

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: unità di misura usate a Roma; area di terreni di varie forme poligonali e circolari; formula di Erone per l'area di un triangolo; teorema delle corde nel cerchio; volumi dell'acqua in cisterne; volumi del vino; volumi e pesi di muri in pietra; torri e scale appoggiate; unione di sacchi

NOTE

Juan de Ortega (1480-1568) è stato un matematico spagnolo e un domenicano. Ha insegnato in Aragona e in Italia, a Roma.

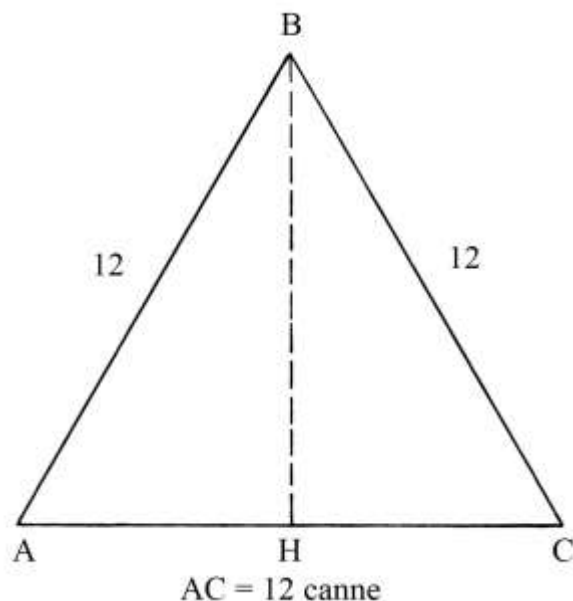
Un suo trattato di aritmetica e di geometria è stato pubblicato a Barcellona nel 1512, poi ripubblicato in italiano a Roma nel 1515 con il titolo *Suma de arithmetica*.

Questo articolo considera solo la parte dedicata alla Geometria contenuta nel testo in italiano.

- * Quasi tutti disegni del testo di de Ortega sono stati rifatti. Nell'originale le figure sono prive di lettere: esse sono state aggiunte e sono maiuscole.
- * Alcuni schemi di solidi sono stati ridisegnati con due viste in proiezioni ortogonali: la pianta e la vista frontale.
- * Nel trattato di de Ortega i singoli problemi sono chiamati "*Exemplo*" e sono numerati progressivamente: *Exemplo* è qui reso con "*problema*".
- * I passaggi delle soluzioni dei problemi sono riordinati sotto forma di istruzioni successive, da eseguire rispettando l'ordine in cui sono organizzate.
- * Molti problemi si riferiscono a terreni di varia forma.
- * In alcuni casi i numeri misti, contenenti una parte intera e una parte frazionaria, sono stati scritti come numeri naturali: " $12 \& \frac{1}{2}$ " = " $12,5$ ".
- * I numeri misti sono racchiusi fra parentesi tonde: $(3 + 1/7)$.
- * Alcuni commenti e aggiunte sono state inserite fra parentesi quadre: [...].
- * La divisione è indicata con il simbolo $"/$.
- * Alcuni argomenti sono ampliati in appositi riquadri chiamati "APPROFONDIMENTO", graficamente separati dal testo.

1 – Terreno a forma di triangolo equilatero

Un terreno ha la forma di un triangolo equilatero che ha lati lunghi 12 canne.



Il disegno originale è un po' primitivo e privo di lettere ai vertici: lo schema qui sopra è in scala.

Deve essere calcolata la sua area in canne quadrate.

Occorre ricavare la lunghezza dell'altezza BH:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 12^2 - (12/2)^2 = 144 - 36 = 108 \quad e$$

$$BH = \sqrt{108} = (10 + 8/21) \text{ canne.}$$

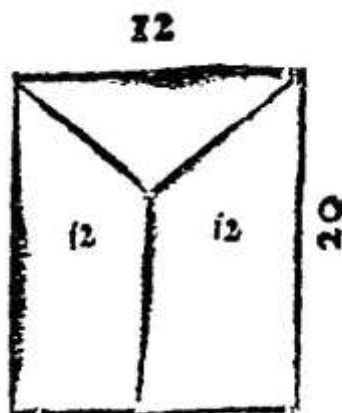
L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = BH * AC/2 = (10 + 8/21) * 6 = (62 + 2/7) \text{ canne quadrate.}$$

2 – Torre di forma triangolare

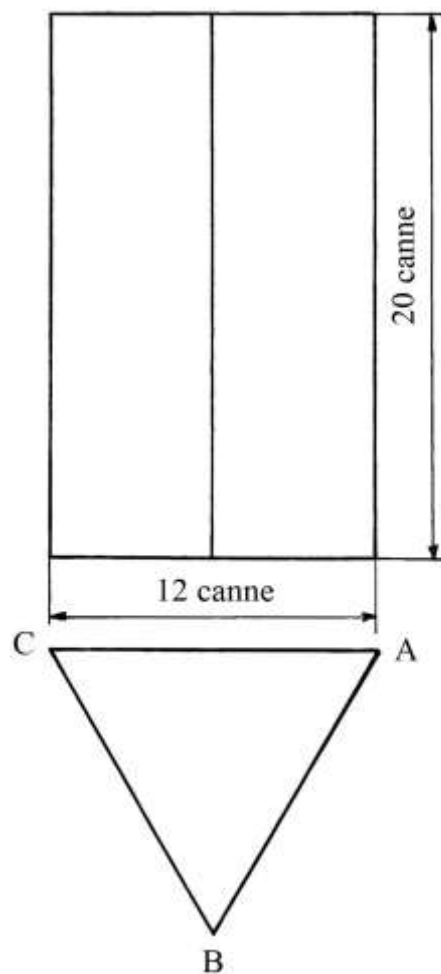
Su di un terreno di forma a triangolo equilatero come quello che ha fatto oggetto del precedente problema deve essere costruita una torre alta $h = 20$ canne.

La figura che segue riproduce l'originale contenuto nel trattato di de Ortega:



Lo schema originale fonde la faccia superiore e la vista frontale.

Nella figura che segue, il solido è disegnato in doppia proiezione ortogonale:



Il volume V della torre è:

$$V = S_{ABC} * h = (62 + 2/7) * 20 = (1245 + 5/7) \text{ canne cube.}$$

L'Autore esprime il volume in *canne quadrate* (unità di misura delle superfici), anziché *cubiche*: in tutto il trattato segue questa regola scorretta. In questo articolo è usata l'espressione corretta, cubico e varianti.

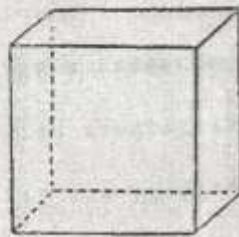
----- APPROFONDIMENTO -----

Juan de Ortega avrebbe potuto seguire l'esempio fornito da alcuni Autori toscani che definirono il *braccio cubico* con l'espressione *braccio quadro corporeo*. Fra i più noti di quegli Autori, vi è Pietro [o Pier] Maria Calandri (1457 – 1508) che scrisse un piccolo trattato geometrico dal titolo "*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*", poi pubblicato da Giovan Vettorino Soderini (1526 – 1596) nel suo volume di agricoltura. A parte il titolo, il testo geometrico è scritto in italiano.

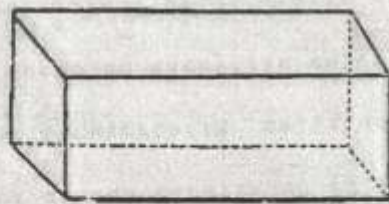
Calandri apparteneva a un'importante famiglia di abacisti fiorentini.

A p. 328 del suo trattato, Calandri definisce le unità di misura basate sul braccio con queste affermazioni:

Dicemmo che braccio quadro superficiale era una superficie quadrata che per ogni verso era un braccio; e dicendo superficie s'intende piana e dicendo quadrata s'intende d'angoli retti. Adunque braccio quadro superficiale è una figura quadrata piana di angoli retti, che per ogni lato è un braccio lunga; ma il braccio quadro corporeo è un corpo che dai Greci è chiamato cubo e dai volgari dado, il quale è per ogni suo verso un braccio lineale, che volgarmente è detto un braccio andante. Adunque



braccio quadro corporeo è un cubo che è lungo un braccio, largo un braccio et alto un braccio, come questa figura quadrilatera; e quando diciamo questo braccio corporeo è quadro tante



braccia, s'intende che tanti dei sopradetti cubi siano in quel corpo, quante sono quelle braccia quadre che diciamo che egli è. E dobbiamo

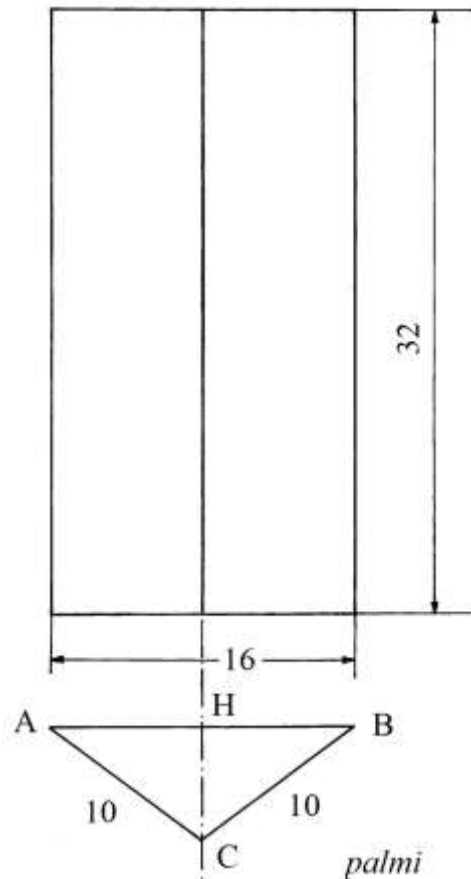
sapere che uno di questi bracci quadri corporei sieno 9 staia di grano, ovvero cinque barili di

3 – Volume dell'acqua contenuta in un pozzo

Un pozzo ha la sezione a forma di triangolo isoscele con lati aventi le lunghezze espresse in *palmi*: secondo Angelo Martini (a p. 596 del suo *Manuale* citato in bibliografia), la *canna architettonica* valeva 10 *palmi romani*; le due unità di lunghezza corrispondevano a:

- * 1 canna architettonica = 2,234218 metri;
- * 1 palmo romano = 0,223422 metri.

Il pozzo è profondo $h = 32$ palmi e le lunghezze del triangolo di base, anch'esse espresse in palmi, sono riportate sullo schema che segue. Esso è pieno d'acqua e deve essere calcolato il suo volume.

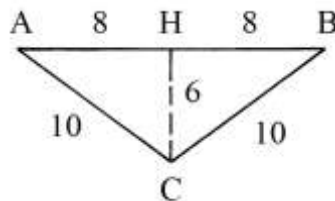


CH è l'altezza del triangolo ABC rispetto alla base AB. La sua lunghezza è data da:

$$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 10^2 - (16/2)^2 = 100 - 64 = 36 \quad e$$

$$CH = \sqrt{36} = 6 \text{ palmi.}$$

CH divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: AHC e BHC. I loro lati hanno lunghezze che formano la terna derivata 6-8-10 che proviene dalla primitiva 3-4-5 i cui membri sono moltiplicati per 2:



L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = HC \cdot AB/2 = 6 \cdot 16/2 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ palmi quadrati.}$$

Il volume del pozzo è:

$$V = S_{ABC} \cdot h = 48 \cdot 32 = 1536 \text{ palmi cubi.}$$

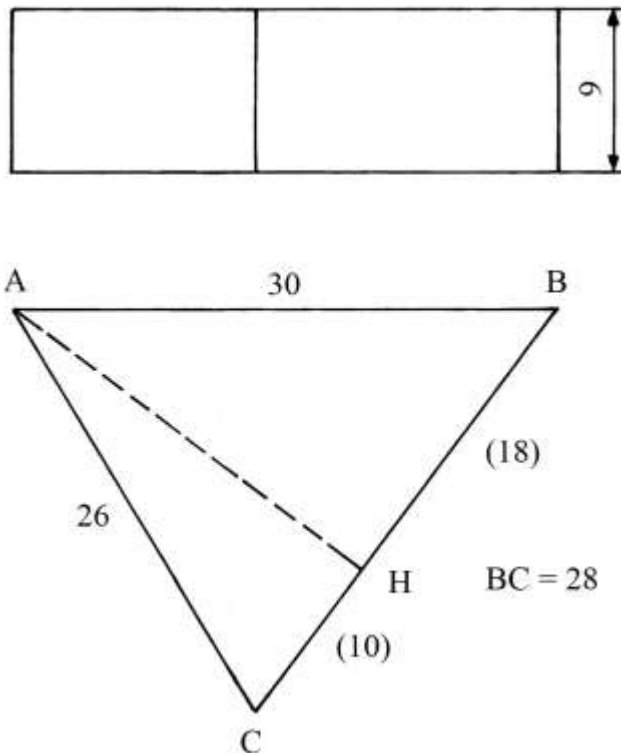
Infine, è chiesto quante *caldare* [caldaie] contenenti 10 palmi cubi possono essere riempite con l'acqua contenuta nel pozzo:

$$N_{CALDARE} = V/10 = 1536/10 = (153 + 6/10) \text{ Caldare.}$$

4 – Un recipiente triangolare

Una *ydria* [forse *hydria*, dal greco] è un recipiente che contiene acqua: ha la base che è formata da un triangolo scaleno.

L'altezza del recipiente h è 9 palmi.



I lati della base sono lunghi 26, 28 e 30 palmi: queste lunghezze formano una terna che è collegata al famoso triangolo 13-14-15, oggetto di studi da parte di numerosi geometri, almeno a partire da Erone di Alessandria (I secolo d.C.) in poi.

Infatti:

$$26 - 28 - 30 = 2 * 13 - 2 * 14 - 2 * 15.$$

Per calcolare l'area di ABC, l'Autore usa una procedura che risale a Erone: il primo passo deve permettere di ricavare la lunghezza dell'altezza AH, relativa al lato BC.

Nello schema originale non vi è traccia di questa altezza.

CH è la proiezione di AC sul lato CB e HB lo è del lato AB.

Ecco la procedura proposta da de Ortega:

- * moltiplicare per sé stesse le lunghezze dei lati più lungo (AB) e più corto (AC):
 - * $AB^2 = 30^2 = 900$;
 - * $AC^2 = 26^2 = 676$;
- * sottrarre il quadrato della lunghezza di AC dal quadrato di quella di AB:

$$900 - 676 = 224$$
- * dividere per 2: $224/2 = 112$;
- * dividere per la lunghezza del terzo lato, BC: $112/28 = 4$;
- * sommare con metà della lunghezza di BC: $4 + BC/2 = 4 + 28/2 = 18$,
lunghezza della proiezione HB;
- * moltiplicare per sé stesso: $18 * 18 = 324$;
- * sottrarre dal quadrato della lunghezza di AB:

$$AB^2 - 324 = AB^2 - HB^2 = 900 - 324 = 576$$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{576} = 24$ palmi, lunghezza dell'altezza AH.

L'area di ABC è data da:

$$S_{ABC} = AH * BC/2 = 24 * 28/2 = 24 * 14 = 336 \text{ palmi quadrati.}$$

Il volume dell'acqua contenuta è:

$$V = S_{ABC} * h = 336 * 9 = 3024 \text{ palmi cubi.}$$

Un *boccale* contiene 3 palmi cubi di acqua:

Il numero dei boccali che misurano l'acqua contenuta nell'*hydria* è:

$$N_{BOCCALI} = V/3 = 3024/3 = 1008.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Le formule usate per calcolare le lunghezze delle proiezioni BH e CH sono le seguenti:

* $BH = (AB^2 + BC^2 - AC^2)/(2 * AC);$

* $CH = (AC^2 + BC^2 - AB^2)/(2 * AC).$

5 – Peso di un muro di pietra

Un muro di pietra ha la base formata da un triangolo scaleno i cui lati sono lunghi 10,15 e 20 palmi.

Secondo l'Autore, un'altezza del triangolo sarebbe lunga 8 palmi: essa sarebbe BH, perché nel trattato essa sarebbe l'altezza relativa al lato del triangolo più lungo, che è AC.

Il muro è alto $h = 12$ palmi.

Devono essere calcolati il volume e il peso della costruzione.

In realtà, l'altezza BH è di 7,26 palmi, dato che può essere ricavato ricavando l'area con la formula di Erone.

Il perimetro $2 * p$ del triangolo ABC è: $2 * p = AB + BC + AC = 10 + 15 + 20 = 45.$

Il semiperimetro è: $p = 45/2 = 22,5.$

L'area di ABC è data da:

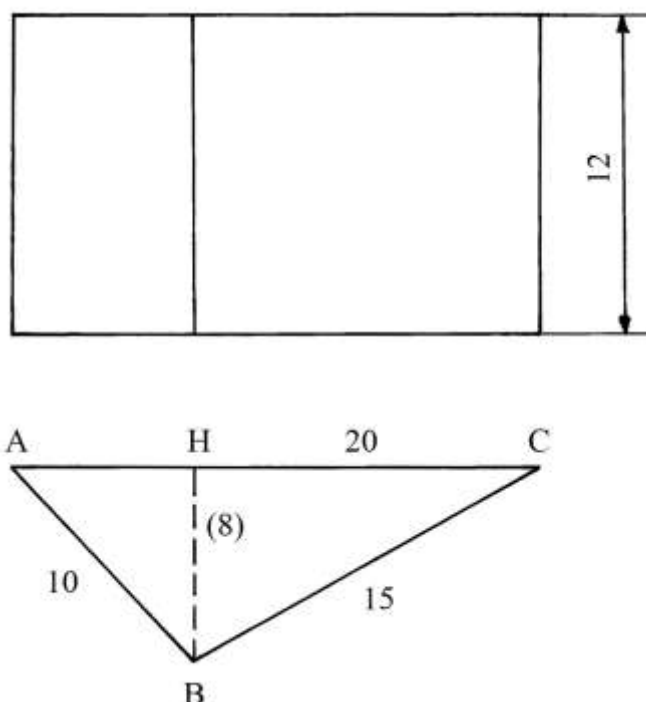
$$S_{ABC} = \sqrt{[p * (p - AB) * (p - BC) * (p - AC)]} =$$

$$= \sqrt{[22,5 * (22,5 - 10) * (22,5 - 15) * (22,5 - 20)]} =$$

$$= \sqrt{(22,5 * 12,5 * 7,5 * 2,5)} = \sqrt{5273,4375} \approx 72,6184 \text{ palmi quadrati, area di ABC.}$$

La lunghezza di BH è ricavata da:

$$BH = 2 * S_{ABC}/AC = 2 * 72,6184/20 \approx 7,26 \text{ palmi.}$$



Utilizziamo il dato *errato* dell'altezza BH, per poter descrivere i risultati proposti da de Ortega. L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = AC * BH/2 = 20 * 8/2 = 80 \text{ palmi quadrati.}$$

Il volume del muro è:

$$V = S_{ABC} * h = 80 * 12 = 960 \text{ palmi cubi.}$$

La pietra di cui è fatto il muro pesa secondo la proporzione di $(1 + \frac{1}{2})$ palmi cubi per 100 libbre: il peso P vale:

$$P = V * 100/1,5 = 960 * 100/1,5 = 64000 \text{ libbre.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----
Calcoliamo i dati corretti sulla base della lunghezza effettiva di BH, che è 7,26 palmi, invece di 8.

