© Sergio Calzolani, Firenze, 2023
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: divisione triangoli, divisione quadrilateri, divisione poligoni, divisione figure miste, Euclide, Erone di Alessandria, al-Sijzī, Abu' l – Wafa, Muhammad Al – Baghdadi, Savasorda, Leonardo da Pisa (Fibonacci), Giordano Nemorario, John Dee, Federico Commandino, Raymond Clare Archibald, Fabio Acerbi

IL TRATTATO DI EUCLIDE SULLA DIVISIONE DELLE FIGURE

L'inizio dell'agricoltura alcuni millenni avanti della nostra èra portò a un nuovo concetto di utilizzazione del suolo. Nacquero così i conflitti di proprietà e per risolverli fu necessario definire i confini delle singole particelle di terreno coltivabile: sorse così l'*agrimensura*, un ramo della geometria piana dedito alla misura dei campi.

La divisione del suolo coltivabile portò a elaborare metodi per la scomposizione e per la ricomposizione dei terreni in particelle di forme più o meno regolari: presso gli Egizi e i Babilonesi furono messi a punto metodi per la *divisione delle figure piane*.

Euclide (IV – III secolo a.C.) scrisse fra gli altri un piccolo trattato "*Sulle divisioni delle figure*" che è andato perduto nella sua versione originale in greco.

L'opera di Euclide fu conosciuta nel mondo arabo: sue tracce sono presenti nei lavori geometrici di ibn Qurra (826 – 901), al-Sijzī (circa 945 – 1020) e Abu'l – Wafa (940 – 998).

Già Erone di Alessandria (I secolo d.C.) nei "*Metrica*" aveva sviluppato alcuni problemi di divisione delle figure.

Il matematico ebreo catalano Abraham bar Hiyya (conosciuto come Savasorda o Savasorra, circa 1070 – 1136) scrisse un trattato nel quale affrontò pure problemi di divisione delle figure. L'opera fu tradotta in latino da Platone da Tivoli (XII secolo) con il titolo "*Liber embadorum*".

Leonardo Fibonacci (1170 – circa 1240) compilò un trattato di geometria pratica ("*Practica geometriae*") per il quale utilizzò fonti arabe e il lavoro di Savasorda. Anche Fibonacci era interessato alla divisione delle figure piane per l'importanza che l'agrimensura aveva nel Medioevo: successioni ereditarie e divisioni di proprietà agricole e di lotti di terreni edificabili.

L'inglese John Dee (1527 – 1608) annunciò di aver ritrovato un manoscritto arabo che sviluppava problemi di geometria piana sulla divisione delle figure.

Dee affermò di averne fatta una traduzione in latino che inviò a Federico Commandino (1509 – 1575) che lo pubblicò a Pesaro sia in latino che in italiano nel 1570.

Le fonti di John Dee non sono mai state trovate ed è probabile che egli avesse soltanto scoperto un manoscritto arabo già tradotto in latino.

L'opera fu attribuita al matematico arabo Muhammad Al – Baghdadi (circa 980 – 1037) e da alcuni moderni studiosi viene ritenuta una diretta discendente del perduto trattato di Euclide, se non addirittura la traduzione in arabo e poi in latino e in italiano dell'originale in lingua greca.

Il testo "*Libro del modo di dividere le superficie attribuito a Machometo Bagdedino*" è citato in bibliografia, ma non è stato usato nella stesura di questo articolo: la ragione è molto semplice: il testo dovrebbe essere trascritto e i disegni rifatti, lavoro che è troppo impegnativo per lo scopo perseguito con questo articolo.

Il volume pubblicato da Raymond Clare Archibald è una delle fonti qui più utilizzate.

PREMESSA

Le costruzioni che sono presentate in questo articolo sono riprese, con modifiche e integrazioni, dai testi citati in bibliografia.

Alcune di quelle pubblicazioni offrono schemi grafici poco precisi e spesso piuttosto oscuri: gli antichi testi non sono sempre accompagnati da chiare spiegazioni dei metodi geometrici impiegati per dividere le varie figure secondo le condizioni che devono essere soddisfatte.

I copisti degli antichi codici possono avere aggravato i problemi, forse non comprendendo gli schemi geometrici.

Non sempre gli Autori moderni che si sono occupati della divulgazione degli antichi testi geometrici hanno mostrato di possedere le abilità operative necessarie per riprodurre gli schemi grafici e le operazioni geometriche che sono necessarie per la loro descrizione.

In questo articolo si cercherà di riprodurre *alla lettera* le costruzioni, ma in alcuni casi saranno proposte correzioni o ipotesi alternative. Numerosi schemi originali sono stati ridisegnati: in alcuni casi i nuovi disegni sono stati confrontati con i primi.

Le lettere apposte alle figure originali sono state quasi sempre convertite nelle equivalenti in alfabeto latino.

Gli Autori moderni che si occupano delle versioni degli antichi testi geometrici paiono limitarsi a una pura e semplice traduzione letterale, senza fornire alcuna soluzione operativa: spesso gli schemi sono trattati con poca cura.

In questo articolo alcune costruzioni risultano ripetute perché sono presenti nelle varie fonti utilizzate e nei contributi dei diversi Autori considerati.

Alcuni argomenti sono ampliati in appositi riquadri contrassegnati con l'espressione APPROFONDIMENTO.

I singoli problemi recano a sinistra del titolo numeri racchiusi fra parentesi quadre: […]. La numerazione è stata ripresa dai testi di Archibald e di Acerbi.

Per l'operazione aritmetica di divisione è stato usato il simbolo della barra: "/".

LE COSTRUZIONI DI ABU AL-SIJZĪ

Nel testo di Fabio Acerbi vi sono alcuni riferimenti alle costruzioni dovute al matematico persiano Abu al-Sijzī (945 – 1020).

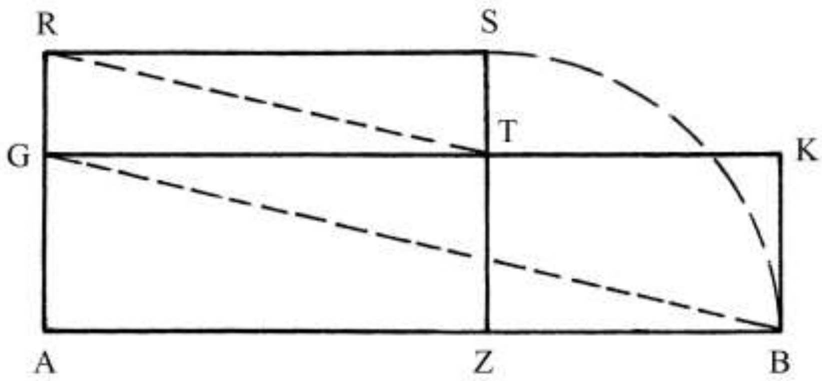
Trasformazione di un rettangolo in un altro

Abu al-Sijzī (945 – 1020) presentò il problema che è basato sulla trasformazione di rettangoli.

Su di una retta sono fissati i punti A, E, G, Z e B:

Un rettangolo che ha lati lunghi AB e AG ha area maggiore di quella di un rettangolo con lati lunghi AE e EB.

Un rettangolo con lati lunghi AB e AG può essere trasformato in un rettangolo che ha il lato maggiore lungo quanto AZ e il lato minore lungo ZB:



La costruzione mostra la trasformazione geometrica del rettangolo ARSZ in quello, equivalente, AGKB.

Divisione di un triangolo in due parti uguali con una linea passante per un punto interno

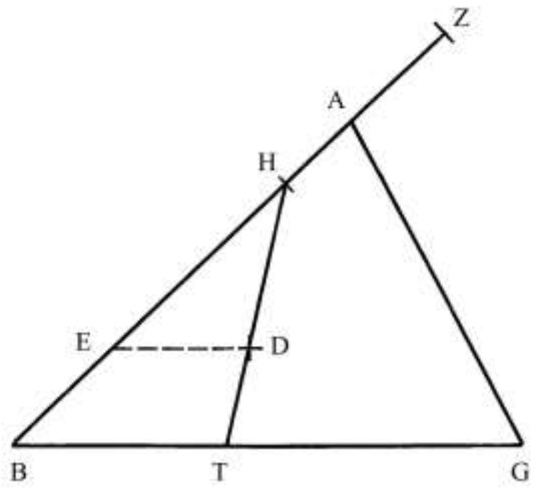
È la Proposizione 19 di Archibald.

Divisione di un triangolo in due parti

La soluzione di questo problema è dovuta a al-Sijzī.

Il problema chiede di dividere un triangolo in due parti, una delle quali deve avere area uguale a *un terzo*.

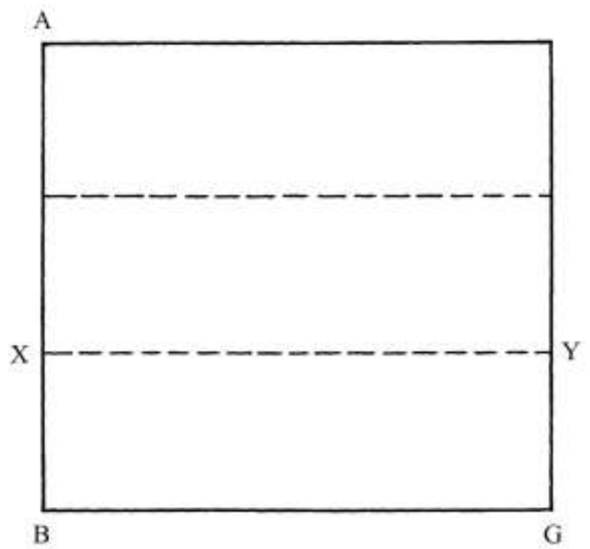
La corda che lo ripartisce passa per il punto interno D.



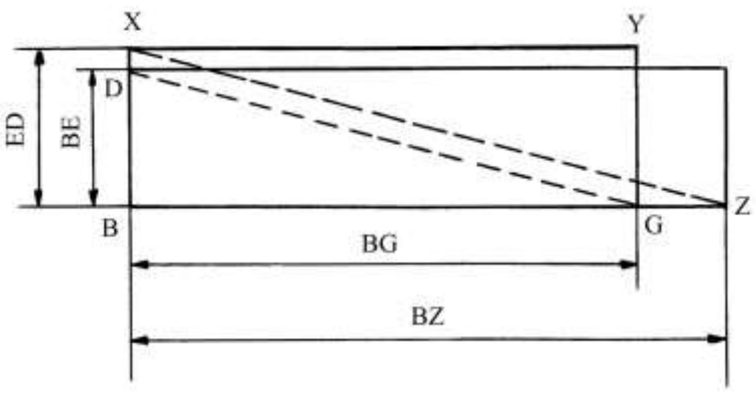
ABG è il triangolo da dividere.

Traccia il segmento DE, parallelo a BG. Prolungare verso l'alto il lato AB.

Costruire un rettangolo con lati lunghi quanto AB e BG e dividerlo in tre parti uguali, come in figura:



Trasformare il rettangolo BXYG in un rettangolo con altezza lunga ED: BD = ED.



Collegare D con G e parallelamente a DG condurre la diagonale XZ; riportare la lunghezza di BZ sul primo schema, a partire da B.

La posizione del punto H è determinabile con una proporzione:

$BH * HZ = BZ * BE$.

Risolviamo: BH è l'incognita "x" e HZ è data da:

$HZ = BZ - BH = BZ - x$.

Nella proporzione sostituiamo gli ultimi dati:

$x * (BZ - x) = BZ * BE$

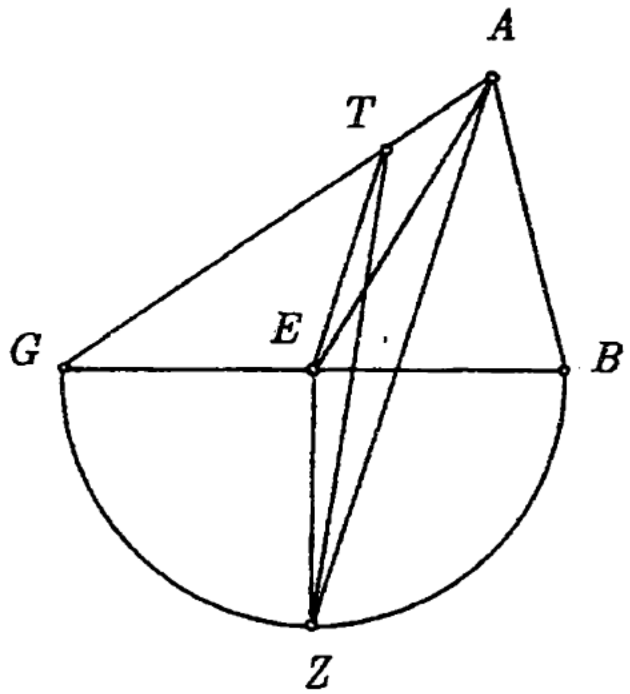
$x^2 - x * BZ + BZ * BE = 0$.

La soluzione dell'equazione di secondo grado offre due radici: quella valida è la maggiore fra le due, x_2:

$x_2 = [BZ + \sqrt{(BZ^2 - 4 * BZ * BE)}]/2$.

Divisione di una figura delimitata da due segmenti e da un settore circolare

Il problema contenuto a p. 2392 è mostrato nello schema che segue, riprodotto da Acerbi:



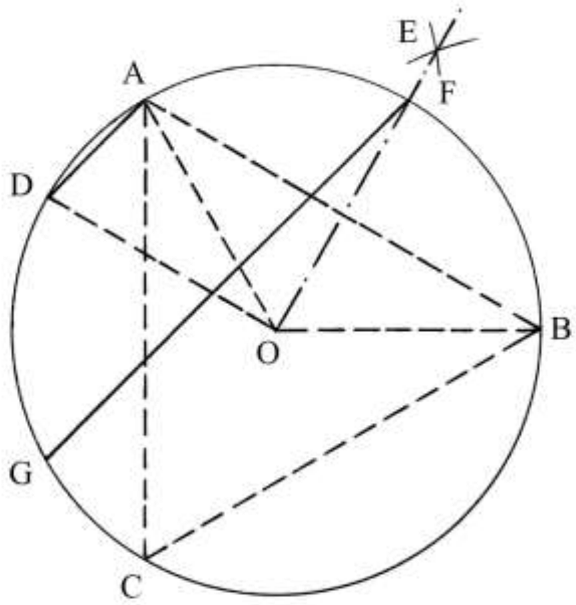
Il problema corrisponde alla Proposizione 28 di Archibald, alla cui soluzione si rimanda.

Divisione di un cerchio in due parti

Un cerchio deve essere diviso con due linee parallele. Il problema riproduce la Proposizione 29 di Archibald.

Il cerchio deve essere diviso in due parti: una ha area uguale a *un terzo* e l'altra ai rimanenti *due terzi*.

Al-Sijzī propone la costruzione presentata nello schema che segue:

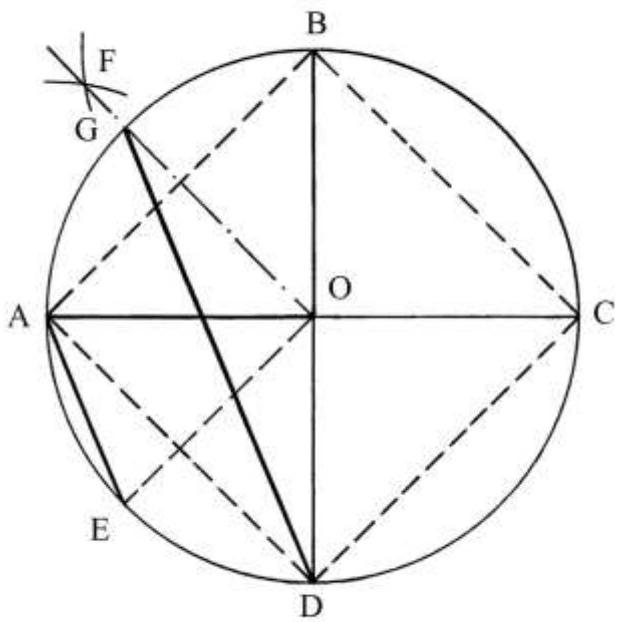


Nel cerchio di centro O inscrivere il triangolo equilatero ABC e tracciare i raggi OA e OB.
Dal punto O disegnare il raggio OD, parallelo al lato AB. Collegare A con D.
Costruire la bisettrice dell'angolo AOB: è OE, che taglia la circonferenza in F.
Parallelamente a AD tracciare la corda FG.
Il segmento circolare GDAE ha superficie uguale a *un terzo* di quella dell'intero cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Al-Sijzī afferma l'applicabilità del metodo grafico appena presentato alla divisione di un cerchio per ricavarne un segmento circolare con area uguale a un quarto, a un quinto o a un'altra frazione.

L'esempio che segue è quello della divisione in due parti con aree pari a un quarto e a tre quarti.

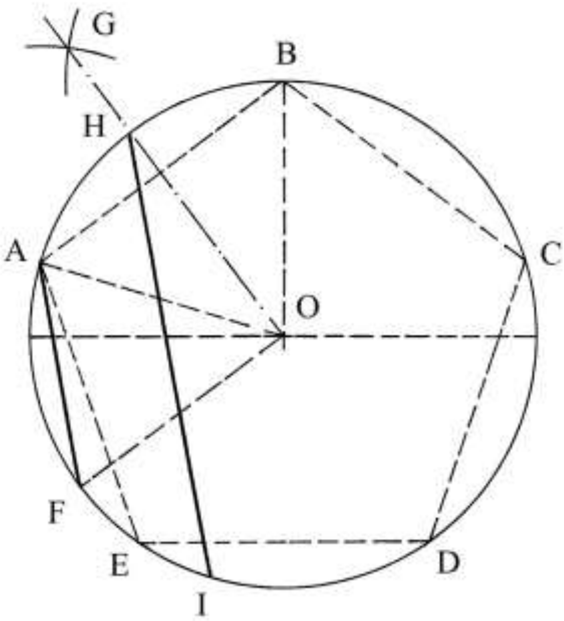


ABCD è un quadrato inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA.

Tracciare il raggio OE, parallelo al lato AB, e la corda AE.
Costruire la bisettrice dell'angolo AOB, che è OF: essa taglia la circonferenza nel punto G.
Parallelamente a AE, da G disegnare la corda GD.
Il segmento circolare DEAG ha area uguale a *un quarto* di quella dell'intero cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

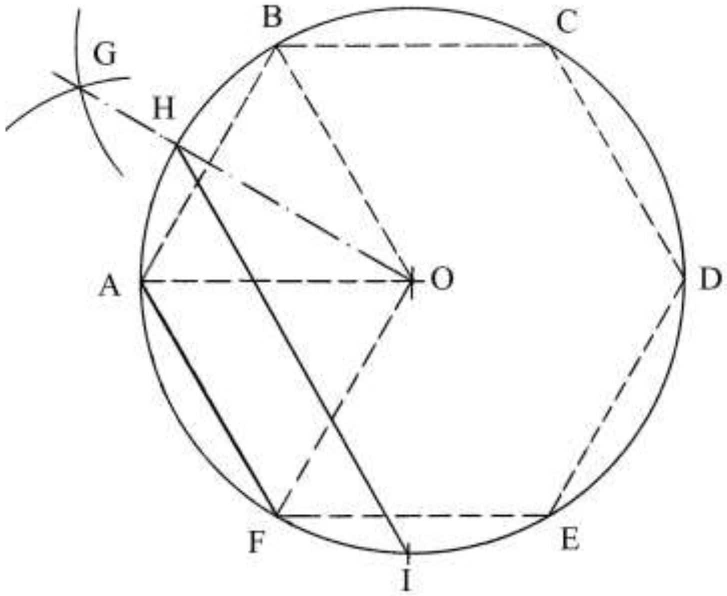
Lo schema che segue presenta la divisione di un cerchio in due parti: una con area uguale a *un quinto* e l'altra con area pari a *quattro quinti* di quella del cerchio.



ABCDE è un pentagono regolare inscritto nel cerchio con centro in O e raggio OA.
Tracciare i raggi OA e OB e a partire da O la parallela OF al lato AB.
Collegare A con F.
Costruire la bisettrice dell'angolo AOB: è OG e incontra la circonferenza nel punto H.
Da H condurre la parallela a AF: è HI.
La corda HI divide il cerchio in due parti:
* il segmento circolare IEFAH che ha area uguale a *un quinto* di quella del cerchio;
* il segmento HBCDI che ha area uguale ai restanti *quattro quinti*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'ultimo caso qui presentato è quello della divisione del cerchio basata sull'impiego dell'esagono regolare inscritto.
ABCDEF è l'esagono e O è il centro del cerchio.
Disegnare i raggi OA e OB.
Dal centro O tracciare la parallela al lato AB: è il raggio OF.
Collegare A con F.
Costruire la bisettrice dell'angolo AOB: è OG. H è l'intersezione fra OG e la circonferenza.
Parallelamente a AF tracciare la corda HI.
Il segmento circolare BHAFI ha area uguale a *un sesto* di quella del cerchio.


B
C
G
H
A
O
D
F
I
E

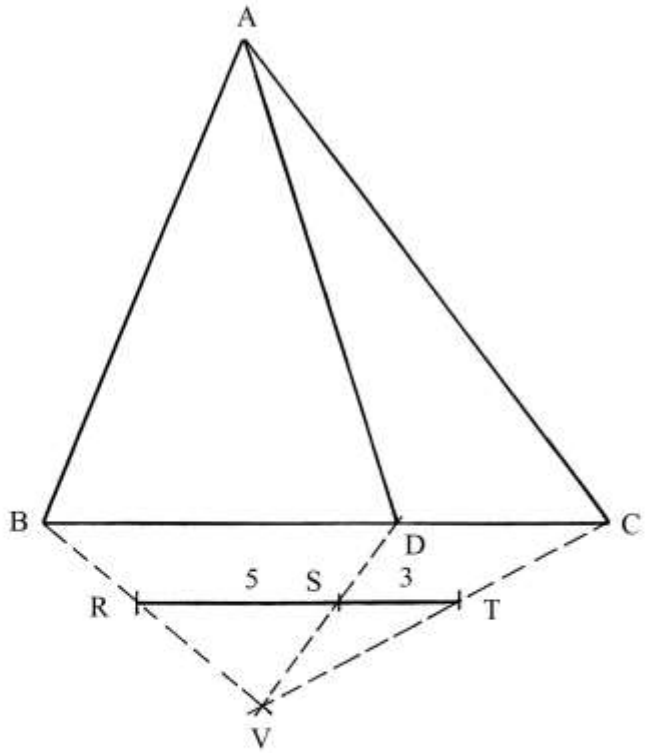
LE DIVISIONI DELLE FIGURE SECONDO ERONE DI ALESSANDRIA

Il III Libro dei *Metrica* di Erone di Alessandria è dedicato a problemi relativi alla divisione di figure piane.

[1] Divisione di un triangolo secondo una data proporzione

Un triangolo ha lati lunghi 13, 14 e 15:

* AB = 13;
* BC = 14;
* AC = 15.



Si tratta del notissimo triangolo 13 – 14 – 15 largamente studiato dai geometri e dai maestri di abaco medievali almeno a partire da Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

Il triangolo deve essere diviso in due parti con aree proporzionali a 5 e a 3. La ripartizione va effettuata interessando il lato orizzontale BC.

Su di una linea parallela a BC disegnare il segmento RST: RS è lungo 5 e ST è 3.

Dai vertici B e C tracciare due linee passanti rispettivamente per R e per T: esse si incontrano in V. Da questo ultimo punto condurre una linea passante per S fino a tagliare in D il lato BC.

BC è diviso in proporzione a 5 e a 3:

BD : 5 = DC : 3

BC : 8 = BD : 5 = DC : 3

DC = 3 * BC/8 = 3 * 14/8 = 5,25 [Acerbi riporta "5 ¼"];

Il segmento BD è lungo:

BD = BC – DC = 14 – 5,25 = 8,75.

La corda AD divide ABC in due triangoli:

* ABD che ha area uguale a 5/8 di quella di ABC;
* ADC con area uguale ai rimanenti 3/8 di quella di ABC.

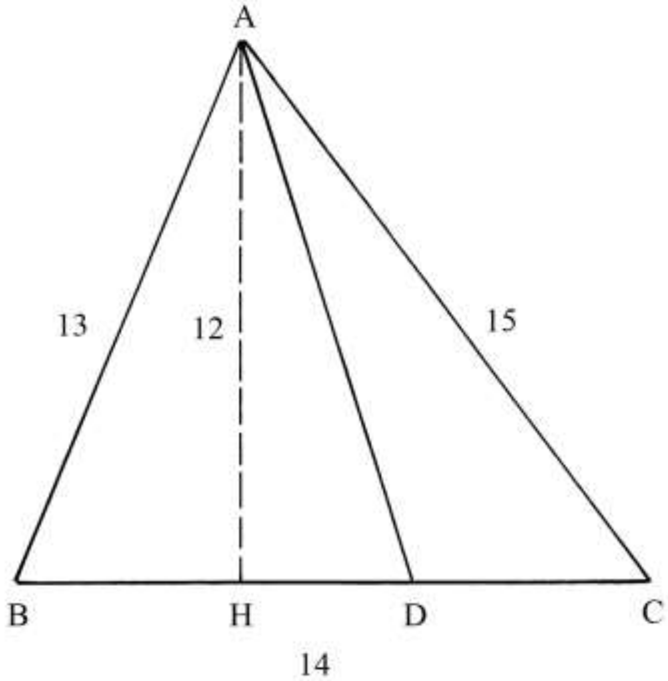
- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo 13 – 14 – 15 possiede un'interessante proprietà: le lunghezze dei tre lati, quella dell'altezza relativa al lato BC e l'area sono espresse da numeri interi.

AH è lunga 12 e l'area è:

$A_{ABC} = AH * BC/2 = 12 * 14/2 = 84.$

Lo schema che segue riproduce il precedente.



L'area di ABD è:

$A_{ABD} = BD * AH/2 = 8,75 * 12/2 = 52,5.$

L'area di ADC è:

$A_{ADC} = DC * AH/2 = 5,25 * 12/2 = 31,5.$

Fra le due aree intercorre una proporzione:

$A_{ABD} : A_{ADC} = 52,5 : 31,5 = 5 : 3.$

- -

[2] <u>Divisione di un triangolo con una corda parallela a un lato</u>

Il triangolo ABC ha lati lunghi 13, 14 e 15 unità, come nel caso del precedente problema.

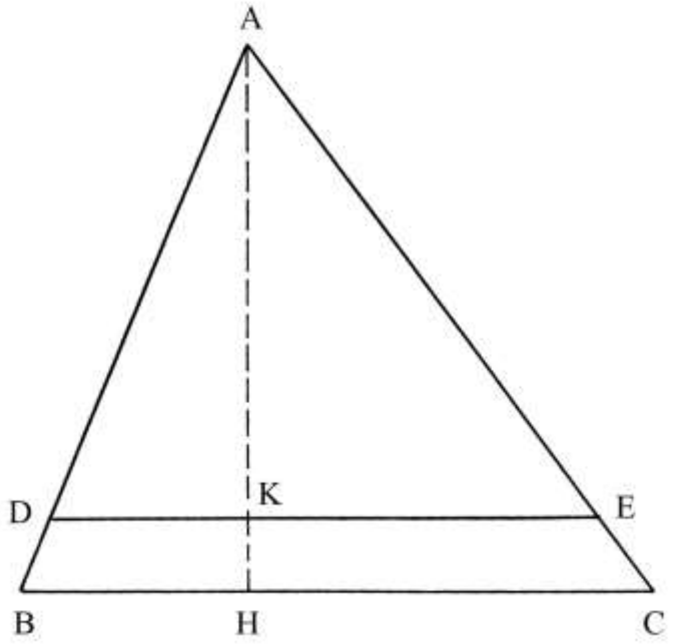
La descrizione del problema è un poi' confusa.

Il triangolo deve essere diviso in due parti con una corda parallela alla base AC.

Il triangolo ADE deve avere area tripla di quella del trapezio BDEC.

Le aree dei tre poligoni sono in questi rapporti:

* $A_{ADE} = 3 * A_{BDEC}$;
* $A_{ABC} = A_{ADE} + A_{BDEC} = 4 * A_{BDEC}$;
* $A_{ABC} = 4/3 * A_{ADE}$.



L’area di un triangolo è proporzionale al quadrato delle lunghezze dei suoi lati.

Per risolvere questo problema deve essere tracciata la corda DE.

I quadrati delle lunghezze di AB e di AD stanno in proporzione:

$AB^2 : AD^2 = 4 : 3$

$13^2 : AD^2 = 4 : 3$

$AD^2 = (13^2 * 3)/4 = 169 * ¾ = 507/4$ e

$AD = \sqrt{(507/4)} \approx 11,25$.

