle due prime matematiche", Venezia, Giuseppe Griffio, 1567, pp. 88.
5. "L'architettura di Pietro Cataneo Senese", Venezia, Eredi di Aldo Manuzio, 1567, pp. 217.
6. Dotto Edoardo, "Il disegno degli ovali armonici", Catania, Le Nove Muse Editrice, 2002, pp. 95.
7. Franci R.(affaella) – Toti Rigatelli L.(aura), "La trattatistica matematica del Rinascimento Senese", "Gli Atti dell'Accademia delle Scienze di Siena detta de' Fisiocritici", serie XIV – tomo XIII, 1981, pp. 71.
8. Gessner Samuel, "Le "per numero" et "per linea" dans les écrits d'architecture du Cinquecento", "Scholion", Stiftung Bibliothek Werner Oechslin, bulletin 3/2004, pp. 61-81.
9. Gessner Samuel, "Savoir manier les instruments: la géométrie dans les écrits italiens d'architecture (1545-1570)", "Revue d'Histoire des Mathématiques", Société Mathématique de France, tome 16 fascicule 1, 2010, pp. 1-62.
10. Guidi Giuseppe, "Ragguaglio delle monete, dei pesi e delle misure attualmente in uso negli Stati Italiani e nelle principali piazze commerciali d'Europa", 2^a edizione, Firenze, Guidi e Pratesi, 1855, pp. 319.
11. Høyrup Jens, "Linee larghe. Un'ambiguità geometrica dimenticata", "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", XV, 1995, n. 1, pp. 3-14.
12. Piccato Alfredo, "Dizionario dei termini matematici", Biblioteca Universale Rizzoli, Milano, 1987, pp. XI+536.
13. "Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze", Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.
14. Zupko Ronald Edward, "Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century", Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.