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = AC * BH/2 = 20 * 7,26/2 = 72,6 \text{ palmi quadrati.}$$

Il volume corretto del muro è:

$$V = S_{ABC} * h = 72,6 * 12 = 871,2 \text{ palmi cubi.}$$

Il peso P della pietra è:

$$P = V * 100/1,5 = 871,2 * 100/1,5 = 58080 \text{ libbre.}$$

Lo scostamento rispetto ai dati calcolati da de Ortega è consistente.

%%%

Lo schema che segue riproduce la base triangolare.

Prolungare verso il basso i lati AB e CB.

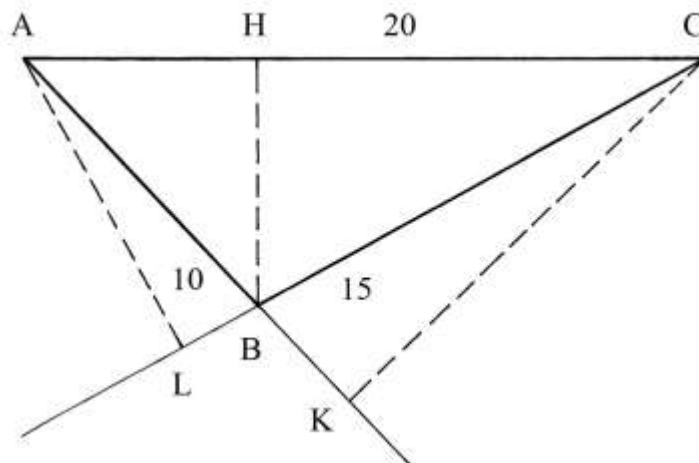
Dato che il triangolo ABC possiede un angolo ottuso nel vertice B, due altezze cadono all'esterno del poligono; esse sono:

* CK, relativa al lato AB;

* AL, relativa al lato CB.

Possiamo ricavare le lunghezze di queste due altezze:

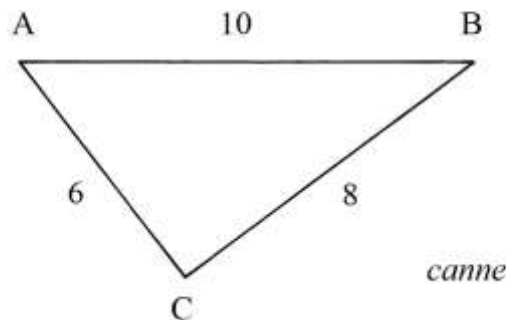
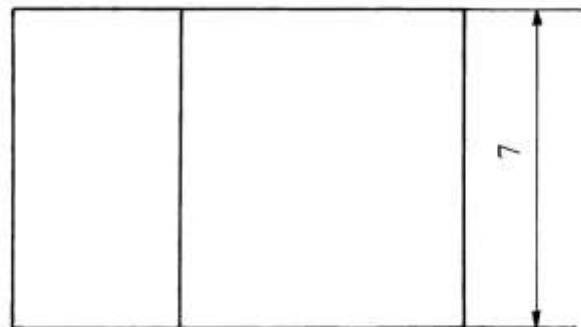
- * $CK = 2 * S_{ABC}/AB = 2 * 72,6/10 = 14,52$ palmi;
 - * $AL = 2 * S_{ABC}/BC = 2 * 72,6/15 = 9,68$ palmi.
- Nessuna delle tre altezze del triangolo ha esattamente lunghezza di 8 palmi.



6 – Volume di un muro

Un muro ha base a forma di triangolo scaleno con lati lunghi 6, 8 e 10 canne.

Nel testo, l'altezza h è inizialmente indicata in 7 *palmi*: i successivi calcoli sono basati sulla lunghezza di 7 *canne* e qui seguiremo questa seconda indicazione.



L'area del triangolo di base, ABC, è calcolata una procedura che deriva dall'applicazione della formula di Erone, peraltro non citato.

La procedura è qui riprodotta ripartendola in passi successivi:

- * sommare le lunghezze dei lati: $AB + BC + AC = 10 + 8 + 6 = 24$ [perimetro];
- * dividere per 2: $24/2 = 12$ [semiperimetro];
- * sottrarre la lunghezza di AB dal semiperimetro: $12 - 10 = 2$;
- * sottrarre la lunghezza di BC dal semiperimetro: $12 - 8 = 4$;
- * sottrarre la lunghezza di AC dal semiperimetro: $12 - 6 = 6$;
- * moltiplicare le tre differenze: $2 * 4 * 6 = 48$;
- * moltiplicare per il semiperimetro: $48 * 12 = 576$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{576} = 24$ canne quadrate, area di ABC.

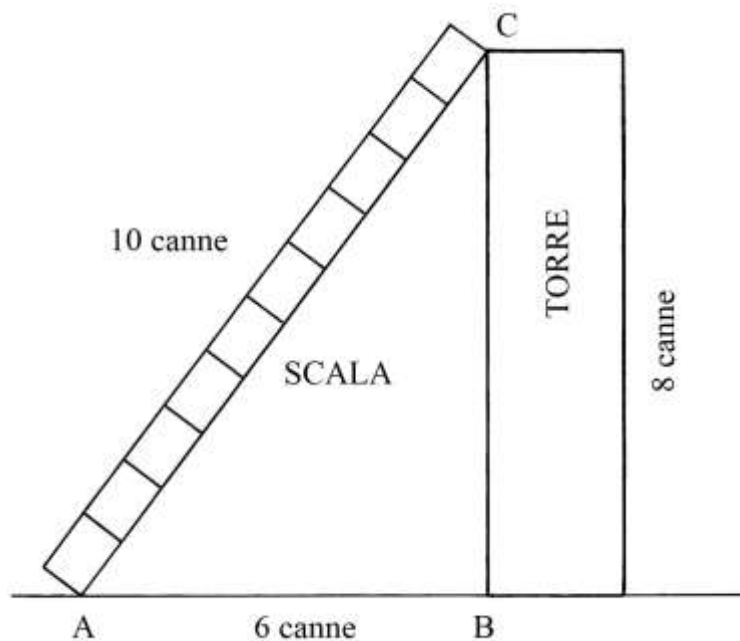
Il volume del muro è:

$$V = S_{ABC} * h = 24 * 7 = 168 \text{ canne cube.}$$

NOTA: nel trattato non esiste il problema (“*Exemplo*”) numero 7.

8 – Scala adagiata a una torre

Una torre è alta 8 canne e il suo proprietario vuole poggiare una scala che raggiunga la cima dell'edificio: essa è lunga 10 canne.



Il problema chiede la distanza fra il piede della scala e quello della torre: è la lunghezza di AB.

ABC è un triangolo rettangolo: BC è un cateto lungo 8 canne e la scala AC è l'ipotenusa lunga 10 canne.

AB è il cateto di lunghezza incognita, che è ricavata da:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \quad e$$

$$AB = \sqrt{36} = 6 \text{ canne.}$$

9 – Altro problema sulla scala poggiata a una torre

Il problema utilizza i dati del precedente.

Il proprietario desidera costruire una scala che arrivi alla cima della torre e chiede che il suo piede sia distante $AB = 6$ canne da quello della torre.

Deve essere calcolata la lunghezza della scala.

Utilizziamo lo schema del precedente problema:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \quad \text{e}$$

$$AC = \sqrt{100} = 10 \text{ canne.}$$

10 – Terzo problema sulla scala poggiata a una torre

Il proprietario della torre ha a disposizione una scala lunga 10 canne con la quale raggiunge la sua cima.

Il piede della scala è poggiato a 6 canne di distanza dalla base della torre.

È chiesta l'altezza della torre, BC nello schema del precedente problema 8:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \quad \text{e}$$

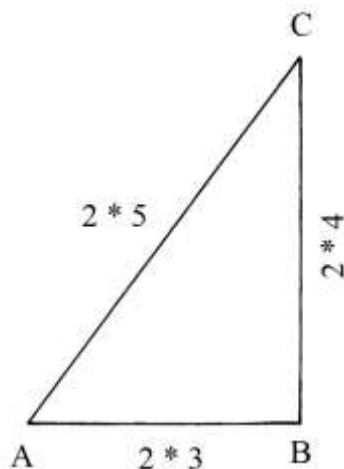
$$BC = \sqrt{64} = 8 \text{ canne.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Sia permesso esprimere qualche perplessità sulla lunghezza della scala presentata in questi tre problemi: stando al citato *Manuale di Metrologia* di Angelo Martini, la canna architettonica equivaleva a 2,234218 metri: è un po' difficile immaginare la costruzione e l'impiego di una scala – probabilmente di legno – lunga ben 10 canne = 22,34218 metri!

%%%

Il triangolo rettangolo ABC ha lati con lunghezze formanti la terna derivata 6-8-10 che proviene dalla primitiva 3-4-5:

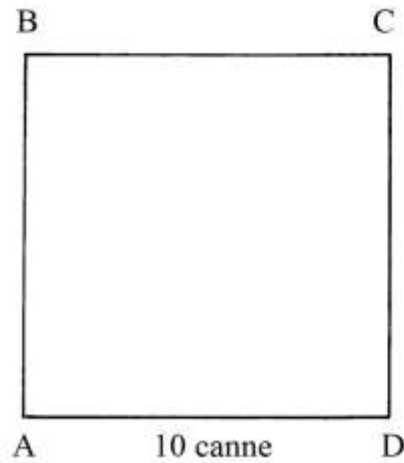


11 – un terreno quadrato

Un terreno ha la forma di un quadrato e i suoi lati sono lunghi 10 canne.

La sua area è:

$$S_{ABCD} = AB^2 = 10^2 = 100 \text{ canne quadrate.}$$

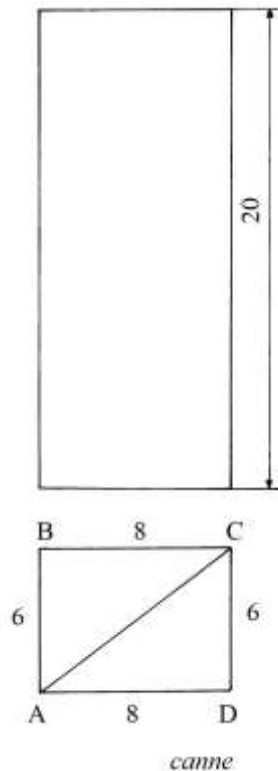


Se sul terreno viene costruita una torre alta 15 canne, il suo volume V è dato da:

$$V = S_{ABCD} * 15 = 100 * 15 = 1500 \text{ canne cube [l'Autore le chiama "canne quadrate"]}.$$

12 – Volume di una torre a base rettangolare

Una torre è alta h 20 canne e la sua base è rettangolare: è lunga 8 canne e larga 6.



Deve essere ricavato il volume della torre.

L'area della base rettangolare è:

$$S_{ABCD} = AD * AB = 8 * 6 = 48 \text{ canne quadrate.}$$

Il volume della torre è:

$$V = S_{ABCD} * h = 48 * 20 = 960 \text{ canne cube.}$$

Una canna cuba contiene 100 mattoni per cui nella torre possono entrare:

$$960 * 100 = 96000 \text{ mattoni.}$$

Sulla cima della essere posata una trave lungo una diagonale, come lo è AC.

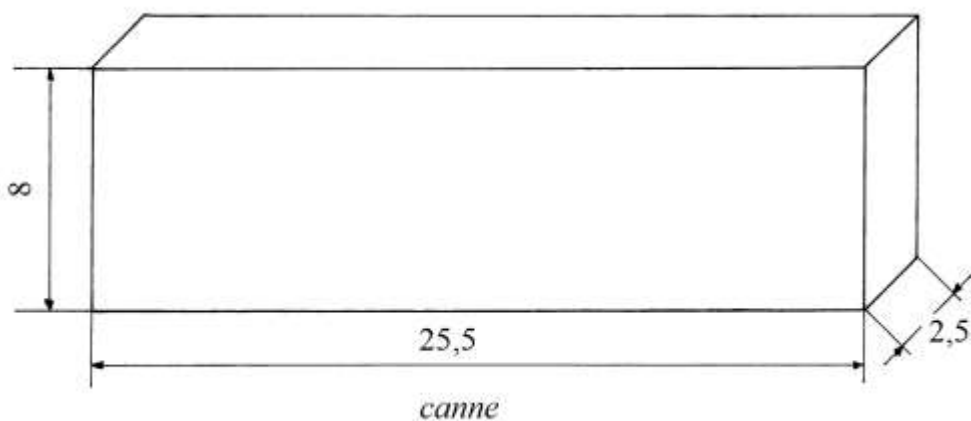
La lunghezza di AC è:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \quad \text{e}$$

$$AC = \sqrt{100} = 10 \text{ canne.}$$

13 – Costo di un muro

Un muro è lungo $(25 + \frac{1}{2})$ canne, è alto $h = 8$ e spesso $(2 + \frac{1}{2})$ canne.



Deve essere calcolato il costo del muro, stimato in $(2 + 1/3)$ *giuli* la canna cuba.

La base del muro è:

$$S = 25,5 * 2,5 = 63,75 [63 + 3/4] \text{ canne quadrate.}$$

Il volume V è:

$$V = S * h = 63,75 * 8 = 510 \text{ canne cube.}$$

Il costo C del muro è:

$$C = V * (2 + 1/3) = 1190 \text{ giuli.}$$

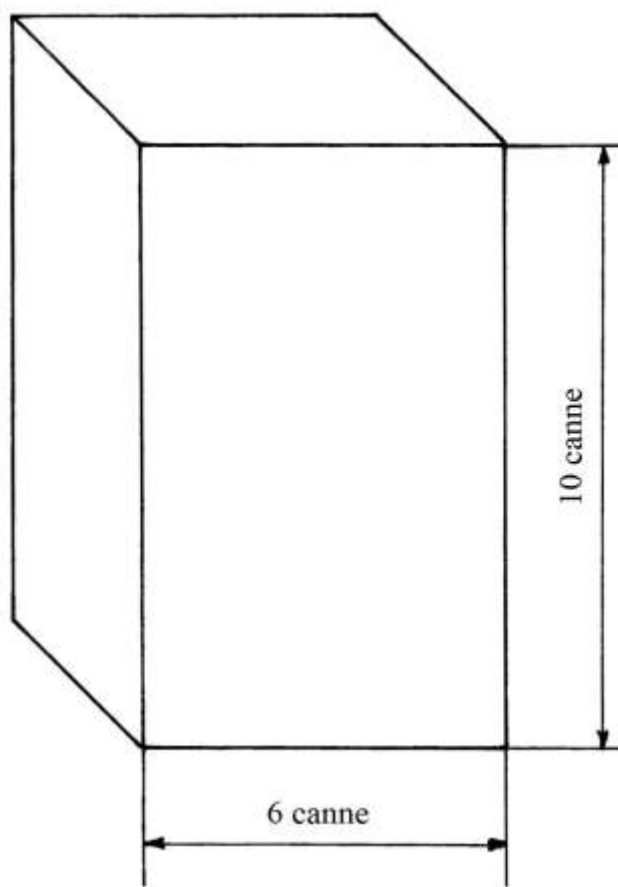
----- APPROFONDIMENTO -----

Il *giulio* era una moneta d'argento del peso di 3,924 grammi al titolo di 917/1000 di argento.

Fu coniato per la prima volta da Papa Giulio II, pontefice dal 1503 al 1513.

14 – Volume dell'acqua contenuta in una ydria

Una *ydria* ha la forma di un prisma a base quadrata con lati lunghi 6 canne. L'altezza h del solido è 10 canne.



La base ha area S che è:

$$S = 6^2 = 36 \text{ canne quadrate.}$$

Il volume dell'acqua contenuta nel recipiente è:

$$V = S * h = 36 * 10 = 360 \text{ canne cube.}$$

Una canna cuba contiene 8 *barili* di acqua.

Il recipiente contiene:

$$V_{\text{BARILI}} = V * 8 = 360 * 8 = 2880.$$

15 – Area di un terreno a forma di trapezio

Un terreno ha la forma di un trapezio isoscele.

Le dimensioni dei lati sono riportate sullo schema e sono espresse in *canne*.

EF collega i punti medi delle due basi ed è lunga quanto un'altezza.

DG è un'altezza e connette perpendicolarmente alle due basi il vertice D con il punto G.

Deve essere ricavata la lunghezza di DG.

ADG è un triangolo rettangolo di cui è nota la lunghezza dell'ipotenusa AD che è 12 canne.

Il cateto AG è lungo:

$$AG = AE - GE = AB/2 - DC/2 = 10/2 - 4/2 = 5 - 2 = 3 \text{ canne.}$$

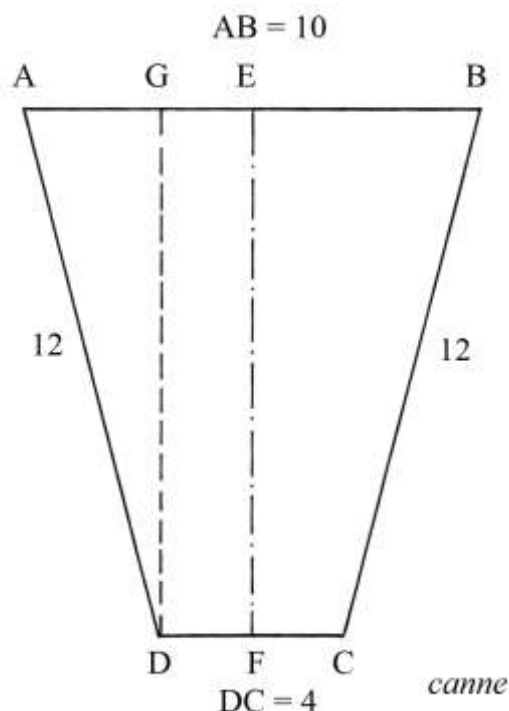
La lunghezza di GD è data da:

$$GD^2 = AD^2 - AG^2 = 12^2 - 3^2 = 144 - 9 = 135 \quad \text{e}$$

$$GD = \sqrt{135} = 11,6189 [11 + 14/23].$$

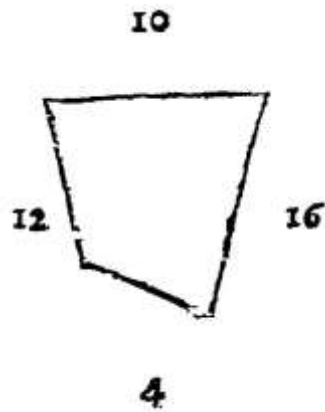
L'area del trapezio è:

$$S_{\text{ABCD}} = [(AB + DC)/2] * GD = [(10 + 4)/2] * (11 + 14/23) = 7 * (11 + 14/23) = (81 + 6/23) \text{ canne quadrate.}$$



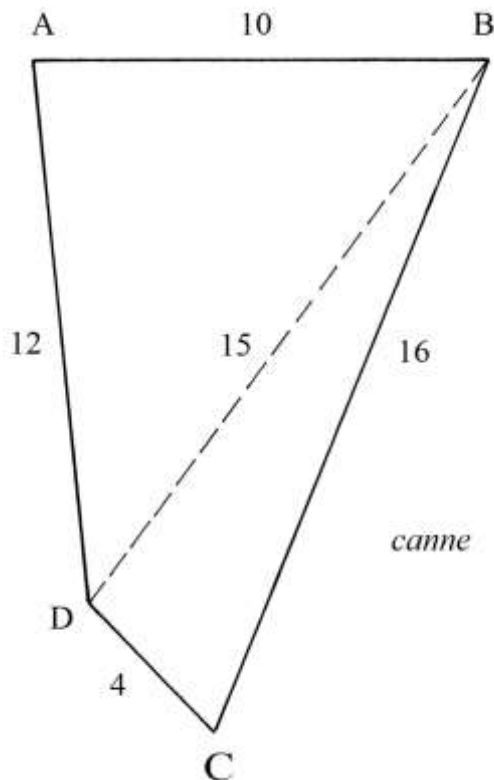
16 – Area di un quadrilatero

Il quadrilatero è irregolare: non è né un trapezio né un rettangolo, come spiega lo schema che segue, riprodotto dal trattato di de Ortega:



Si tratta di una struttura *deformabile*: numerosi altri quadrilateri possiedono le stesse dimensioni.