Se il terreno da dividere è grande, non è facile tracciare la corda DE parallelamente al lato BC e Erone propone di rimediare al problema applicando il metodo appena utilizzato per determinare la posizione di E:

$AC^2 : AE^2 = 4 : 3$

$15^2 : AE^2 = 4 : 3$

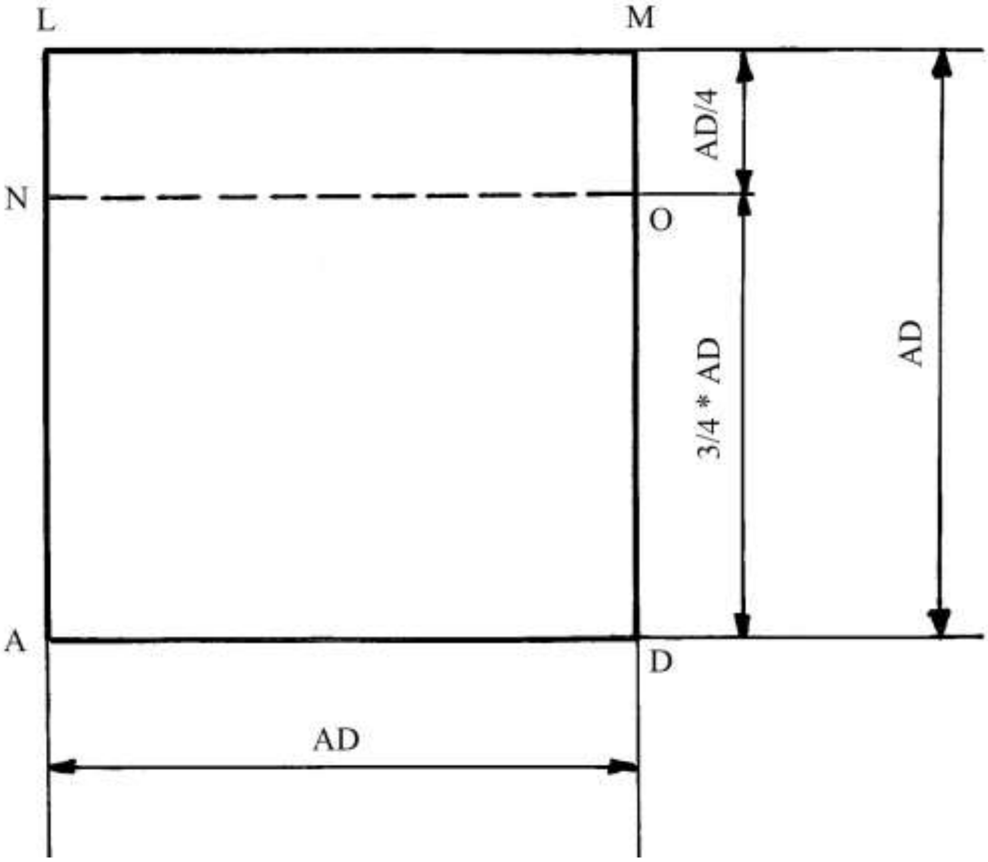
$AE^2 = (15^2 * 3)/4 = 225 * ¾ = 675/4$ e

$AE = \sqrt{(675/4)} \approx 12 + 51/52$.

- APPROFONDIMENTO -

Le lunghezze di AD e di AE sono ricavabili per via geometrica.

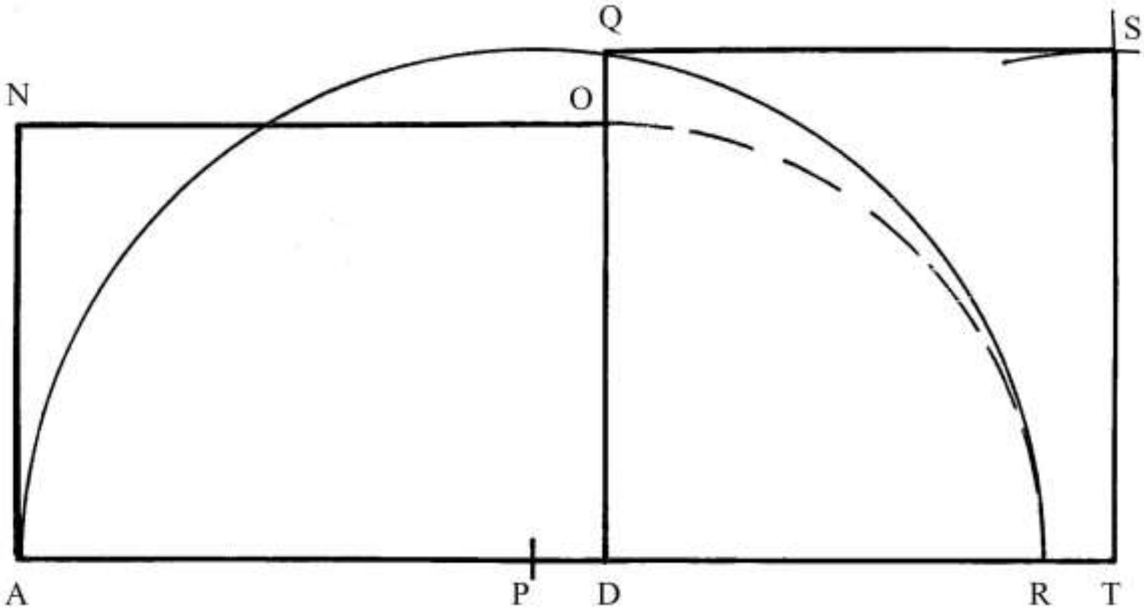
Consideriamo il caso del segmento AD. Costruire un quadrato di lato AB:



Ritagliare un rettangolo lungo NO = AD e largo NL = ¼ * AD.
ANOD è un rettangolo che ha area:

A ANOD = AN * AD = (¾ * AD) * AD = ¾ * AD^2.

Il rettangolo ANOD deve essere trasformato in un quadrato *equivalente*.
Prolungare verso destra il lato AD. Ribaltare su questa retta il lato DO in DR.



Stabilire il punto medio di AR: è P.

Fare centro in P e con raggio PA = PR traccia una semicirconferenza che incontra in Q il prolungamento di DO.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, la lunghezza di DQ è medio proporzionale fra le lunghezze di AD e di DR:

AD : DQ = DQ : DR.

DQ è il lato del quadrato che ha area uguale a quella del rettangolo ANOD.

DQ è la lunghezza del segmento AD da riportare sul lato AB del triangolo, a partire da A.

Parallelamente a BC, disegnare la corda DE.

In un terreno grande, la posizione di E e la lunghezza di AE possono essere ricavate con il metodo grafico usato per determinare la posizione di D.

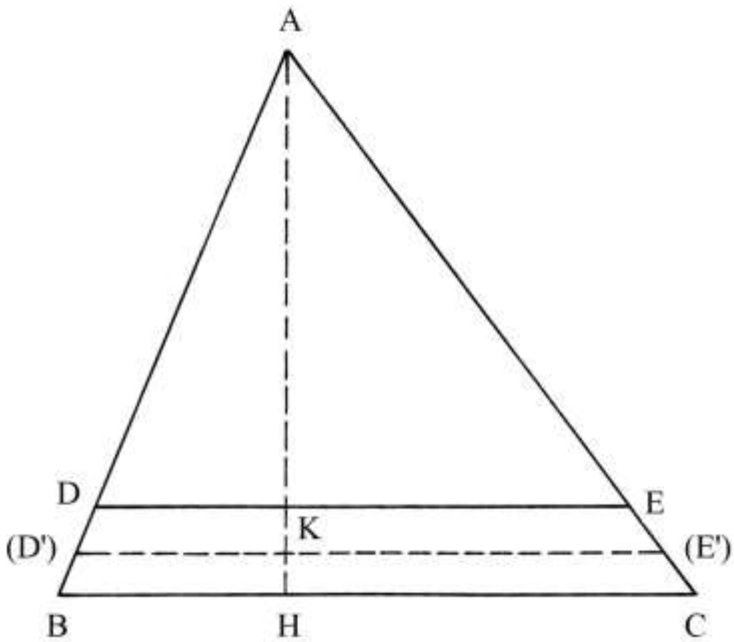
- -

[3] <u>Divisione di un triangolo secondo un rapporto dato</u>

ABC è il consueto triangolo con lati lunghi 13 – 14 – 15:

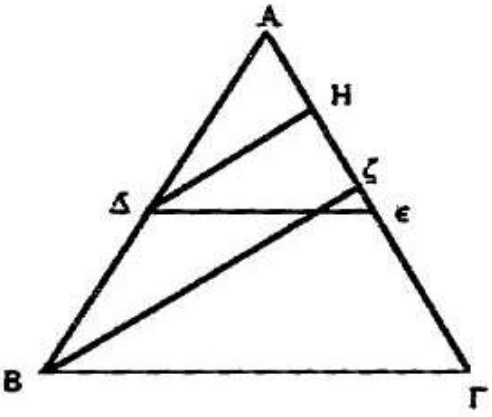
* AB = 13;
* BC = 14;
* AC = 15.

Deve essere diviso in due parti proporzionali a 5 e a 2, con una corda parallela al lato BC.



Il testo è piuttosto oscuro: per chiarire la situazione si riproduce il testo originale dalle pp. 2397 – 2398 dell’opera di Acerbi:

3. Sia ora il triangolo dato ΑΒΓ che ha ΑΒ di unità 13, ΒΓ di unità 14, ΑΓ di unità 15. E sia stato staccato ΑΔ, se càpita, di unità 12. E da Δ si debba condurre oltre ΔΕ che divide il triangolo ΑΒΓ in rapporto dato.[35] Sia pertanto il rapporto quello che ha 5 rispetto a 2. Da Β, Δ siano state condotte ΒΖ ΔΗ perpendicolari ad ΑΓ. La perpendicolare ΒΖ, come imparammo, sarà pertanto di unità 11 1/5. E poiché è come ΒΑ rispet-



to ad ΑΔ, cioè come 13 rispetto a 12, così ΒΖ rispetto a ΔΗ, e ΒΖ è di unità 11 1/5, ΔΗ sarà quindi di unità 10 e 22/65. E il triangolo ΑΒΓ rispetto ad ΑΔΕ ha rapporto che 5 rispetto a 3, e il triangolo ΑΒΓ è di unità 84, il triangolo ΑΔΕ sarà quindi di unità 50 2/5. E del triangolo ΑΔΕ è doppio il <dominio> compreso da ΑΕ ΔΗ: il <dominio> compreso da ΑΕ ΔΗ sarà quindi di unità 100 4/5. E ΔΗ è di unità 10 e 22/65. ΑΕ sarà quindi di unità 9 1/2 1/4. E qualora congiungiamo ΔΕ, sarà quanto proposto. E il metodo è tale: poiché ΒΖ è perpendicolare, 11 1/5 per 12: e ciò che risulta ripartiscilo in 1<3:[36] risult>ano unità 10 e 22/65. E poiché il rapporto in cui si divide è quello di 3 <rispetto> a 2, somma 3 e 2: risulta 5: e moltiplica 3 per l'area del triangolo, cioè per 84: risulta 252. Questo ripartiscilo in 5: risulta 50 2/5. Questo due volte: risulta 100 e 2/5. Ripartisci questo per 10 e 22/65: risultano unità 9 1/2 1/4. Di tanto staccando ΑΕ congiungi ΔΕ: e sarà quanto proposto.

In un altro passaggio del testo, il rapporto diviene di 5 a 3.

Sempre stando al testo, AD deve essere lungo 12: nello schema all'inizio di questo paragrafo AD' è lungo 12.

Il trapezio AD'E'C non soddisfa il rapporto 5 : 2.

Le aree dei due poligoni separati dalla corda DE sono:

* il triangolo ADE;
* il trapezio DECB.

Il primo ha area uguale a 5/7 di quella di ABC e il secondo i restanti 2/7.

ABC ha area:

$$A_{ABC} = AH * BC/2 = 12 * 14/2 = 84.$$

Se il triangolo ADE deve avere area uguale a 5/7 di quella di ABC si ha:

$A_{ADE} = 5/7 * A_{ABC} = 5/7 * 84 = 60.$

L'area di un triangolo è proporzionale ai quadrati delle lunghezze dei suoi lati e delle altezze. Ne consegue la seguente proporzione:

$A_{ABC} : A_{ADE} = AH^2 : AK^2$ da cui

$AK^2 = A_{ADE} * AH^2/A_{ABC} = 60 * 12^2/84 = 60 * 144/84 = 8640/84 = 2160/21 = 720/7$

e $AK = \sqrt{(720/7)} = (10 + 1/7)$.

È un po' difficile capire a che cosa serva la corda D'E'.

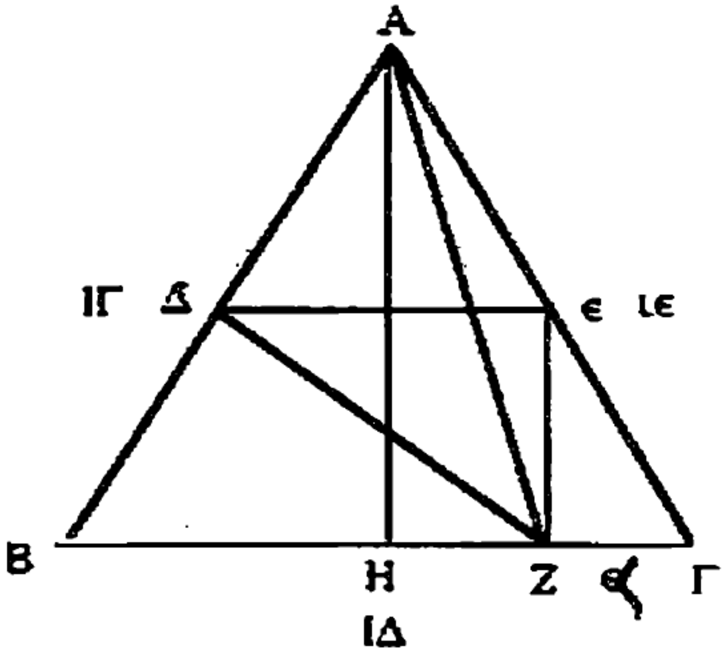
[4] Divisione di un triangolo in quattro parti

Il consueto triangolo ABC con lati lunghi 13, 14 e 15 unità, con delle corde, deve essere diviso in quattro triangoli: tre devono avere aree uguali a 20 e il quarto con area pari a 24.

Ricordiamo che l'intero triangolo ha area di 84 e la sua scomposizione è formalmente corretta:

$3 * 20 + 24 = 60 + 24 = 84.$

La figura che segue riproduce lo schema pubblicato a p. 2398 del volume di Fabio Acerbi:



Le lunghezze dei tre lati sono scritte nel sistema numerico greco.

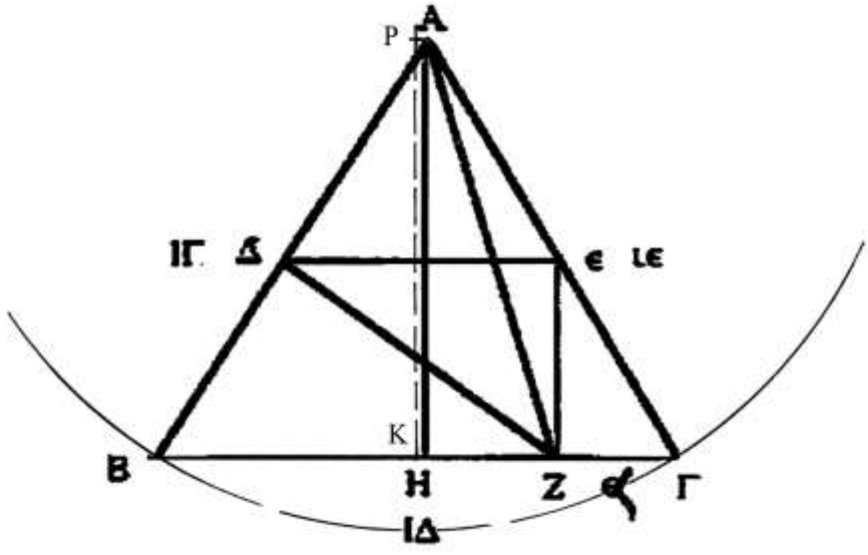
Lo schema originale è piuttosto impreciso.

AB è lungo 13, AΓ (AG = AC) è 15 e la base BΓ (BG = BC) + 1\4.

Il punto K è il medio di BΓ.

KP è un'altezza che è lunga 12. Il punto P è allineato al vertice A.

Fare centro in P e con raggio PB tracciare un arco: esso passa per i punti B e Γ: ne risulta che i due lati obliqui del triangolo hanno erroneamente lunghezze uguali:



\- APPROFONDIMENTO -

Il paragrafo che segue è riprodotto da: https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_numerazione_greco

Nella **numerazione ionica** (o *alfabetica*) si faceva uso delle lettere dell'alfabeto greco; tuttavia richiedeva ben ventisette simboli, tre in più di quanti ne contenesse l'alfabeto classico, motivo per cui si utilizzavano delle lettere presenti nell'alfabeto arcaico: il *digamma* (ϝ), che in età medievale viene deformato in *stigma* (ϛ), il *coppa* (ϟ) e il *sampi* (ϡ).

α (alfa): 1	ι (iota): 10	ρ (rho): 100
β (beta): 2	κ (kappa): 20	σ (sigma): 200
γ (gamma): 3	λ (lambda): 30	τ (tau): 300
δ (delta): 4	μ (mi): 40	υ (ypsilon): 400
ε (epsilon): 5	ν (ni): 50	φ (phi): 500
ϛ (stigma): 6	ξ (xi): 60	χ (chi): 600
ζ (zeta): 7	ο (omicron): 70	ψ (psi): 700
η (eta): 8	π (pi): 80	ω (omega): 800
θ (theta): 9	ϟ (coppa): 90	ϡ (sampi): 900

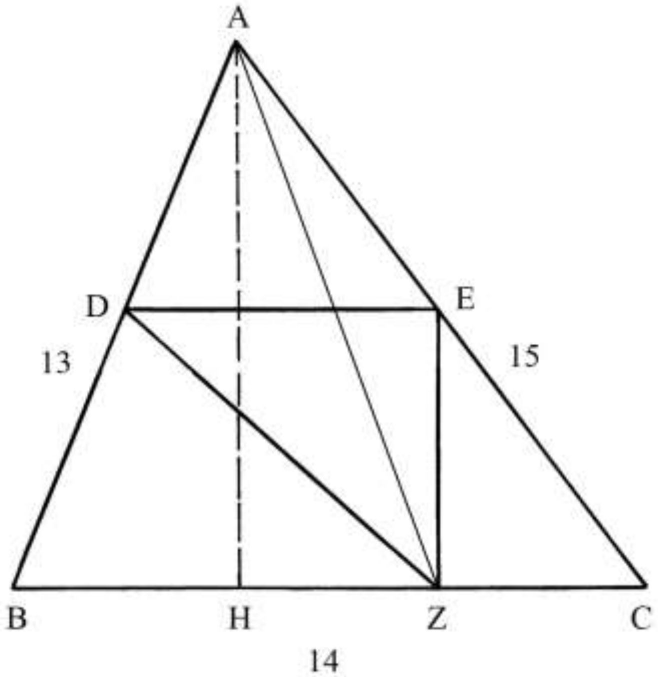
\- -

Come fatto in precedenza, anche in questo paragrafo le lettere greche che sono apposte sui punti delle figure sono convertite nelle loro equivalenti maiuscole dell'alfabeto latino.

Stando al testo originario, il triangolo DEZ avrebbe area uguale a 24.

I triangoli ADE, BDZ e CEZ devono avere aree di 20 unità ciascuno.

Come è evidente dallo schema sopra riprodotto, i quattro triangoli hanno alcuni lati paralleli alla base BC o all'altezza AH:



All'inizio del testo originale di Erone, tradotto in italiano, la soluzione viene basata sulle seguenti proporzioni:

* AD : DB = BZ : ZC = CE : EA
* BZ : ZC = CE : EA
* BC : ZC = AC : AE

La soluzione che qui viene utilizzata è una semplificazione del metodo di Erone.

La determinazione delle posizioni dei punti D, E e Z avviene con una procedura che è ripresa dal testo di Acerbi:

* moltiplicare l'area del triangolo ABC per quella di uno dei triangoli con area uguale a 20: 84 * 20 = 1680;
* moltiplicare per 4: 1680 * 4 = 6720;
* moltiplicare la lunghezza di AH per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* dividere 6720 per 144: 6720/144 = (46 + 2/3).

Sembra che (46 + 2/3) sia, con una piccola approssimazione uguale al prodotto BZ * ZC.

Erone conclude con la seguente affermazione:

BZ = 8,5 e ZC = 5,5.

La lunghezza di CE è determinata da una proporzione:

AC : BC = AE : ZC

15 : 14 = AE : 5,5 e

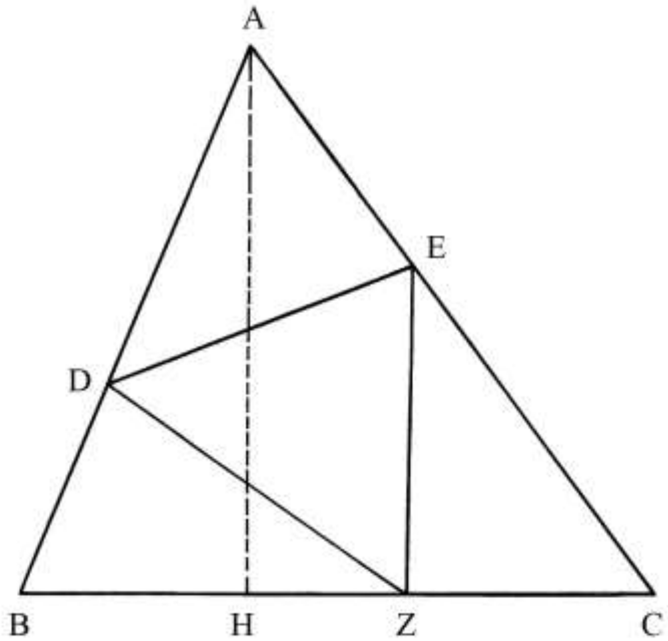
AE = 15 * 5,5/14 ≈ 5,89.

Una ulteriore proporzione permette di calcolare la lunghezza di BD:

AB : BC = BD : ZC e

BD = (AB * ZC)/BC = (13 * 5,5)/14 = 5,1.

Con questi dati, la divisione che ne consegue è presentata nello schema che segue:



In questo schema non è stata disegnata la corda AZ, contenuta nell'originale, perché non coinvolta nella costruzione.

Come è facile notare, la corda DE non è parallela al lato BC e quella EZ non è esattamente perpendicolare allo stesso lato.

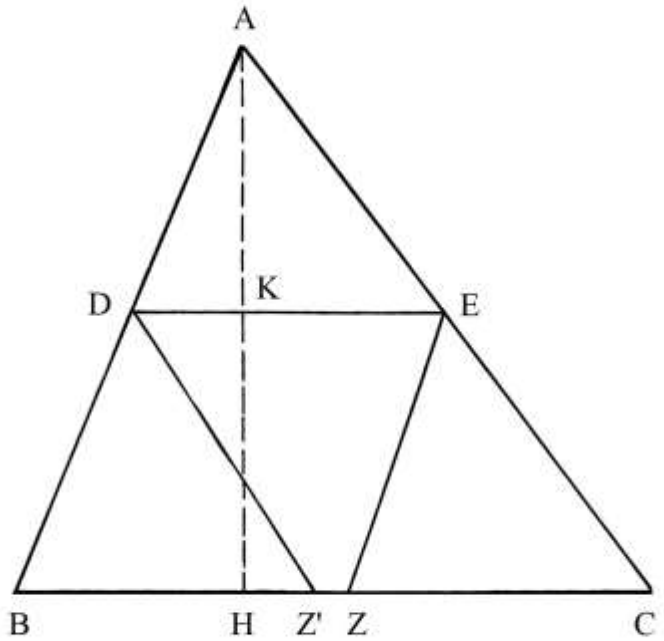
ABC è diviso in quattro triangoli:

* ADE, BDZ e ZEC hanno tutti area uguale a 20 unità;
* il quarto triangolo, DEZ, ha area uguale a 24 unità.

- APPROFONDIMENTO -

Presentiamo un'altra ipotesi di soluzione.

Nello schema originale, la corda DE è parallela alla base BC.



La corda DE, parallela a BC, come nello schema originale, divide ABC in *due* poligoni:

* il triangolo DAE, che per costruzione, ha area uguale a 20 unità;
* il trapezio scaleno BDEC che ha area uguale a (84 – 20) = 64 unità.

Il trapezio è poi diviso in *tre* poligoni:

* il triangolo BDZ', che ha area 20 unità;
* il triangolo ZEC che anch'esso ha area 20 unità;
* il trapezio scaleno Z'DEZ che ha area residuale di 24 unità.

È un po' difficile far coincidere i punti Z' e Z.

La ripartizione superficiale è corretta ma la presenza del trapezio Z'DEZ viola la condizione iniziale che ABC sia ripartito in *quattro triangoli*.

- -

[5] Divisione di un trapezio in due parti proporzionali

ABCD è un trapezio con le basi BC e AD parallele.

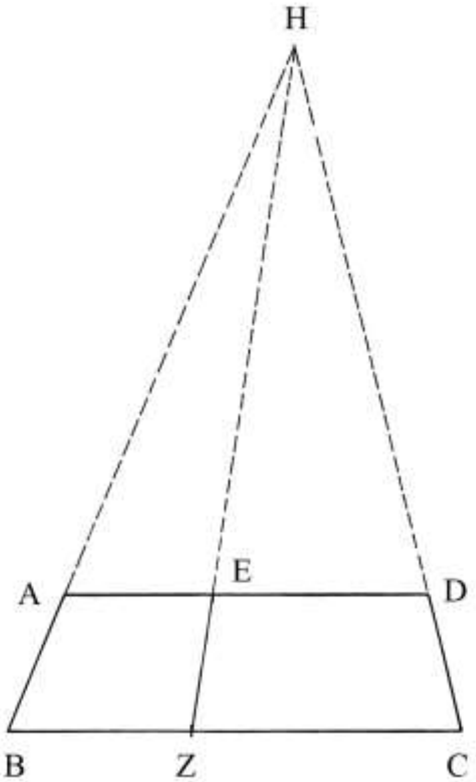
Le basi sono lunghe:

* BC = 25;
* AD = 20.

Non sono fornite informazioni sull'altezza del quadrilatero.

Prolungare i lati obliqui: le due linee si incontrano in H.

Il trapezio deve essere diviso in due parti con aree proporzionali a e e a 3, con l'ausilio di una corda il cui prolungamento deve passare per H.



La lunghezza di BZ è così ricavata:

* sommare 2 e 3: 2 + 3 = 5;
* moltiplicare la lunghezza di BC per 2: 25 * 2 = 50;
* dividere per 5: 50/5 = 10,

lunghezza di BZ.

La lunghezza di AE è ottenuta con lo stesso metodo:

* moltiplicare la lunghezza di AD per 2: 20 * 2 = 40;
* dividere per 5: 40/5 = 8,

lunghezza di AE.

La corda EZ divide il trapezio ABCD in due poligoni:

* il trapezio AEZB, che ha area uguale a *due quinti* di quella di ABCD;
* il trapezio EDCZ che ha area uguale ai *tre quinti* di quella di ABCD.

[6] Divisione di un trapezio in proporzione

ABCD è un trapezio.

Le sue dimensioni parziali sono uguali a quelle del poligono considerato dal precedente problema: anche in questo caso non è fornita l'altezza HZ = ET.

Ricordiamo le lunghezze delle basi:

* BC = 25;
* AD = 20.

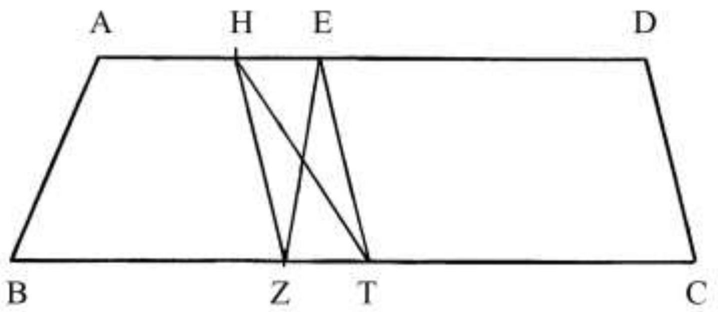
I due segmenti che provengono dal precedente problema sono lunghi:

* AE = 8;
* BZ = 10.

Anche la corda EZ proviene dal precedente schema.

Sono fornite le lunghezze dei nuovi segmenti:

* AH = 5;
* HE = AE – AH = 8 – 5.

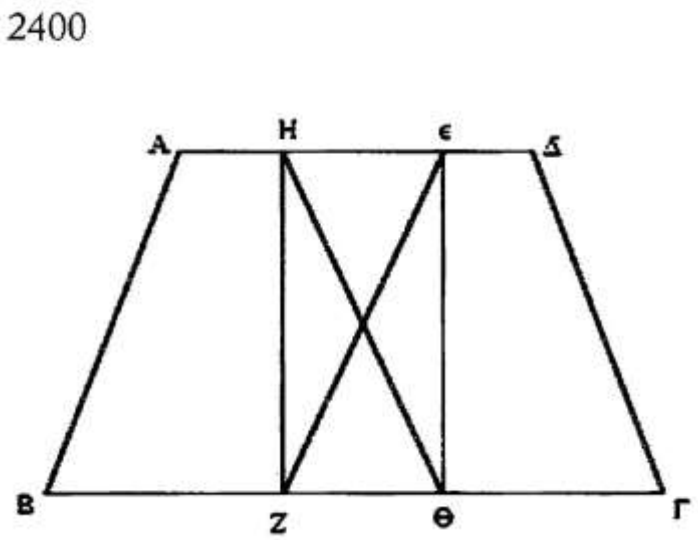


Collegare H con Z e dal punto E tracciare la corda ET parallela a HZ.

Ne consegue che ZT è lungo quanto HE e cioè 3 unità.

Le corde HT e EZ completano la costruzione.

Lo schema originale presente a p. 2400 del testo di Acerbi presenta erroneamente le corde HZ e ET *perpendicolari* alle due basi BC e AD:



Le dimensioni parziali sono uguali a quelle del trapezio considerato dal precedente problema.

BZ è lungo 10, AH è 5 e HE è 3 per cui AE è lungo 8.

Lo schema qui sopra è fuori scala.

HZ e ET sono due corde disegnate perpendicolari alle basi AD e BC e sono anche due altezze del trapezio ABCD: il testo originale non fornisce la loro lunghezza.

ZT ha la stessa lunghezza di HE e cioè 3.