Per rendere rigido questo poligono occorre tracciarvi almeno una diagonale, come nel caso della figura che segue, che rispetta le dimensioni fissate da de Ortega:



L'Autore propone di calcolare l'area con il metodo impiegato nella soluzione del precedente problema (il 15), ma questo non è possibile, perché ABCD non è un trapezio. De Ortega indica l'area da lui ricavata uguale a $(95 + 1/3)$ canne quadrate.

La diagonale BD è stata inserita con una lunghezza di 15 canne.

Applicando l'errata *formula degli agrimensori*, proviamo a calcolare l'area di questo quadrilatero:

$$S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * [(AD + BC)/2] = [(10 + 4)/2] * [(12 + 16)/2] = (14/2) * (28/2) = 7 * 14 = 98 \text{ canne quadrate.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

La diagonale BD è lunga 15 canne: essa divide ABCD in due triangoli scaleni dei quali è possibile calcolare l'area con la formula di Erone.

Nel triangolo ABD, il perimetro $2 * p$ è:

$$2 * p = AB + AD + BD = 10 + 12 + 15 = 37;$$

$$\text{il semiperimetro } p \text{ è: } p = 37/2 = 18,5.$$

L'area di ABD è data da:

$$\begin{aligned} S_{ABD} &= \sqrt{[p * (p - AB) * (p - AD) * (p - BD)]} = \\ &= \sqrt{[18,5 * (18,5 - 10) * (18,5 - 12) * (18,5 - 15)]} = \sqrt{(18,5 * 8,5 * 6,5 * 3,5)} = \\ &= 59,81 \text{ canne quadrate.} \end{aligned}$$

Nel triangolo BCD, il perimetro $2 * p$ è:

$$2 * p = BC + CD + BD = 16 + 4 + 15 = 35;$$

$$\text{il semiperimetro } p \text{ è: } p = 35/2 = 17,5.$$

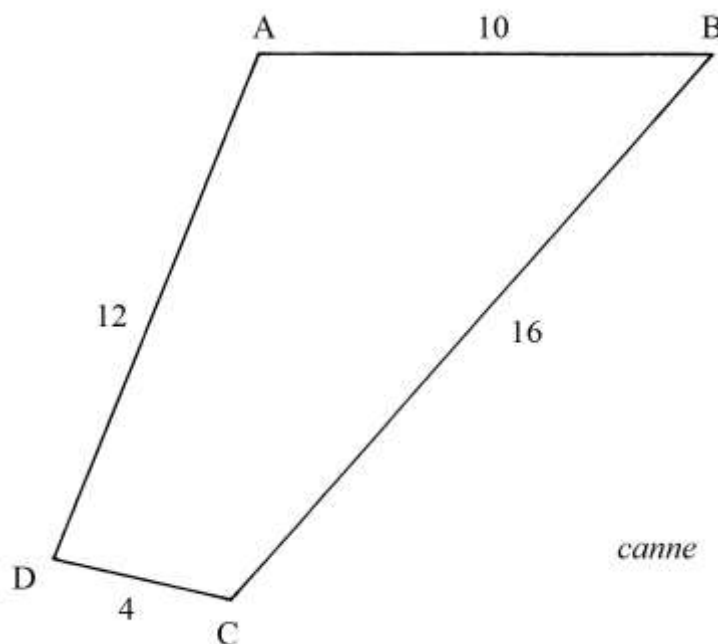
L'area di BCD è:

$$\begin{aligned} S_{BCD} &= \sqrt{[p * (p - BC) * (p - CD) * (p - BD)]} = \\ &= \sqrt{[17,5 * (17,5 - 16) * (17,5 - 4) * (17,5 - 15)]} = \\ &= \sqrt{(17,5 * 1,5 * 13,5 * 2,5)} = 29,76 \text{ canne quadrate.} \end{aligned}$$

L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 59,81 + 29,76 = 89,57 \text{ canne quadrate.}$$

Lo schema che segue presenta un'altra variante dello stesso quadrilatero:



La diagonale BD non vi è tracciata: la sua lunghezza sarebbe di 18,3 canne e la superficie di questo quadrilatero risulterebbe più grande di quella del precedente, con diagonale BD lunga 15 canne.

Con le sole lunghezze dei lati del quadrilatero ABCD non è possibile calcolare con precisione la sua area.

17 – Terreno a forma di doppio trapezio isoscele

Un terreno è formato da due trapezi isosceli uniti lungo la loro base minore AD che è lunga 6 canne.

Per ragioni di spazio, lo schema che segue è *fuori scala*.

Le lunghezze dei lati sono scritte sulla figura.

Deve essere calcolata l'area dell'intero terreno.

Tracciare le altezze AH e AK nei due trapezi.

Il testo del problema contiene una curiosità: la lunghezza delle coppie di lati BAE e CDF è indicata in 60 canne. In realtà le lunghezze sono:

* $BA + AE = CD + DF = 60$ canne;

* $BA = AE = CD = DF = 30$ canne.

BH è lungo: $BH = (BC - AD)/2 = (30 - 6)/2 = 12$ canne.

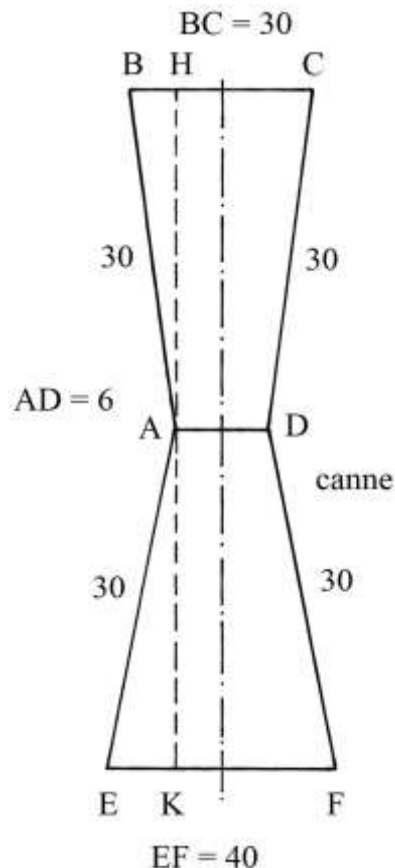
La lunghezza di AH è:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 30^2 - 12^2 = 900 - 144 = 756 \quad e$$

$$AH = \sqrt{756} = (27 + 27/55) \text{ canne.}$$

L'area di ABCD è data da:

$$S_{ABCD} = [(AD + BC)/2] * AH = [(6 + 30)/2] * (27 + 27/55) = 18 * (27 + 27/55) = (494 + 46/55) \text{ canne quadrate.}$$



EK è lungo: $EK = (EF - AD)/2 = (40 - 6)/2 = 17$ canne.

La lunghezza dell'altezza AK è:

$$AK^2 = AE^2 - EK^2 = 30^2 - 17^2 = 900 - 289 = 611 \quad e$$

$$AK = \sqrt{611} = 24,718 \text{ canne.}$$

L'area di ADFE è data da:

$S_{ADFE} = [(AD * EF)/2] * AK = [(6 + 40)/2] * 24,718 = 23 * 24,718 = (568 + 3/7)$ canne quadrate.

L'area S dell'intero terreno è:

$S = S_{ABCD} * S_{ADFE} = (494 + 46/55) + (568 + 3/7) = (1063 + 102/385)$ canne quadrate.

18 – Due torri che si fronteggiano

Due torri hanno differenti altezze: 50 e 30 canne.

Esse sono distanziate di 20 canne.

I vertici che si confrontano sono A e B.

Il problema chiede la lunghezza di AB.

ABC è un triangolo rettangolo: CB è lungo quanto DE e cioè 20 canne.

La lunghezza del cateto AC è:

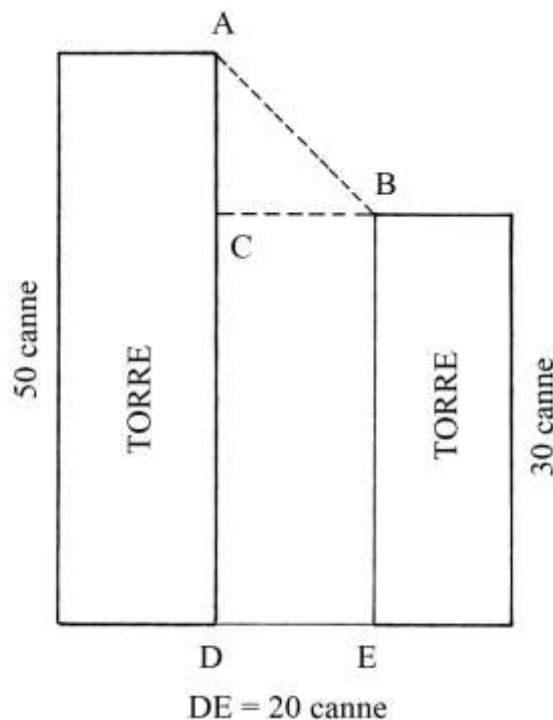
$$AC = AD - BE = 50 - 30 = 20 \text{ canne.}$$

AB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ABC e la sua lunghezza è data da:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 20^2 + 20^2 = 400 + 400 = 800 \quad \text{e}$$

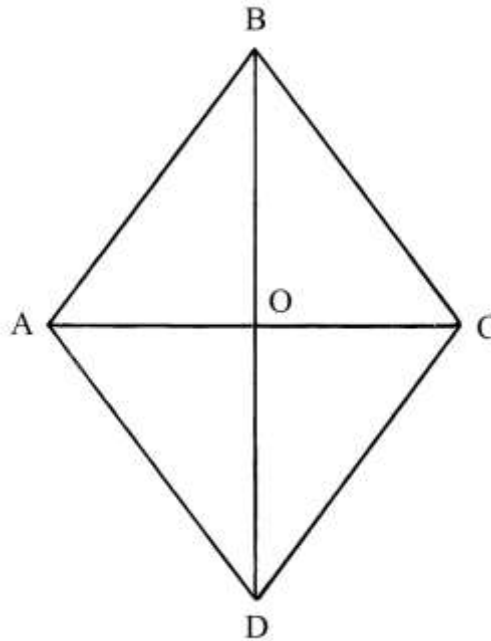
$$AB = \sqrt{800} = (28 + 16/57) \text{ canne.}$$

In pratica, AB è una corda tirata fra cime di due torri vicine.



19 – Area di un terreno a forma di rombo

Un terreno ha la forma di un rombo: la diagonale maggiore BD è lunga 40 canne e quella minore, AC, è 30 canne.



Deve essere calcolata l'area del terreno, che è:

$$S = BD * AC/2 = 40 * 30/2 = 600 \text{ canne quadrate.}$$

Le due diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni. Ad esempio, ABO ha cateti lunghi:

- * $OA = AC/2 = 30/2 = 15 \text{ canne;}$
- * $OB = BD/2 = 40/2 = 20 \text{ canne.}$

AB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABO e la sua lunghezza è data da:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 \quad \text{e}$$

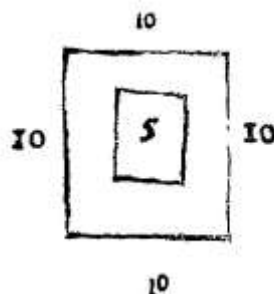
$$AB = \sqrt{625} = 25 \text{ canne.}$$

I quattro triangoli hanno lati con lunghezze 15-20-25, numeri che formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 5.

Il rombo ha lati di uguale lunghezza: $AB = BC = CD = DA = 25 \text{ canne.}$

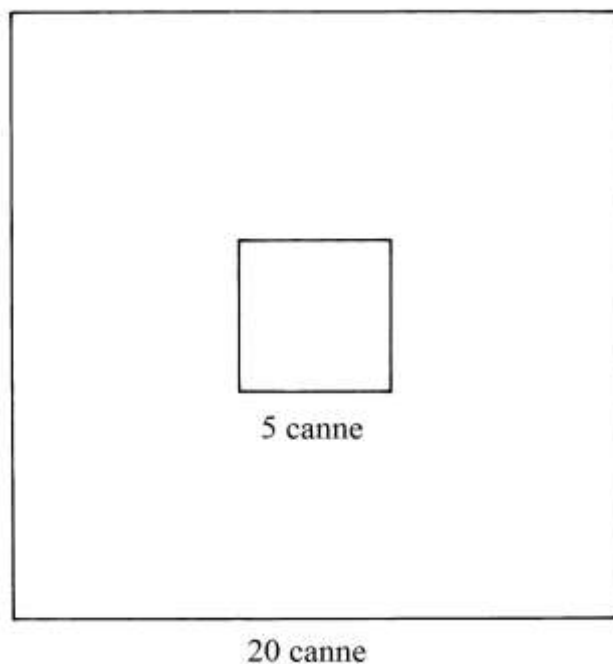
20 – Una fontana con una pietra

Una fontana piena d'acqua ha la base quadrata con lati lunghi 20 canne ed è profonda 20 canne: la figura contenuta nel trattato è errata perché indica la lunghezza dei lati pari a 10 canne.



Nel testo i calcoli sono fatti correttamente. Dato che la profondità della fontana è 20 canne, essa ha la forma di un *cubo*.

Lo schema che segue è la vista in pianta:



All'interno della fontana è collocata una pietra di forma cubica, con spigoli lunghi 5 canne.

Il problema chiede il volume lordo dell'acqua contenuta nella fontana in canne cube [quadrate, nel testo] e quanti *barili* equivalgono secondo il rapporto:

1 canna cuba = 10 barili.

Il volume V dell'acqua che può essere contenuta nella fontana è:

$$V = 20^3 = 8000 \text{ canne cube.}$$

Esse valgono $V = 8000 * 10 = 80000$ barili.

La pietra ha un volume che è dato da:

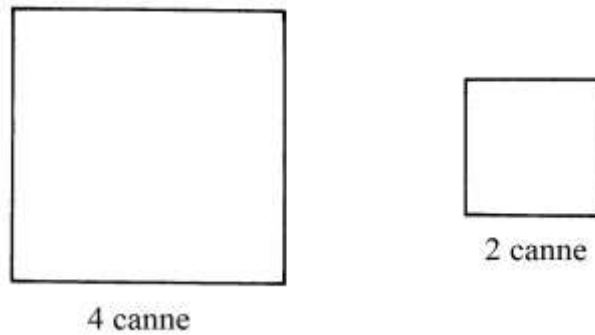
$$V_{\text{PIETRA}} = 5^3 = 125 \text{ canne cube} = 1250 \text{ barili.}$$

Infine, l'Autore calcola il numero N di identiche pietre cubiche la fontana potrebbe contenere:

$$N = V / V_{\text{PIETRA}} = 8000 / 125 = 64.$$

21 – Valori di due pietre

Due pietre hanno entrambe forma di cubo: la più piccola ha spigoli lunghi 2 canne e la più grande 4 canne.



Il proprietario di entrambe cede la più piccola per 5 *ducati*.

Deve essere ricavato il valore della pietra più grande.

I volumi delle due pietre sono:

* $V_{\text{PICCOLA}} = 2^3 = 8 \text{ canne cube};$

* $V_{\text{GRANDE}} = 4^3 = 64 \text{ canne cube}.$

Il valore delle due pietre è proporzionale al volume.

La pietra più grande vale:

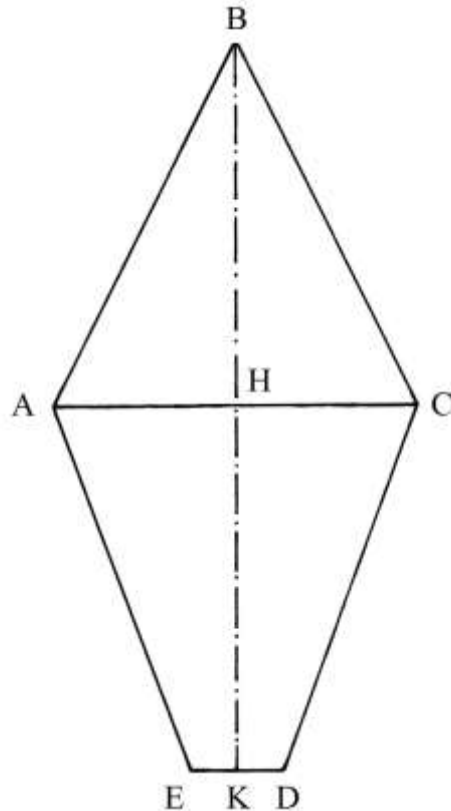
$$V_{\text{GRANDE}}/V_{\text{PICCOLA}} * 5 = (64/8) * 5 = 40 \text{ ducati}.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Stando a quanto documentato da Angelo Martini a p. 632 del suo *Manuale*, il *ducato* era una moneta d'argento coniata da Papa Clemente VII (Pontefice dal 1523 al 1534). Essa pesava 44,367 grammi, con un titolo di 917/1000.

22 – Terreno di forma pentagonale

ABCDE è un terreno che ha la forma di un pentagono non regolare.



Esso è scomponibile in un triangolo isoscele, ABC e in un trapezio isoscele, ACDE.

I due poligoni sono uniti lungo il comune lato AC che è la base del triangolo ABC e la base maggiore del trapezio ACDE.

Le dimensioni del terreno, espresse in canne, sono le seguenti:

- * AC = 40;
- * BK = 80;
- * BH = HK = BK/2 = 80/2 = 40;
- * ED = 10.

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = BH * AC/2 = 40 * 40/2 = 800 \text{ canne quadrate.}$$

L'area del trapezio ACDE è:

$$S_{ACDE} = [(AC + ED)/2] * HK = [(40 + 10)/2] * 40 = 25 * 40 = 1000 \text{ canne quadrate.}$$

L'area dell'intero terreno è:

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACDE} = 800 + 1000 = 1800 \text{ canne quadrate.}$$

23 – Superficie di un pentagono

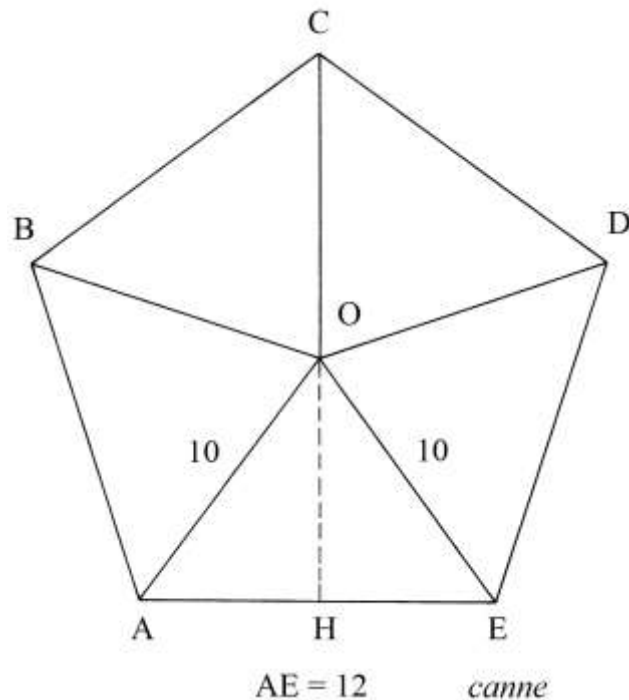
Un pentagono regolare ha lati lunghi 12 canne: esso è diviso in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni.

Il poligono è la base di un prisma di cui l'Autore non fornisce l'altezza per cui non è possibile calcolarne il volume.

I lati interni dei triangoli isosceli sono lunghi 10 canne: il poligono è quindi inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA = 10 canne.

Deve essere calcolata l'area del pentagono.

Consideriamo il triangolo OAE: OH è una sua altezza, relativa al lato AE; essa divide OAE in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: OAH e OEH.



La lunghezza di OH è data da:

$$OH^2 = OA^2 - (AH/2)^2 = 10^2 - (12/2)^2 = 100 - 36 = 64 \quad e$$

$$OH = \sqrt{64} = 8 \text{ canne.}$$

Il triangolo OAH ha lati lunghi 6-8-10: questi numeri formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

L'area del triangolo OAH è:

$$S_{OAH} = AE * OH/2 = 12 * 8/2 = 48 \text{ canne quadrate.}$$

L'intero pentagono ha area:

$$S_{ABCDE} = 5 * S_{OAH} = 5 * 48 = 240 \text{ canne quadrate.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Un pentagono inscritto in un cerchio di raggio $OA = 10$ ha lati che non sono esattamente lunghi 12, ma leggermente più corti.

La lunghezza L dei lati di un pentagono inscritto in un cerchio di raggio R è data da:

$$L = R * \sqrt{[(5 - \sqrt{5})/2]} \approx 1,175570504 * R.$$

Nel caso concreto, la lunghezza di AE è:

$$AE = R * 1,175570504 = 10 * 1,175570504 \approx 11,76 \text{ canne.}$$

24 – Area di un esagono regolare

Un esagono regolare ha lati lunghi 10 canne ed è diviso in sei triangoli equilateri di uguali dimensioni.

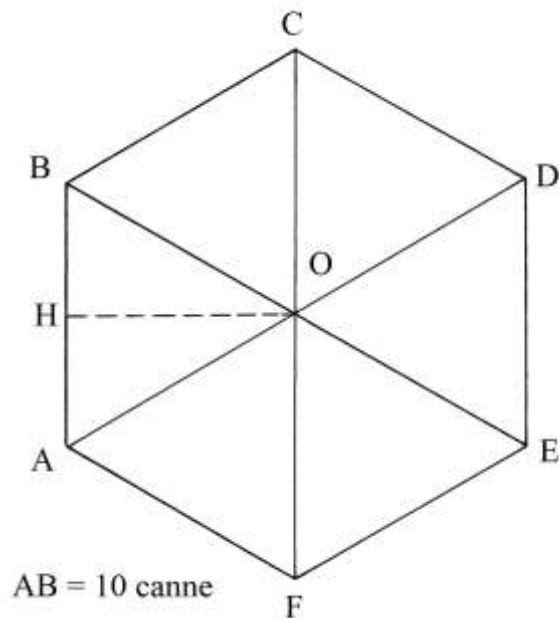
Deve essere calcolata la sua area.

ABO è uno dei suoi triangoli equilateri e OH ne è un'altezza.

OH ha lunghezza che è data da:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - (10/2)^2 = 100 - 25 = 75 \text{ e}$$

$$OH = \sqrt{75} = (8 + 11/17) \text{ canne.}$$



L'area di ABO è:

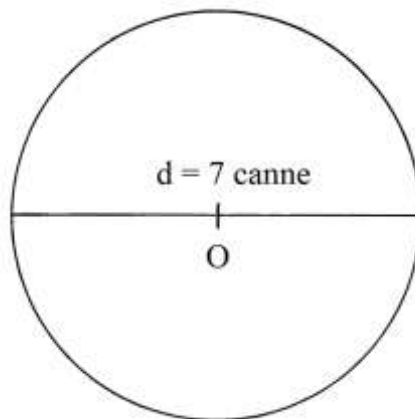
$$S_{ABO} = AB * OH/2 = 10 * (8 + 11/17)/2 = (43 + 3/10) \text{ canne quadrate.}$$

L'area dell'intero esagono è:

$$S_{ABCDEF} = 6 * S_{ABO} = 6 * (43 + 3/10) = (259 + 8/10) \text{ canne quadrate.}$$

25 – Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro d lungo 7 canne.



Deve essere calcolata la sua area.

La circonferenza c è lunga:

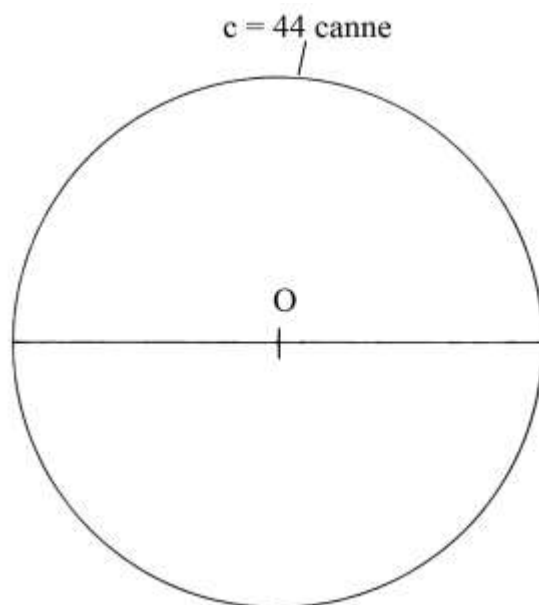
$$c = d * (3 + 1/7) = 7 * 22/7 = 22 \text{ canne.}$$

L'area S è data da:

$$S = c/2 * d/2 = (22/2) * (7/2) = 154/4 = (38 + 1/2) \text{ canne quadrate.}$$

26 – Area di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza c lunga 44 canne.



Deve essere ricavata l'area del cerchio.

La lunghezza del diametro d è data da:

$$d = c/(3 + 1/7) = 44/(22/7) = 14 \text{ canne.}$$

L'area del cerchio è:

$$S = c/2 * d/2 = (44/2) * (14/2) = 22 * 7 = 154 \text{ canne quadrate.}$$

27 – Un padiglione

Una tenda o padiglione di tela è montato in un campo.

Il problema è presente con identici dati in alcuni trattati di Autori toscani:

- * il “*Trattato di geometria pratica*” di Anonimo Fiorentino, XV secolo, contenuto nel Codice L.IV.18 della Biblioteca Comunale di Siena;
- * Filippo Maria Calandri (1468-1518) nel suo trattato “*Aritmetica*”;
- * Giovanni Sfortunati (1485 – XVI secolo) nel suo testo “*Nuovo Lume*”,
- * Lorenzo Forestani (1585-1623) nel suo “*Pratica di Arithmetica e Geometria*”.

L'unica differenza riscontrabile è data dalle diverse unità di misura: *braccia* per gli Autori toscani e *canne* per de Ortega.

Il padiglione è sostenuto da una pertica verticale che è alta 8 canne. Quando è tesa, la tela è lunga 10: BA = BC rappresentano l'*apotema* di un cono.

Il problema chiede la superficie della tela, che è la superficie laterale di un cono retto.

Occorre ricavare il diametro della base, AC. ABH è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dell'ipotenusa AB (10) e del cateto BH (8). La lunghezza di AH è data da:

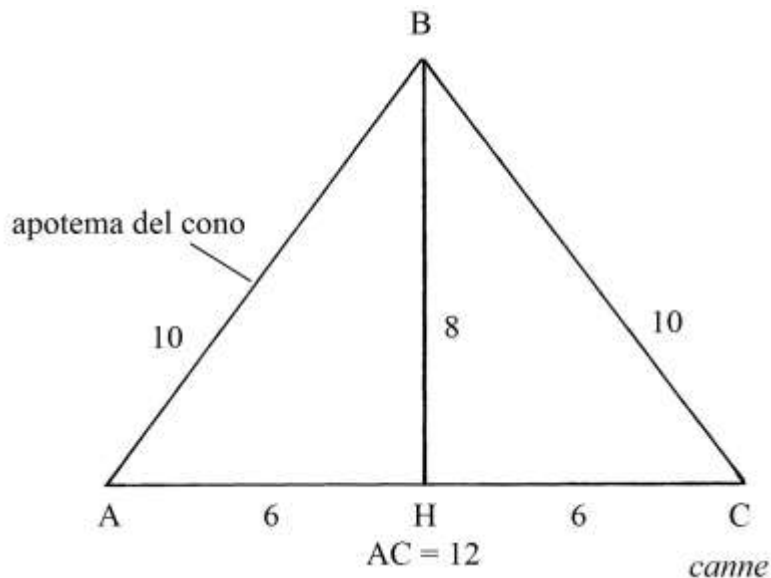
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \quad \text{e}$$

$$AH = \sqrt{36} = 6 \text{ canne, raggio del cerchio della base.}$$

Il diametro AC è lungo il doppio di AH:

$$AC = 2 * AH = 2 * 6 = 12 \text{ canne.}$$

Nello schema compare di nuovo la terna 3-4-5: le lunghezze dei lati dei due triangoli rettangoli ABH e BHC formano la terna derivata 6-8-10.



La circonferenza c della base è lunga:

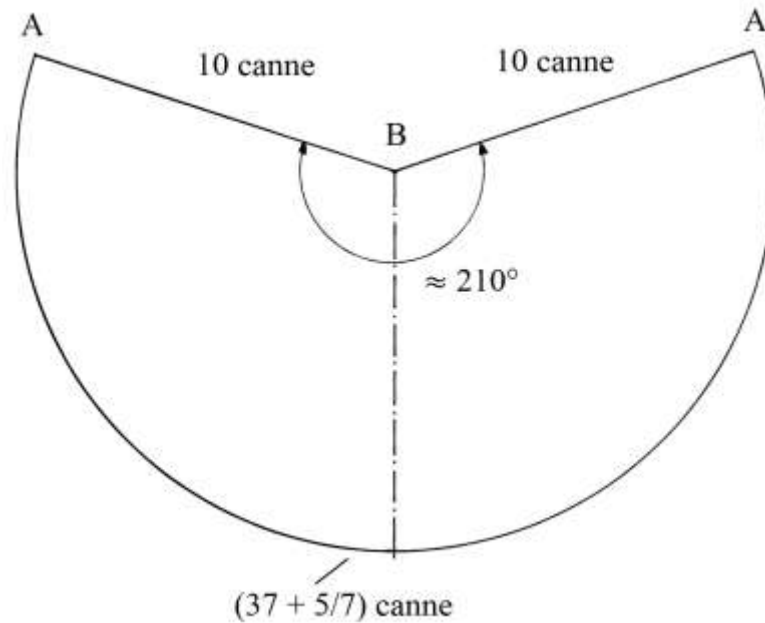
$$c = 22/7 * AC = 22/7 * 12 = (37 + 5/7) \text{ canne.}$$

L'area della base del padiglione è:

$$S_{\text{BASE}} = 22/7 * HA^2 = 22/7 * 6^2 = (113 + 1/7) \text{ canne quadrate.}$$

Se distesa su di un piano orizzontale, la superficie laterale del padiglione ha la forma di un settore circolare, perché è la superficie laterale di un cono: il suo raggio è BA e l'arco è lungo quanto la circonferenza della base $(37 + 5/7)$ canne.

L'angolo sotteso al centro del settore circolare è ampio $\approx 210^\circ$



Il raggio del settore circolare, BA, è l'*apotema* del cono.

La sua area è calcolata con la formula:

$$S_{\text{PANNI}} = \pi * r * a = 22/7 * r * a: \quad r \text{ è il raggio della circonferenza alla base e } a \text{ è}$$

l'*apotema* del cono:

* $r = HA = 6;$

* $a = BA = 10.$

L'area è:

$$S_{\text{PANNI}} = 22/7 * 6 * 10 = (188 + 4/7) \text{ braccia quadrate.}$$

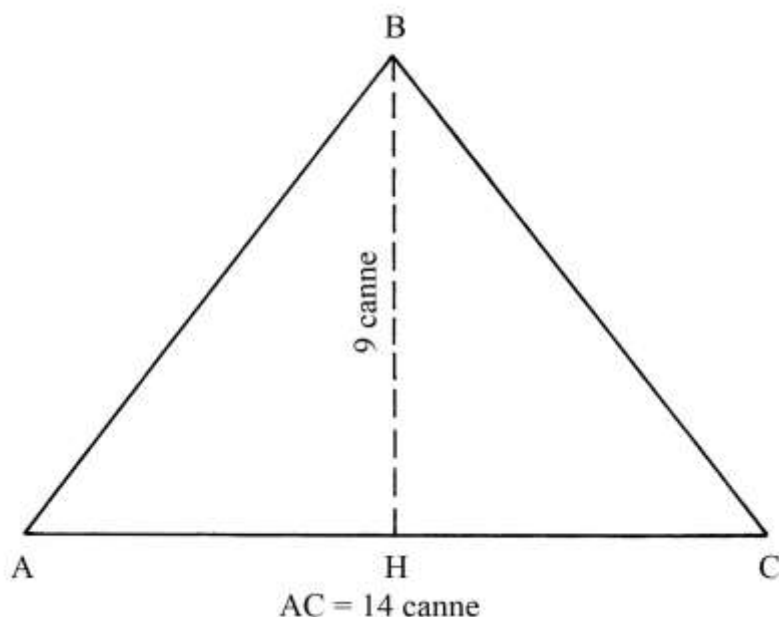
Juan de Ortega applica una formula errata:

$$S = c * BH/2 = (37 + 5/7) * 8/2 = (150 + 6/7) \text{ canne quadrate.}$$

28 – Un monte di grano

Un monte di grano ha la forma di un cono retto alto $h = 9$ canne.

La circonferenza c della base è lunga 44 canne.



Deve essere calcolato il volume del grano espresso in *rugi*: forse si tratta di un errore di trascrizione del nome dell'unità di misura del volume degli usata a Roma, il *rubbio*, equivalente a 294,47 litri o dm^3 .

Il diametro d della base è:

$$d = c / (22/7) = 44 / (22/7) = 44 * 7/22 = 14 \text{ canne.}$$

L'area della base circolare è calcolato dall'Autore con la seguente formula:

$$S_{\text{BASE}} = c^2 * 7/88 = 44^2 * 7/88 = 154 \text{ canne quadrate.}$$

Il volume V del monte conico è:

$$V = S_{\text{BASE}} * h/3 = 154 * 9/3 = 154 * 3 = 462 \text{ canne cube.}$$

Secondo l'Autore una canna cuba [*quadrata*, nel testo] vale un cosiddetto *rugio*:

$$V = 462 \text{ rugi.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

La costante 7/88 e il suo reciproco 88/7

Juan de Ortega ha usato la costante 7/88 nella formula impiegata per il calcolo dell'area di un cerchio.

La lunghezza c della circonferenza è data da:

$$c = 2 * \pi * r, \text{ dove } r \text{ è il raggio.}$$

La formula può essere scritta come:

$$c = 2 * (22/7) * r = 44/7 * r.$$

La formula inversa è:

$$r = (7/44) * c.$$

Conoscendo soltanto la lunghezza della circonferenza, c , l'area di un cerchio può essere scritta nella forma che segue:

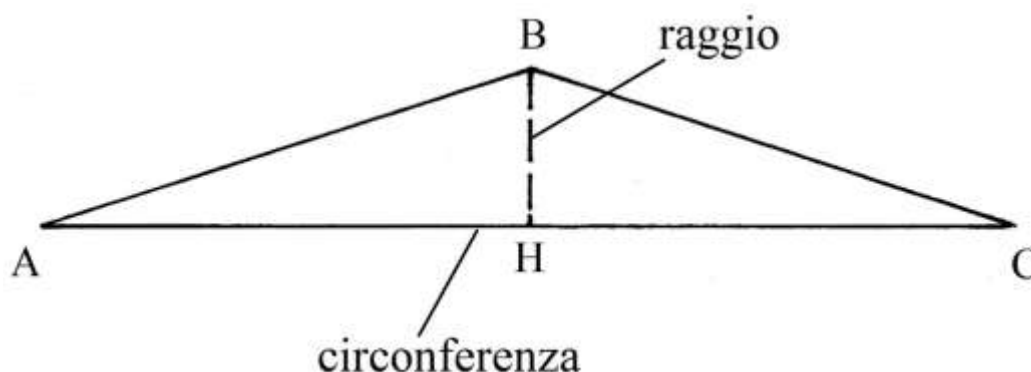
$$\begin{aligned} \text{Area}_{\text{CERCHIO}} &= \pi * r^2 = 22/7 * (7/44 * c)^2 = 22/7 * 7^2 / (44^2) * c^2 = \\ &= (22 * 7 / (44 * 44)) * c^2 = [7 / (2 * 44)] * c^2 = 7/88 * c^2. \end{aligned}$$

Da questa formula ricaviamo:

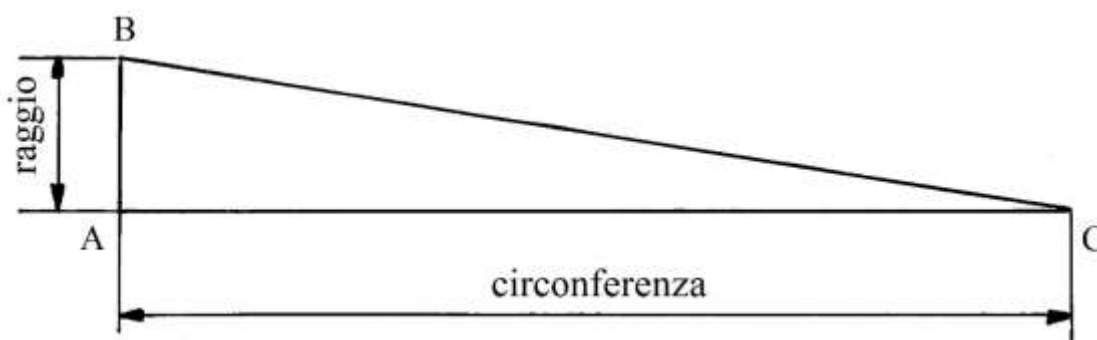
$$c^2 = 88/7 * \text{Area}_{\text{CERCHIO}}.$$

Approfondiamo l'origine della costante 88/7, che può essere definita con l'espressione *moltiplicatore della superficie*.