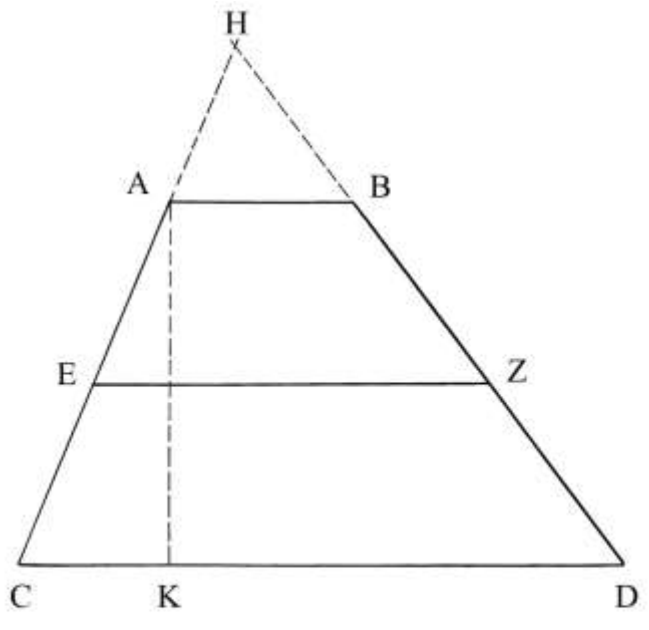
Infine, BT è lungo:

BT = BZ + ZT = BZ + HE = 10 + 3 = 13.

È difficile capire il senso di questa costruzione, classificata fra le "divisioni di figure piane".

[7] <u>Divisione di un trapezio in due parti proporzionali</u>

ABDC è un trapezio che deve essere diviso in due poligoni con aree proporzionali a 3 e a 5, con una corda parallela alle due basi.

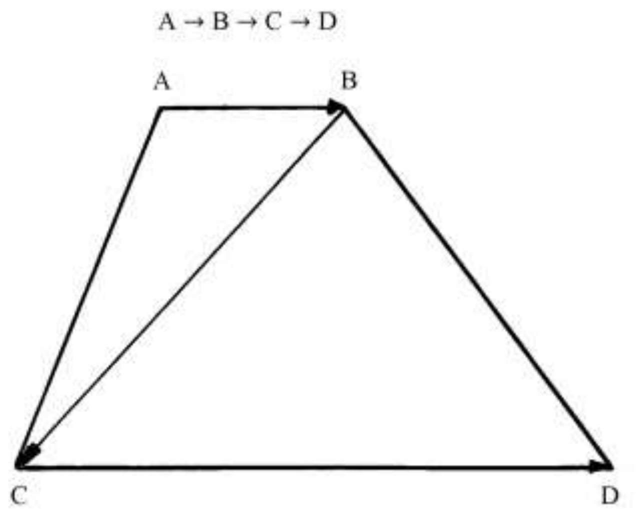


I quattro lati sono lunghi:

* AC = 13;
* BD = 15;
* AB = 6;
* CD = 20.

L'area dell'intero trapezio è fissata in 156 unità quadrate.

È oggi uso indicare un quadrilatero apponendo le lettere ai vertici in senso orario o antiorario: invece, Erone indica il trapezio come il poligono ABDC i cui vertici sono nella successione rappresentata nello schema:



Conoscendo l'area è possibile ricavare l'altezza AK:

Area $_{ABDC}$ = [(AB + CD)/2] * AK, da cui:

AK = 2 * Area $_{ABDC}$ /(AB + CD) = 2 * 156/(6 + 20) = 2 * 156/26 = 12.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

* sommare 3 e 5: 3 + 5 = 8;
* moltiplicare l'area di ABDC per 3: 156 * 3 = 468;
* dividere per 8: 468/8 = 58,5, area di ABZE;
* sottrarre la lunghezza di AB da quella di CD: 20 – 6 = 14;
* moltiplicare la lunghezza di AC per quella di AB: 13 * 6 = 78;
* dividere per la differenza fra le lunghezze di AB e di CD: 78/14 = (5 + 4/7), lunghezza di AH;
* moltiplicare la lunghezza di BD per quella di AB: 15 * 6 = 90;
* dividere per la differenza fra le lunghezze delle due basi: 90/14 = (6 + 3/7), lunghezza di BH.

L'area di AHB è fornita da Erone: è (15 + 3/7).

Dato che l'area di ABZE è 58,5, quella del triangolo EZH è:

A $_{EZH}$ = A $_{AHB}$ + A $_{ABZE}$ = (15 + 3/7) + (58,5 = (73 + 13/14 [Erone dà il risultato equivalente (74 – 1/1/14)].

I successivi passi sono:

* moltiplicare la lunghezza di AH per sé stessa: $(5 + 4/7)^2$ = (31 + 2/49);
* moltiplicare per l'area di EZH, poi dividere il risultato parziale per l'area di AHB e, infine, estrarre la radice quadrata:

  √[(31 + 2/49) * (74 – 1/14)/(15 + 3/7)] = (12 + 1/14), lunghezza di HE;
* sottrarre la lunghezza di AH: (12 + 1/14) – (5 + 4/7) = (6 + ½), lunghezza di AE;
* risolvere la seguente proporzione:

  AE : AC = BZ : BD, da cui:

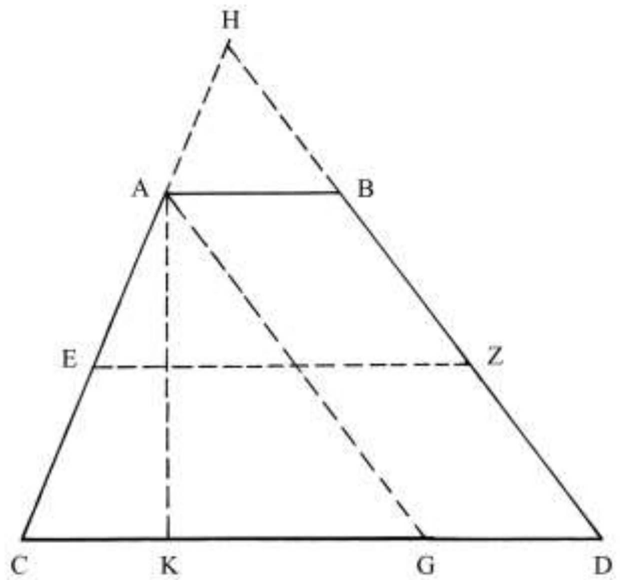
BZ = AE *BD/AC = (6 + ½) * 15/13 = 7,5.

EZ è la corda che divide ABDC in due trapezi:

* ABZE con area uguale a 3/8 di quella di ABDC;
* EZDC, che ha area uguale a 5/8 di quella di ABDC.

- APPROFONDIMENTO -

Nel trapezio ABDC è contenuto il classico triangolo 13-14-15:



L'altezza AK è lunga 12 unità, come nel caso del triangolo AGC che ha lati lunghi:

* AC = 13;
* CG = 14;
* AG = 15.

I lati AG e BD sono paralleli.

GD è lungo:

GD = CD – CG = 20 – 14 = 6,   quindi GD è lungo quanto AB.

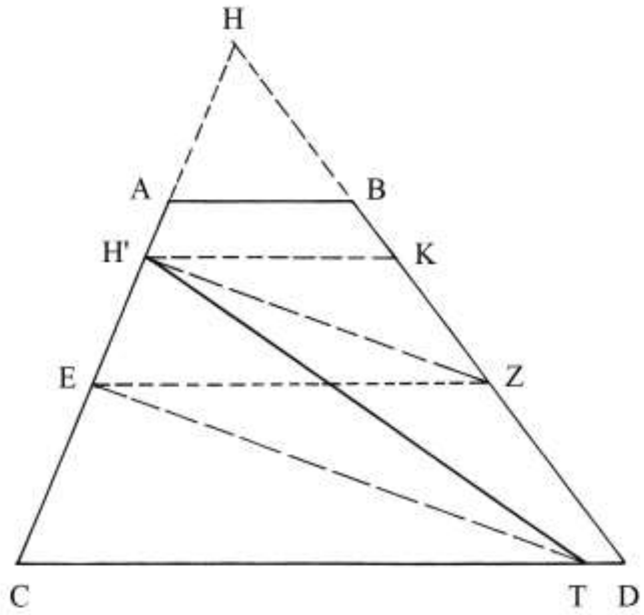
- -

[8] Trapezio diviso in due parti proporzionali a 5 e a 3

Il trapezio del precedente problema è la base di questo nuovo esempio.

Il quadrilatero deve essere diviso in due poligoni con aree proporzionali a 5 e a 3.

Sul lato AC è fissato il punto H' a distanza 2 da A:



Il segmento EZ è riprodotto dal grafico del precedente problema ed è collocato nella stessa posizione.

Il punto K è a distanza da B che è data da:

AH' : BK = AC : BD

BK = AH' * BD/AC = (2 * 15)/13 = 30/13 = (2 + 4/13).

Tracciare H'K che risulta parallelo alle due basi e a EZ.

La lunghezza di BZ è nota dalla soluzione del precedente problema: è (7 + ½).

Inoltre, la lunghezza di KZ è:

KZ = BZ – BK = (7 + ½) – (2 + 4/13) = (5 + 5/26).

A questo stadio, il testo incorre in un errore: attribuisce a AH' la lunghezza di (5 + 4/7) che è la lunghezza di AH calcolata nella soluzione del precedente problema. Proprio per evitare ulteriore confusione il punto fissato a distanza 2 da A è indicato con H'. La lunghezza di HH' è:

HH' = HA + AH' = (5 + 4/7) + 2 = (7 + 4/7).

I successivi passi della procedura attribuita a Erone sono qui accantonati, preferendo una più semplice soluzione geometrica.

Collegare H' con Z. Dal punto E tracciare la parallela a H'Z: è ET.

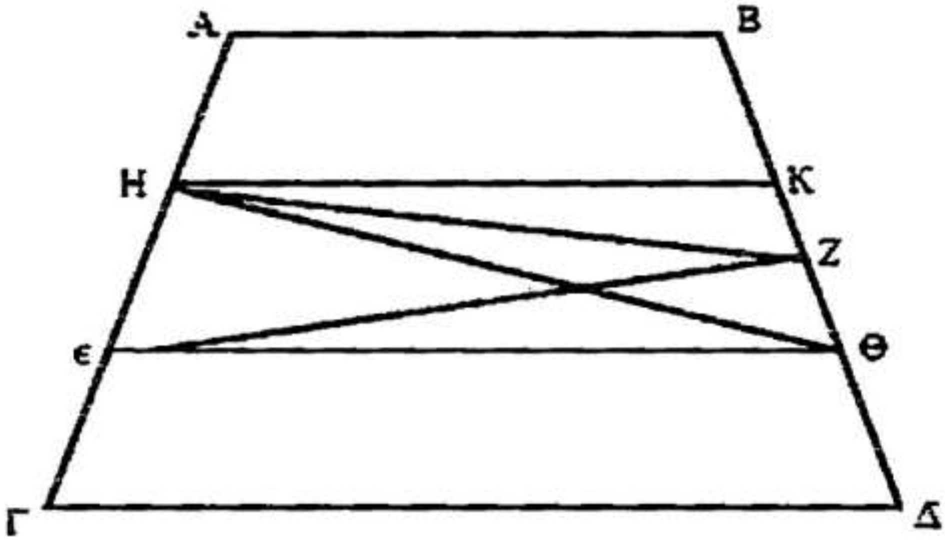
La corda H'T divide ABDC in due poligoni:

* il triangolo CH'T che ha area uguale a 3/8 di quella di ABDC;
* il pentagono non regolare H'ABDT che area uguale a uguale a 3/8 di quella di ABDC.

Il rapporto fra le aree dei due poligoni è:

$A_{CH'T} : A_{H'ABDT}$ = 5/8 : 3/8 = 5 : 3.

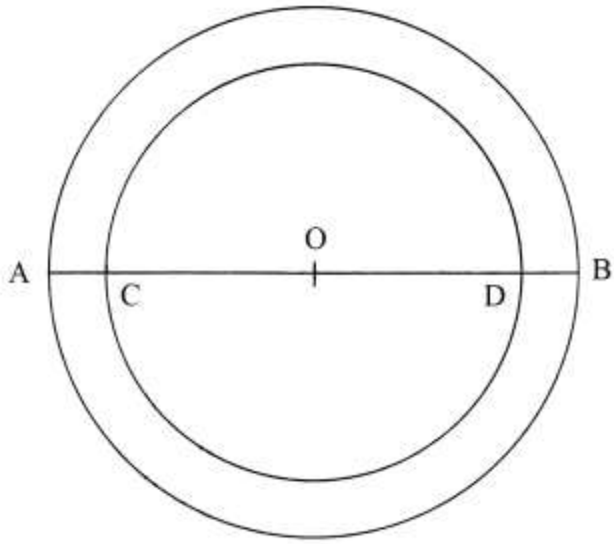
Lo schema che segue è riprodotto da p. 2401 del volume di Fabio Acerbi:



Lo schema è chiaramente assai impreciso.

[9] Cerchi proporzionali a un rapporto dato

Un cerchio ha diametro AB lungo 20. Deve esserne disegnato un altro, concentrico al primo: l'area del cerchio interno deve essere in rapporto 5 : 3 con quella della corona circolare.



La procedura risolutiva è basata sulla regola secondo la quale l'area di un cerchio è proporzionale al quadrato della lunghezza del diametro.

La procedura contiene i seguenti passi:

* sommare 3 e 5: 3 + 5 = 8;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* moltiplicare per 5: 400 * 5 = 2000;
* dividere per 8: 2000/8 = 250;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{250}$ = 15,81 lunghezza del diametro CD.

- APPROFONDIMENTO -

Il testo non è molto chiaro. Verifichiamo la correttezza della soluzione.

L'area del cerchio di diametro AB è:

$A_{AB} = \pi * AB^2/4 = \pi/4 * 20^2 = \pi/4 * 400.$

Quella del cerchio di diametro CD è:

$A_{CD} = \pi * CD^2/4 = \pi/4 * (\sqrt{250})^2 = \pi/4 * 250.$

L'area della corona circolare compresa fra le due circonferenze è data dalla differenza fra le aree dei due cerchi:

$A_{CORONA} = A_{AB} – A_{CD} = \pi/4 * 400 – \pi/4 * 250 = \pi/4 * 150.$

Il rapporto fra le aree della corona circolare e quella del cerchio interno è:

$A_{CORONA} : A_{CD} = \pi/4 * 150 : \pi/4 * 250 = 5 : 3.$

I rapporti fra le tre aree sono:

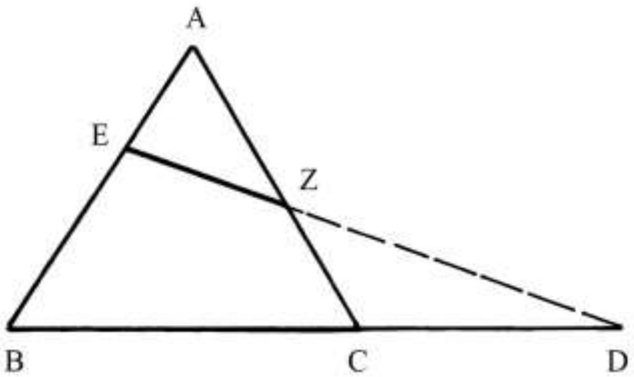
$A_{AB} : A_{CD} : A_{CORONA} = \pi/4 * 400 : \pi/4 * 250 : \pi/4 * 150 = 8 : 5 : 3.$

I rapporti appena calcolati confermano la correttezza della soluzione.

- -

[10] Divisione di un triangolo in due parti

ABC è un triangolo che deve essere diviso secondo un rapporto dato.



Prolungare verso destra il lato BC: il punto D è l'estremo del segmento che va tracciato per dividere ABC in due parti secondo una data proporzione.

Il testo non fornisce dati né proposte operative.

La corda EZ divide il triangolo ABC in due poligoni:

* il triangolo AEZ che ha, con una buona approssimazione, area uguale a *un quinto* di quella di ABC;
* il quadrilatero BEZC che copre i restanti *quattro quinti* dell'area del triangolo originario.

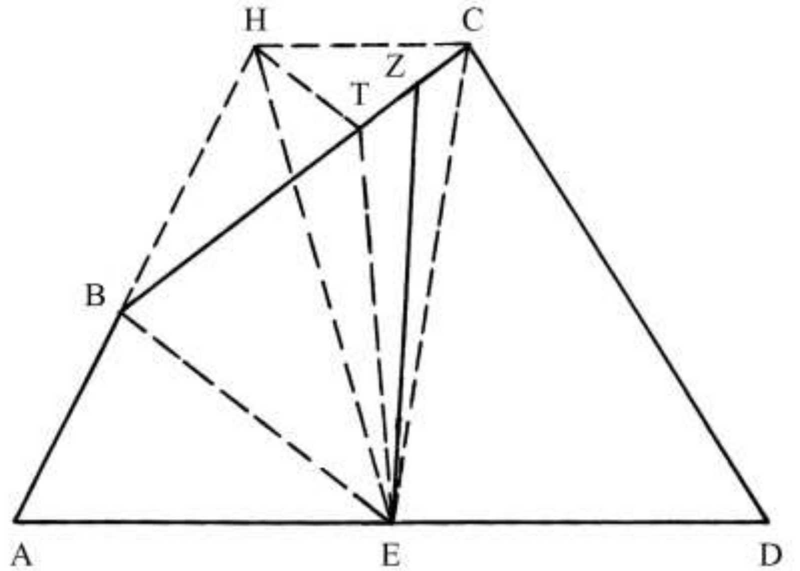
Nota

Il problema può, un po' alla lontana, essere avvicinato alla Proposizione 26 secondo Archibald.

[11] Divisione di un quadrilatero

ABCD è un quadrilatero che deve essere diviso in due parti.

Le lettere scritte ai vertici sono apposte in senso orario, a partire dal punto in basso a sinistra, A.



Nell’esempio qui mostrato, E è il punto medio di AD e il trapezio deve essere diviso in due parti di uguali aree con un segmento uscente da E.

Prolungare verso l’alto il lato AB e dal vertice C tracciare verso sinistra la parallela a AD: le due linee si incontrano in H.

Collegare E con B e con C.

Da H disegnare la parallela a BE: è HT. Disegnare TE.

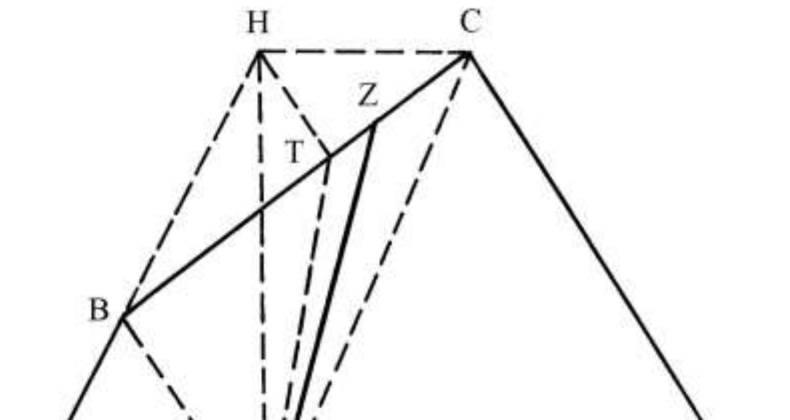
Determinare il punto medio di TC: è Z. Tracciare ZE.

ZE divide ABCD in due poligoni che hanno aree uguali:

* il quadrilatero ABZE;
* il quadrilatero EZCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L’esempio che è considerato nello schema che segue richiede la divisione di ABCD in due parti: una con area uguale a *un terzo* e l’altra con area pari a *due terzi*.



Il unto E è fissato sul lato AD alle seguenti distanze:

*	AE = 1/3 * AD;
*	ED = 2/3 * AD.

Prolungare verso l'alto il lato AB e da C condurre la parallela a AD: le due linee si incontrano in H.

Collegare E con B e con H.

Dal punto H tracciare la parallela a BE: è HT.

Disegnare TE.

Determinare il punto Z su TC rispettando la seguente proporzione:

TZ : ZC = AE : ED = 1 : 2.

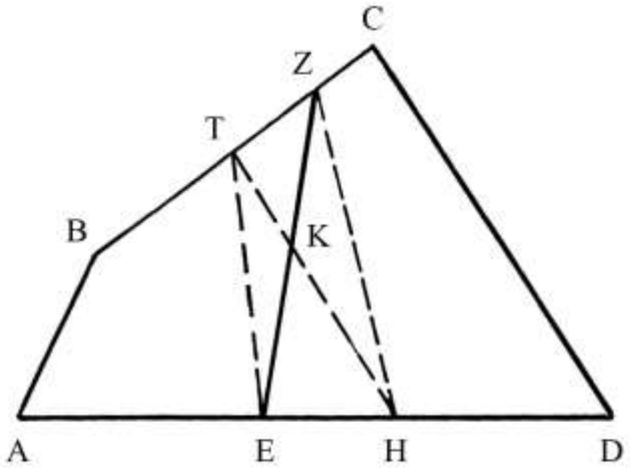
Il segmento TZ è quindi lungo *un terzo* di TC.

Collegare Z con E. ZE divide ABCD in due poligoni:

*	il quadrilatero ABZE, con area uguale a *un terzo* di quella di ABCD;
*	il quadrilatero EZCD, con area uguale a *due terzi* di quella di ABCD.

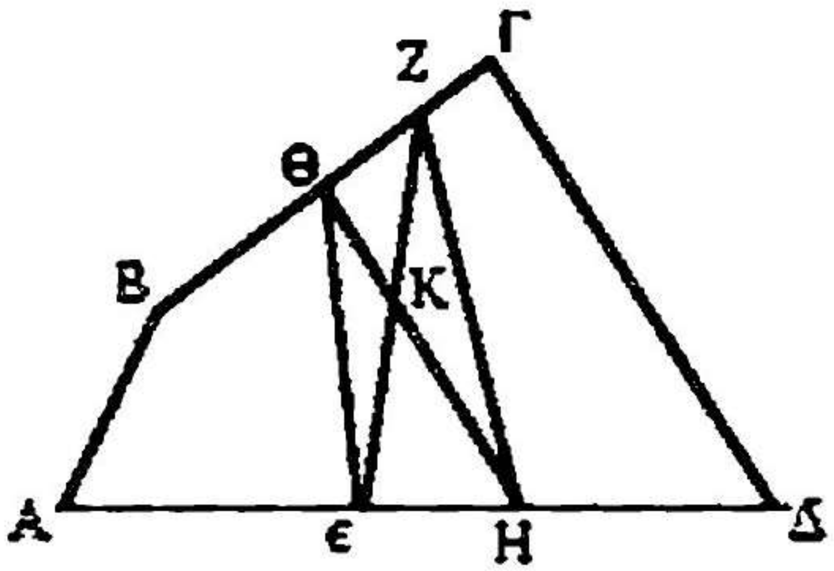
[12] Divisione di un trapezio

Il problema è descritto in modo abbastanza oscuro.



Benché sia rappresentato in scala più ridotta, il quadrilatero ABCD è identico a quello del precedente problema.

Non è fornita alcuna informazione sulla divisione di AD in due segmenti adiacenti: AE e ED. Da una approssimativa misurazione sulla figura originale sembra che valga la proporzione AE : ED = 2 : 3, come mostra lo schema che segue riprodotto da p. 2403 del volume di Acerbi:



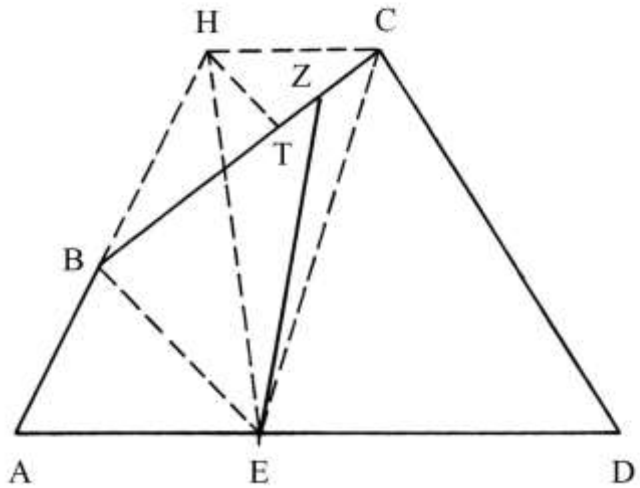
ZH divide ABCD in due poligoni:
* il quadrilatero ABZE;
* il quadrilatero EZCD.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue provvede a dividere il precedente quadrilatero con il metodo già utilizzato.

AD è diviso in proporzione:

AE : AD = 2 : 3.



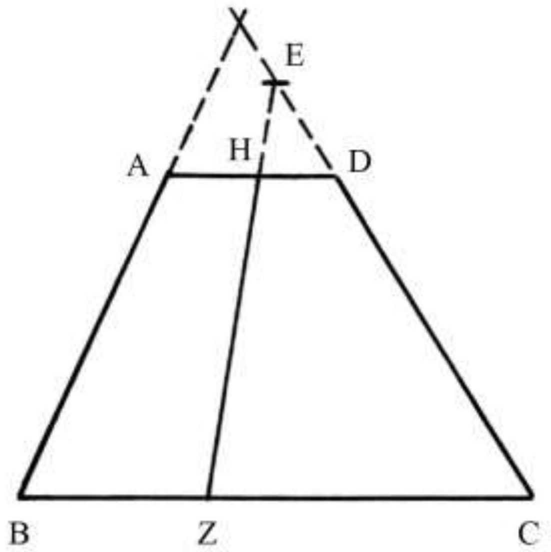
Con questa costruzione, il punto Z risulta posizionato sul lato BC.

EZ divide ABCD in due poligoni:
* il quadrilatero ABZE che ha area uguale a *due quinti* di quella di ABCD;
* il quadrilatero EZCD con pari ai restanti *tre quinti* di quella di ABCD.

- -

[13] <u>Divisione di un trapezio in due parti con una linea passante da un punto esterno</u>

ABCD è un trapezio che deve essere diviso in due parti con una linea passante per il punto esterno E.



Non viene fornita alcuna informazione sui rapporti fra le aree dei due quadrilateri generati dal taglio, ABZH e HZCD.

Una ragionevole stima basata sulle dimensioni dello schema originale, riprodotto qui sotto, può considerare il rapporto che segue:

$A_{ABZH} : A_{ABCD} = 4 : 10$ e

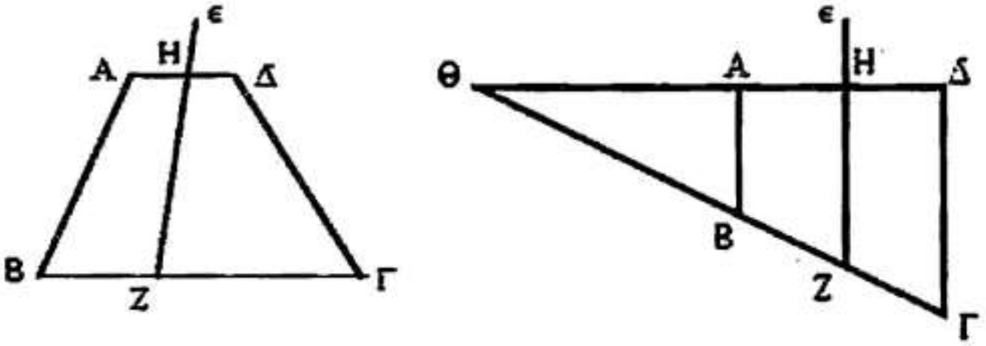
$A_{ABZH} : A_{HZCD} = 4 : 6 = 2 : 3.$

Il testo non offre alcuna indicazione sul metodo grafico utilizzato.

A giustificazione della soluzione presentata nello schema qui sopra, sembra che nell'originale il punto E sia collocato sul prolungamento verso l'alto del lato CD.

Riproduciamo di seguito il passo che descrive il problema a p. 2404 del volume di Fabio Acerbi:

13. Poste le stesse cose sia il punto dato su nessun lato del quadrilatero. E sia il quadrilatero dato ΑΒΓΔ, ed il punto dato E; e sia da condurre EZ che fa come rapporto di ABZH rispetto a ZHΓΔ quello dato; e invertendo e componendo il rapporto di ΑΒΓΔ rispetto a



ABZH è dato. E il quadrilatero ΑΒΓΔ è dato: anche ABZH è quindi dato. E se ΑΔ è parallela a ΒΓ, ABZH sarà uguale al <rettangolo compreso> da AH BZ messa insieme e dalla metà della perpendicolare condotta da A fino a ΒΓ. E la perpendicolare è data: anche AH BZ messa insieme è quindi data: ZE lo è quindi in posizione. Questo infatti di séguito.[42] Se invece non sono parallele, si incontrino secondo Θ: il quadrilatero ABZH è quindi dato. Anche il triangolo HZΘ totale è quindi dato. E l'angolo Θ è dato: il <rettangolo compreso> da ΘHZ è quindi dato: si è quindi ricondotti alla *Resecazione di una superficie*: EZ è quindi <data> in posizione.

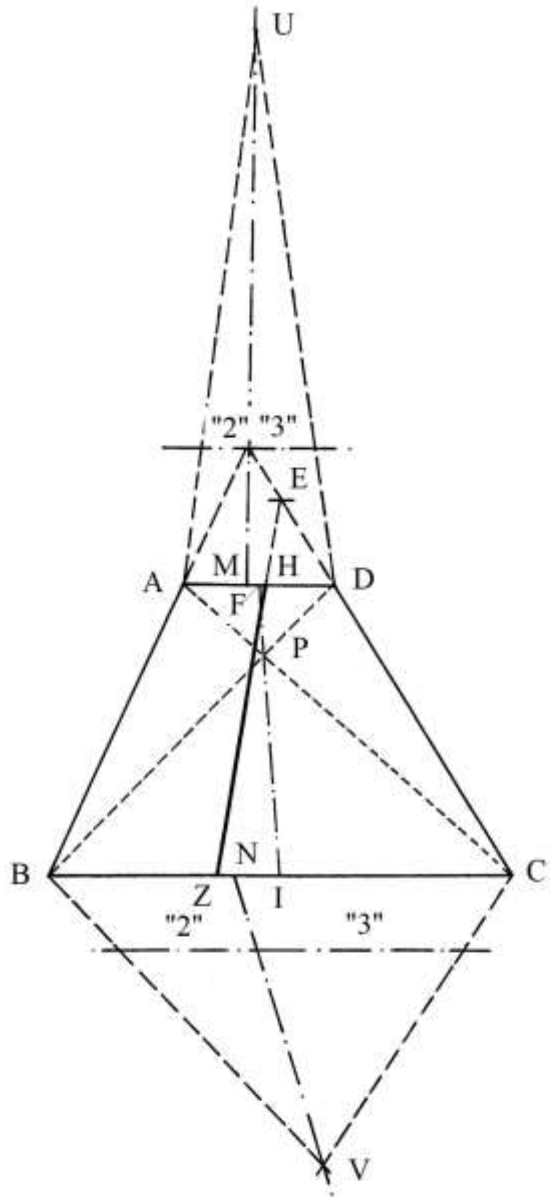
- APPROFONDIMENTO -

Presentiamo un'ipotesi di soluzione.