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AC lunga quanto la circonferenza e altezza BH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

$$\text{Area}_{ABC} = (AC * BH)/2 = (\text{circonferenza} * \text{raggio})/2 .$$

Nel secondo caso:

$$\text{Area}_{ABC} = (AB * AC)/2 = (\text{raggio} * \text{circonferenza})/2 .$$

Ma:

$$\text{circonferenza} = \text{diametro} * 22/7 = 2 * \text{raggio} * 22/7 = 44/7 * \text{raggio} .$$

Da cui:

$$\text{raggio} = \text{circonferenza} * 7/44 .$$

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (\text{circonferenza})^2 * 1/2 * 7/44 = (\text{circonferenza})^2 * 7/88 .$$

Da questa ultima formula si ricava la lunghezza della circonferenza che è data da:

$$\text{circonferenza} = \sqrt{(\text{Area}_{\text{CERCHIO}} * 88/7)} .$$

La frazione 88/7 vale può essere scritta anche come

$$88/7 = 12 + 4/7 : \text{ questa costante fu usata fra i primi dall'agrimensore Orbetano da}$$

Montepulciano nel suo trattato "*Regole di geometria pratica*", composto intorno al 1464; esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

$$\text{circonferenza}^2 = \text{Area}_{\text{CERCHIO}} * 88/7 .$$

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio r è data da:

Area cerchio = $\pi * r^2$, mentre la circonferenza è lunga: circonferenza = $2 * \pi * r$.

Ne consegue che:

$$(\text{circonferenza})^2 / (\text{Area CERCHIO}) = (4 * \pi^2 * \text{raggio}^2) / (\pi * \text{raggio}^2) = 4 * \pi .$$

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di $22/7$, risulta:

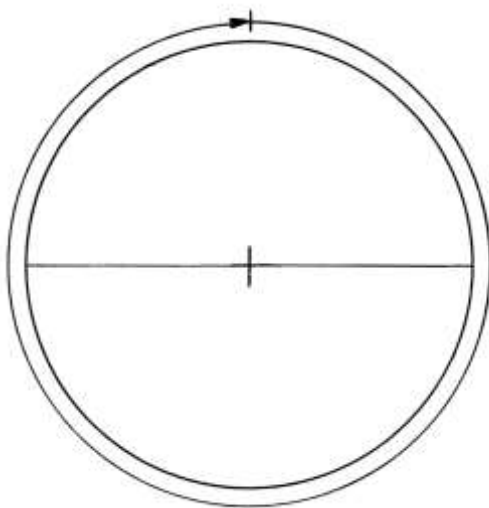
$$4 * (22/7) = 88/7 = (12 + 4/7) .$$

In conclusione, la frazione $88/7$ è il valore approssimato di $4*\pi$.

Nel Medioevo per i calcoli era più facile usare la frazione $88/7$ invece dell'equivalente numero misto $(12 + 4/7)$.

La costante era nota a diversi abacisti toscani: Paolo Gherardi, Paolo dell'Abbaco e il ricordato Orbetano da Montepulciano.

Questo insieme di costanti approssimate – $22/7$, $11/14$, $88/7$ e $7/88$ – erano molto utili per i diversi calcoli riguardanti il cerchio e la circonferenza. Un esempio era quello del calcolo del diametro di una colonna della quale era possibile misurare soltanto la circonferenza:



$$d = c / (22/7) = 7 * c / 22 .$$

29 – Volume dell'acqua in un pozzo

Un pozzo circolare, pieno d'acqua, ha diametro d lungo 22 palmi ed è profondo $h = 10$ palmi.

Deve essere calcolato il volume in *barili*, secondo il rapporto:

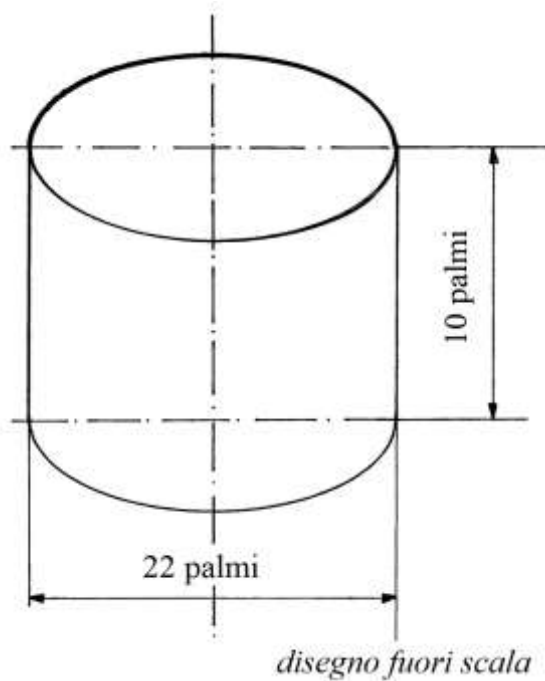
1 barile = 3 palmi cubi [nel testo, erroneamente indicati come *quadrati*].

L'area S della sezione circolare è:

$$S = d^2 * 11/14 = 22^2 * 11/14 = (380 + 2/7) \text{ palmi quadrati} .$$

Il volume V è:

$$V = S * h = (380 + 2/7) * 10 = (3802 + 6/7) \text{ palmi cubi} .$$

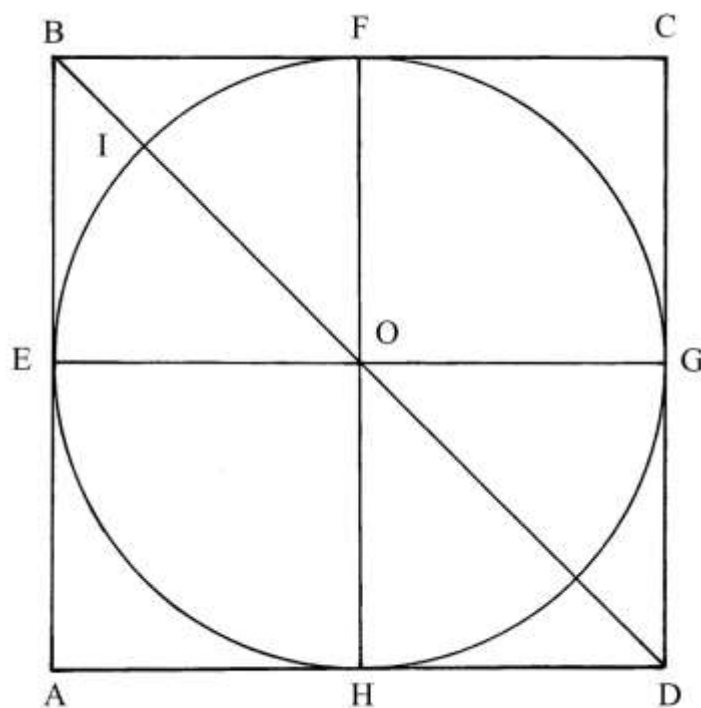


Il volume espresso in *barili* è:

$$V_{\text{BARILI}} = V/3 = (3802 + 6/7)/3 = (1267 + 21/34) \text{ barili.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

O è il centro di un cerchio di diametro $EG = d$, inscritto nel quadrato ABCD che ha lati lunghi $AB = L = d$.



L'area del quadrato è:

$$S_{ABCD} = L^2 = AB^2 = d^2.$$

L'area del cerchio è data da:

$$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = 22/7 * r^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2, \text{ con } r \text{ raggio: } r = d/2.$$

Fra l'area del cerchio e quella del quadrato vi è un rapporto costante:

$$S_{\text{CERCHIO}}/S_{ABCD} = (11/14 * d^2)/d^2 = 11/14 \text{ e viceversa:}$$

$$S_{ABCD}/S_{\text{CERCHIO}} = d^2/(11/14 * d^2) = 1/(11/14) = 14/11.$$

In alcuni problemi contenuti nel testo di de Ortega, l'area del cerchio è calcolata con la formula:

$$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2.$$

30 – Peso di una colonna di pietra

Una colonna di pietra cilindrica ha diametro d lungo 2 palmi ed è alta $h = 10$ palmi.

Il problema chiede il suo peso espresso in *libbre*: 1 palmo cubo pesa 50 libbre.

L'area S della base della colonna è:

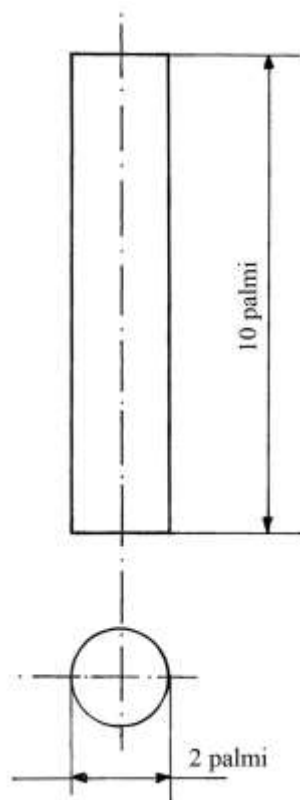
$$S = d^2 * 11/14 = 2^2 * 11/14 = 44/14 = (3 + 1/7) \text{ palmi quadrati.}$$

Il volume V della colonna è:

$$V = S * h = (3 + 1/7) * 10 = (31 + 3/7) \text{ palmi cubi.}$$

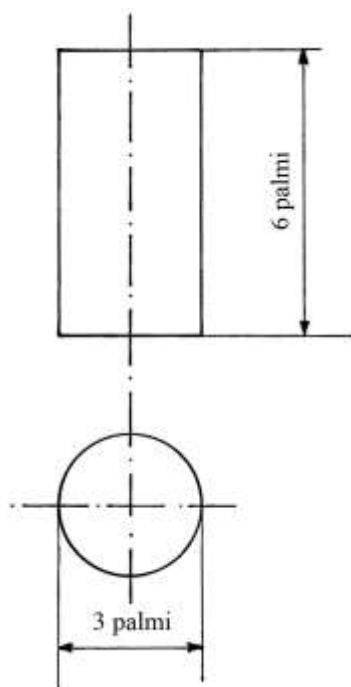
Il peso P della colonna è:

$$P = V * 50 = (31 + 3/7) * 50 = (1571 + 3/7) \text{ libbre.}$$



31 – Peso di un sacco di grano

Un sacco di grano ha diametro $d = 3$ palmi ed è lungo $h = 6$ palmi.



Il problema chiede quanti *scorzi* misura il grano.

Lo *scorzo* era un'antica unità di misura della capacità, pari a $1/22$ del *rubbio*:

$$1 \text{ scorzo} = 1 \text{ rubbio}/22 = 294,47/22 = 13,385 \text{ litri o dm}^3.$$

Vale l'equivalenza:

$$2 \text{ palmi cubi} = 3 \text{ scorzi}.$$

La superficie S della base circolare è:

$$S = d^2 * 11/14 = 3^2 * 11/14 = 99/14 = (7 + 1/14) \text{ palmi quadrati}.$$

Il volume V del sacco è:

$$V = S * h = (7 + 1/14) * 6 = (42 + 3/7) \text{ palmi cubi}.$$

In scorzi, il volume è:

$$V_{\text{SCORZI}} = V * 3/2 = (42 + 3/7) * 3/2 = (63 + 9/124) \text{ scorzi}.$$

32 – Divisione di un sacco in tre sacchi uguali

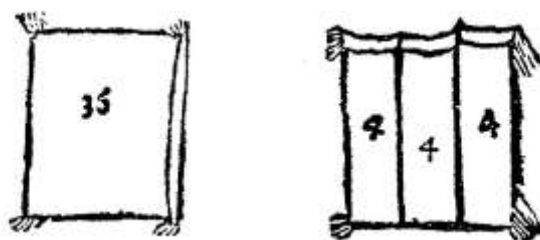
Un sacco di grano contiene 36 *rugi*: esso deve essere diviso per formare tre sacchi uguali.

La soluzione proposta dall'Autore contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare il numero dei nuovi, *tre*, passi per sé stesso: $3 * 3 = 9$;
- * dividere il volume del sacco iniziale per 9: $36/9 = 4$ rugi, capacità di ciascuno dei tre sacchi finali.

La soluzione è chiaramente errata: da 36 rugi (o rubbi) iniziali si passa a $3 * 4 = 12$ rugi finali.

Lo schema che segue, riprodotto dall'originale, conferma l'errore:



----- APPROFONDIMENTO -----

Fra gli Autori toscani che hanno affrontato il problema dei sacchi vanno citati i già ricordati Filippo Maria Calandri e Lorenzo Forestani:

Forestani usa gli stessi dati assoluti del problema di de Ortega, misurando però i volumi in *staia*.

Ecco la soluzione corretta, ripresa dal trattato di questo ultimo Autore:

- * moltiplicare per sé stesso il numero dei nuovi sacchi: $3 * 3 = 9$;
- * dividere il volume del sacco iniziale per 9: $36/9 = 4$;
- * moltiplicare per il numero dei nuovi sacchi: $4 * 3 = 12$ rugi, volume di ciascun nuovo sacco.

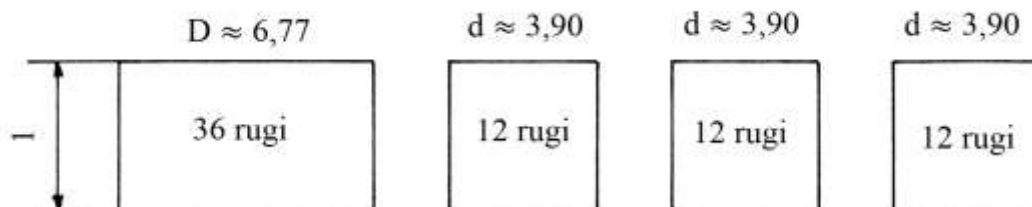
L'ultimo passo è stato omesso da Juan de Ortega.

%%%

Presentiamo un'ipotesi per tentare di spiegare l'errore commesso da de Ortega.

Per semplicità fissiamo l'altezza di tutti i sacchi uguale a: $h = 1$.

Tutti hanno forma circolare.



Il sacco originario ha volume V che è 36 ed ha sezione di superficie S uguale a:

$$S = V/h = 36/1 = 36.$$

Essa è data da:

$S = D^2 * 11/14$, dove D è la lunghezza del diametro che possiamo calcolare:

$$D^2 = 14/11 * S = 14/11 * 36 \approx 45,81 \quad e$$

$$D \approx \sqrt{45,81} \approx 6,77.$$

Ciascuno dei tre sacchi finali deve contenere un terzo del volume di quello originario e cioè 12 rugi.

La superficie s della sezione di ciascuno dei tre sacchi è:

$$s = 1/3 * V/h = 1/3 * 36/1 = 12.$$

Essa è data da:

$s = d^2 * 11/14$, dove d è la lunghezza del diametro di ciascuno dei tre sacchi uguali

che ricaviamo:

$$d^2 = 14/11 * s = 14/11 * 12 \approx 15,27 \quad e$$

$$d \approx \sqrt{15,27} \approx 3,90.$$

Forse Juan de Ortega ha fatto confusione fra il volume di ciascuno dei tre sacchi e il suo diametro?

33 – Unione di quattro sacchi

Quattro sacchi hanno tutti un identico volume: 3 rugi.

Il problema chiede quanti rugi conterrà un sacco originato dalla loro unione.

È implicito che i quattro sacchi devono essere scuciti e poi riuniti per formare il nuovo: la lunghezza della circonferenza di questo ultimo risulterà uguale alla somma delle lunghezze delle circonferenze dei primi quattro sacchi. Lo stesso vale per le superfici laterali.

Anche questo problema è contenuto e risolto nel trattato di Lorenzo Forestani.

La soluzione di de Ortega contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare il numero dei sacchi per sé stesso: $4 * 4 = 16$;
- * moltiplicare per il volume di un sacco: $16 * 3 = 48$ rugi, volume del sacco risultante dall'unione.

34 – Unione di quattro sacchi di differenti volumi

Quattro sacchi contengono grano e hanno volumi differenti: il primo ha volume di 2 rugi, il secondo 5 rugi, il terzo 4 rugi e il quarto 10.

Essi devono essere uniti per formare un unico sacco: il problema chiede il suo volume.

La procedura proposta da de Ortega contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare il volume del primo sacco per quello del secondo: $2 * 5 = 10$;
- * moltiplicare per il volume del terzo: $10 * 4 = 40$;
- * moltiplicare per il volume del quarto sacco: $40 * 10 = 400$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{400} = 20$;
- * moltiplicare per il numero dei sacchi: $20 * 4 = 80$;
- * sommare con i volumi dei quattro sacchi iniziali:

$$80 + (2 + 5 + 4 + 10) = 80 + 21 = 101 \text{ rugi, volume del sacco risultante.}$$

La figura che segue riproduce lo schema originale dei calcoli contenuto nel trattato di Juan de Ortega:

Primo	Secundo	Terzo	Quarto
2	5	4	10
	2	20	
	5	4	
	10	80	
	4	20	
	40	5	
	10	4	
	400	10	
	20	101	

----- APPROFONDIMENTO -----

Il già citato Lorenzo Forestani criticò la soluzione presentata da de Ortega per la soluzione di questo problema.

Egli propose nel suo trattato il problema [53] che qui si riproduce con la soluzione offerta dal matematico francescano di Pescia.

I dati numerici assoluti sono uguali nei problemi proposti da due Autori: de Ortega misura in *rugi* (o *rubbi*?) e Forestani in staia.

Ecco il testo del problema di Forestani con la sua soluzione.

[53] Sacco ottenuto dall'unione di quattro sacchi

Quattro sacchi di uguale altezza hanno capacità di 2, 5, 4 e 10 staia. Essi devono essere scuciti e uniti per formare un nuovo sacco: è chiesto il volume del sacco risultante.

Forestani risolve il problema con la seguente procedura (che applica il metodo già impiegato nella soluzione del precedente problema [50]):

* sommare i volumi dei primi due sacchi: $2 + 5 = 7$;
* moltiplicare i due volumi: $2 * 5 = 10$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{10} \approx (3 + 1/6)$;
* moltiplicare per 2: $(3 + 1/6) * 2 = (6 + 1/3)$;
* sommare con 7: $(6 + 1/3) + 7 = (13 + 1/3)$ staia, volume del sacco ottenuto dall'unione dei primi due;

* sommare i volumi del terzo e del quarto sacco: $4 + 10 = 14$;
* moltiplicare i due volumi: $4 * 10 = 40$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{40} = (6 + 1/3)$;
* moltiplicare per 2: $2 * (6 + 1/3) = (12 + 2/3)$;
* sommare con 14: $(12 + 2/3) + 14 = (26 + 2/3)$ staia, volume del sacco risultante dall'unione del terzo e del quarto sacco;

La terza fase della procedura considera i due sacchi originati dalle unioni del primo e del secondo e del terzo e del quarto:

* sommare i volumi dei due sacchi risultanti: $(13 + 1/3) + (26 + 2/3) = 40$;
* moltiplicare i due volumi: $(13 + 1/3) * (26 + 2/3) = (355 + 5/9)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(355 + 5/9)} = 18,85$;
* moltiplicare per 2: $18,85 * 2 = 37,70$;
* sommare con 40: $37,70 + 40 = 77,70$ staia, volume del sacco risultante dall'unione dei quattro sacchi iniziali.

Forestani fornisce un risultato simile $(77 + 2/3)$ staia.

%%%

La soluzione di Forestani era stata applicata da questo Autore a un caso più semplice, il problema [50], relativo all'unione di *due* sacchi di differenti volumi che è qui riprodotto.

Il caso del problema della fusione dei quattro sacchi è una generalizzazione di quello dell'unione di due sacchi di differenti volumi.

[50]

Unione di due sacchi

Due sacchi hanno uguale altezza: il primo ha volume di 4 staia e il secondo 9.

I due sacchi sono scuciti per poi essere uniti per formare un sacco della stessa altezza dei due originari.

È chiesto il volume in staia del nuovo sacco.

La soluzione contiene i seguenti passi:

- * sommare i volumi dei due sacchi: $4 + 9 = 13$;
- * moltiplicare i due volumi: $4 * 9 = 36$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$;
- * moltiplicare per 2: $6 * 2 = 12$;
- * sommare con 13: $12 + 13 = 25$ staia, volume del sacco risultante dall'unione.

La procedura può essere riassunta in una formula:

- * V_1 è il volume del primo sacco: $V_1 = 4$;
- * V_2 è il volume del secondo sacco: $V_2 = 9$;
- * V_3 è il volume del sacco risultante dall'unione dei primi due.
 $V_3 = (V_1 + V_2) + 2 * \sqrt{(V_1 * V_2)}$.

35 – Peso di una sfera di ferro

Una palla di ferro ha forma sferica con diametro d lungo 3 palmi.

Un palmo cubo [*quadrato*, nel testo di Ortega] pesa 100 libbre.

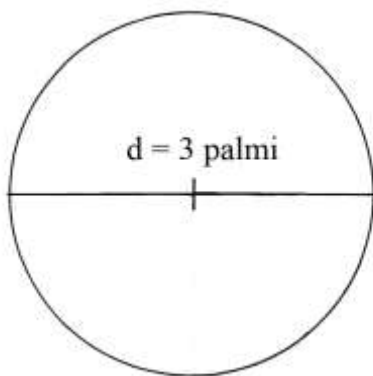
Il problema chiede il peso della sfera.

Il volume V della palla è calcolato come segue:

$$V = d^3 * 11/21 = 3^3 * 11/21 = 9 * 11/21 = (14 + 1/7) \text{ palmi cubi.}$$

Il peso P della palla è:

$$P = V * 100 = (1414 + 2/) \text{ libbre.}$$



APPROFONDIMENTO

La formula usata da de Ortega per calcolare il volume della palla è corretta.

Vediamone l'origine.

Il volume V di una sfera è dato da:

$$V = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * (22/7) * r^3, \text{ con } r \text{ raggio.}$$

Al posto del raggio può essere usato il diametro diviso per 2: $r = d/2$.

La formula diviene:

$$V = (4/3) * (22/7) * (d/2)^3 = 88/21 * d^3/8 = 11/21 * d^3.$$

Nella formula ha fatto la sua comparsa la costante 88.

36 – Due palle di ferro

Il problema propone di confrontare i volumi di due palle sferiche di differenti dimensioni.

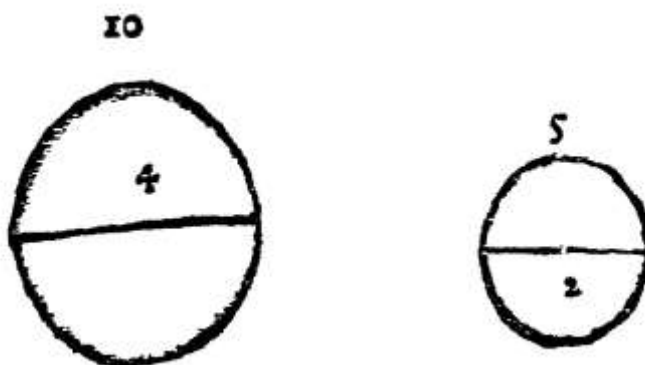
Nel testo sono fornite cifre che sembrano piuttosto discutibili:

- * la prima sfera avrebbe “*circuito*” lungo 5 palmi e diametro 2 palmi;
- * la seconda sarebbe con “*circuito*” lungo 10 palmi e diametro 4 palmi.

Se per “*circuito*” si intende la circonferenza, i dati forniti sono errati: la circonferenza c di un cerchio ha lunghezza che è data da:

$$c = 2 * \pi * r = 2 * 22/7 * r = 2 * 22/7 * d/2 = 22/7 * d.$$

Lo schema che segue è riprodotto dal testo di de Ortega:



Calcoliamo correttamente le lunghezze delle circonferenze delle due sfere:

- * $C_{PRIMA\ SFERA} = d * 22/7 = 2 * 22/7 = 44/7 = (6 + 2/7)$ palmi;
- * $C_{SECONDA\ SFERA} = d * 22/7 = 4 * 22/7 = 88/7 = (12 + 4/7)$.

Utilizziamo la formula per calcolare il volume delle due sfere:

- * $V_{PRIMA\ SFERA} = 11/21 * d^3 = 11/21 * 2^3 = 88/21$ palmi cubi;
- * $V_{SECONDA\ SFERA} = 11/21 * d^3 = 11/21 * 4^3 = 704/21$ palmi cubi.

Il rapporto fra i due volumi è:

$$V_{SECONDA\ SFERA} / V_{PRIMA\ SFERA} = (704/21) / (88/21) = 704/88 = 8.$$

Il risultato è uguale a quello calcolato dall’Autore con la procedura che segue:

- * moltiplicare la lunghezza del *circuito* della sfera più piccola per sé stessa:
 $5 * 5 = 25$;
- * moltiplicare per la lunghezza del diametro della sfera più piccola: $25 * 2 = 50$;
- * moltiplicare la lunghezza del circuito della sfera più grande per sé stessa:
 $10 * 10 = 100$;
- * moltiplicare per la lunghezza del diametro della sfera più grande: $100 * 4 = 400$;
- * dividere 400 per 50: $400/50 = 8$, rapporto fra il volume (e il peso) della sfera più grande e quello della sfera più piccola.

----- APPROFONDIMENTO -----

Lo schema che segue presenta il *cerchio massimo* della sfera più grande.

AB è il suo diametro, lungo 4 palmi.

La circonferenza c è lunga:

$$c = AB * 22/7 = 4 * 22/7 = 88/7 = (12 + 4/7) \text{ palmi.}$$

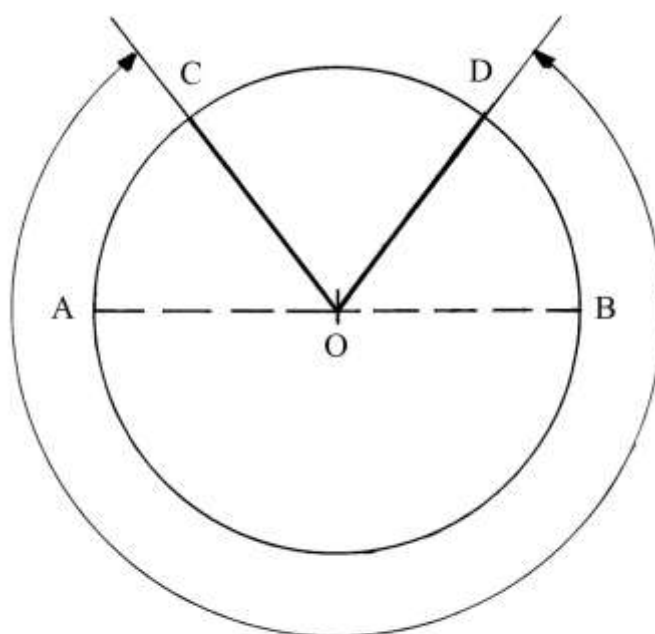
Stando al testo di de Ortega (e allo schema originale), l'arco CABD sarebbe lungo 10 palmi: esso corrisponde al "circuito" lungo 10 palmi ed è più corto dell'intera circonferenza.

L'angolo CABD = α ha ampiezza che è data dalla seguente proporzione:

$$360 : \alpha = c : CABD$$

$$360 : \alpha = (12 + 4/7) : 10$$

$$\alpha = (360 * 10) / (12 + 4/7) \approx 286,36^\circ.$$



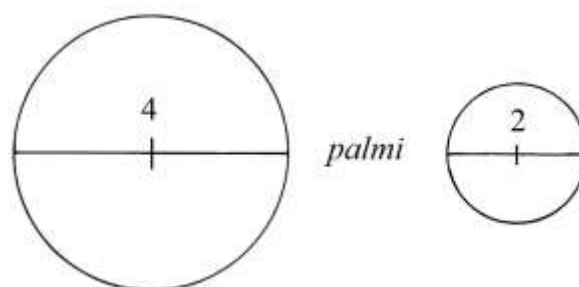
$$AB = 4 \quad \text{circonferenza} = (12 + 4/7)$$

$$CABD = 10$$

$$\hat{CABD} \approx 286,36^\circ$$

37 – Confronto fra due botti

Sono date due botti divino di forma circolare: la più piccola ha diametro di 2 palmi e la più grande 4 palmi.



Il problema chiede quante volte la botte più grande conterrà più liquido di quella più piccola.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare il diametro della più piccola al cubo: $2^3 = 8$;
- * moltiplicare per 11/21: $8 * 11/21 = 88/21 = (4 + 11/21)$, volume della più piccola;
- * moltiplicare il diametro della più grande al cubo: $4^3 = 64$;
- * moltiplicare per 11/21: $64 * 11/21 = 704/21 = (33 + 11/21)$, volume della più grande;
- * dividere per il volume della botte più piccola: $(704/21)/(88/21) = 8$.

La botte più grande contiene 8 volte il volume della botte più piccola.

----- APPROFONDIMENTO -----

La soluzione proposta da de Ortega è un po' contorta: i due solidi hanno forma cilindrica e non sferica, quindi non ha senso calcolare i loro volumi con la formula valida solo per il volume di una sfera: cilindro e sfera sono solidi distinti.

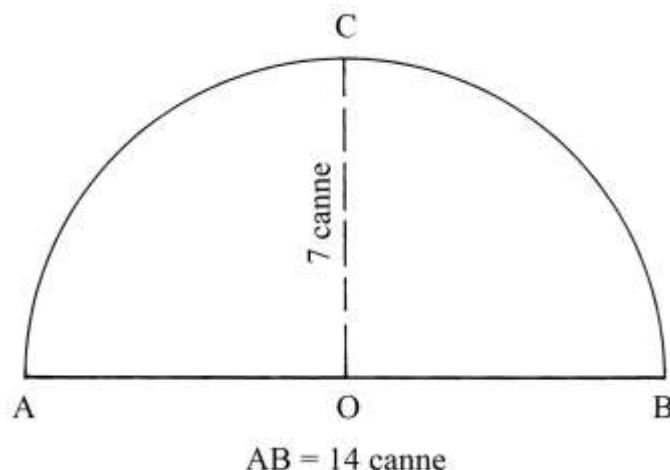
I volumi di due cilindri di uguale altezza sono proporzionali al *quadrato* delle lunghezze dei diametri delle loro sezioni circolari.

Il rapporto fra i due volumi sembra essere:

$$4^2/2^2 = 16/4 = 4 \text{ e non } 8.$$

38 – Area di un semicerchio

Un terreno ha la forma di un semicerchio: il diametro è lungo 14 canne e la freccia (“saetta”), che un raggio del semicerchio, è lunga 7.



Deve essere calcolata l'area espressa in canne quadrate.

La procedura contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza della freccia OC per $(3 + 1/7)$: $7 * (3 + 1/7) = 22$ canne, lunghezza del cosiddetto "circuito" e cioè lunghezza della semicirconferenza ACB;
- * moltiplicare metà della lunghezza dell'arco ACB per la metà della lunghezza del diametro AB:
 $(ACB/2) * (AB/2) = (22/2) * (14/2) = 11 * 7 = 77$ canne quadrate, area del semicerchio.

----- APPROFONDIMENTO -----

L'Autore ha usato il metodo già impiegato nella soluzione del problema 25 relativo all'area di un cerchio.

L'area del semicerchio ACBO è stata calcolata con una procedura che può essere riassunta in una formula: c è la lunghezza della circonferenza del cerchio dal quale è stato tagliato il semicerchio e d è il suo diametro AB:

$$S_{ACBO} = [(c/2)/2 *] * d/2.$$

La lunghezza di c è: $c = 22/7 * d = 22/7 * 14 = 44$ canne.

Ne consegue:

$$S_{ACBO} = [(44/2)/2] * 14/2 = 11 * 7 = 77 \text{ canne.}$$

39 – Area di un semicerchio

Il problema è l'inverso del precedente e utilizza la stessa figura e i medesimi dati.

Un terreno ha la forma di un semicerchio.

Il "circuito" e cioè la semicirconferenza ha lunghezza di 22 canne: è la lunghezza dell'arco ACB della precedente figura.

Deve essere calcolata l'area del semicerchio.

Dividere la lunghezza di ACB per $(3 + 1/7)$:

$$22/(3 + 1/7) = 7 \text{ canne, lunghezza della freccia CO (e raggio del semicerchio).}$$

Moltiplicare per 2 la lunghezza di CO:

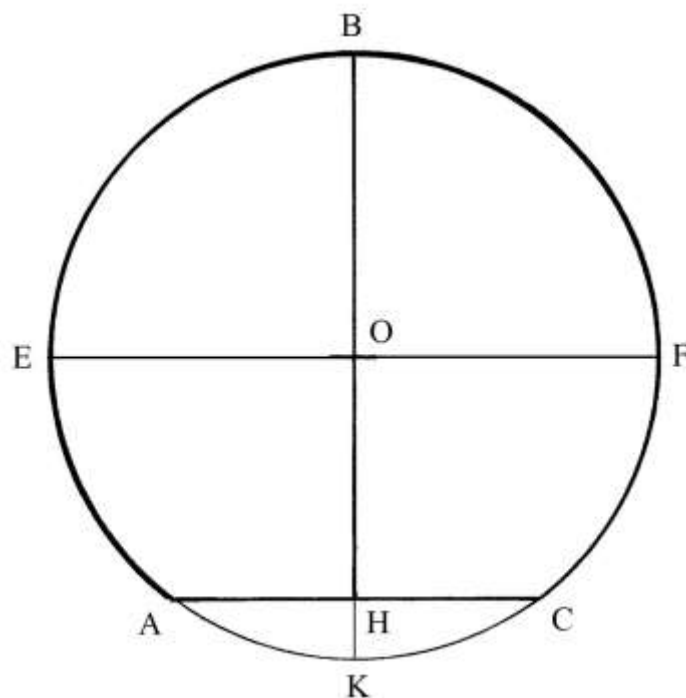
$$7 * 2 = 14 \text{ canne, lunghezza del diametro AB.}$$

L'area del semicerchio è:

$$S_{ACBO} = (AB/2) * (ACB/2) = (14/2) * (22/2) = 7 * 11 = 77 \text{ canne quadrate.}$$

40 – Area di un terreno

Un terreno ha la forma di un segmento circolare più grande di un semicerchio.



La corda AC è lunga 6 canne e la freccia BH è 9 canne.

L'arco ABC o AEBFC è lungo 25 canne.

Il problema chiede l'area del terreno.

La soluzione proposta contiene i seguenti passi:

- * dividere per 2 la lunghezza della corda AC: $6/2 = 3$;
- * moltiplicare per sé stesso: $3 * 3 = 9$;
- dividere per la lunghezza della freccia BH: $9/BH = 9/9 = 1$ [lunghezza della freccia HK];
- * sommare la lunghezza di HK con quella di BH: $1 + 9 = 10$ canne, lunghezza del diametro BK [e del diametro EF];
- * moltiplicare metà della lunghezza del diametro BK per metà di quella dell'arco AEBFC:
 $(BK/2) * (AEBFC/2) = (10/2) * (25/2) = (62 + \frac{1}{2})$;
- * dividere per 2 la lunghezza del diametro BK: $BK/2 = 10/2 = 5$;
- * sottrarre dalla lunghezza della freccia BH: $9 - 5 = 4$;
- * moltiplicare per metà della lunghezza della corda AC: $4 * 3 = 12$;
- * *sommare* con $(62 + \frac{1}{2})$: $12 + (62 + \frac{1}{2}) = (74 + \frac{1}{2})$ canne quadrate, area del terreno, S.

----- APPROFONDIMENTO -----

La lunghezza del diametro BK è stata ricavata applicando il *teorema delle corde* (non citato):

$$AH : BH = HK : HC$$

$$AC/2 : BH = HK : AC/2$$

$$6/2 : 9 = HK : 6/2$$

$$3 : 9 = HK : 3$$

$$HK = 3 * 3/9 = 1 \text{ canna.}$$

$$BK = BH + HK = 9 + 1 = 10 \text{ canne.}$$

%%%

Verifichiamo l'esattezza dei dati forniti da de Ortega.

La lunghezza della circonferenza c dell'intero cerchio di centro O e diametro BK è:

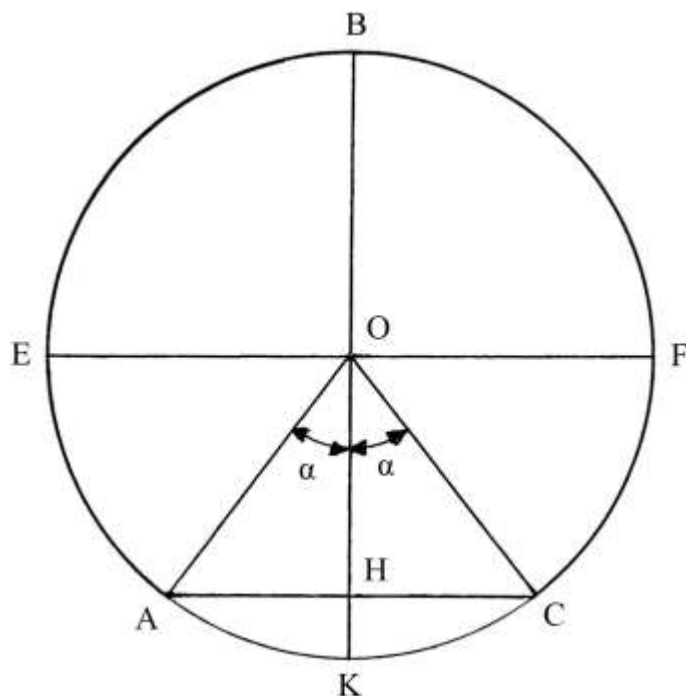
$$c = 22/7 * BK = 22/7 * 10 = (31 + 3/7) \text{ canne.}$$

La superficie dell'intero cerchio, S_{CERCHIO} , da cui è ritagliato il settore circolare $AEBFC$ è data da:

$$S_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14, \text{ con } d, \text{ diametro: } d = BK = 10 \text{ canne:}$$

$$S_{\text{CERCHIO}} = 10^2 * 11/14 = (78 + 4/7) \text{ canne quadrate.}$$

$OAKC$ è un settore circolare il cui angolo al centro, AOC è ampio $2 * \alpha$.