FI è una *mediana*: F e I sono i punti medi delle due basi. AC e BD sono le due diagonali che si incontrano nel punto P posizionato sulla media FI.

Dividiamo le due basi in parti proporzionali a 2 e a 3: il metodo è già stato usato in precedenza. Dai punti U e V sono condotte le linee che dividono le due basi:

BN : NC = AM : MD = 2 : 3.



I punti M e N non sembrano rivestire alcun ruolo nella determinazione delle posizioni dei punti H e Z.

Con l'applicazione dei più semplici strumenti geometrici non sembra possibile dividere ABCD nella proporzione desiderata.

Forse, la soluzione può essere ottenuta *per tentativi*.

- -

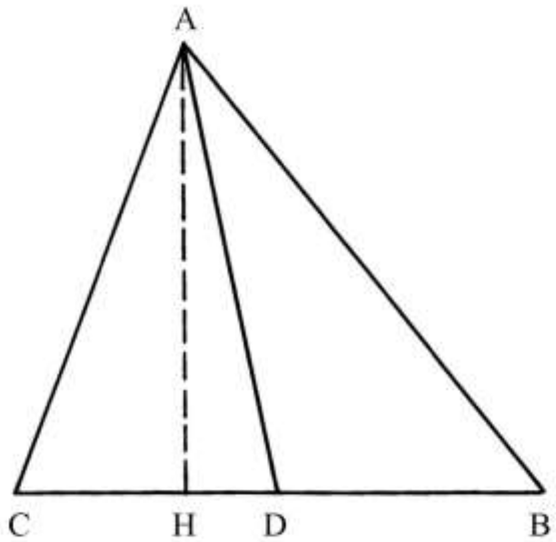
LE COSTRUZIONI DI ABU'L – WAFA AL BUZJANI

Nel testo di Acerbi sono esaminate alcune delle costruzioni geometriche piane dedicate alla divisione dei triangoli e dei quadrilateri e di altre figure nel suo manoscritto "*Libro sulle costruzioni geometriche necessarie per l'artigiano*".

DIVISIONI DEI TRIANGOLI

[1] Divisione di un triangolo in due parti uguali

ABC è un triangolo che deve essere diviso in due parti uguali con un segmento uscente da un vertice:



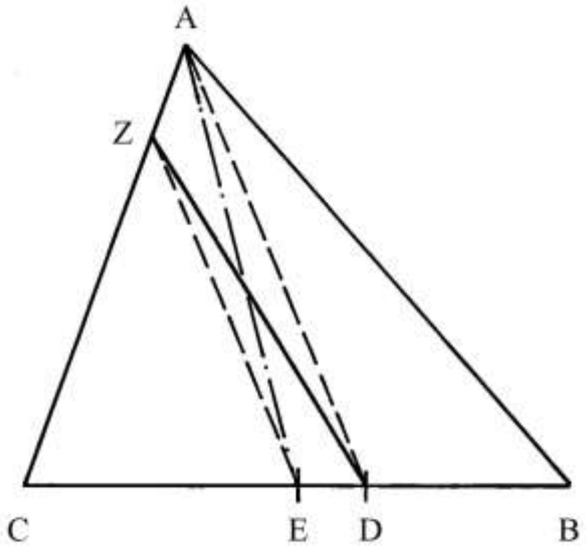
Determinare il punto medio di BC: è D.
La mediana AD divide ABC in due triangoli, ACD e ADB, che hanno aree uguali.
AH è l'altezza relativa alla base CB e lo è anche dei due triangoli ACD e ADB.
Verifichiamo:

$CD = CB/2$
$Area_{ABC} = AH * CD/2 = AH * (CB/2)/2 = AH * CB/4 = Area_{ABC}/2.$
$Area_{ADB} = AH * DB/2 = AH * (CB/2)/2 = AH * CB/4 \; Area_{ABC}/2.$

Nota: lettere apposte negli schemi relativi al trattato di Abu'l – Wafa contenuti nel testo di Fabio Acerbi sono talvolta scritte in senso orario, a partire dal vertice più in alto.
La lettera maiuscola "Z", che nell'alfabeto greco corrisponde alla nostra "F" è stata talvolta conservata.
Lo stesso trattamento è stato riservato alla greca "G", corrispondente alla nostra "C".

[2] Divisione di un triangolo in due parti uguali con una corda

ABC è un triangolo che deve essere diviso in due parti di aree uguali con una corda uscente dal punto D.

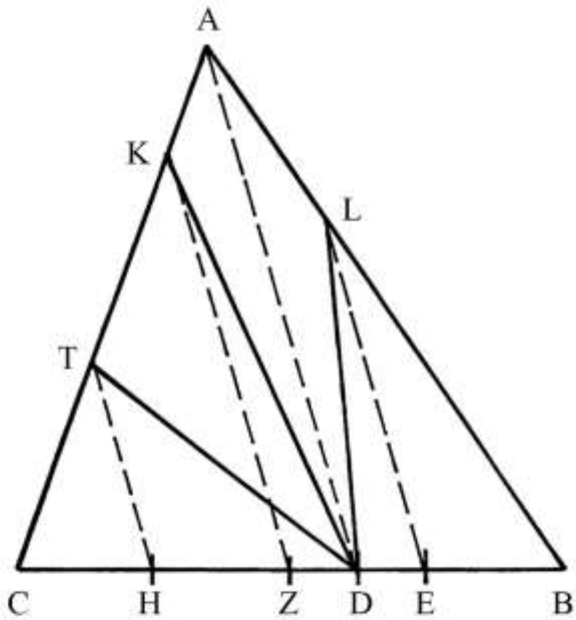


E è il punto medio del lato CB.
Tracciare la mediana AE e la corda AD.
Parallelamente a AD disegnare una corda da E fino a incontrare in Z il lato AC.
DZ è la corda che divide ABC in due poligoni di aree uguali:

* il triangolo CZD;
* il quadrilatero ZABD.

[3] <u>Divisione di un triangolo in quattro parti uguali</u>

ABC è il triangolo che deve essere diviso in quattro parti uguali con corde uscenti dal punto D posizionato sul lato CB.



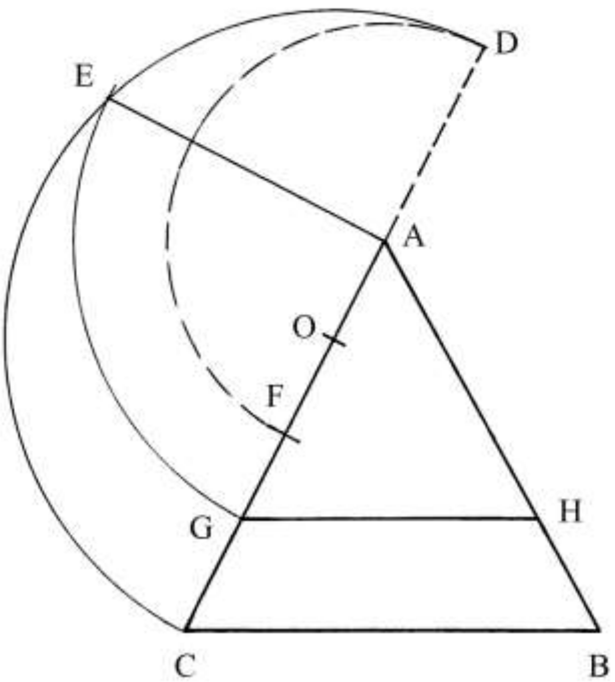
Dividere il lato CB in quattro parti uguali: sono stabiliti i punti H, Z e E.
Z è anche il punto medio di CB.
Collegare A con D. Parallelamente a AD disegnare le corde EL, ZK e HT.
Le corde DL, DK e DT dividono ABC in *quattro* poligoni che hanno aree uguali:

* il triangolo DLB;

*	il quadrilatero DKAL;
*	il triangolo DTK;
*	il triangolo DCT.

[4] <u>Divisione di un triangolo in due parti uguali</u>

ABC è un triangolo che deve essere diviso in due parti con aree uguali, per mezzo di una corda parallela a un lato.



Prolungare verso l'alto il lato AC; fissare il punto medio di AC: è F.

Fare centro in A e con raggio AF tracciare una semicirconferenza da F fino a D.

Determinare il punto medio di CD: è O. Fare centro in O e con raggio OC = OD disegnare una seconda semicirconferenza.

Dal punto A elevare la perpendicolare a CD: essa incontra la seconda semicirconferenza in E.

Fare centro in A e con raggio AE tracciare un arco da E fino a tagliare in G il lato AC.

Dal punto G condurre la parallela a CB: è GH.

GH divide ABC in due poligoni che hanno aree uguali:
*	il triangolo GAH;
*	il trapezio CGHB.

- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza di AE è medio proporzionale fra quelle di CA e di AD:

CA : AE = AE : AD.

Ma AD = CA/2, quindi:

CA : AE = AE : CA/2 e

$AE^2 = CA^2/2$ da cui:

$AE = CA/\sqrt{2}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

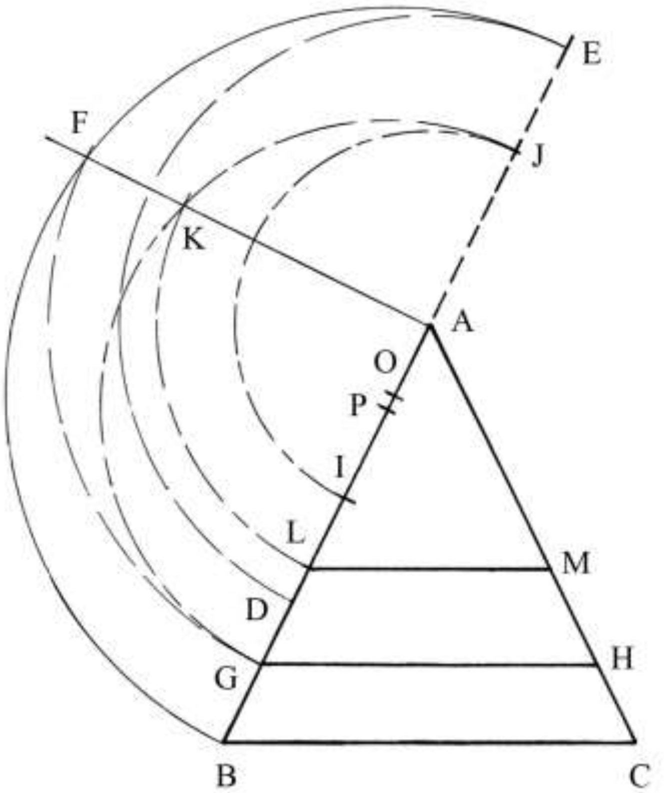
Altri Autori, quali alcuni abacisti medievali toscani (ad esempio il Volgarizzamento pisano, di Autore Anonimo, della *Practica geometriae* di Leonardo Fibonacci risalente alla prima metà del XIV secolo, contenuto nel Codice Chigiano M.V. 104 della Biblioteca Apostolica Vaticana) facevano ricorso all'aritmetica):

* moltiplicare la lunghezza di CA per sé stessa: $CA * CA = CA^2$;
* dividere per 2: $CA^2/2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(CA^2/2)} = CA/\sqrt{2} = \sqrt{2} * CA/2$, lunghezza di AE = AG.

- -

[5] <u>Divisione di un triangolo in tre parti uguali con corde parallele a un lato</u>

Il triangolo ABC deve essere diviso in tre parti uguali con delle corde parallele al lato BC.



La descrizione che segue amplia quella originale contenuta nel testo di Acerbi.

Viene applicato il metodo usato nella soluzione del precedente problema.

Prolungare verso l'alto il lato AB.

Fissare il punto D a distanza da B uguale a:

DB = 1/3 * BA.

Fare centro in A e con raggio AD tracciare una semicirconferenza da D a E. Determinare il punto medio di BE: è O. Con raggio OB = OE fare centro in O e disegnare una semicirconferenza da B a E.

Elevare la perpendicolare a BE nel punto A: essa incrocia l'ultima semicirconferenza in F.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, AF ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle di BA e di AE.

Fare centro in A e con raggio AF tracciare un arco da F fino a incontrare in G il lato AB.

A partire da G condurre una parallela a CB: è GH.

Il trapezio BGHC ha area uguale a *un terzo* di quella di ABC. Ne consegue che il residuo triangolo AGH ha area uguale a *due terzi* di quella di ABC.

Il passo successivo è dato dall'applicazione del metodo, già incontrato nella soluzione del precedente problema, alla divisione in due parti uguali del triangolo AGH.

Fissare il punto medio di GA: è I. Fare centro in A e con raggio AI tracciare una semicirconferenza da I a J.

Stabilire il punto medio di GJ: è P. Fare centro in P e con raggio PG = PJ disegnare una semicirconferenza da P a J. Essa taglia in K la perpendicolare innalzata da A. Fare centro in A e con raggio AK tracciare un arco da K fino a incontrare in L il lato AB.

LM è la corda parallela a BC e a GH.

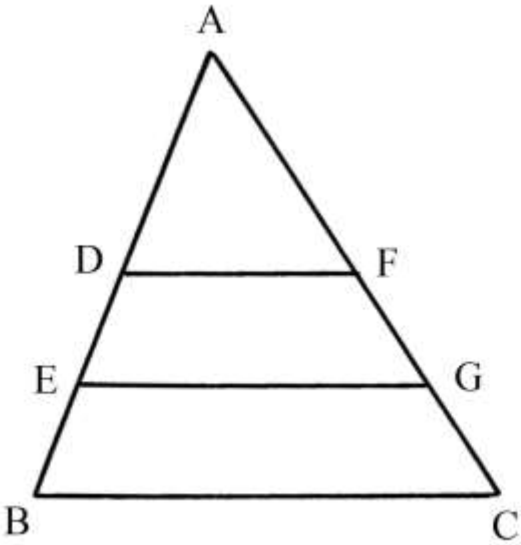
Il trapezio GLMH e il triangolo ALM hanno entrambi area uguale a *un terzo* di quella di ABC.

- APPROFONDIMENTO -

Un esempio di impiego del metodo aritmetico nella soluzione di questo specifico problema è presente nel citato "*Volgarizzamento* della *Practica geometriae*".

<u>Divisione di un triangolo in tre parti</u>

Il triangolo scaleno ABC deve essere ripartito in tre parti uguali tagliando i lati AB e AC con segmenti paralleli alla base BC:



Ricordiamo un dato di fatto: l'area di un generico triangolo è sempre proporzionale, con coefficienti dei quali si omette il calcolo, al quadrato della lunghezza di un lato o di un'altezza.

La procedura impiegata per dividere il triangolo ABC prevede i seguenti passi:

* calcolare il quadrato della lunghezza di AB: AB^2;
* dividere per 3: $AB^2/3$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(AB^2/3)}$, lunghezza del segmento AD;
* moltiplicare il quadrato di AB per 2/3: $2/3 * AB^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(2/3 * AB^2)}$, lunghezza di AE.

Le due lunghezze possono essere scritte come segue:

$AD = \sqrt{(AB^2/3)} = AG/\sqrt{3} = \sqrt{3} * AB/3$;

$AE = \sqrt{(2/3 * AB^2)} = AB * (\sqrt{2})/(\sqrt{3}) = AB * (\sqrt{2} * \sqrt{3})/3 = AB * (\sqrt{6})/3$.

Dai punti D e E tracciare le parallele DF e EG alla base BC: il triangolo è diviso in tre poligoni che hanno area uguale a *un terzo* di quella di ABC:

* il triangolo ADF (simile a quello ABC);
* il trapezio scaleno DEGF;
* il trapezio scaleno EBCG.

L'Autore passa poi ai calcoli fornendo la lunghezza di AB, uguale a 12 pertiche: il quadrato vale: $AB^2 = 12^2 = 144$.

La lunghezza di AD è:

$$AD = (\sqrt{3})/3 * 12 = 4 * \sqrt{3} \approx (7 - 1/14) \text{ pertiche.}$$

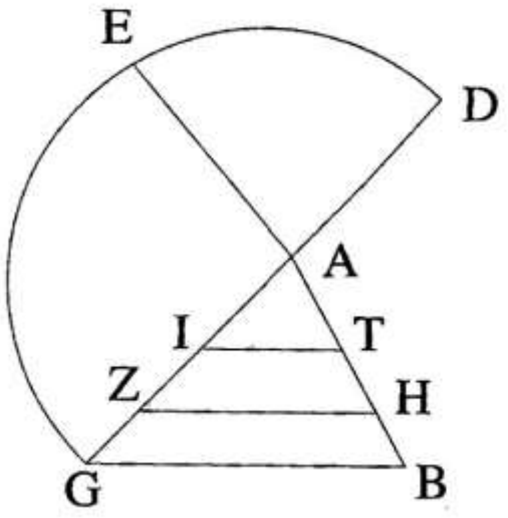
La lunghezza di AE è:

$$AE = 12 * (\sqrt{6})/3 = 4 * \sqrt{6} \approx (10 - 1/5) \text{ pertiche.}$$

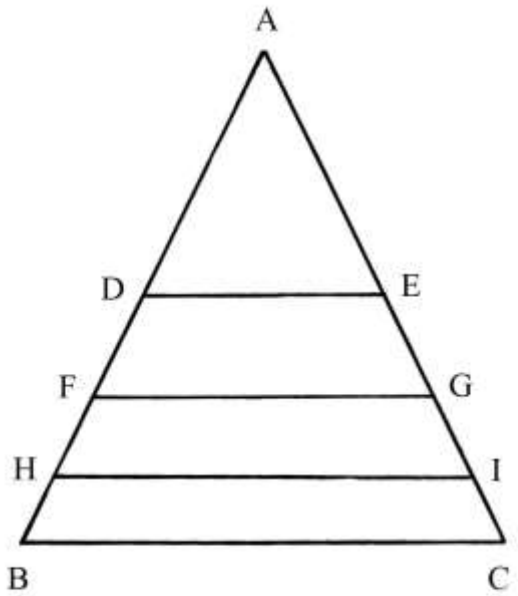
- -

[6] Divisione di un triangolo in quattro parti uguali

La soluzione del problema e lo schema che lo accompagna a p. 2411 nel testo di Fabio Acerbi si riferiscono alla divisione in *tre* anziché in quattro parti uguali.



Applichiamo il metodo usato dagli abacisti medievali toscani:



* calcolare il quadrato della lunghezza di AB: AB^2;
* dividere per 4: $AB^2/4$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(AB^2/4)} = AB/2$, lunghezza di AD;
* dividere il quadrato di AB per 2: $AB^2/2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(AB^2/2)} = AB/\sqrt{2} = \sqrt{2} * AB/2$, lunghezza di AF;
* moltiplicare il quadrato di AB per ¾: $AB^2*3/4$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(AB^2*3/4)} = AB * (\sqrt{3})/2$, lunghezza di AH.

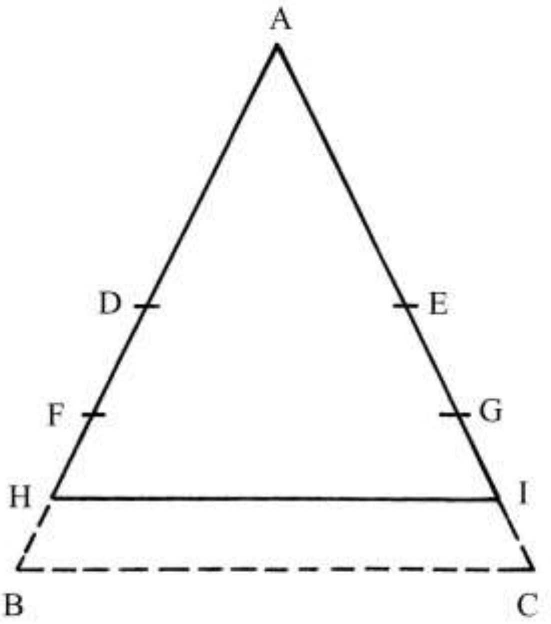
Le corde DE, FG e HI sono parallele al lato BC: esse dividono ABC in quattro poligoni che hanno tutti aree uguali a un quarto di quella di ABC: ADE, FDEG, HFGI e BHIC.

La soluzione può essere ottenuta anche per via geometrica utilizzando il metodo impiegato nei casi precedenti: questa tecnica geometrica richiede grande precisione e sufficiente padronanza degli strumenti di disegno (riga graduata, compasso e squadre).

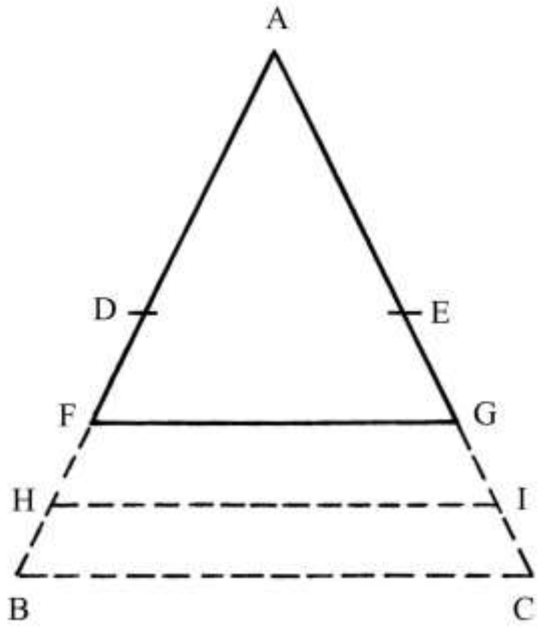
- APPROFONDIMENTO -

L'applicazione del metodo grafico alla divisione in quattro parti può essere semplificata scomponendo la procedura in più fasi.

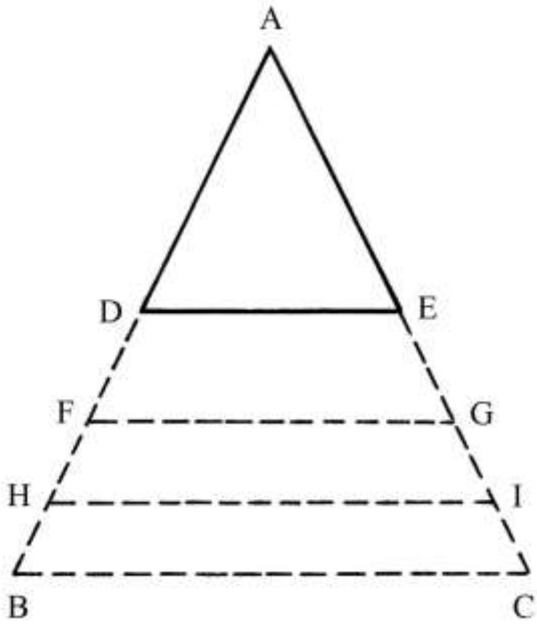
La prima fase consiste nell'individuazione del trapezio BHIC, con area uguale a un quarto di quella di ABC:



Residua il triangolo AHI che deve essere diviso in *tre* parti uguali: il trapezio FHHIG ha area uguale a *un terzo* di quella di AHI e a *un quarto* di quella di ABC.



Dopo questo passo, il triangolo rimanente AFG ha area uguale a 2/4 = ½ di quella di ABC.
La fase conclusiva consiste nella divisione, con metodo grafico, in due parti uguali di AFG:



Il triangolo ADE e il trapezio DEFG hanno entrambi aree uguali a *un quarto* di quella di ABC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

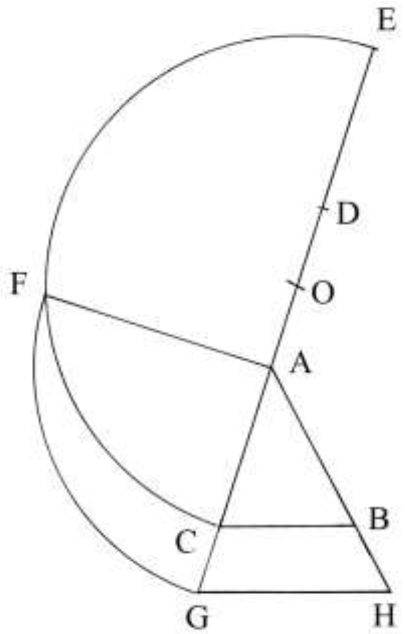
Su carta, la complessa divisione di ABC in quattro poligoni di aree uguali a un quarto può essere ottenuta sovrapponendo al foglio di carta contenente il triangolo iniziale altri fogli – strati – di carta da disegno trasparente.

- -

[7] Triangolo doppio di un altro

Il problema è inverso a quelli esaminati in precedenza e finalizzati a dividere un triangolo in 2, 3, 4 (o più) parti uguali.

ABC è un triangolo che deve essere unito a un altro poligono per generare un triangolo con area doppia.



Prolungare verso l'alto il lato AC. A partire da riportare verso l'alto *due* volte la lunghezza di AC: sono stabiliti i punti D e E.

Determinare il punto medio di CE: è O. Fare centro in O e con raggio OC = OE tracciare una semicirconferenza da C a E.

Dal punto A elevare la perpendicolare a CE: essa incontra la semicirconferenza nel punto F.

Prolungare verso il basso i lati AC e AB.

Fare centro in A e con raggio AF disegnare un arco fino a incontrare in G il prolungamento verso il basso di AC.

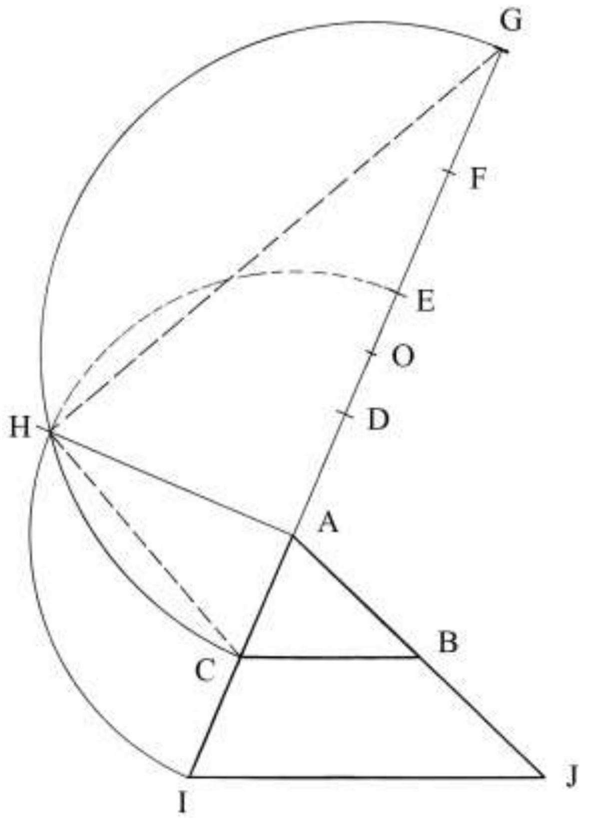
GH è la corda parallela al lato CB.

Il trapezio GCBH ha area uguale a quella del triangolo ABC e il triangolo AGH ha area doppia di quella di ABC.

\- APPROFONDIMENTO -

Abu'l – Wafa accenna alla possibilità di aggiungere al triangolo iniziale ABC una superficie multipla di quella iniziale.

Nell'esempio che segue il trapezio aggiunto ha area uguale a *tre* volte quella di ABC.



ABC è il triangolo iniziale. Prolungare il lato AC verso l'alto e verso il basso e quello AB verso il basso.

A partire da A e verso l'alto riportare *quattro* volte la lunghezza di AC: sono fissati in successione i punti D, E, F e G.

Determinare il punto medio di CG: è O. Fare centro in O e con raggio OC = OG disegnare una semicirconferenza da C a G.

Dal punto A elevare la perpendicolare a CG: essa taglia la semicirconferenza in H.

CHG è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio di centro O.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, la lunghezza di AH è medio proporzionale fra quelle di CA e di AG:

$$CA : AH = AH : AG.$$

Ma AG = 4 * CA, per cui si ha:

$$AH^2 = CA = AG = CA * (4 * CA) = 4 * CA^2 \qquad e$$

$$AH = \sqrt{(4 * CA^2)} = 2 * CA = AE.$$

Fare centro in A e. con raggio AH = AE disegnare una semicirconferenza da E fino a stabilire il punto I.

Da I condurre la parallela a CB: IJ è il lato di base del triangolo AJI.

Le aree dei due triangoli ABC e AJI sono proporzionali alle lunghezze dei quadrati dei loro lati corrispondenti:

$$A_{AJI} : A_{ABC} = AI^2 : AC^2.$$

Ma AC = AI/2, quindi la proporzione diviene:

$$A_{AJI} : A_{ABC} = AI^2 : (AI/2)^2 : 4 : 1.$$

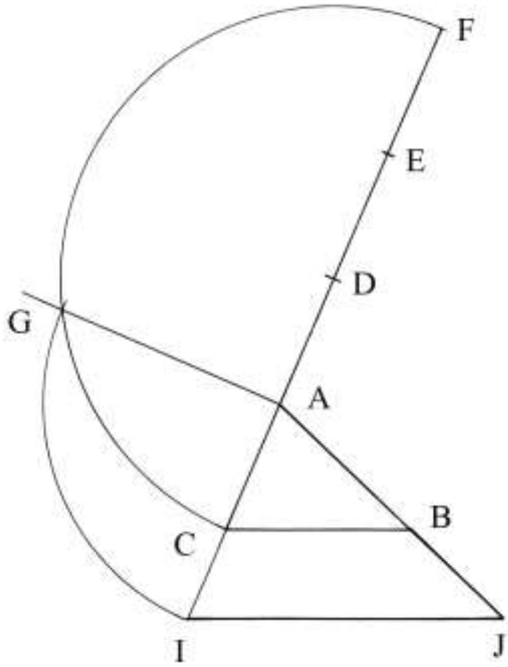
Ne consegue che l'area del trapezio CIJB è data da:

$$A_{CIJB} = A_{AJI} – A_{ABC} = A_{AJI} – ¼ * A_{AIJ} = ¾ * A_{AJI} .$$

La costruzione è servita ad aggiungere al triangolo ACB un quadrilatero – CIJB – con area tripla di quello di ACB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'esempio mostrato nello schema che segue produce un triangolo, AJI, che ha area *tripla* di quella di ABC.