OAH e OCH sono due triangoli rettangoli di uguali dimensioni. Consideriamo il triangolo OAH : OA è l'ipotenusa, lunga 5 canne, e AH è il cateto minore, lungo 3 canne.

La lunghezza del cateto maggiore OH è data da:

$$OH = OK - HK = 5 - 1 = 4 \text{ canne.}$$

I due triangoli rettangoli OAH e OCH hanno lati con lunghezze che formano la terna primitiva 3-4-5.

La tangente dell'angolo α è:

$$\text{tg } \alpha = AH/OH = 3/4 = 0,75.$$

Essa corrisponde a un angolo: $\alpha \approx 36^\circ 30' \approx 36,5^\circ$.

L'angolo $2 * \alpha$ vale 73° .

Con una semplice proporzione possiamo calcolare la lunghezza dell'arco AKC :

$$AKC : \text{circonferenza} = 2 * \alpha : 360$$

$$AKC = (\text{circonferenza} * 2 * \alpha) / 360 = 6,37 \text{ canne.}$$

La lunghezza dell'arco $AEBFC$ è:

$$AEBFC = \text{circonferenza} - AKC = (31 + 3/7) - 6,37 \approx 25,06 \text{ canne.}$$

Il risultato è pressoché uguale a quello fornito inizialmente dall'Autore.

Calcoliamo l'area del segmento circolare $AHCK$ con la formula oggi impiegata:

$$S_{\text{AHCK}} = [r * (\text{arco} - \text{corda}) + \text{corda} * \text{freccia}] / 2, \text{ dove:}$$

* r è il raggio OA : $OA = 5$;

* l'arco AKC è lungo 6,37;

- * la corda AC è lunga 6;
- * la freccia HK è lunga 1:

$$S_{AHCK} = [5 * 6,37 - 6) + 6 * 1]/2 = (1,85 + 6)/2 = 3,925 \text{ canne quadrate.}$$

L'area del segmento circolare AEBFC è data dalla differenza fra quella del cerchio e quella di AHCK:

$$S_{AEBFC} = S - S_{AHCK} = (78 + 4/7) - 3,925 = 74,65 \text{ canne quadrate.}$$

Il risultato è pressoché uguale a quello calcolato da de Ortega: $(74 + \frac{1}{2})$ canne quadrate.

%%

Riassumiamo in una formula la procedura usata da de Ortega:

$$S = (BK/2) * (AEBFC/2) + [(BH - BK)/2] * AC/2.$$

40 – Area di un segmento circolare più piccolo di un semicerchio

Un terreno ha la forma di un segmento circolare più piccolo di mezzo cerchio: è ABCH.

Deve essere calcolata la sua area.

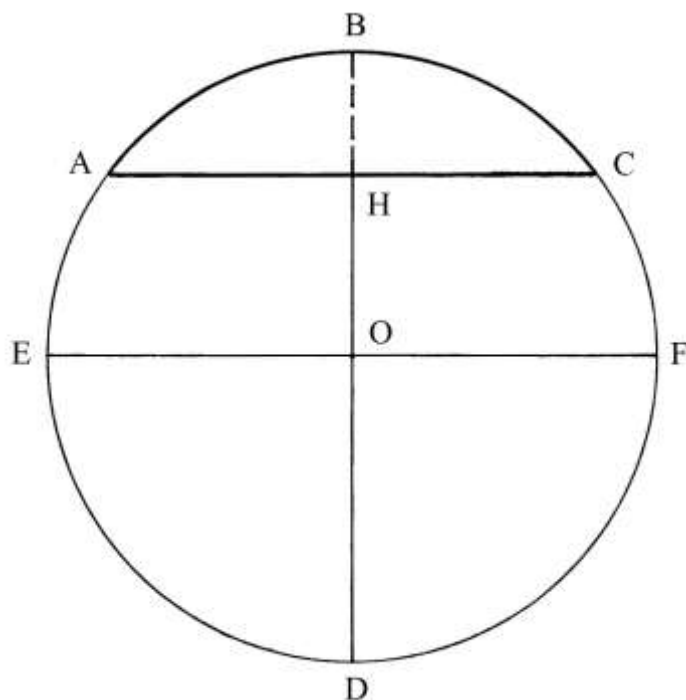
L'arco ABC è lungo 9,5 canne, la freccia BH è 2 e la corda AC è lunga 8 canne.

La lunghezza del diametro del cerchio è calcolata con l'applicazione del “teorema delle corde” (peraltro non citato):

- * dividere per 2 la lunghezza della corda: $AC/2 = 8/2 = 4;$
- * moltiplicare per sé stesso: $4 * 4 = 16;$
- * dividere per la lunghezza della freccia: $16/BH = 16/2 = 8$ canne, lunghezza di HD;
- * sommare con la lunghezza della freccia: $8 + BH = 8 + 2 = 10$ canne, diametro del cerchio BD da cui è ritagliato il segmento: $BD = EF = 10.$

L'area è calcolata con la seguente procedura che ripropone quella usata nella soluzione del precedente problema:

- * moltiplicare la metà della lunghezza del diametro BD per la metà della lunghezza dell'arco ABC: $(BD/2) * (ABC/2) = (10/2) * (9,5/2) = (23 + \frac{3}{4});$
- * sottrarre la metà della lunghezza del diametro da quella della corda: $AC - (BD/2) = 8 - (10/2) = 8 - 5 = 3;$
- * moltiplicare per la metà della lunghezza della corda: $3 * AC/2 = 3 * 4 = 12;$
- * sottrarre 12 da $(23 + \frac{3}{4})$: $(23 + \frac{3}{4}) - 12 = (11 + \frac{3}{4})$ canne quadrate, area del segmento circolare ABCH.



42 – Area di un altro segmento circolare più piccolo di un semicerchio

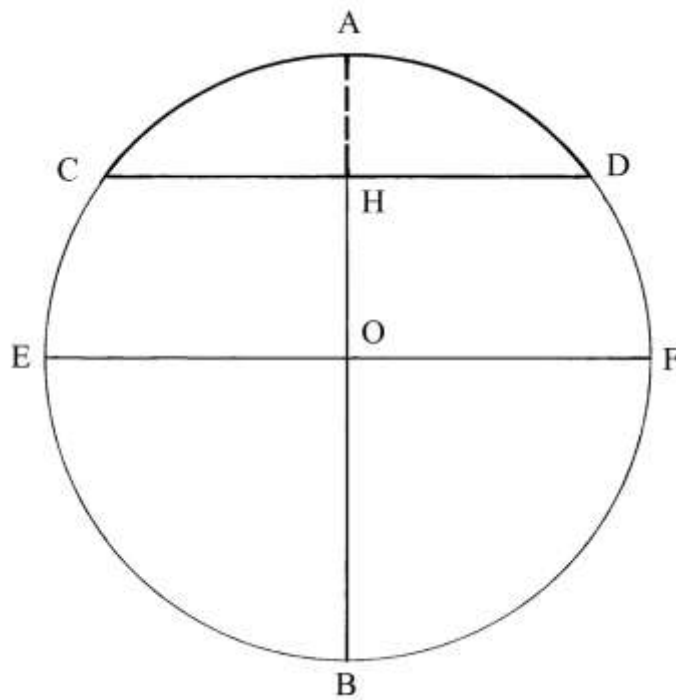
Il problema chiede di ricavare la lunghezza della corda CD di un segmento circolare più piccolo di un semicerchio.

La freccia AH è lunga 2 canne e il diametro AB del cerchio da cui è tagliato il segmento circolare è lungo 10 canne.

È evidente che i dati forniti per questo problema portano a far coincidere questo segmento circolare con quello considerato nel precedente problema, il 41.

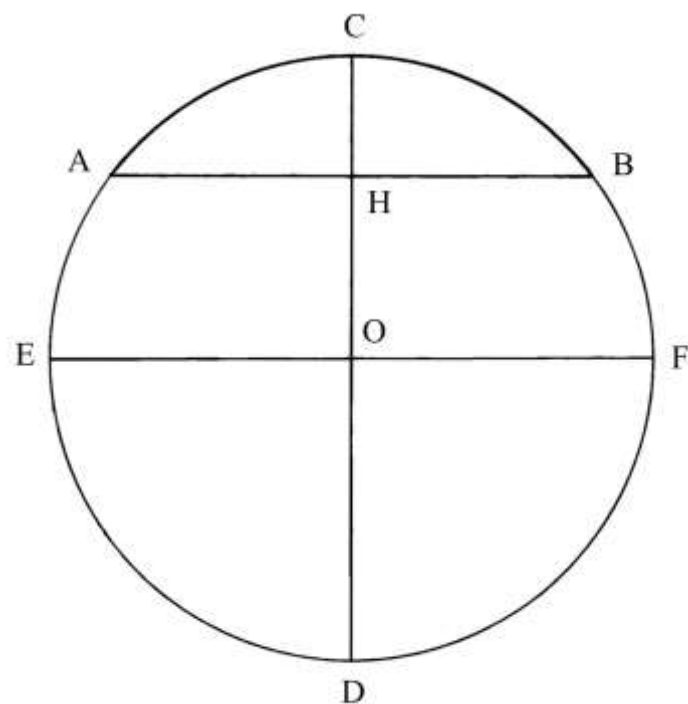
La soluzione contiene i seguenti passi:

- * dividere per 2 la lunghezza del diametro: $10/2 = 5$;
- * moltiplicare per sé stesso: $5 * 5 = 25$;
- * sottrarre la lunghezza della freccia dalla lunghezza della metà del diametro:
 $AB/2 - AH = 10/2 - 2 = 5 - 2 = 3 [= HO]$;
- * moltiplicare per sé stesso: $3 * 3 = 9$;
- * sottrarre da 25: $25 - 9 = 16$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{16} = 4$;
- * moltiplicare per 2: $4 * 2 = 8$ canne, lunghezza della corda CD.



43 – Lunghezza della freccia di un segmento circolare

Un segmento circolare è più piccolo di mezzo cerchio: le sue dimensioni sono uguali a quelle dei segmenti circolari dei precedenti problemi nn. 41 e 42.

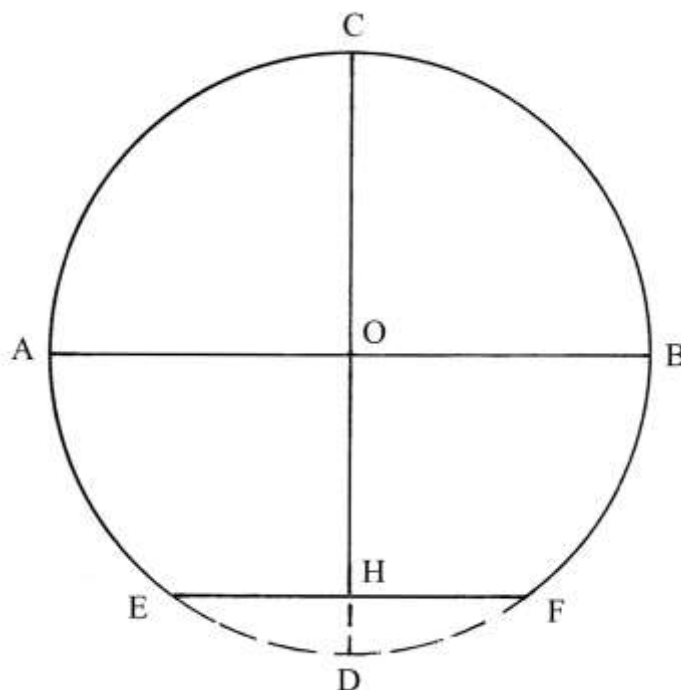


La corda AB è lunga 8 canne il diametro CD è 10 canne.
Deve essere ricavata la lunghezza della freccia CH.
La soluzione contiene i seguenti passi:

- * dividere per 2 la lunghezza del diametro: $CD/2 = 10/2 = 5$;
- * moltiplicare per sé stesso: $5 * 5 = 25$;
- * dividere per 2 la lunghezza della corda AB: $AB/2 = 8/2 = 4$;
- * moltiplicare per sé stesso: $4 * 4 = 16$;
- * sottrarre 16 da 25: $25 - 16 = 9$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{9} = 3$;
- * sottrarre dalla lunghezza del raggio: $OC - 3 = 5 - 3 = 2$ canne, lunghezza della freccia CH.

44 – Segmento circolare più grande di mezzo cerchio

Un terreno ha la forma di un segmento circolare che è più grande di mezzo cerchio: il diametro AB è lungo 10 canne e la freccia CH è 9 canne.



Deve essere calcolata la lunghezza della corda EF.

La soluzione contiene i seguenti passi:

- * dividere per 2 la lunghezza del diametro AB: $AB/2 = 10/2 = 5$;
- * sottrarre dalla lunghezza della freccia CH: $CH - 5 = 9 - 5 = 4$ [lunghezza di OH];
- * moltiplicare per sé stesso: $4 * 4 = 16$;
- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di della metà del diametro: $5 * 5 = 25$;
- * sottrarre 16 da 25: $25 - 16 = 9$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{9} = 3$;
- * moltiplicare per 2: $3 * 2 = 6$ canne, lunghezza della corda EF.

Come è avvenuto per i precedenti problemi dal n. 40 in poi, anche questo studia un settore circolare ricavato da un cerchio che ha diametro lungo 10 canne.

----- APPROFONDIMENTO -----

La diretta applicazione del *teorema delle corde* avrebbe portato a una soluzione più semplice e più rapida:

$$EH : CH \quad HD : HF$$

$$EH * HF = CH * HD$$

$$EH^2 = CH * HD$$

CH è la freccia, lunga 9. HD è lunga:

$$HD = CD - CH = 10 - 9 = 1.$$

Quindi si ha:

$$EH^2 = 9 * 1 = 9$$

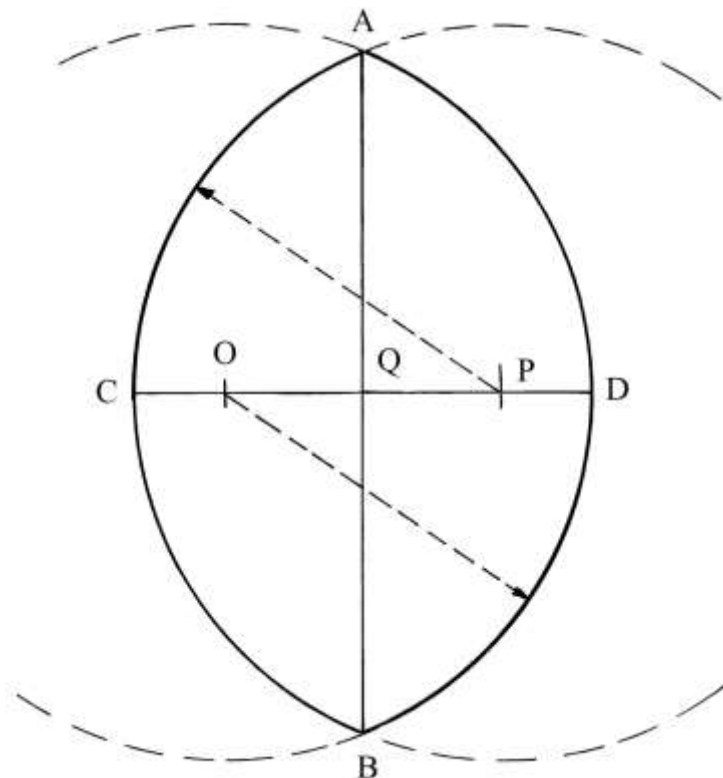
$$EH = \sqrt{9} = 3 \text{ canne.}$$

Infine:

$$EF = 2 * EH = 2 * 3 = 6 \text{ canne.}$$

45 – Area di un terreno a forma di doppio segmento circolare

Un terreno ha la forma di due segmenti circolari simmetrici, di uguali dimensioni e uniti lungo la corda comune AB, lunga 30 canne: è ACBD.



CD è la doppia freccia ed è lunga 20 canne.

Su CD giacciono i centri O e P degli archi di circonferenza ACB e ADB che delimitano la figura.

I raggi OD e PC hanno uguale lunghezza, approssimativamente pari a 16 canne.

Deve essere calcolata l'area del terreno.

La soluzione proposta da de Ortega comprende i seguenti passi:

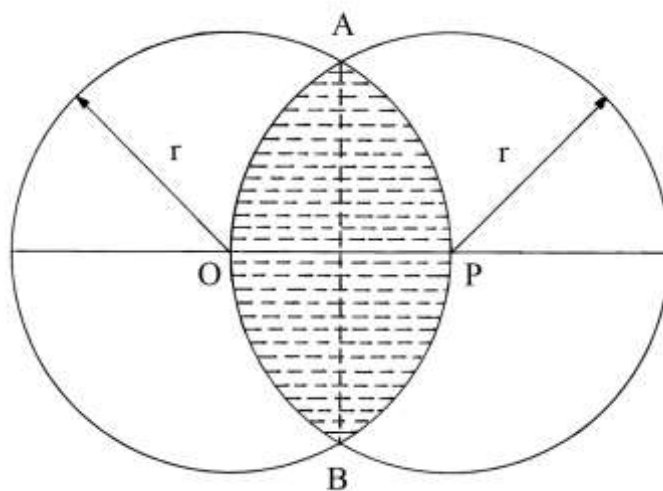
- * moltiplicare la lunghezza della corda AB per quella della doppia freccia CD:
 $AB * CD = 30 * 20 = 600$;
- * moltiplicare per $3/14$:
 $600 * 3/14 = (128 + 4/7)$;
- * sottrarre da 600:
 $600 - (128 + 4/7) = (471 + 3/7)$ canne quadrate,
area del doppio segmento circolare ACBD.

Gli ultimi due passi della soluzione proposta da de Ortega possono essere uniti in una sola operazione:

- * moltiplicare 600 per $11/14$:
 $600 * 11/14 = (471 + 3/7)$ canne quadrate.

----- APPROFONDIMENTO -----

Il doppio segmento circolare presentato nella precedente figura non è assimilabile alla *vesica piscis* o *mandorla* che è mostrata nello schema che segue:



Essa ha forma ogivale generata dall'intersezione di due cerchi aventi lo stesso raggio r : il centro di un cerchio si trova sulla circonferenza dell'altro:

O e P sono i due centri dei cerchi di raggio r e OP è lungo quanto r .

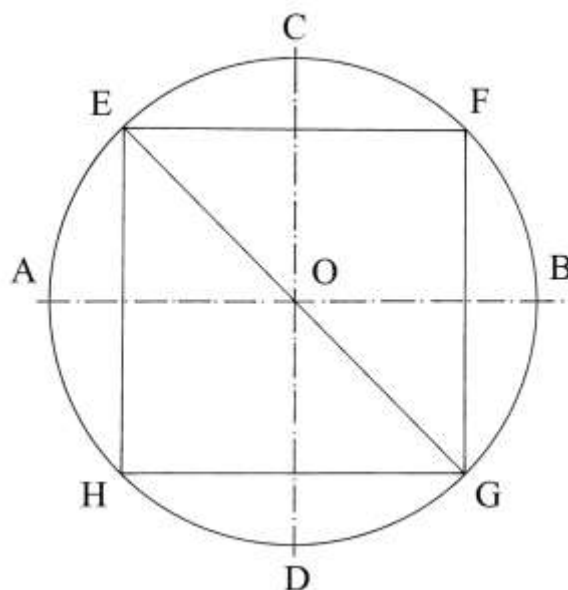
La figura è delimitata dagli archi AOB e APB.

46 – Torre con base quadrata inscritta in un cerchio

Un terreno ha forma circolare con diametro AB lungo 16 canne.

Nel cerchio deve essere costruita una torre quadrata con la base inscritta nel cerchio stesso.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del quadrato.



La soluzione contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $16 * 16 = 256$;
- * dividere per 2: $256/2 = 128$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{128} = (11 + 7/23)$ canne, lunghezza dei lati del quadrato inscritto EFGH.

----- APPROFONDIMENTO -----

EG è un diametro del cerchio e una delle due diagonali del quadrato EFGH.

Consideriamo il triangolo rettangolo isoscele EHG:

$$EG^2 = EH^2 + HG^2 = 2 * EH^2$$

$$EH^2 = EG^2/2 = 16^2/2 = 256/2 = 128 \text{ e}$$

$$EH = \sqrt{128} = (11 + 7/23) \text{ canne, lunghezza dei lati del quadrato inscritto EFGH.}$$

47 – Una torre a base triangolare

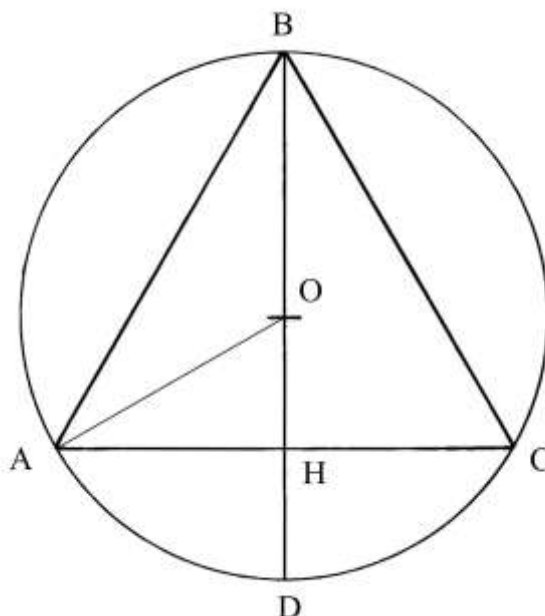
Un terreno ha forma circolare con diametro BD lungo 10 canne.

Il proprietario vuole costruirvi una torre a forma di triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

Devono essere ricavate le lunghezze dei lati del triangolo e quelle delle sue altezze.

La soluzione contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
- * moltiplicare per $\frac{3}{4}$: $100 * \frac{3}{4} = 75$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{75} = (8 + 11/17)$ canne, lunghezza dei lati del triangolo equilatero ABC;
- * moltiplicare la lunghezza del diametro per $\frac{3}{4}$: $10 * \frac{3}{4} = (7 + \frac{1}{2})$ canne, lunghezza dell'altezza BH.



----- APPROFONDIMENTO -----

H è il punto medio del raggio OD:

$$OH = OD/2 = (BD/2)/2 = (10/2)/2 = 5/2 = 2,5.$$

L'altezza BH è lunga:

$$BH = BO + OH = 10/2 + OH = 5 + 2,5 = 7,5 \text{ canne.}$$

OAH è un triangolo rettangolo: OA è la sua ipotenusa che è lunga quanto il raggio del cerchio e cioè 5.

Il cateto AH è la metà del lato AC del triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

La lunghezza di AH è data da:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 5^2 - 2,5^2 = 25 - 6,25 = 18,75 \text{ e}$$

$$AH = \sqrt{18,75}.$$

Il lato AC è lungo il doppio di AH:

$$AC = 2 * AH = 2 * \sqrt{18,75} = \sqrt{75} = (8 + 11/17) \text{ canne.}$$

Il risultato è uguale a quello calcolato da de Ortega.

48 – Cerchio equivalente a un quadrato

Un terreno ha forma quadrata con lati lunghi 10 canne: il proprietario desidera scambiarla con un altro terreno di forma circolare e di area uguale.

L'area del quadrato ABCD è:

$$S_{ABCD} = 10^2 = 100 \text{ canne quadrate.}$$

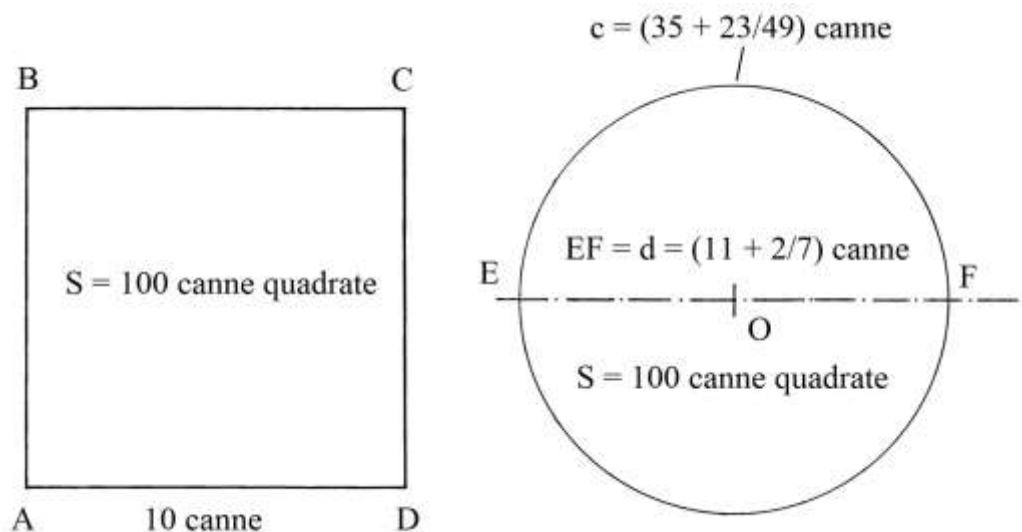
Il cerchio deve avere area uguale e *100 canne quadrate*.

Deve essere calcolata la lunghezza del “circuitto” e cioè quella della circonferenza del terreno di area uguale a 100 canne quadrate.

La soluzione contiene i seguenti passi:

- * dividere l'area del cerchio per 11/14: $100/(11/14) = 100 * 14/11 = (127 + 3/11);$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(127 + 3/11)} = (11 + 2/7) \text{ canne, diametro del cerchio con area uguale a 100 canne quadrate;}$

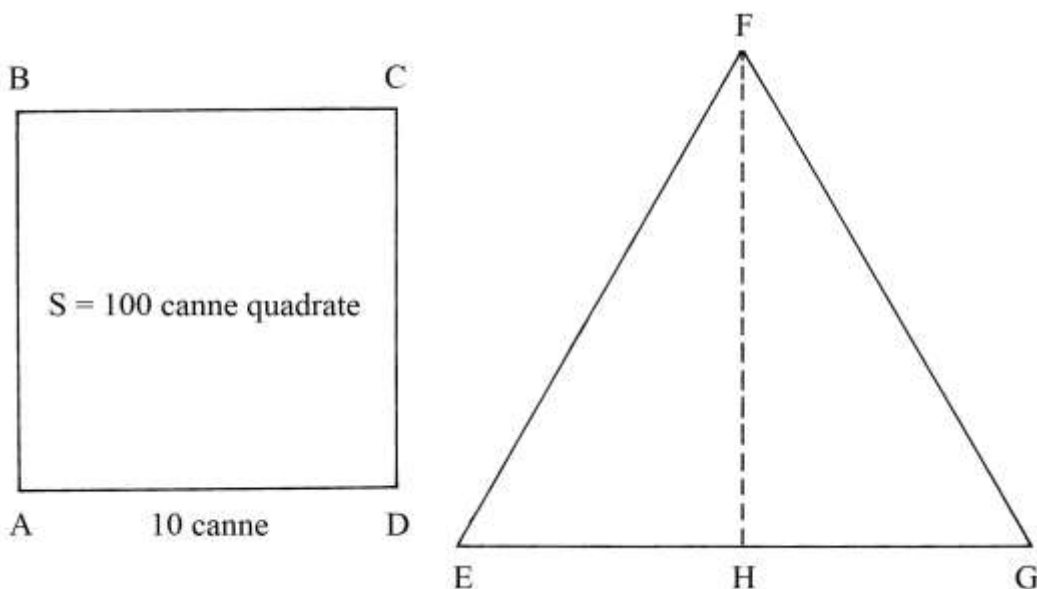
- * moltiplicare per $(3 + 1/7)$: $(11 + 2/7) * (3 + 1/7) = (35 + 23/49)$ canne, lunghezza della circonferenza c del cerchio.



49 Triangolo equilatero equivalente a un quadrato

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 10 canne (come nel caso del precedente problema): il proprietario desidera scambiare questo terreno con un altro di forma triangolare equilatera e con uguale superficie.

Deve essere ricavata la lunghezza dei lati del triangolo.



I passi proposti sono i seguenti:

- * calcolare l'area del quadrato ABCD: $S_{ABCD} = 10 * 10 = 100$ canne quadrate;
- * moltiplicare per 2: $100 * 2 = 200$;
- * moltiplicare l'area di ABCD per $(1/6 + 1/7)$ [=13/42]: $100 * (1/6 + 1/7) \approx 31$;

- * sommare con 200: $200 + 31 = 231$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{231} \approx 15,2$ canne, lunghezza dei lati del triangolo equilatero EFG.

----- APPROFONDIMENTO -----

L'area del triangolo equilatero EFG è data da:

$$S_{EFG} = EG * FH/2 = EF * FH/2.$$

La lunghezza dell'altezza FH è ottenuta da:

$$FH^2 = EF^2 - EH^2 = EF^2 - (EF/2)^2 = \frac{3}{4} * EF^2 \quad e$$

$$FH = EF * (\sqrt{3})/2.$$

L'area è ricavata da:

$$S_{EFG} = EF * [EF * (\sqrt{3})/2]/2 = EF^2 * (\sqrt{3})/4.$$

Sappiamo che l'area è 100 canne quadrate per cui ricaviamo la lunghezza di EF:

$$EF^2 * (\sqrt{3})/4 = 100$$

$$EF^2 = 4 * 100/\sqrt{3} = 400/\sqrt{3} = (400 * \sqrt{3})/3 = 230,94 \quad e$$

$$EF = \sqrt{230,94} \approx 15,2 \text{ canne.}$$

Il risultato è uguale a quello calcolato da de Ortega.

Il perimetro p del triangolo è lungo:

$$p = 3 * EF = 3 * 15,2 = 45,60 \text{ canne.}$$

L'altezza FH è lunga:

$$FH = EF * (\sqrt{3})/2 \approx 13,16 \text{ canne.}$$

50 – Volume di una botte di vino

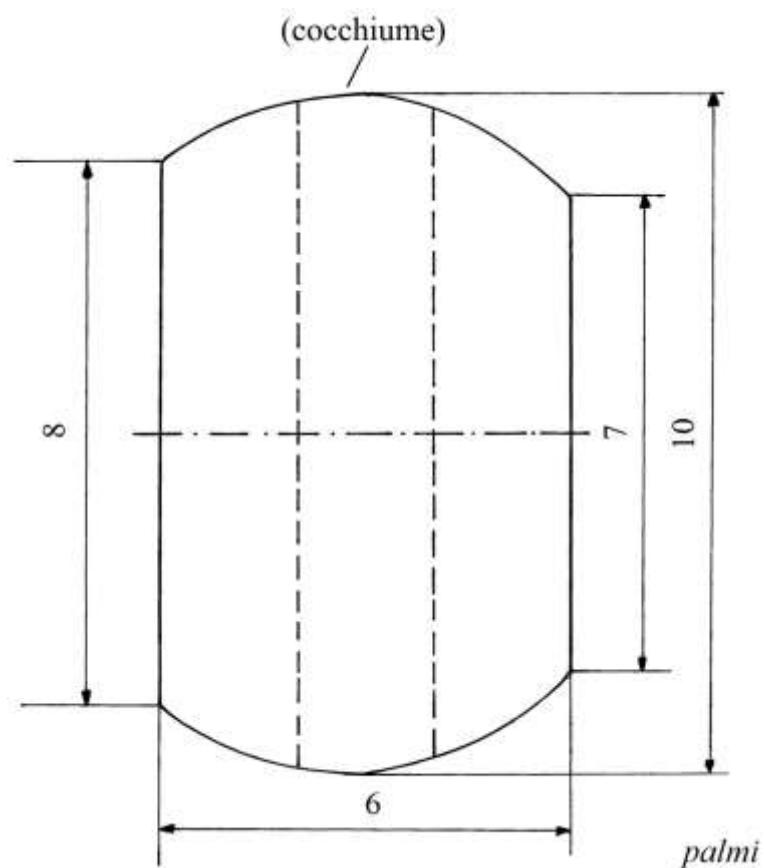
Una botte ha lunghezza di 6 palmi e i due fondi hanno diametri di 8 e di 7 palmi.

Al centro, in corrispondenza del *cocchiere* (non indicato nello schema originale), il diametro è di 10 palmi.

Deve essere calcolato il volume della botte espresso in palmi cubi [*palmi quadrati* nel testo] e in *barili*: 9 palmi cubi equivalgono a 1 barile.

La soluzione contiene i seguenti passi:

- * sommare i diametri dei due fondi (i “lati”) della botte: $8 + 7 = 15$;
- * dividere per 2: $15/2 = 7,5$;
- * sommare con il diametro al *cocchiere*: $7,5 + 10 = 17,5$;
- * dividere per 2: $17,5/2 = 8,75$;
- * moltiplicare per sé stesso: $8,75 * 8,75 = (79 + 9/16)$;
- * calcolare gli 11/14: $(79 + 9/16) * 11/14 = (60 + 5/32)$;
- * moltiplicare per la lunghezza della botte: $(60 + 5/32) * 6 = (360 + 15/16)$ palmi cubi, volume della botte;
- * dividere per 9: $(360 + 15/16)/9 = (40 \text{ barili} + 1 \text{ palmo cubo}).$



51 – Volume di una mezza botte

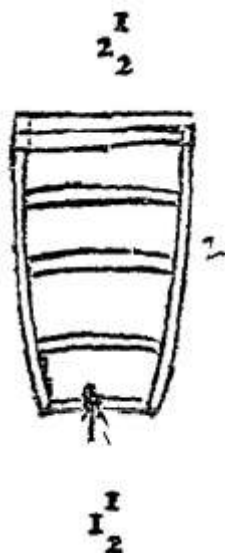
Una mezza botte ha forma circolare ed è alta 2 palmi.

La bocca ha diametro $(2 + \frac{1}{2})$ palmi e la base lo ha di $(1 + \frac{1}{2})$ palmi.

Deve essere calcolato il volume dell'acqua che il recipiente può contenere, espresso in *palmi cubi* e, poi, in *barili*, con la seguente equivalenza:

3 palmi cubi = 1 barile di acqua.

Lo schema che segue è riprodotto dal trattato di de Ortega:



La soluzione contiene i seguenti passi:

- * sommare i due diametri: $(2 + \frac{1}{2}) * (1 + \frac{1}{2}) = 4;$
- * dividere per 2: $4/2 = 2;$
- * moltiplicare per sé stesso: $2 * 2 = 4;$
- * moltiplicare per 11/14: $4 * 11/14 = (3 + 1/7),$ palmi quadrati, area della sezione mediana;
- * moltiplicare per l'altezza: $(3 + 1/7) * 2 = (6 + 2/7)$ palmi cubi, volume dell'acqua;
- * dividere per 3: $(6 + 2/7)/3 = (2 + 2/21)$ barili, volume dell'acqua.

----- APPENDICE -----

Il problema dei barili

Cinque problemi usano il *barile* per misurare i volumi di due liquidi: acqua e vino.

Allo scopo, de Ortega converte alcuni volumi di recipienti, calcolati in unità di misura con i seguenti rapporti, ricavati da p. 597 del *Manuale* di Angelo Martini:

- * la canna cuba, equivalente a 1000 palmi cubi: $1 \text{ canna cuba} = 11,152616 \text{ m}^3;$
 - * il palmo cubo: $1 \text{ palmo cubo} = 11,153 \text{ dm}^3.$
- Le due unità derivano dalle due seguenti unità di misura della lunghezza:
- * $1 \text{ canna architettonica} = 10 \text{ palmi romani} = 2,234218 \text{ metri};$
 - * $1 \text{ palmo romano} = 0,223422 \text{ metri}.$

Due diverse fonti, il citato Martini e il testo dello Zupko forniscono informazioni sull'equivalenza fra il *barile* usato a Roma e le unità dell'attuale sistema SI:

- * secondo Martini (p. 598) il barile da vino valeva 58,341591 litri o $\text{dm}^3;$
- * stando allo Zupko (p. 19 del suo testo), il barile valeva 0,583 ettolitri e cioè 58,3 litri o $\text{dm}^3.$

La tabella che segue riassume le discordanze che emergono dai cinque problemi del testo di Juan de Ortega: il barile sembra avere volumi assai differenti nei cinque casi.

Problema numero	Liquido contenuto	Equivalenze
14	Acqua	1 canna cuba = 8 barili $1 \text{ barile} = 11,152616/8 = 1,394077 \text{ m}^3$
20	Acqua	1 canna cuba = 10 barili $1 \text{ barile} = 11,152616/10 = 1,115262 \text{ m}^3$
29	Acqua	3 palmi cubi = 1 barile $1 \text{ barile} = 3 * 11,153 = 33,459 \text{ dm}^3 = 0,033459 \text{ m}^3$
50	Vino	9 palmi cubi = 1 barile $1 \text{ barile} = 9 * 11,153 = 100,377 \text{ dm}^3 = 0,100377 \text{ m}^3$
51	Acqua	3 palmi cubi = 1 barile $1 \text{ barile} = 3 * 11,153 = 33,459 \text{ dm}^3 = 0,033459 \text{ m}^3$

Neanche con l'aiuto dei due testi di Martini e di Zupko sembra possibile ricavare una spiegazione di queste discrepanze.

Bibliografia

1. Calandri Pietro Maria, "Compendium de agrorum corporumque dimensione", in "I due trattati dell'Agricoltura e della Coltivazione delle Viti", di Giovanvettorio Soderini, a cura di Alberto Bacchi Della Lega, Bologna, Romagnoli Dall'Acqua, 1902, pp. da 291 a 346.
2. Forestani Lorenzo, "Pratica d'Arithmetica e Geometria", Siena, Stamperia del Pubblico, 1682, pp. 574.
3. Martini Angelo, "Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli", Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
4. Ortega de Juan, "Suma de arithmetica: geometria pratica utilissima: ordinata per Johane de Ortega spagnolo palentino", Roma, Etienne Guillery, 1515, pp. 231.
5. Zupko Ronald Edward, "Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century", Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.