ABC è il consueto triangolo iniziale. Prolungare verso l'alto e verso il basso il lato AC e verso il basso quello AB.

Sul prolungamento verso l'alto di AC riportare da A per *tre* volte la lunghezza AC: sono fissati i punti D, E e F.

Determinare il punto medio di CF: è D. Fare centro in D e con raggio DC = DF disegnare una semicirconferenza da C a F.

Dal punto A elevare la perpendicolare a CF: essa incontra la semicirconferenza in G.

La lunghezza di AG è medio proporzionale fra quelle di AC e di AF:

$$AC : AG = AG : AF.$$

Ma AF = 3 * AC per cui si ha:

$$AG^2 = AC * 3 * AC = 3 * AC^2 \qquad \text{e}$$

$$AG = AC * \sqrt{3}.$$

Fare centro in A e con raggio AG tracciare un arco da G fino a tagliare in I il prolungamento verso il basso di AC. AI è lungo quanto AG e quindi è AC * √3.

Il segmento IJ è parallelo a CB.

Il rapporto fra le aree dei triangoli ABC e AJI è:

$$A_{AJI} : A_{ABC} = AC^2 : AI^2 = AC^2 : (AC * \sqrt{3})^2 = AC^2 : 3 * AC^2 = 1 : 3.$$

L'area del triangolo AJI è tre volte l'area di quello ABC.

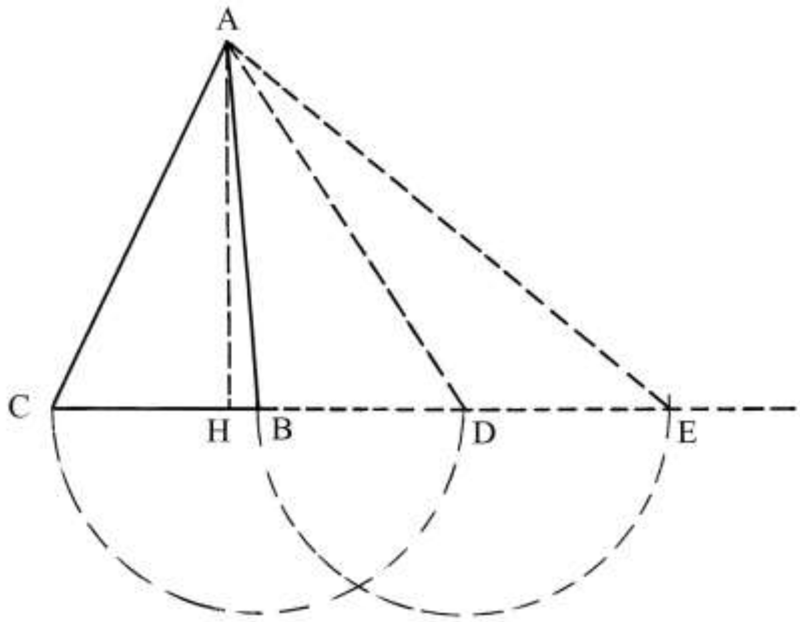
Il trapezio BJIC ha area che il *doppio* di quella del triangolo iniziale ABC.

- -

[8] Incremento di un triangolo

ABC è un triangolo al quale deve essere aggiunto un poligono che lo ingrandisca di due o volte, con segmenti uscenti da vertice A.

AH è l'altezza relativa alla base BC.



Prolungare verso destra il lato BC.

A partire da B, con il compasso riportare la lunghezza di BC sul prolungamento: sono così fissati in successione i punti D, E, …

Collegare A con D e con E.

I triangoli ABD e ADE hanno la stessa area di ABC perché l’altezza AH è comune a tutti e tre e le loro basi hanno uguali dimensioni:

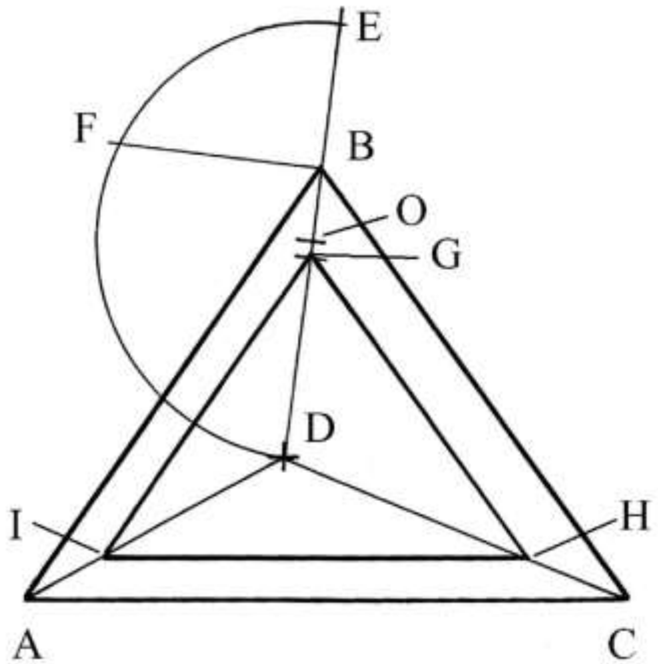
AH * CB/2 = AH * HD/2 = AH * DE/2.

L’area di ACD è doppia di quella di ABC e quella di ACE è tripla.

[9] <u>Triangoli simili</u>

È dato il triangolo ABC: al suo interno deve essere costruito un secondo triangolo con area uguale a metà o a un terzo.

Lo schema che segue propone la costruzione di un triangolo con area uguale a metà di quella di ABC.



Fissare un punto a piacere qualsiasi *all'interno* di ABC: è D. Collegare questo punto con i vertici A, B e C.

Tracciare una semiretta uscente da D e passante per B.

Fissare il punto E a distanza BE = BD/2.

Determinare il punto medio di DE: è O.

Fare centro in O e con raggio OD = OE tracciare una semicirconferenza.

Da B condurre la perpendicolare a DE: essa interseca la semicirconferenza in F.

Riportare la lunghezza di BF sulla semiretta DBE a partire da D: è stabilito il punto G.

Abu'l – Wafa suggerisce di procedere con lo stesso metodo sulle linee DA e DC. Qui semplifichiamo la costruzione.

Dal punto G tracciare la parallela a BC: è GH.

Sempre dal punto G condurre la parallela al lato AB: è GI.

Infine, collegare I con H, segmento che risulta parallelo a AC.

GHI è un triangolo isoscele simile a quello ABC e ha area uguale a metà.

- APPROFONDIMENTO -

L'esempio che segue presenta il caso del triangolo simile con area uguale a *un terzo* di quella di ABC.

Dopo ver scelto a piacere il punto *interno* D occorre collegarlo ai tre vertici di ABC.

Tracciare una semiretta uscente da D e passante per B.

Dal punto B condurre la perpendicolare a DB.

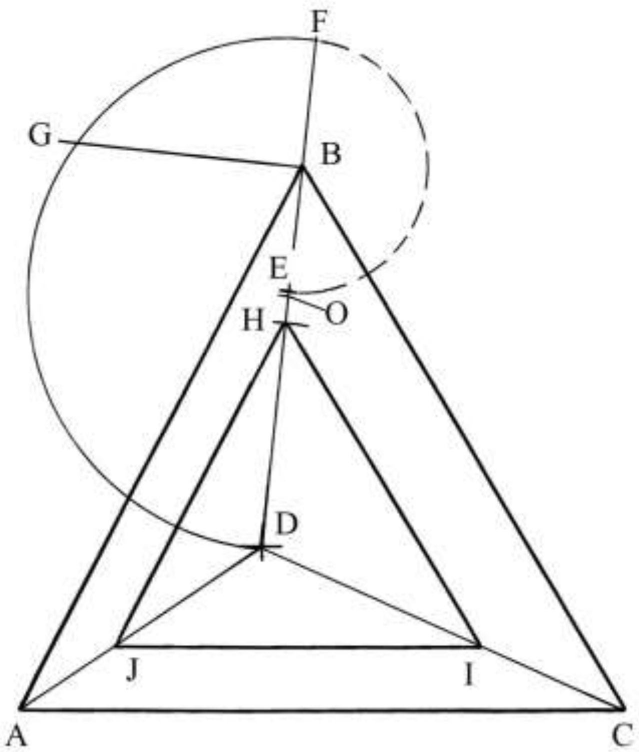
Fissare il punto E a distanza

BE = BD/3.

Il segmento DB deve essere diviso in un numero di parti uguale al rapporto fra l'area di ABC e quella del triangolo simile deve essere costruito: in questo caso la proporzione è *tre*. BE è lungo *un terzo* di BD.

Fare centro in B e con raggio BE tracciare una semicirconferenza da E fino a stabilire il punto F.

Determinare il punto medio di DF: è O.



Con centro in O e raggio OD = OF disegnare una semicirconferenza che incontra la perpendicolare uscente da B nel punto G.

Riportare la lunghezza di BG a partire da D sulla semiretta passante per O, E e B: è stabilito il punto H.

Dal punto H tracciare la parallela HI al lato BC.

A partire da I condurre la parallela IJ al lato CA.

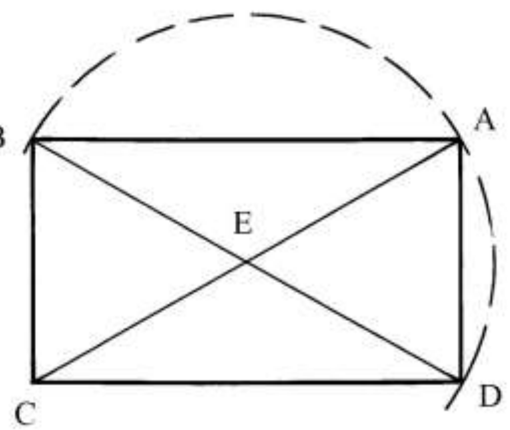
JH è il terzo lato del triangolo HIJ che ha area uguale a *un terzo* di quella di ABC.

- -

DIVISIONI DEI QUADRILATERI

[1] Divisione di un quadrilatero

ABCD è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli e di uguali lunghezze: è un rettangolo.



Tracciare le diagonali AC e BD: esse si incontrano in E.

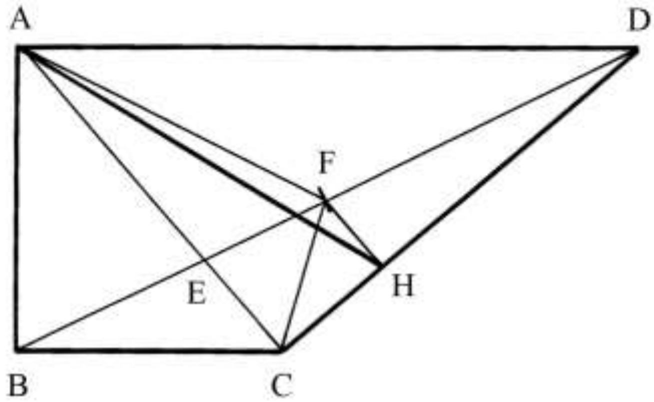
Se BE e ED hanno uguali lunghezze, come è il caso del rettangolo ABCD, una delle due diagonali divide il quadrilatero in due poligoni (due triangoli rettangoli), con aree uguali.

[2] Divisione di un quadrilatero

Il quadrilatero ABCD è un trapezio scaleno: le sue diagonali AC e BD si incontrano nel punto E. Deve essere diviso in due parti di aree uguali.

BE è più corta di ED.

Fissare il punto di BD: è F.



Collegare F con A. Dal punto F tracciare la parallela FH alla diagonale AC.

Disegnare la corda AH: essa divide ABCD in due poligoni che hanno entrambi area uguale a metà di quella dello stesso quadrilatero originario:

* il triangolo ADH;
* il quadrilatero ABCH.

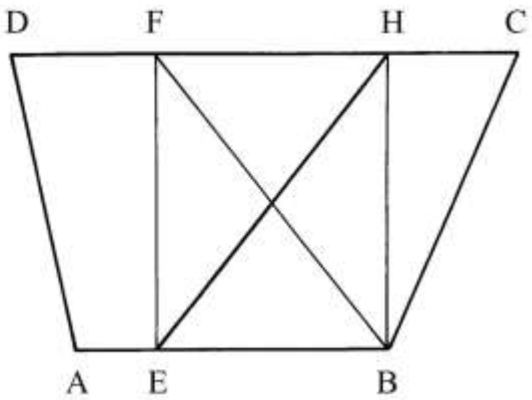
[3] Divisione di un quadrilatero in due parti

Il testo non è accompagnato da alcuna figura.

Il problema sembra essere richiamato nella Proposizione 16 di Archibald.

[4] Divisione di un quadrilatero in due parti uguali

ABCD è un quadrilatero, un trapezio



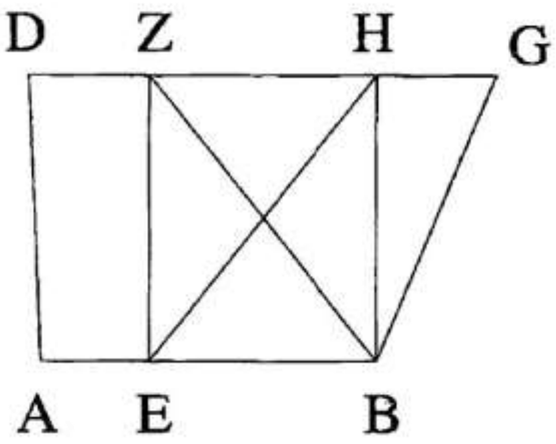
Dai punti E e B elevare le perpendicolari alle due basi: sono EF e BH.

Collegare E con H: la corda EH divide ABCD in due poligoni con aree uguali a metà di quella del trapezio originario:

* il trapezio ADHE;
* il trapezio EHCB.

La costruzione non è corretta: il trapezio ADHE ha chiaramente area maggiore di quella del trapezio EHCB.

Lo schema che segue è tratto da p. 2413 del testo di Acerbi: anch'esso conferma i dubbi sulla correttezza della costruzione.



[5] Divisione di un quadrilatero in due parti uguali

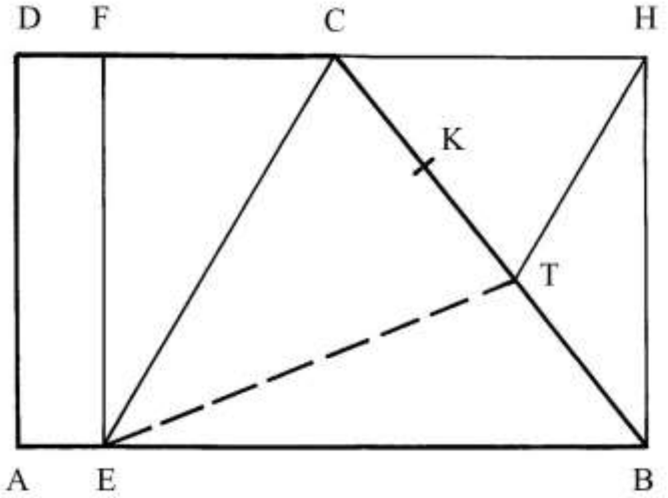
ABCD è il consueto quadrilatero da dividere in due parti uguali, con una corda uscente dal punto E.

Prolungare verso la base minore DC.

Dal punto B elevare la perpendicolare alle due basi: è BH.

Collegare E con C. Parallelamente a EC tracciare il segmento HT.

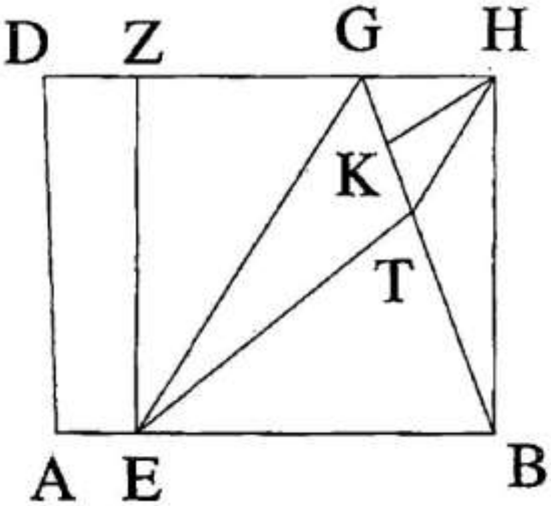
L'Autore fissa il punto K, forse il medio fra C e T, e lo collega a H.



Stando all'Autore, ET dividerebbe ABCD in due poligoni con aree uguali: ADCTE e ETB.

La costruzione è errata, perché il triangolo ETB ha area assai più piccola di quella del pentagono non regolare ADCTE.

Anche lo schema originale, qui riprodotto da p. 2414 dell'Acerbi, contiene un errore:



[6] Divisione di un trapezio in due parti uguali

Il trapezio ABDC deve essere diviso in due parti uguali con una corda parallela alle due basi.

Prolungare verso l'alto i due lati obliqui DB e CA: le due linee si incontrano in E.

Dal punto E condurre verso sinistra la perpendicolare a DE.

Fare centro in E e con raggio EB tracciare un arco di circonferenza che taglia la perpendicolare in F.

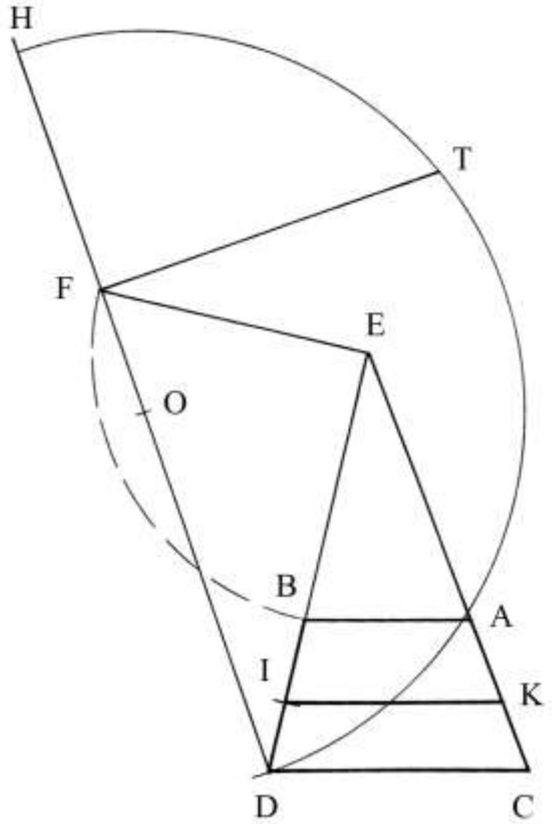
Per i punti D e F disegnare una semiretta.

Determinare la metà di DF e riportare questa lunghezza sulla semiretta, a partire da F:

FH = DF/2.

Stabilire il punto medio di DH: è O.

Fare centro in O e con raggio OD = OH tracciare una semicirconferenza da H a D.



Dal punto F condurre la perpendicolare FT al diametro HD.

Riportare la lunghezza di FT a partire da E, sul segmento ED:

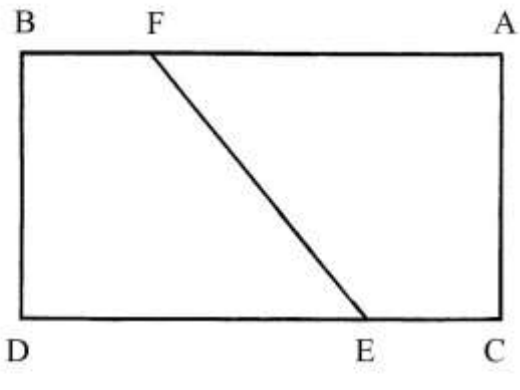
FT = EI.

Dal punto I tracciare la parallela IK alle due basi del trapezio ABDC.

Il quadrilatero originario è diviso in due trapezi, AKIB e KCDI, che hanno area uguale a metà di quella di ABDC.

[7] Divisione di un rettangolo in due parti uguali

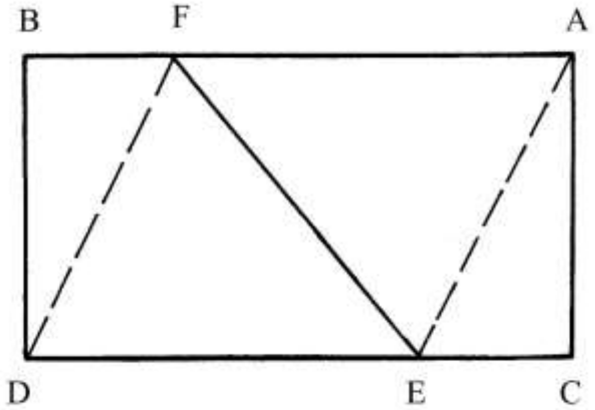
ABDC è un rettangolo che deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente dal punto E:



A partire da A, sul lato AB riportare la lunghezza di DE.

La corda EF divide ABDC in due trapezi rettangoli che hanno uguali aree, pari a metà di quella del rettangolo: sono DBFE e FACE.

Per via geometrica, la corda EF può essere tracciata con il metodo mostrato nella figura che segue:

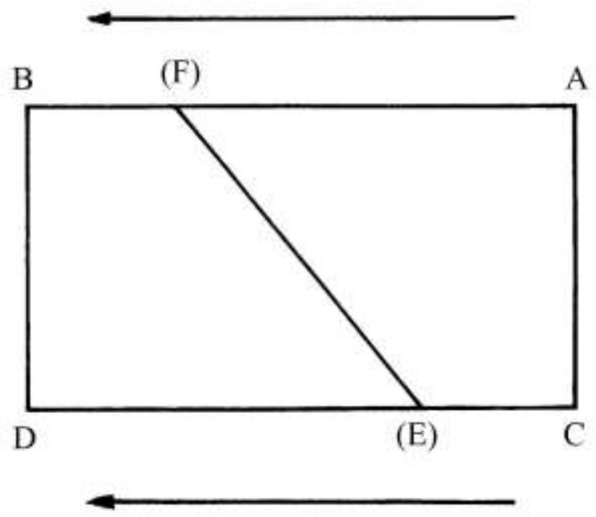


Collegare E con A. Parallelamente a EA tracciare la corda DF.

Fe è il segmento che divide il rettangolo in due trapezi rettangoli con aree uguali.

- APPROFONDIMENTO -

Stando alla lettura degli schemi riprodotti nel testo di Acerbi relativamente a questo problema e al precedente, Abu'l – Wafa avrebbe apposto le lettere ai vertici in modo differmo dal senso orario oppure antiorario:



Se questa caratteristica emerge dai manoscritti del geometra persiano si può ragionevolmente pensare che tale scelta sia conforme alle regole di scrittura dell'arabo: da destra verso sinistra.

- -

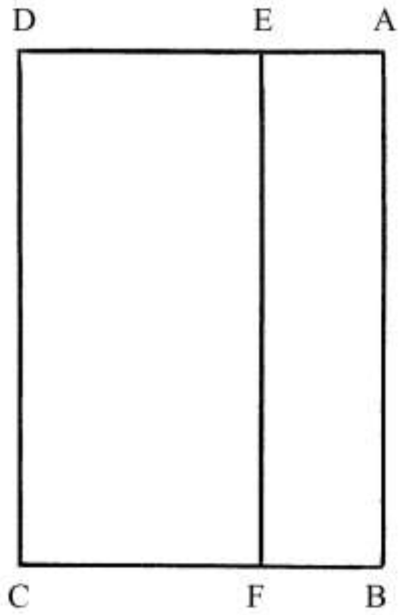
[8] <u>Divisione di un rettangolo</u>

Un rettangolo deve essere diviso in due parti: la più piccola deve avere area uguale a *un terzo*.

ABCD è il rettangolo.

Fissare il punto E sul lato AD a distanze da A e da D come segue:

* AE = 1/3 * AD;
* ED = 2/3 * AD.

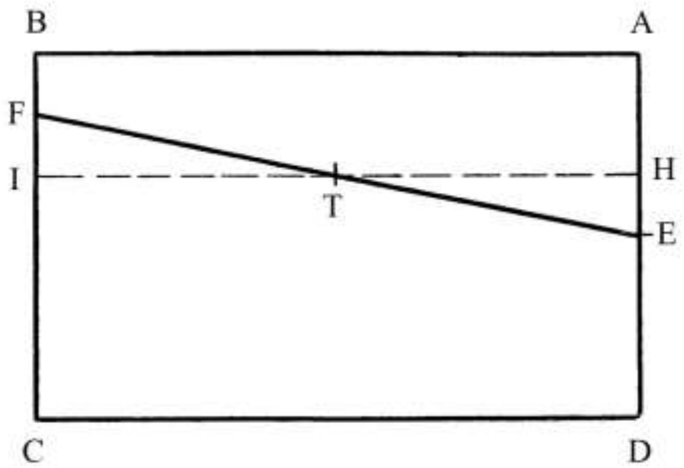


Dal punto E tracciare il segmento EF parallelo ai lati AB e DC.
Il rettangolo ABFE fa area uguale a *un terzo* di quella di ABCD.

[9] Divisione di un rettangolo

La costruzione è una variante della precedente.

Il rettangolo ABCD deve essere diviso, con una corda uscente dal punto E, in due parti una delle quali ha area uguale a *un terzo*.

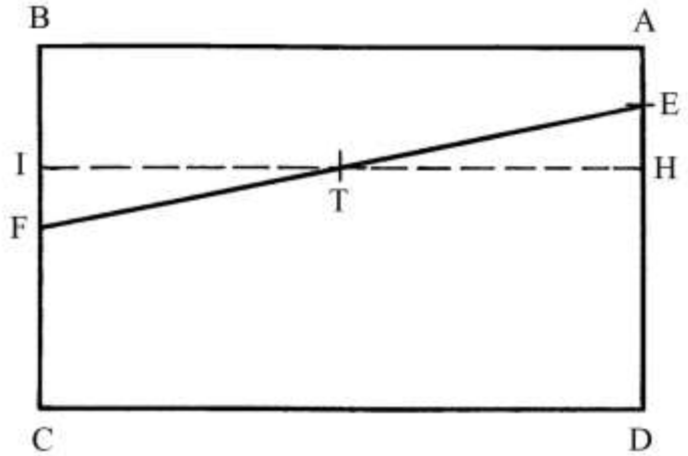


Il punto E non è a distanza di un terzo di AD da A e di due terzi di AD rispetto a D.
Il punto H è a distanza di un terzo di AD rispetto al punto A.
Da H tracciare la parallela HI ai lati AB e CD.
Fissare il punto medio di HI: è T.
Disegnare una corda uscente da E e passante per T: è ETF.
Il trapezio rettangolo ABFE ha area uguale a un terzo di quella di ABCD.

[10] Divisione di un rettangolo

Anche questa costruzione è una variante delle ultime due divisioni.

Il punto E si trova vicino al vertice A.



H è il punto posizionato a distanza di 1/3 * AD rispetto al vertice A.

Tracciare la corda HI parallela ai lati AB e CD. Fissare il punto medio di HI: è T.

Disegnare una corda uscente da E e passante per T: è ETF.

EF divide ABCD in due trapezi rettangoli:

* ABFE che ha area uguale a *un terzo* di quella di ABCD;
* CFED con area uguale a due terzi di quella di ABCD.

[11] Divisione di un rettangolo

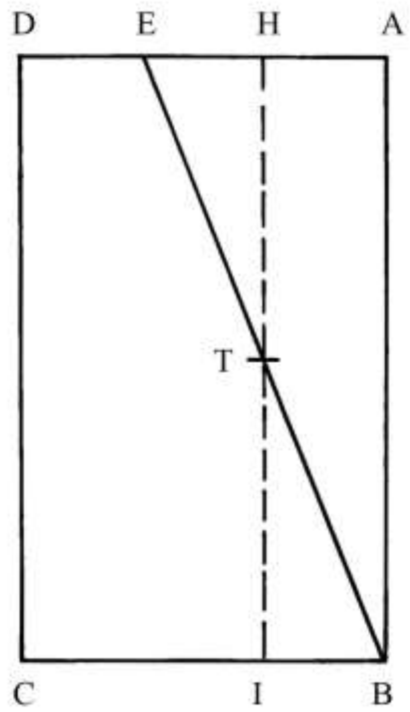
Questa costruzione presenta due varianti della divisione di un rettangolo in due parti: la più piccola deve avere area uguale a un terzo di quella del rettangolo.

In entrambi i casi è tracciata la corda HI, sempre parallela ai lati AB e CD: essa origina due rettangoli:

* ABIH, che ha area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* HICD con area residuale pari a due terzi.

T è il punto medio di HI.

Nel primo caso, il punto E è posizionato in una posizione per la quale la corda passante per E e per T raggiunge il punto B (ciò è dovuto al fatto che DE = EH = HA = 1/3 * DA):

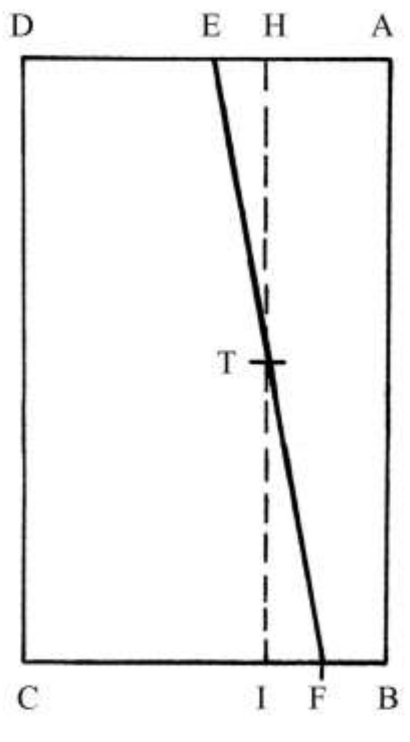


I triangoli rettangoli EHT e TIB hanno uguali dimensioni e identica area.
EB divide ABCD in due poligoni:

* il triangolo EAB, con area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* il trapezio rettangolo CDEB, con area uguale ai due terzi di quella di ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

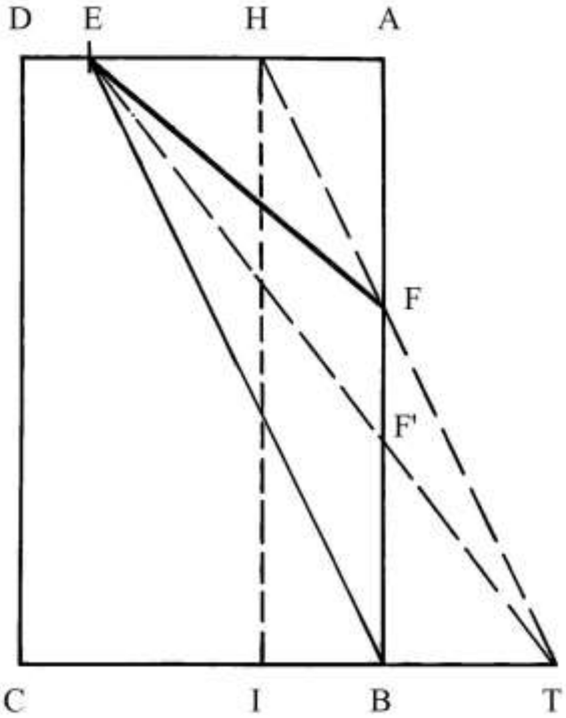
La seconda variante è presentata nello schema che segue:



Tracciare la corda uscente da E e passante per T. ETF divide ABCD in due trapezi rettangoli:
* ABFE ha area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* CDEF con area uguale ai restanti due terzi.

[12] <u>Divisione di un rettangolo</u>

ABCD è il solito rettangolo che deve essere diviso in due parti con una con una corda uscente dal punto E.



HI è la corda che delimita il rettangolo ABIH con area uguale a un terzo di quella di ABCD.

Il problema chiede di dividere il rettangolo dato in due parti, la più piccola delle quali deve avere area uguale a un terzo.

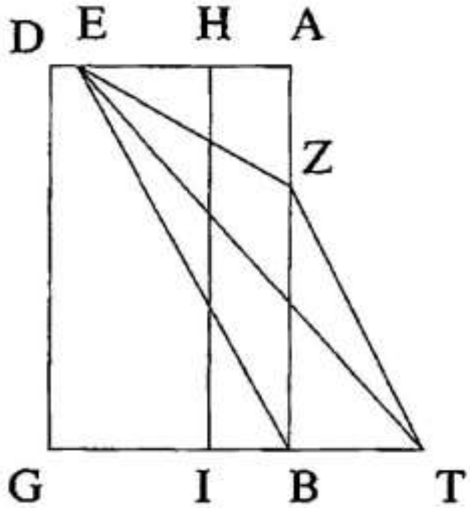
Prolungare verso destra il lato CB. Collegare E con B. Parallelamente a EB tracciare la linea HT che incontra AB in F.

Disegnare EF.

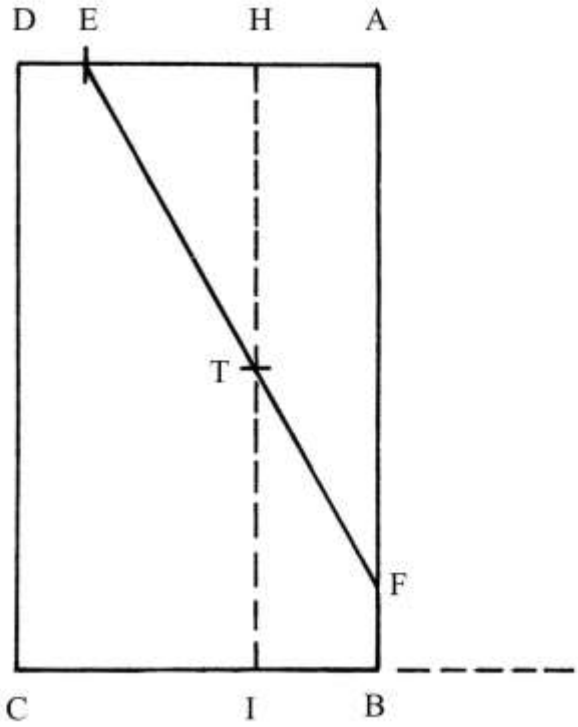
Stando al testo, il triangolo AEF *avrebbe* area uguale a un terzo di quella di ABCD: la soluzione è chiaramente errata perché l'area di AEF è assai inferiore a un terzo.

Pure il triangolo AEF' ha area inferiore a un terzo.

La figura che segue è riprodotta da p. 2416 del testo di Acerbi:



Proponiamo una diversa soluzione.
Determinare il punto medio di HI: è T.
Dal punto E tracciare un segmento passante per T: è ETF.

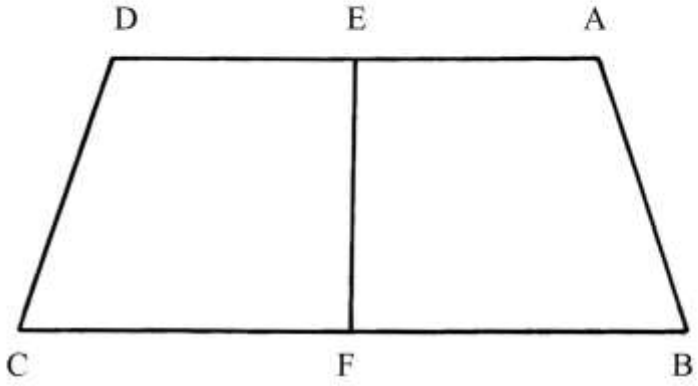


EF divide ABCD in due poligoni:

* il triangolo AEF che ha area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* il pentagono non regolare BCDEF che copre i restanti due terzi dell'area di ABCD.

[13] Divisione di un trapezio in due parti uguali

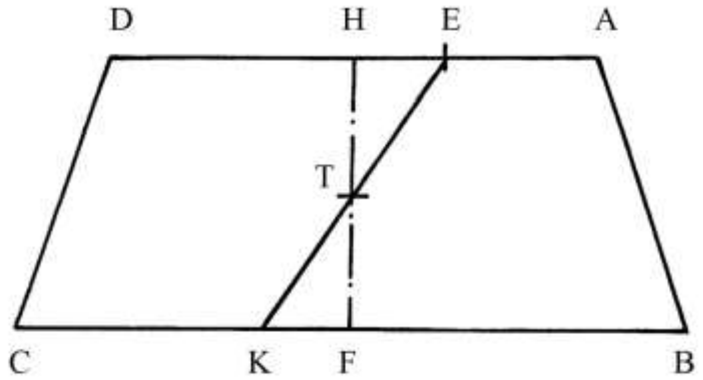
ABCD è un trapezio isoscele che deve essere diviso in due parti uguali con un segmento uscente dal punto medio della base minore, E.



Fissare il punto medio di CB: è F.
Collegare E con F: EF divide ABCD in due trapezi di aree uguali: ABFE e EFCD.

[14] <u>Divisione di un trapezio in due parti uguali</u>

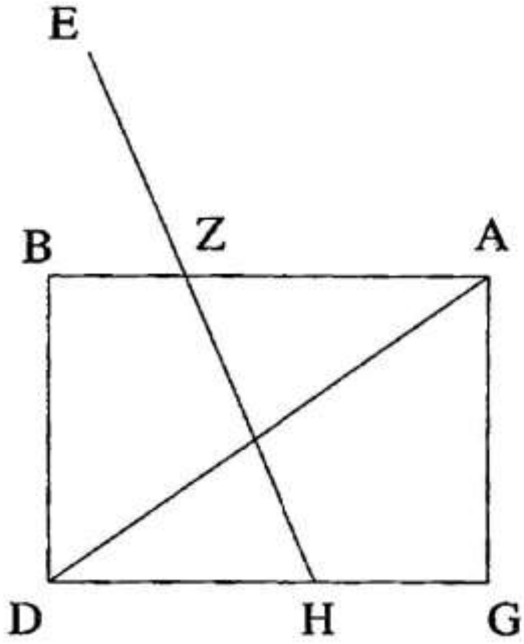
Il trapezio ABCD deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente dal punto E collocato sulla base minore AD: esso non è il suo punto medio.



Fissare i punti medi delle due basi: sono H e F. Collegare H con F.
Determinare il punto medio di HF: è T.
Tracciare una corda uscente da E e passante per T: è ETK.
EK divide ABCD in due trapezi con aree uguali: CDEK e KEAB.

[15] <u>Divisione di un rettangolo in due parti uguali</u>

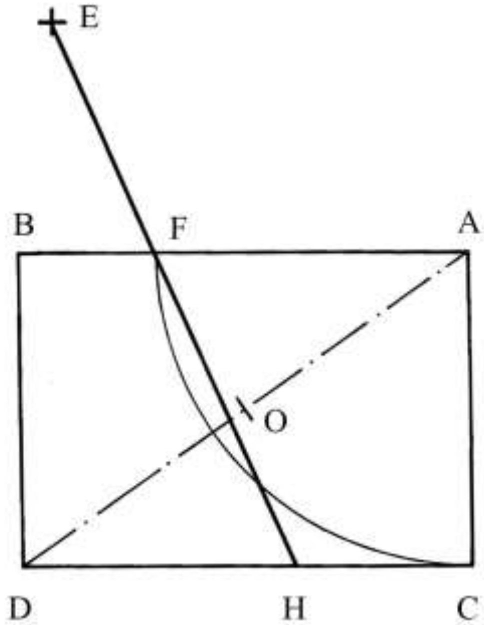
ABDC è un rettangolo che nel testo è definito come un *parallelogramma*: lo schema che segue è riprodotto da p. 2417 del testo di Acerbi.



Come accennato in precedenza, le lettere greche G e Z sono qui quasi sempre convertite nelle loro corrispondenti in alfabeto latino: rispettivamente C e F.

Il rettangolo deve essere diviso in due parti uguali con una linea passante per il punto esterno E.

Stando al testo, deve essere tracciata la diagonale AD: O è il suo punto medio.



Non viene spiegato il metodo usato per stabilire la posizione del punto Z = F.

La linea EH divide il rettangolo in due trapezi rettangoli, DBFH e HFAC, che *non* hanno aree esattamente uguali.

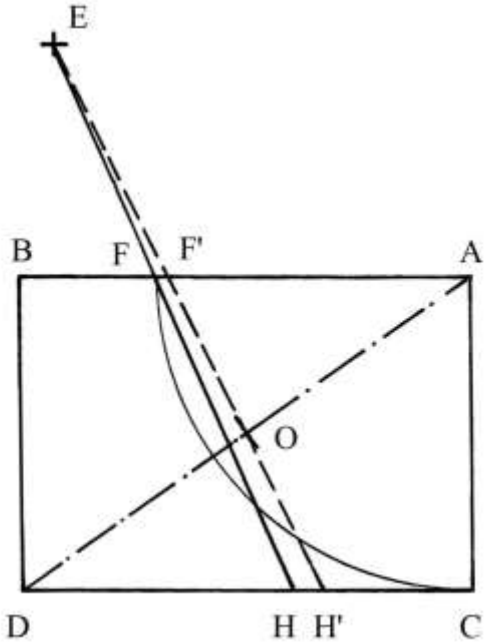
Per determinare la posizione di F presentiamo un'ipotesi che è basata sulla riproduzione delle esatte dimensioni del disegno originale: fare centro in A e con raggio AC tracciare un arco di circonferenza da C fino a tagliare AB in F.

È evidente che il trapezio rettangolo DBFH ha area minore di quella dell'altro trapezio, HFAC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue mostra una soluzione corretta.

Tracciare una linea uscente da E e passante per il punto medio di AD, O: essa taglia AB in F' e CD in H'.

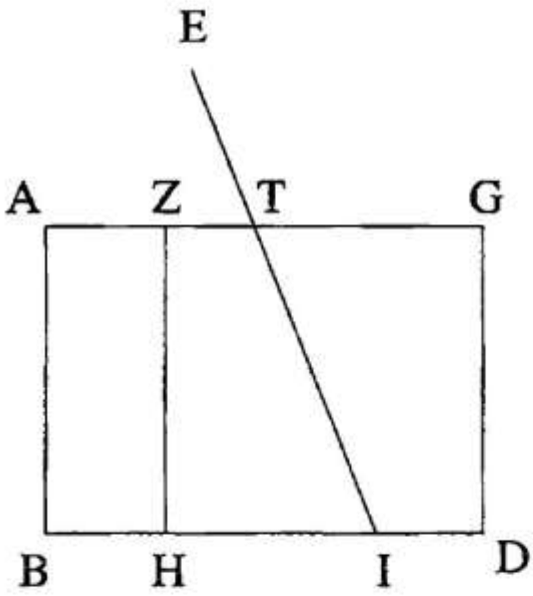


La corda F'H' divide ABCD in due trapezi rettangoli che hanno aree uguali: DBF'H' e H'F'AC.

[16] <u>Divisione di un rettangolo in tre parti uguali</u>

ABDG è un rettangolo che deve essere diviso in tre parti con aree uguali.

La figura originale, qui riprodotta da p. 2418 del testo di Acerbi, è poco precisa:



ABHZ è un rettangolo che ha area uguale a un terzo dell'intero rettangolo:

* AZ = 1/3 * AG;
* BH = 1/3 * BD.

Il quadrilatero HZGD ha area uguale a *due terzi* di quella di ABDG.

Il problema consiste nel dividere il quadrilatero HZGD in due parti uguali.

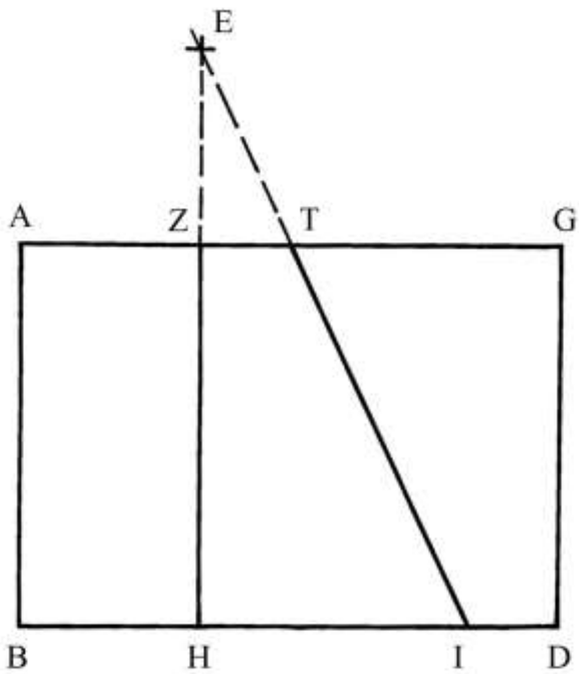
Dal punto esterno E è condotta una linea che taglia i lati orizzontali nei punti T e I.

Nel testo non è fornita alcuna spiegazione riguardo alla determinazione delle posizioni dei punti T e I.

Sempre secondo il testo, i trapezi rettangoli ZTIH e TGDI avrebbero aree uguali.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue mostra un'ipotesi risolutiva del problema.



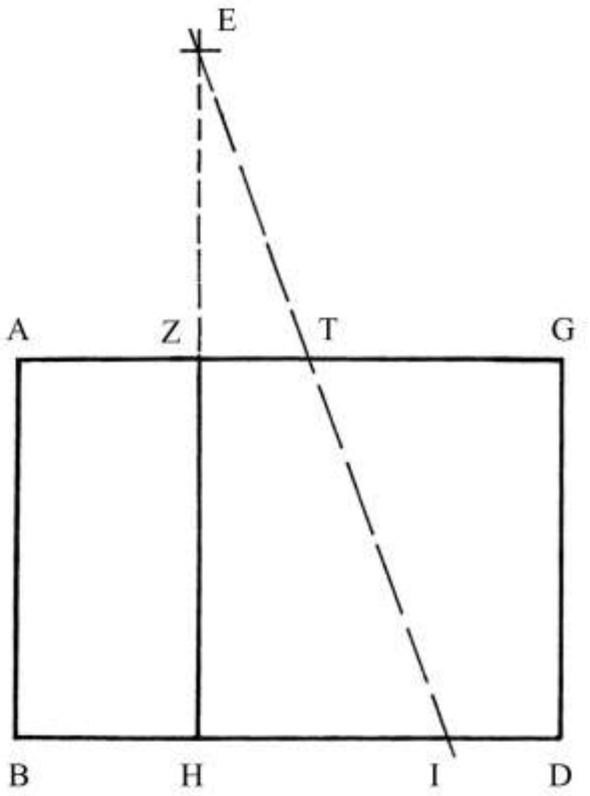
Il punto E è collocato sul prolungamento verso l'alto di HZ.

Per tentativi, tracciare una linea uscente da E che interseca le due basi AG e BD in modo da soddisfare le seguenti uguaglianze:
* ZT = ID;
* TG = HI.

TI divide ZGDH in due trapezi rettangoli che hanno aree uguali.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante dell'ipotesi è presentata nello schema che segue:



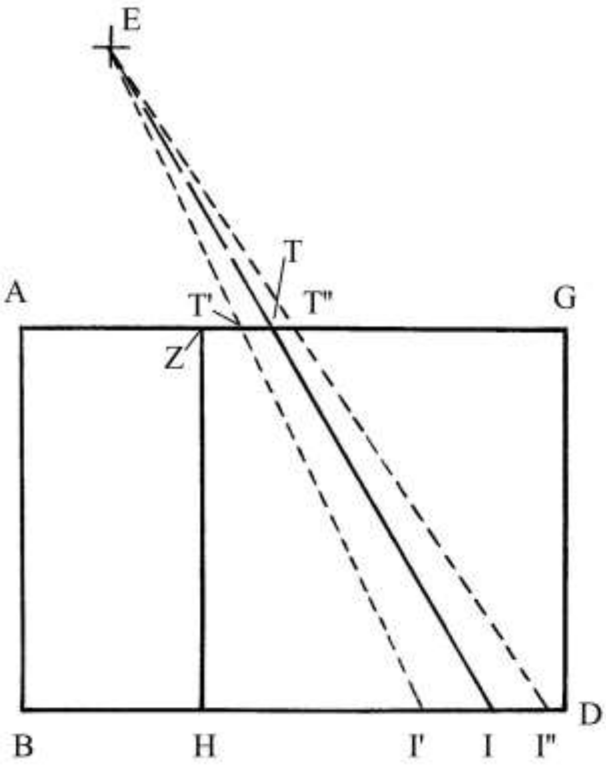
Il punto E è sempre collocato sul prolungamento verso l'alto di HZ.

La corda ETI divide HZGD in due trapezi rettangoli con aree uguali: HZTI e TGDI.

I punti T e I sono posizionati dopo avere, per tentativi, soddisfatte le due uguaglianze:
* ZT = ID;
* TG = HI.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il caso mostrato nella figura che segue reca una variazione: il punto E non è più posizionato in relazione a uno dei segmenti del rettangolo ABDG.



Da E sono tre tracciate tre linee: ET'I', ETI, ET''I''.

La prima e la terza dividono HZGD in due trapezi rettangoli che *non* hanno aree uguali, infatti:

* I'D è più lungo di ZT' e il trapezio T'GDI ha area maggiore di quella di HZT'I';
* ZT'' è più lungo di I''D e il trapezio HZT''I'' ha area maggiore di quella di T''GDI''.

La soluzione corretta è data dalla corda TI che determina le seguenti uguaglianze:

* ZT = ID;
* TG = HI.

I trapezi HZTI e TGDI hanno aree uguali che sono metà di quella di HZGD.

Dato che HZGD ha area uguale a *due terzi* di quella di ABDG, ne consegue che:

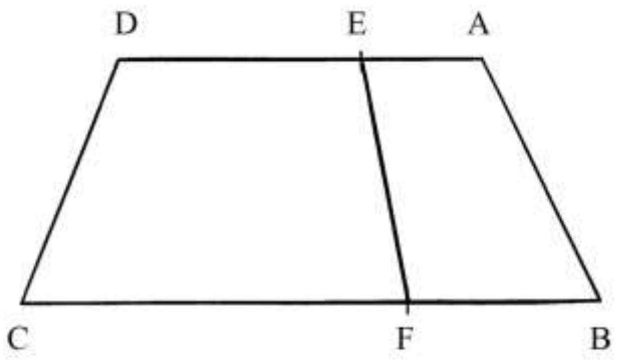
$$A_{HZTI} = A_{TGDI} = A_{HZGD}/2 = (2/3 * A_{ABDG})/2 = 1/3 * A_{ADBG}.$$

La corretta soluzione di questo problema può essere ottenuta per tentativi fino a soddisfare le due uguaglianze relative alle lunghezze dei segmenti ZT, TG, HI e ID.

- -

[17] Divisione di un trapezio in due parti

ABCD è un trapezio che deve essere diviso in due parti: la più piccola ha area uguale a un terzo.



Fissare i punti E e F alle seguenti distanze:

* EA = 1/3 * DA;
* FB = 1/3 * CB.

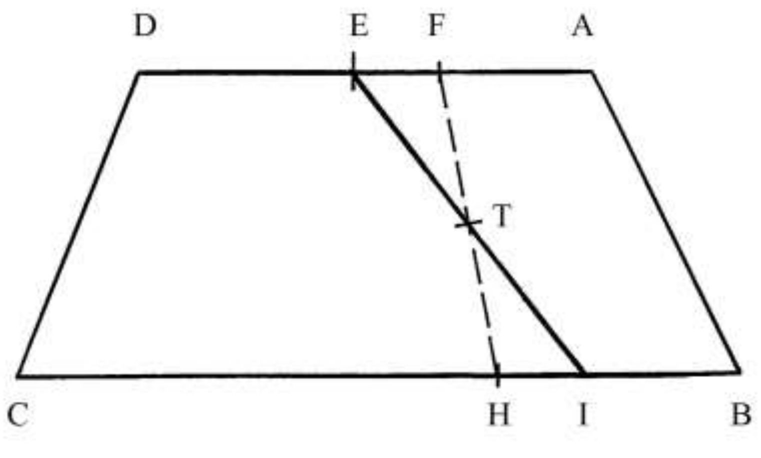
Collegare E con F. La corda EF divide il trapezio in due poligoni:

* il trapezio EABF con area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* il trapezio CDEF con area uguale a due terzi di quella di ABCD.

[18] <u>Divisione di un trapezio in due parti</u>

Il problema è basato sul trapezio del caso precedente. Il quadrilatero deve essere diviso in due parti, la più piccola delle quali deve avere area uguale a un terzo di quella di ABCD.

Il punto E non è posizionato a distanza di *un terzo* dal vertice A.



Stabilire i punti F e H a distanze come segue:

* AF = 1/3 di AD;
* BH = 1/3 di BC.

Collegare F con H e fissare il punto medio di FH: è T.

Tracciare la corda uscente da E e passante per T: è ETI.

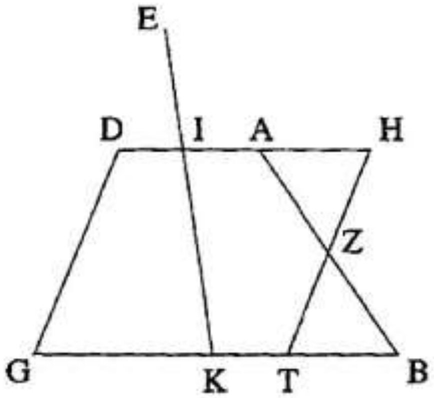
Il segmento EI divide il trapezio ABCD in due poligoni:

* il trapezio EABI con area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* il trapezio CDEI che ha area uguale a due terzi.

[19] <u>Divisione di un trapezio con una linea passante per un punto esterno</u>

ABCD è un trapezio che deve essere diviso in due parti uguali con una linea passante per il punto esterno E.

Lo schema che segue è riprodotto da p. 2419 del testo di Acerbi.



Il punto E *sembra* posizionato sul prolungamento del lato CD.

Fissare il punto medio del lato AB: è F. Prolungare verso destra il lato DA. Per il punto F tracciare la parallela al lato CD: è HT.

Forse, il punto K è il medio di CB.

Disegnare la linea EK: essa taglia il lato DA nel punto I.

Stando al testo originale, IK dividerebbe ABCD in due poligoni di aree uguali:

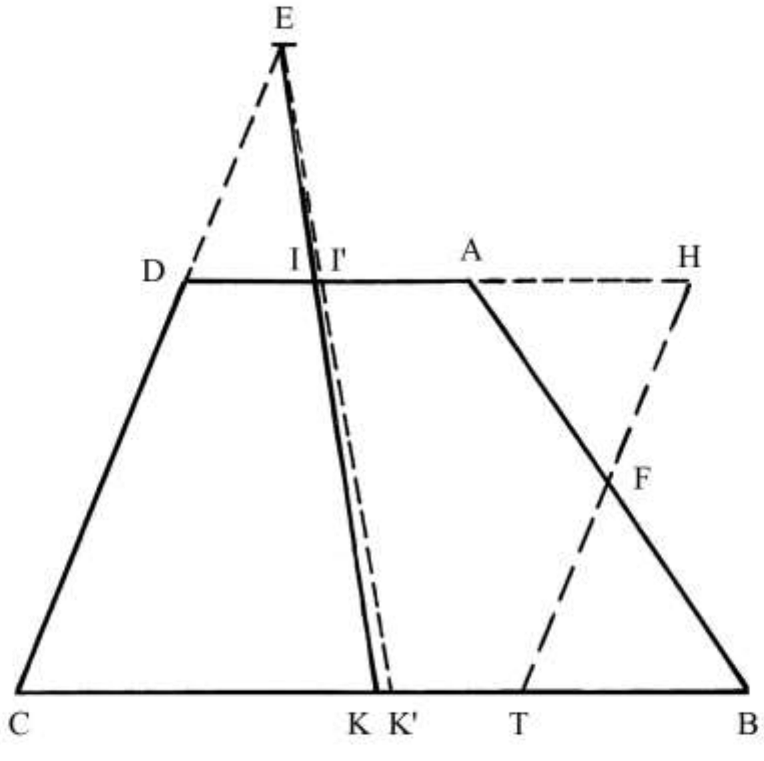
* il trapezio CDIK;
* il trapezio KIAB.

La costruzione non è esatta ma leggermente *approssimata*.

- APPROFONDIMENTO -

Con la precedente costruzione, il segmento DI risulta più corto di quello IA. L'area del trapezio CDIK è leggermente più piccola di quella di KIAB.

Lo schema che segue suggerisce una diversa soluzione che si discosta di poco dalla precedente ed è stata ricavata per tentativi:



Il punto K' è spostato di pochissimo verso destra e non è più il punto medio della base CB.

Anche il punto I' è collocato a destra di I.

La corda I’K’ dovrebbe dividere il trapezio ABCD in due parti pressoché di aree uguali:

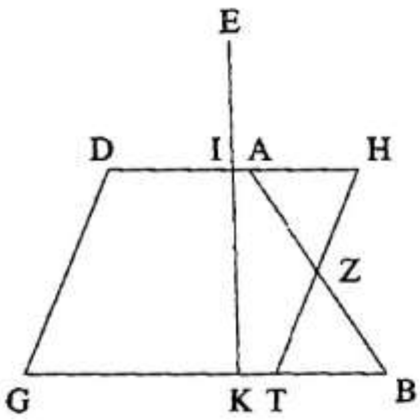
* il trapezio CDI’K’;
* il trapezio K’I’AB.

- -

[20] Divisione di un trapezio in due parti

Il problema propone di dividere in due parti il trapezio ABCD, senza precisare il rapporto fra le aree dei poligoni che sono generati.

Lo schema che segue riproduce l’originale da p. 2419 del testo di Acerbi.

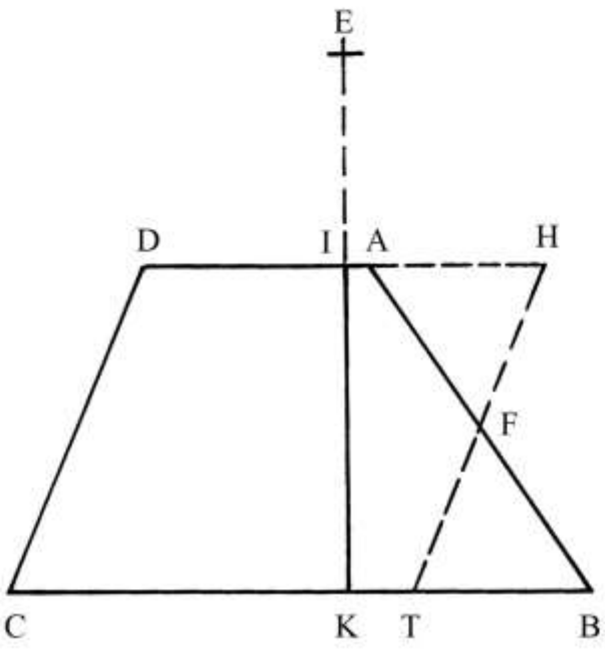


Il trapezio è diviso da una linea uscente dal punto esterno E.

Dalla figura originale, sembra che il segmento EIK sia perpendicolare alle due basi AD e BC.

Prolungare verso destra la base DA.

Fissare il punto medio di AB: è F. Per questo punto tracciare la parallela al lato CD: è HT.



Il punto I è il medio di DH.

ET taglia DA nel punto I.

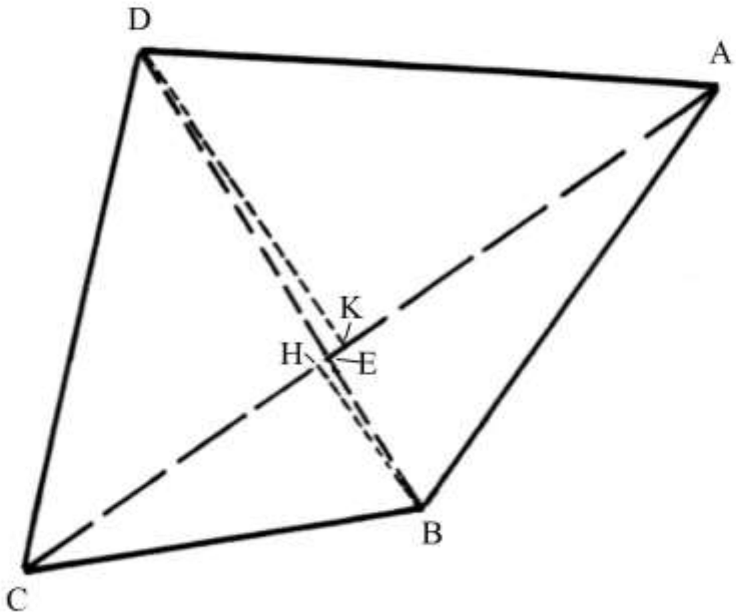
Come già segnalato in precedenza, non è noto il rapporto fra le aree dei due poligoni nei quali IK divide il trapezio. A titolo di ipotesi si può suggerire la seguente ripartizione:

* il trapezio IABK ha area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* il trapezio CDIK con area uguale ai rimanenti due terzi.

[21] <u>Divisione di un quadrilatero in due parti</u>

ABCD è un quadrilatero privo di lati opposti paralleli.

Deve essere diviso in due parti la più piccola delle quali ha area uguale a un terzo.



Tracciare le diagonali AC e BD che si incontrano in E. In questo caso, la diagonale AC divide quella BD in due parti:

* BE = 1/3 * BD;
* ED = 2/3 * BD.

Inoltre, AC divide il quadrilatero in due triangoli che hanno in comune il AC: sono CDA e CBA.

Dai vertici B e D sono condotte le due altezze rispetto a AC: sono BH e DK.

BEH e DEK sono due triangoli rettangoli: BH e DK sono due cateti mentre BE e DE sono le rispettive ipotenuse.

Le altezze BH e DE hanno lunghezze proporzionali alle rispettive ipotenuse:

$$BE^2 = BH^2 + HE^2$$
$$DE^2 = DK^2 + KE^2.$$

Dato che i due triangoli hanno due cateti, HE e KE, di assai piccola lunghezza rispetto a quelle degli altri due cateti (BH e DK) e alle due ipotenuse (BE e DE), è ragionevole accettare la seguente proporzione:

$$BH : DK = BE : DE = 1 : 2.$$

Le aree dei due triangoli sono date da:

$$A_{CBA} = AC * BH/2 \approx AC * BE/2$$
$$A_{CDA} = AC * DK/2 \approx AC * DE/2.$$

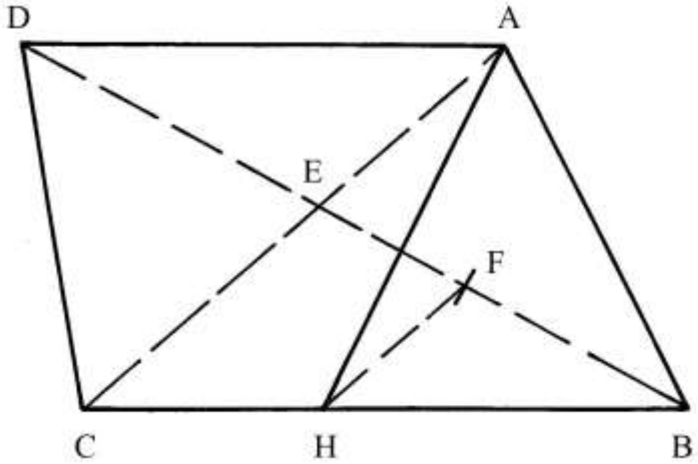
Il rapporto fra le due aree è:

$$A_{CBA}/A_{CDA} = (AC * BE/2)/(AC * DE/2) = BE/DE = 1 : 2.$$

L'area del triangolo CBA è *un terzo* di quella del quadrilatero ABCD.

[22] Divisione di un quadrilatero in due parti

Il quadrilatero ABCD, che è un trapezio scaleno, deve essere diviso in due parti, una delle quali con area uguale a *un terzo*.



La corda che divide deve uscire da un vertice, ad esempio da quello A.

Tracciare le diagonali AC e BD che si incontrano in E: né EA è lunga un terzo di AC, né EB è lungo un terzo di BD.

Sulla diagonale BD fissare il punto F alle seguenti distanze:

* BF = 1/3 * BD;
* FD = 2/3 * BD.

Da F disegnare un segmento parallelo a AC: è FH.

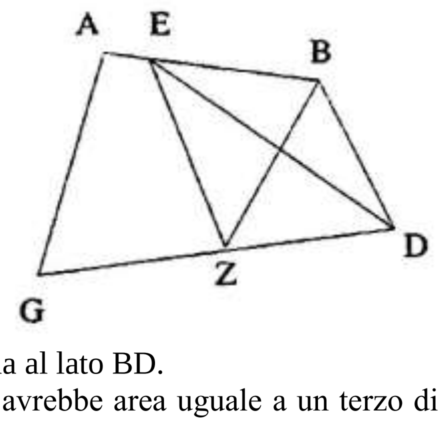
Collegare H con A: AH divide ABCD in due poligoni:

* il triangolo AHB che ha area uguale a un terzo di quella di ABCD;
* il trapezio scaleno CDAH, con area uguale a due terzi.

[23] Divisione di un quadrilatero in due parti

ABCD è un quadrilatero che deve essere diviso in due parti, una delle quali – al solito – con area uguale a un terzo: la corda che lo ripartisce esce dal punto E.

Lo schema che segue è riprodotto da p. 2420 del testo di Fabio Acerbi:

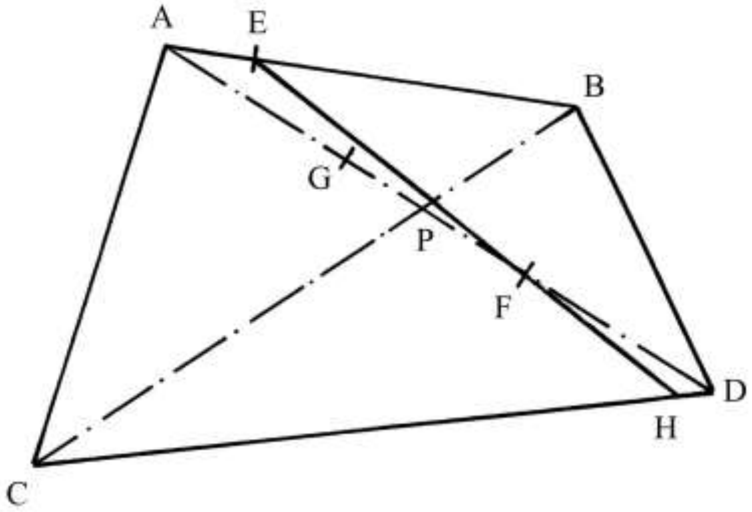


La corda EZ è parallela al lato BD.

Stando al testo, EBD avrebbe area uguale a un terzo di quella dell'intero quadrilatero. Una rapida misura non conferma l'esattezza di questa ipotesi: il triangolo in questione ha area assai più piccola di un terzo di quella di ABCD.

- APPROFONDIMENTO -

Proponiamo due soluzioni semplificate, entrambe assai approssimate.



Tracciare le due diagonali AD e BC che si incontrano in P. E è il punto da cui deve muovere la corda che divide il quadrilatero.

Dividere in tre parti uguali la diagonale AD: sono fissati i punti F e G.

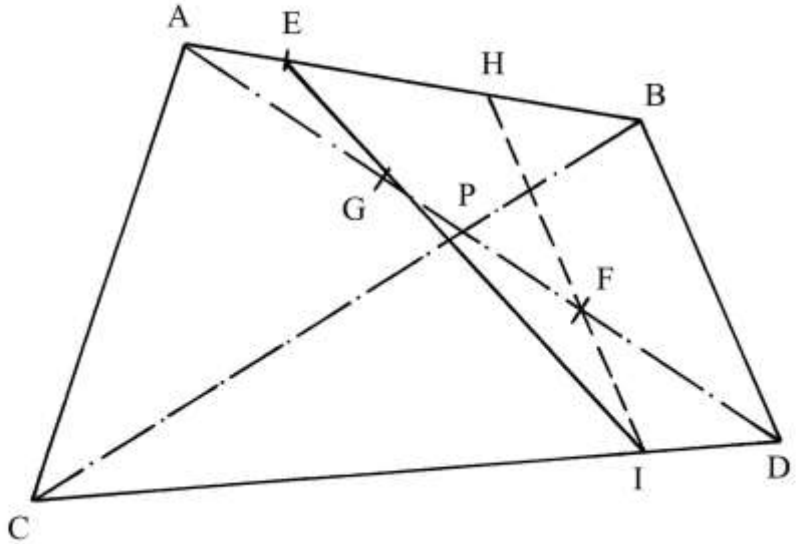
Da E tracciare un segmento passante per F fino a incontrare in H il lato CD.

La corda EFH divide ABCD in due quadrilateri:

* EBDH che ha area *inferiore* a un terzo di quella di ABCD;
* AEHC, con area maggiore dei due terzi di quella di ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda ipotesi è descritta nella figura che segue:



Tracciare le due diagonali AD e BC che si incontrano in P.

Dividere in tre parti uguali la diagonale AD: sono stabiliti i punti F e G.

Per il punto F disegnare la parallela al lato BD: è HI.

Collegare E con I.

La corda EI divide ABCD in due quadrilateri:

*	EBDI, con area *maggiore* di un terzo di quella di ABCD;
*	AEIC, con area minore dei due terzi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'esatta soluzione di questo problema può essere ottenuta solo per tentativi. ABCD deve essere scomposto in quattro triangoli allo scopo di calcolare correttamente la sua area.

Il passo successivo è la divisione per tre dell'area del quadrilatero.

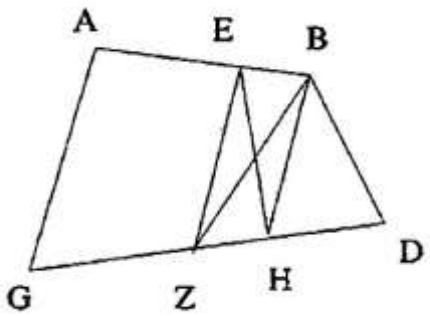
Il poligono con area uguale a un terzo possiede un lato, EB, di cui è nota la lunghezza: per tentavi è possibile costruirlo.

- -

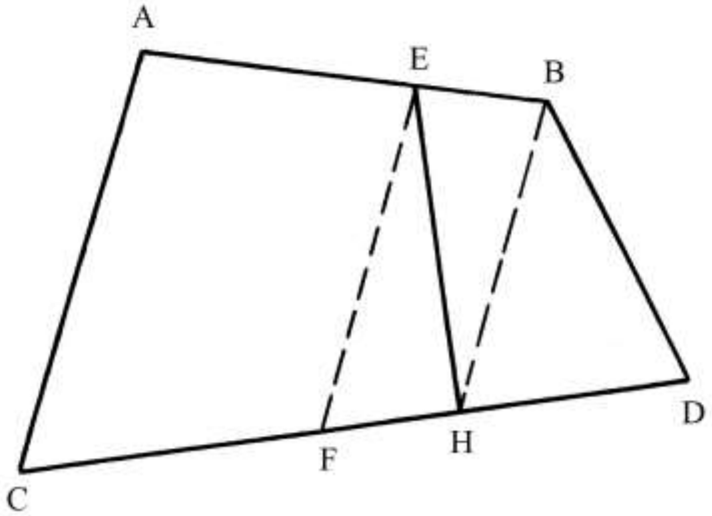
[24]		Divisione di un quadrilatero

ABCD è il consueto quadrilatero che deve essere diviso in due parti, una delle quali con area uguale a un terzo.

Lo schema che segue è riprodotto da p. 2420 del testo di Acerbi.



Ricostruiamo la descrizione della soluzione del problema. Dal punto E deve essere tracciata la corda che stacca il poligono con area uguale a un terzo.



Dai punti E e B disegnare due segmenti paralleli al lato AC: sono EF e BH.

La corda EH divide ABDC in due quadrilateri:

*	EBDH, che *avrebbe* area uguale a un terzo;

* AEHC, con area uguale ai restanti due terzi.

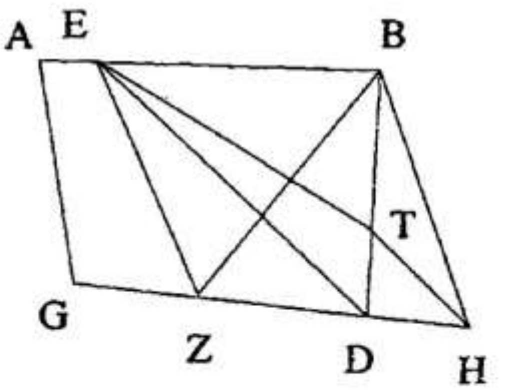
La costruzione è piuttosto approssimata perché l'area di EBDH è inferiore a un terzo di quella di ABDC.

[25] Divisione di un quadrilatero

Senza affermarlo esplicitamente, il problema chiede di dividere il quadrilatero ABDG in due parti una delle quali deve avere area uguale a un terzo: la corda deve uscire dal punto E.

Il problema è apparentemente collegato al precedente.

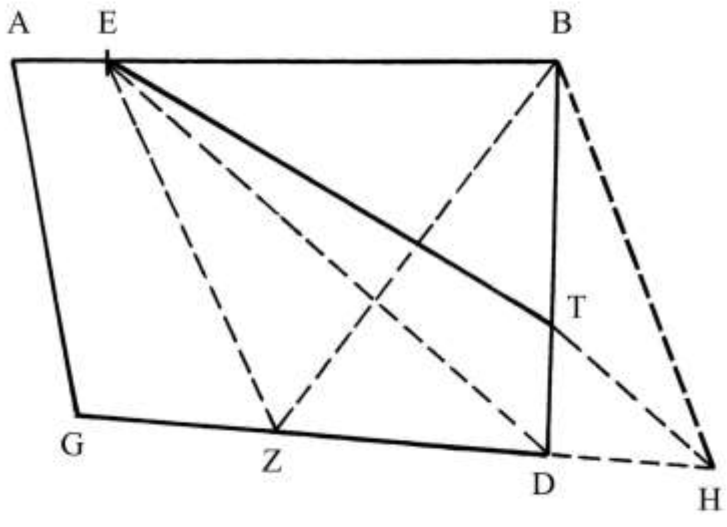
Lo schema che segue è contenuto a p. 2421 del testo di Acerbi:



Prolungare verso destra il lato GD. Collegare E con D e parallelamente a ED disegnare il segmento HT.

Secondo il testo, la corda ET dividerebbe ABDG in due poligoni:

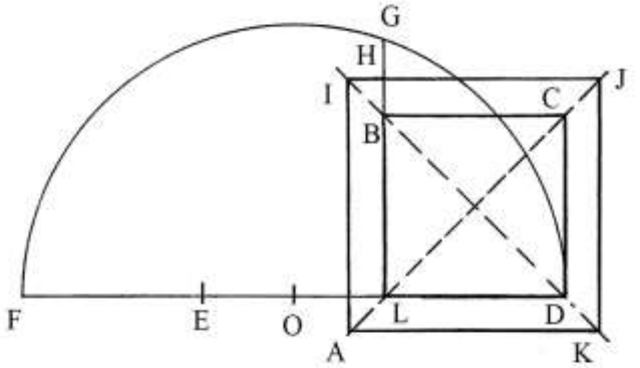
* il triangolo EBT, con area uguale a un terzo;
* il pentagono non regolare AETDG, con area uguale a due terzi.



Non è fornita alcuna informazione sulla posizione e sulla funzione assolta dal punto Z.

[26] Quadrato doppio di un altro

LBCD è un quadrato: deve essere costruito un altro, con area doppia e concentrico al primo.



Prolungare verso l'alto il lato LB e verso sinistra il lato LD.

A partire da A riportare verso sinistra per due volte la lunghezza di LD:

LE = EF = LD.

Determinare il punto medio di FD: è O.

Fare centro in O e con raggio OD = OF tracciare una semicirconferenza da D a F: essa incontra in G il prolungamento di LB.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti, LG ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle di FL e di LD:

FL : LG = LG : LD

2 * LD : LG = LG : LD

$LG^2 = 2 * LD^2$e

$LG = \sqrt{2} * LD$.

L'area A_{LG} di un quadrato che ha lati lunghi quanto AG è:

$A_{LG} = LG^2 = (\sqrt{2} * LD)^2 = 2 * LD^2$.

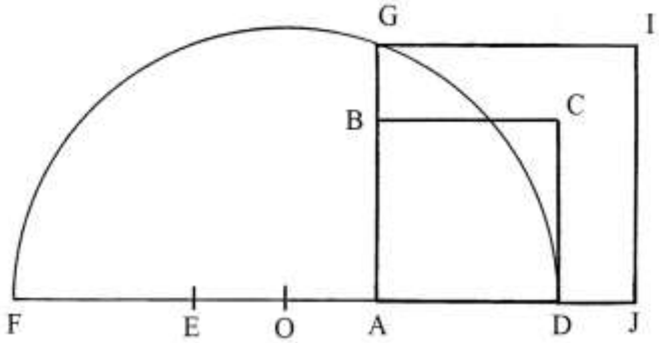
Disegnare le diagonali LC e BD e prolungarle verso l'esterno in entrambe le direzioni.

Abu'l – Wafa ha costruito il quadrato con lati lunghi quanto LG concentrico a quello LBCD.

Fissare il punto medio di BG: è H. Per H tracciare linee parallele ai lati di LBCD fino a incontrare i prolungamenti delle due diagonali: sono stabiliti i punti A, I, J e K, vertici del quadrato con lati lunghi quanto LG e area doppia di quella di LBCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

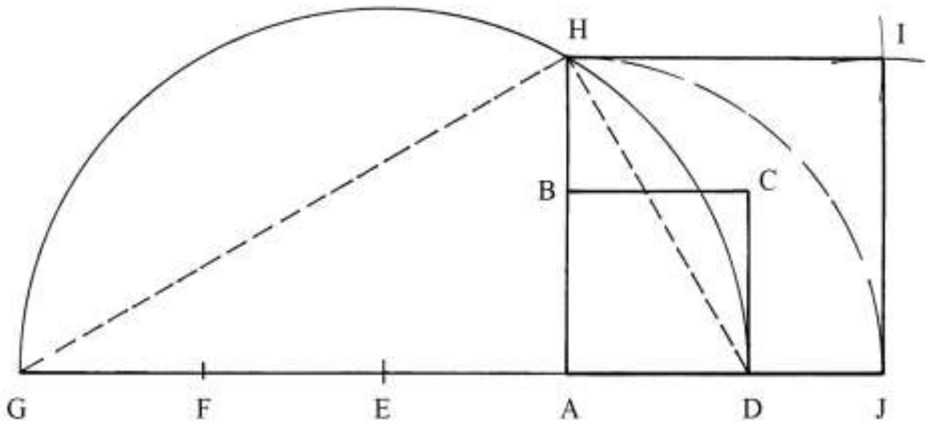
Lo schema che segue riproduce la parte iniziale della precedente costruzione:



AG è il lato del quadrato di area doppia di quella di ABCD: il nuovo poligono regolare è AGIJ.

Nel testo è adombrata la possibilità di sommare al quadrato iniziale aree uguali al doppio, al triplo o a altri multipli (interi) di quella di ABCD.

L’esempio che segue è quello di un quadrato che ha area tripla di quella di ABCD.



Prolungare verso l’alto il lato AB e verso sinistra il lato AD.

Sul prolungamento di AD riportare per *tre* volte la lunghezza di AD:

AE = EF = FG = AD.

Determinare il punto medio di GD, che coincide con E.

Fare centro in E e con raggio EG = ED disegnare una semicirconferenza da G a D: essa taglia in H il prolungamento di AB verso l’alto. AH ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle di GA e di AD:

GA : AH = AH : AD

$AH^2 = GA * AD = (3 * AD) * AD = 3 * AD^2$ e

$AH = \sqrt{3} * AD$.

Il quadrato AHIJ è costruito sul lato AH e la sua area è:

$A_{AHIJ} = AH^2 = (\sqrt{3} * AD)^2 = 3 * AD^2$.

AHIJ ha area tripla di quella di ABCD.

[27] <u>Quadrato metà di un altro</u>

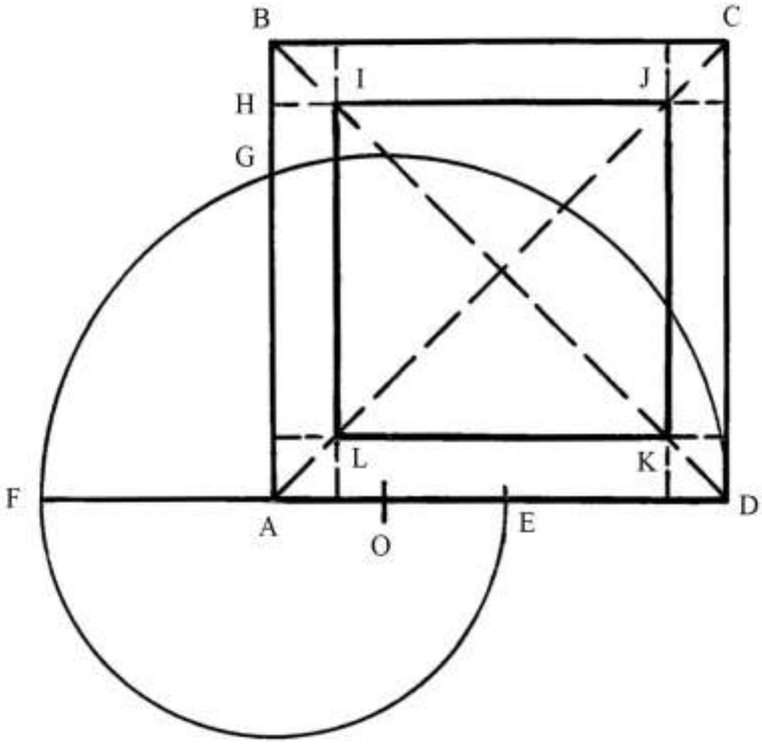
ABCD è un quadrato e deve esserne costruito uno, ad esso concentrico, con area uguale a metà.

Prolungare verso sinistra il lato AD. Determinare il punto medio di AD: è E.

Fare centro in A e con raggio AE tracciare una semicirconferenza da E a F.

Fissare il punto medio di FD: è O.

Fare centro in O e con raggio OF = OD disegnare una semicirconferenza da F a D: essa incontra in G il lato AB.



Il triangolo FGD, non tracciato in figura, è rettangolo e inscritto nel semicerchio di centro O.

GA ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle di FA e di AD:

FA : GA = GA : AD.

Ma FA = AD/2, quindi la proporzione diviene:

AD/2 : GA = GA : AD e

$GA^2 = AD^2/2$ da cui:

$GA = AD/\sqrt{2}$.

GA è la lunghezza del lato del quadrato che ha area metà di quella di ABCD.

Disegnare le diagonali AC e BD.

Determinare il punto medio di BG: è H.

Da H condurre la parallela al lato BC: sono fissati i punti I e J. Da questi ultimi condurre le parallele ai lati BA e CD: sono IL e JK.

LK conclude il quadrato LIJK, che ha area data da:

$A_{LIJK} = GA^2 = (AD/\sqrt{2})^2 = AD^2/2$.

LIJK ha area uguale a metà di quella di ABCD.

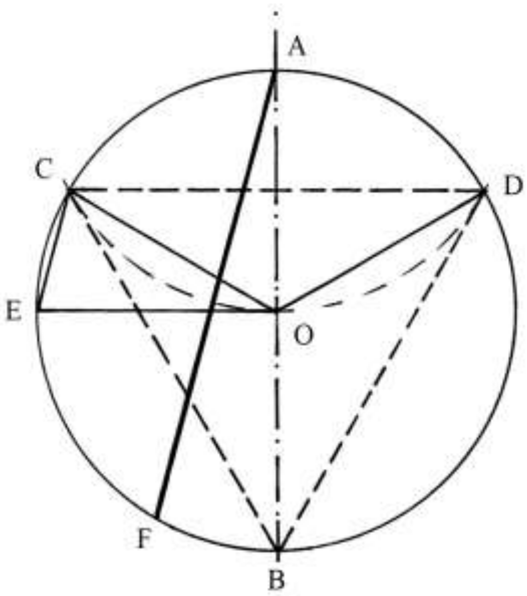
Infine, i due quadrati sono concentrici.

[28] <u>Taglio di un cerchio</u>

Il problema è risolto nella Proposizione 29 di Archibald e sembra sia stato studiato anche dal matematico e astronomo persiano Al – Sijzi (945 – 1020).

È dato un cerchio di centro O dal quale deve essere tagliato un segmento circolare con area uguale a un terzo (o un quarto o altra frazione).

L'esempio mostrato nello schema che segue è relativo al taglio di un terzo.



Lo schema originale è qui modificato e ampliato per renderlo più comprensibile.

O è il centro del cerchio di raggio OA. AB è il diametro verticale.

Con centro in A e raggio AO = OA, fissare i punti C e D: B, C e D sono i vertici del triangolo equilatero inscritto BCD.

Tracciare i raggi OC, OD e OE.

Collegare C con E: CE è una *corda*.

Parallelamente a CE, dal punto A disegnare una seconda corda: è AF.

Il segmento circolare ACEF ha area uguale a *un terzo* di quella del cerchio.

[29] Divisione in due parti di un settore circolare

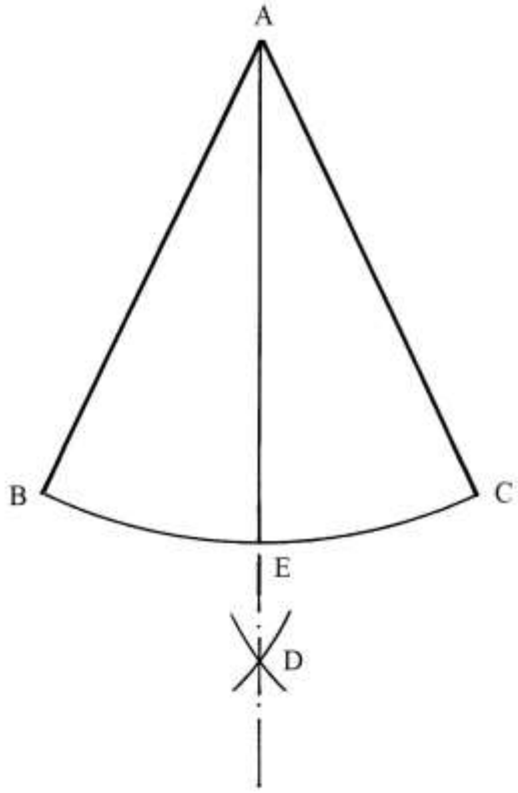
ABC è un settore circolare ricavato da un cerchio di centro A e raggi AB = AC.

Deve essere diviso a metà con un raggio o con una semiretta uscente da A.

Fare centro in B e in C e, con raggio a piacere, tracciare due archi che si incontrano in D.

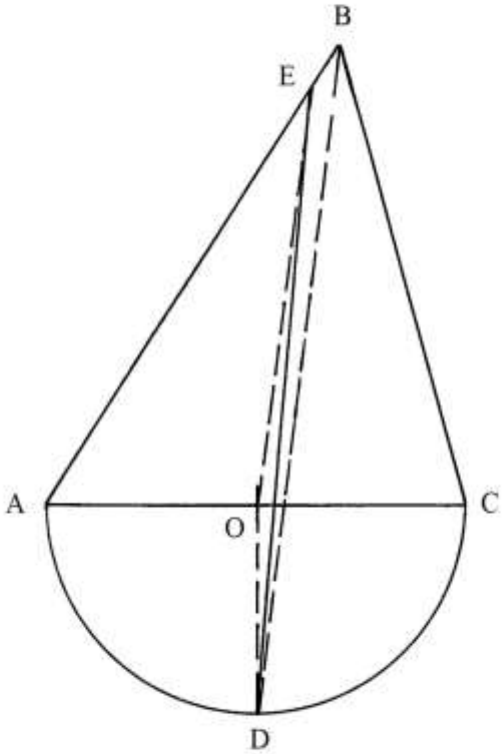
Disegnare la semiretta uscente da A e passante per D: essa taglia l'arco BC nel punto E.

Il raggio AE divide in due parti con aree uguali ABC: sono i settori circolari ABE e AEC.



[30] <u>Divisione in due parti uguali di una figura circolare</u>

La figura è formata da un triangolo scaleno e da un segmento circolare che è un semicerchio:



La base AC del triangolo ABC è il diametro del semicerchio.

Il problema è oggetto della Proposizione 28 del testo di Archibald.

O è il centro del diametro.

Tracciare il raggio OD perpendicolare a AC.

Collegare B con D. Parallelamente a BD disegnare un segmento da O fino a incontrare in E il lato AB: è OE.

Il segmento ED divide questa complessa figura in due parti con aree uguali:

* DAE;
* DEBC.

LE COSTRUZIONI DI SAVASORDA

Il Capitolo III del trattato geometrico di Savasorda è riservato alla divisione di alcune categorie di figure piane.

Qui è usata la traduzione in catalano pubblicata nel 1931 da J.(osep Maria) Millàs I Vallicrosa, citata in bibliografia.

CAPITOLO III

Divisione delle figure piane

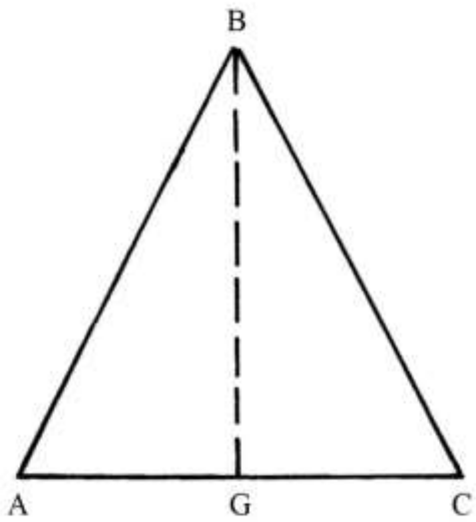
Il capitolo affronta nell'ordine la divisione dei seguenti tipi di figure piane:

* triangolari;
* quadrangolari;
* altre forme.

DIVISIONE DEI TRIANGOLI

Divisione di un terreno a forma di triangolo

Un terreno triangolare deve essere diviso in *due* parti di uguale superficie fra due soci o due fratelli, lasciando il vertice B in comune:

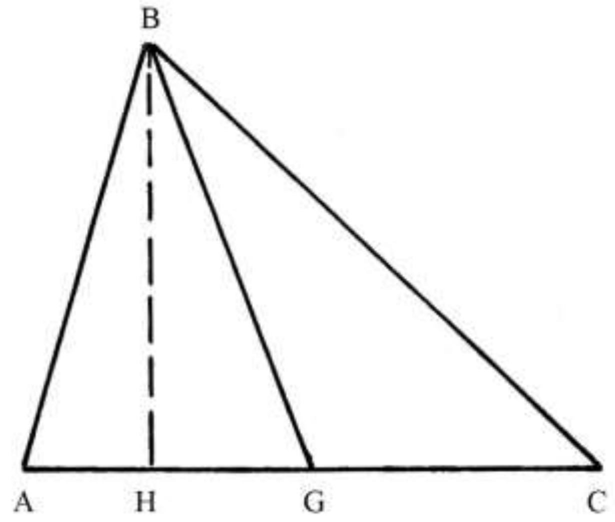


È sufficiente dividere in due parti uguali la base AC e tracciare la *mediana* BG: nell'esempio della figura, ABC è *isoscele* e BG è sia una mediana che l'*altezza* relativa alla base AC.

I triangoli ABG e GBC hanno uguale superficie.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

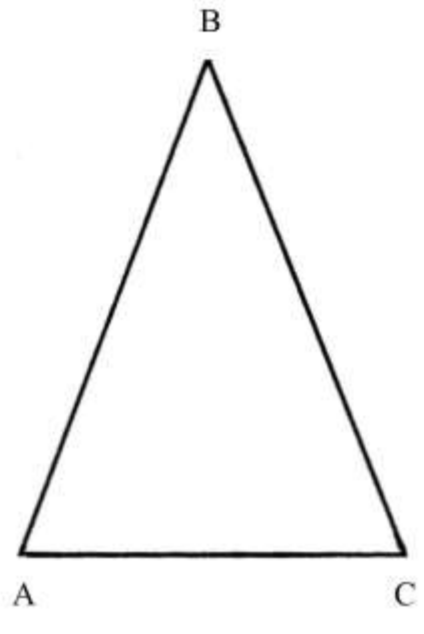
La regola vale per qualsiasi tipo di triangolo, anche *scaleno*:



Il punto G divide la base AC in due parti uguali.
I triangoli ABG e GBC hanno la stessa altezza, BH, e uguale superficie.

Divisione di un triangolo con un segmento parallelo a un lato

Il terreno da dividere in parti uguali fra due soci o eredi ha la forma descritta nella figura che segue. Un socio è interessato alla regione presso il vertice B e l'altro a quella vicina alla base AC:



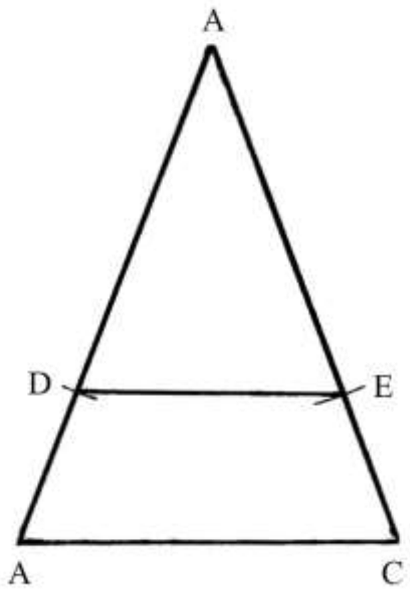
In questo caso il triangolo è *isoscele*.

Il triangolo deve essere diviso in due parti di uguale superficie con un segmento parallelo a AC che è l'unica soluzione in grado di garantire le contrapposte esigenze dei due soci.

Il metodo proposto da Savasorda è il seguente fissare il punto D in modo che

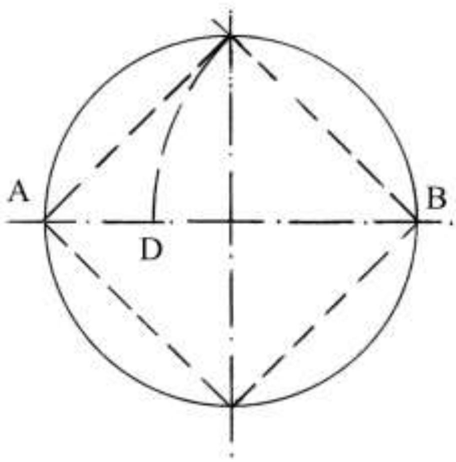
$DB^2 = AB^2/2$ da cui:

$DB = AB/\sqrt{2} = AB * (\sqrt{2})/2$.



Savasorda non fornì alcuna ulteriore spiegazione riguardo la costruzione per via geometrica della lunghezza di DB: esso è il lato di un quadrato che ha la diagonale lunga AB.

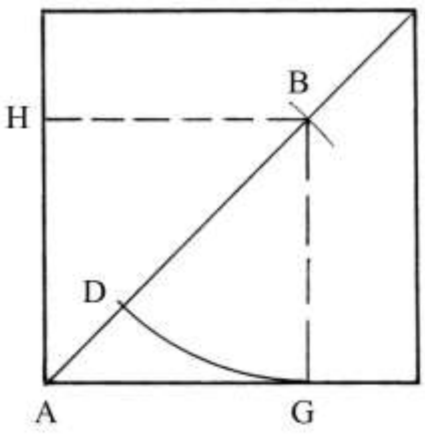
Possiamo ricavare la lunghezza del segmento DB con almeno due costruzioni, la *prima* delle quali è presentata nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza con diametro orizzontale lungo quanto AB e inscrivervi un quadrato. Facendo centro nel punto B con raggio uguale al lato del quadrato è tracciato un arco che taglia AB nel punto D: la lunghezza dei lati del quadrato inscritto è quanto DB.

Riportando la lunghezza di BD sul triangolo viene fissato il punto D sul lato AB.

La lunghezza di DB può essere ricavata con una *seconda* costruzione:



Disegnare un quadrato con lati lunghi a piacere e tracciare la diagonale a partire dal vertice A: su di essa riportare la lunghezza AB e costruire il quadrato AGBH. Fare centro in B con raggio BG e disegnare un arco da G fino a incontrare la diagonale nel punto D.

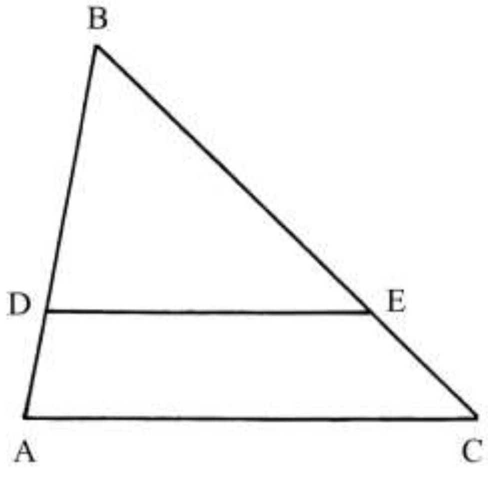
Dato che il triangolo ABC è isoscele, la lunghezza di BE è uguale a quella di BD.

Il segmento DE è parallelo al lato AC: l'area del triangolo ADE è uguale a quella del trapezio ADEC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda passò a un esempio numerico; i dati forniti mostravano un triangolo scaleno di cui fornì solo le lunghezze dei due lati obliqui: AB = 7 e BC = 10 cubiti. Tralasciò la lunghezza della base AC.

Il triangolo è *scaleno* e esistono infiniti triangoli con i due lati obliqui lunghi 7 e 10: per semplificare l'esposizione, il lato AC è stato disegnato con lunghezza proporzionale a 8,5.



Savasorda aveva approssimato la radice quadrata di 2 con l'espressione:

$\sqrt{2} \approx 1 + 2/5 + 1/70.$

La lunghezza di DB è data da:

$DB = AB * (\sqrt{2})/2 = 7/2 * (1 + 2/5 + 1/7) = 3,5 + 7/5 + 1/20 = 3,5 + 1,4 + 0,05 =$
$= 4,95 = (5 – 1/10)$ cubiti.

A sua volta, la lunghezza di AD è:

AD = AB – DB = 7 – (5 – 1/20) = (2 + 1/20) cubiti.

La lunghezza di BE è data da:
BE = BC/√2 = BC * √(2)/2 = 10/2 * (1 + 2/5 + 1/70) = (5 + 2 + 1/14) = (7 + 1/14) cubiti.

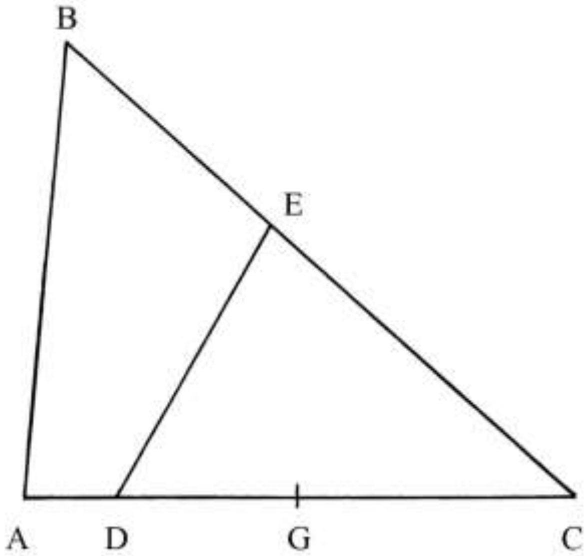
Infine, la lunghezza di EC è:
EC = BC – BE = 10 – (7 + 1/14) = (3 – 1/14) cubiti.

Il segmento DE è parallelo alla base AC perché i segmenti BD e BE sono scorciati nella stessa proporzione rispetto ai lati ai quali appartengono:
DB : AB = EB : CD = (√2)/2 : 1 = √2 : 2.

I triangoli ABC e DBE sono *simili*. Il triangolo DBE ha la stessa superficie del trapezio ADEC.

Triangolo diviso con un segmento passante per un punto

Il triangolo ABC deve essere diviso in due parti di uguale superficie con un segmento che ha origine in un punto di un lato, D posizionato su AC:



Le dimensioni del triangolo, scaleno, sono: AB = 10, BC = 15 e AC = 12 cubiti.
Il tratto AD misura 2 cubiti.

Nota: la figura 91 a pagina 98 del testo di Savasorda è disegnata del tutto fuori scala, come si può vedere dalla sua riproduzione:

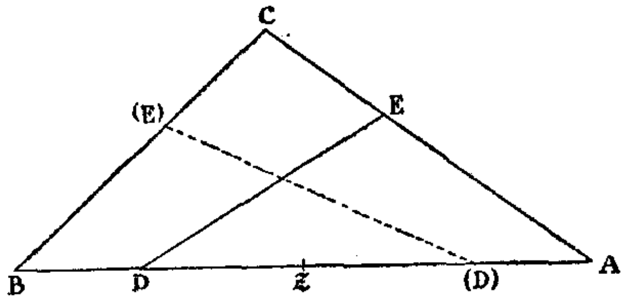


Fig. 91

Secondo il testo, le lunghezze dei tre lati sarebbero BC = 10, CA = 15 e BA = 12. Infine BD sarebbe lungo 2 cubiti.

Torniamo al nostro triangolo ABC: G è il punto medio della base AC. Il segmento DG misura:

DG = AC/2 – AD = 12/2 – 2 = 4 cubiti.

Savasorda calcolò il rapporto fra DG e DC:

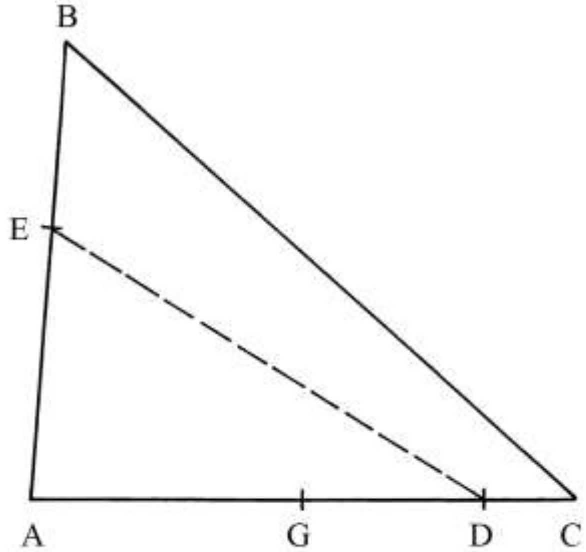
DG : DC = DG : (AC – AD) = 4 : (12 – 2) = 4 : 10 = 2 : 5.

Ecco i passaggi della procedura impiegata da Savasorda:

* determinare i 2/5 della lunghezza del lato BC: 2/5 * BC = 2/5 * 15 = 6 cubiti;
* a partire dal vertice B fissare la lunghezza BE = 6 cubiti;
* tracciare il segmento DE: il quadrilatero ABED e il triangolo DEC hanno uguale superficie pari a metà di quella di ABC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda propose una variante di questa costruzione, stabilendo il punto D a distanza di 2 cubiti da C:



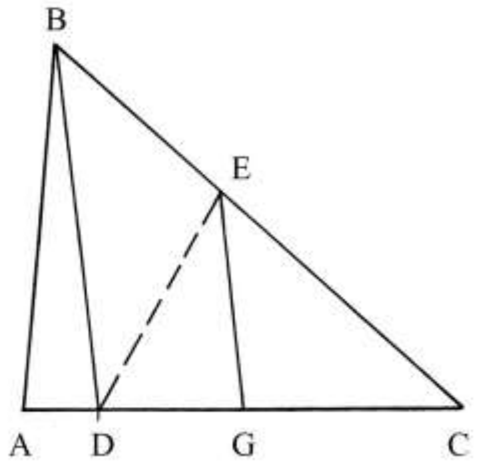
Ecco i passi della procedura applicata:

* calcolare i 2/5 della lunghezza di AB: 2/5 * AB = 2/5 * 10 = 4 cubiti;
* fissare il punto E a distanza 4 cubiti dal vertice B.

Il segmento ED divide ABC in due parti di uguale superficie: il triangolo AED e il quadrilatero EBCD.

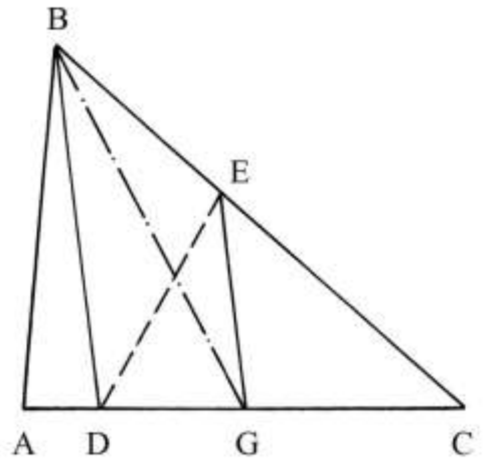
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per verificare la correttezza del suo metodo, Savasorda utilizzò un'altra costruzione:

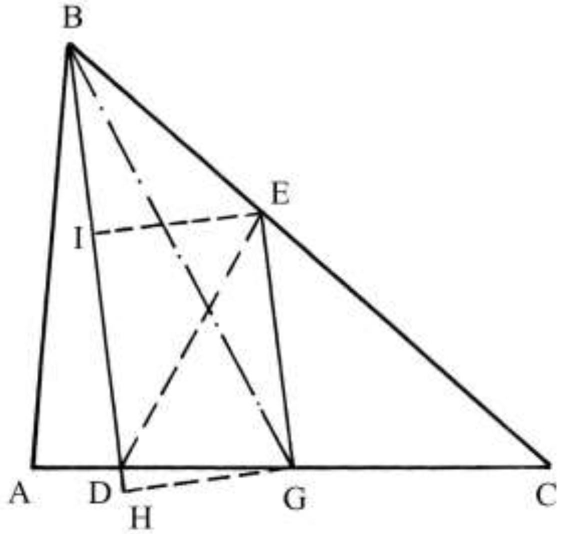


Tracciare la corda DB e, parallelamente ad essa, dal punto medio G condurre un segmento fino a incontrare il lato BC in un punto, che è lo stesso E ricavato con una precedente costruzione.

Savasorda fece un ulteriore passo e tracciò la corda BG:



I triangoli BDG e BDE sono di uguale superficie perché hanno in comune un lato (BD) e uguali altezze relative allo stesso BD, come spiega la figura che segue:



EI è l'altezza del triangolo BDE e GH lo è del triangolo BDG: esse sono fra loro parallele e hanno uguale lunghezza.

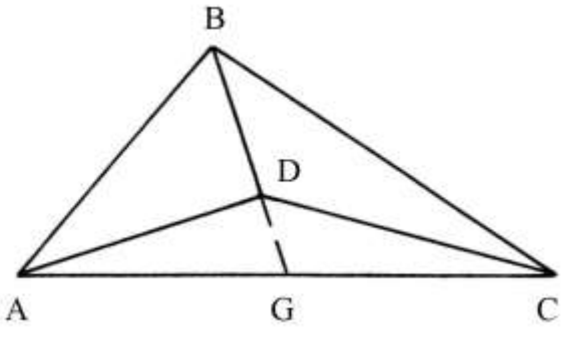
Uno dei due triangoli uguali (ad esempio BDG) viene aggiunto al triangolo ABD: il triangolo risultante, ABG, ha la stessa superficie del trapezio BADE.

Ma il triangolo ABG è la metà di quello ABC: la base del primo (AG) è la metà di quella del secondo (AC) ed hanno uguale altezza. Ne consegue che il trapezio ABED ha la stessa area di ABG.

<u>Triangolo da dividere in tre parti uguali</u>

Il triangolo ABC deve essere diviso in tre parti uguali, con una condizione: ciascun comproprietario chiede un lato del triangolo.

Dividere il lato AC in due parti uguali: G è il suo punto medio.



Tracciare la *mediana* BG e fissarvi il punto D a distanza

DG = 1/3 * BG.

La mediana BG divide ABC in due triangoli di uguale superficie: ABG e GBC.

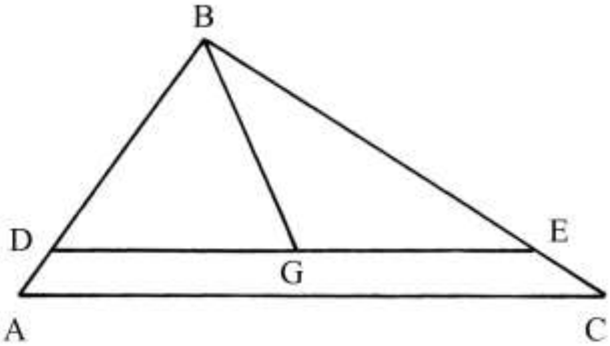
Collegare il punto D con i vertici A e C: i triangoli ABD, BCD e ADC hanno uguale superficie.

Tutti e tre i comproprietari hanno ottenuto una superficie che è delimitata da un intero lato del triangolo.

Nella realtà, nel punto D potrebbe essere collocato un pozzo per attingere acqua al quale devono poter accedere i tre proprietari.

Triangolo da dividere con un segmento parallelo a un lato

ABC è il consueto triangolo da dividere in tre parti uguali. Un proprietario desidera una parte confinante con il lato AC e gli altri due chiedono di spartirsi la superficie rimanente con una linea uscente dal vertice opposto, B:



Occorre determinare la lunghezza di AD e di EC e fissare il punto medio del segmento DE.

Il triangolo DBE è *simile* a quello ABC e ha area uguale a 2/3:

$A_{DBE} = 2/3 * A_{ABC}$ e viceversa

$A_{ABC} = 3/2 * A_{DBE}$.

Essendo i due triangoli fra loro simili, il rapporto 2/3 vale anche fra i quadrati delle lunghezze dei loro corrispondenti lati: l'area di un triangolo è il semiprodotto di due lunghezze (lato e altezza relativa):

Risulta così:

$A_{DBE} : A_{ABC} = DB^2 : AB^2 = BE^2 : BC^2 = DE^2 : AC^2 = 2 : 3$

Risolvendo si ottiene:

$DB : AB = BE : BC = DE : AC = \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Ne consegue:

$DB = AB * \sqrt{(2/3)}$.

Nel testo in catalano, a pagina 100, la figura 94 descrive il problema oggetto di questo paragrafo:

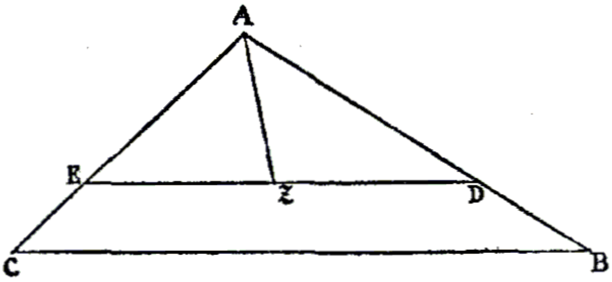


Fig. 94

Il testo contiene un errore riconoscibile con un semplice confronto con la figura originale: esso indica in 6 cubiti la lunghezza di AB (che visibilmente è più lungo) e in 9 cubiti quella del lato obliquo più corto, AC; inoltre non fornisce la lunghezza del lato orizzontale BC.

Nella figura inserita all'inizio di questo paragrafo le lunghezze sono le seguenti: AB = 6 , BC = 9 e AC = 11. *Le lettere usate nelle due figure sono differenti*.

È ipotizzabile un errore di Savasorda, del copista o dei traduttori?

La procedura seguita da Savasorda si propone di dividere il lato AB in due parti (AD e DB) in modo che il quadrato di AB valga 1,5 volte il quadrato della parte maggiore, DB.

Ecco i passi della procedura:

* calcolare i 5/6 di 60: $5/6 * 60 = 50$;
* calcolare la differenza fra 60 e il risultato precedente: $60 – 50 = 10$;
* calcolare la *decima* parte dell'ultima differenza: $1/10 * 10 = 1$;
* detrarre questo quoziente dal primo risultato parziale: $50 – 1 = 49$;
* calcolare il quadrato della frazione 49/60: $(49/60)^2 = 2401/3600$;
* sottrarre 1/3600 dalla precedente frazione: $2401/3600 – 1/3600 = 2400/3600 = 2/3$.

L'ultimo risultato, la frazione 2/3, riporta al rapporto fra i quadrati di DB e AB.

Il quadrato della lunghezza del lato AB è: $AB^2 = 6^2 = 36$. Questo valore è 1,5 volte quello del quadrato di DB:

$$DB^2 = AB^2/1,5 = (2 * AB^2)/3 = (2 * 6^2)/3 = 24.$$

La radice quadrata di 24 è:

$$\sqrt{24} \approx 4,8989 \approx 4,9 = (5 – 1/10) = DB.$$

In modo simile viene ricavata la lunghezza di BE; il quadrato di AC è: $AC^2 = 9^2 = 81$.

Dividere questo quadrato per 1,5:

$$BE^2 = AC^2/1,5 = (2 * AC^2)/3 = (2 * 9^2)/3 = 54.$$

.

La radice quadrata di 54 è:

$$\sqrt{54} \approx 7,348 \approx 7 + 3/10 + 1/20 = BE.$$

Disegnare DE, segmento parallelo alla base AC. Stabilire il punto medio G e collegarlo al vertice B.

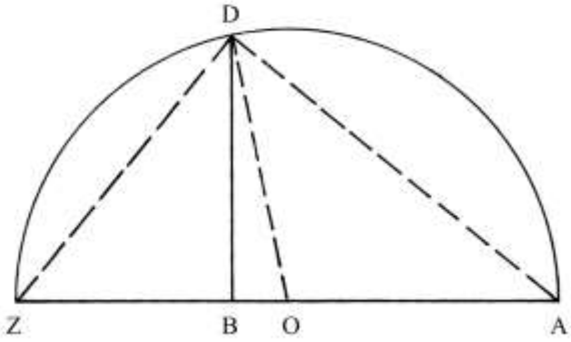
Il triangolo ABC è ora diviso in *tre* parti di uguale superficie: il trapezio ADEC e i triangoli DBG e GBE.

Savasorda non fornì alcuna spiegazione sulla sua procedura che peraltro fornisce un risultato corretto.

Savasorda aveva a disposizione delle tabelle con i quadrati e le radici quadrate dei primi numeri? Probabilmente sì.

- APPROFONDIMENTO -

Per calcolare con la massima precisione il valore di $\sqrt{(2/3)}$ occorre ricorrere a un metodo geometrico che elimina i calcoli relativi all'estrazione della radice quadrata.



Tracciare una linea orizzontale e riportarvi la lunghezza del lato AB. Calcolare i 2/3 della lunghezza di AB e riportarla da B in Z.

Determinare il punto medio del segmento ZA: è O. Fare centro in O e con raggio OZ = OA disegnare una semicirconferenza da Z a A.

Dal punto B innalzare la perpendicolare a ZA fino a incontrare la semicirconferenza in un punto, D.

Costruire il triangolo rettangolo ZDA.

Per il *secondo teorema di Euclide* sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio, l'altezza BD ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle delle proiezioni dei cateti ZD e DA sull'ipotenusa ZA:

ZB : DB = DB : BA; ma
ZB = 2/3 * BA per cui
2/3 * BA : DB = DB : BA
$DB^2 = 2/3 * BA^2$ e
$DB = BA * \sqrt{(2/3)}$.

L'altezza DB è la lunghezza cercata da riportare sulla figura del triangolo ABC.

Dal punto D condurre il segmento DE parallelo a AC e dividere lo stesso DE in due parti uguali.

I triangoli DBG e GBE e il trapezio ADEC hanno uguale superficie.

Savasorda non applicò questa soluzione geometrica.

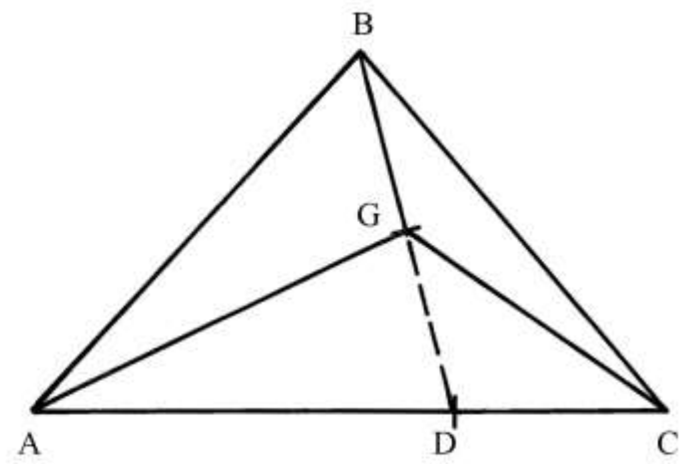
- -

Triangolo da dividere in tre parti differenti

Savasorda presentò il problema della divisione di una superficie triangolare in tre parti differenti: ½ al primo proprietario, 1/3 al secondo e la parte rimanente, 1/6, al terzo. La divisione è esatta perché

½ + 1/3 + 1/6 = (3 + 2 + 1)/6 = 6/6 = 1.

ABC è il triangolo:



Il punto D divide il lato AC in due parti:

AD : 2 = DC : 1 e quindi

DC = 1/3 * AC.

Tracciare il segmento BD e dividerlo a metà con il punto G.

Collegare G con i vertici A e C.

Il triangolo ABC è diviso in tre parti:

* il triangolo ADB ha area uguale a metà;
* il triangolo ABG ha area pari a un terzo;
* il triangolo GBC ha area uguale a un sesto.

La dimostrazione è la seguente: il triangolo ABD ha superficie uguale a 2/3 di quella di ABC e quello DBC ha superficie pari a 1/3 di quella di ABC.

I triangoli ABG e AGD hanno superficie che è metà di quella di ABD e cioè

$½ * 2/3 * A_{ABC} = 1/3 * A_{ABC}$.

A loro volta, i triangoli GBC e DGC sono di uguale area che è metà di quella di DBC e cioè

$½ * 1/3 * A_{ABC} = 1/6 * A_{ABC}$.

I triangoli AGD e DGC sono uniti per formare il triangolo AGC:

$A_{AGC} = A_{AGD} + A_{DGC} = 1/3 * A_{ABC} + 1/6 * A_{ABC} = (2 + 1)/6 * A_{ABC} = ½ * A_{ABC}$.

.

DIVISIONE DEI QUADRILATERI

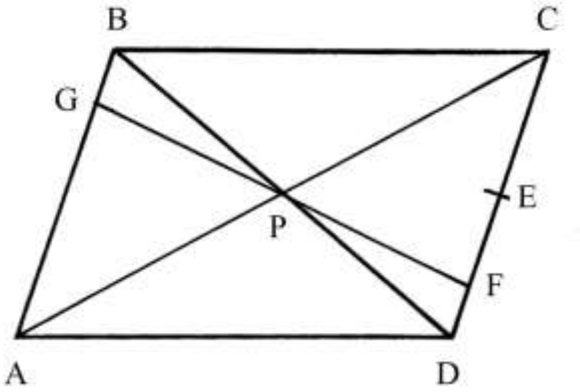
Savasorda distinse tre classi di quadrilateri:

* quadrilateri con diagonali che si tagliano in parti uguali;
* quadrilateri con una diagonale che taglia l'altra in due parti uguali e non viceversa;
* quadrilateri nei quali le diagonali si dividono in parti diseguali.

Gli esempi presentati descrivono la divisione dei quadrilateri delle tre classi in 2, 3 o 4 parti.

Divisione in due parti uguali di un parallelogramma

Il parallelogramma ABCD ha due diagonali, AC e BD, che si intersecano nel punto P dividendosi reciprocamente in due parti di uguali lunghezze: AP = PC e BP = PD.



Il punto E è il medio del lato CD. Da E misurare la lunghezza EF = 2 cubiti.

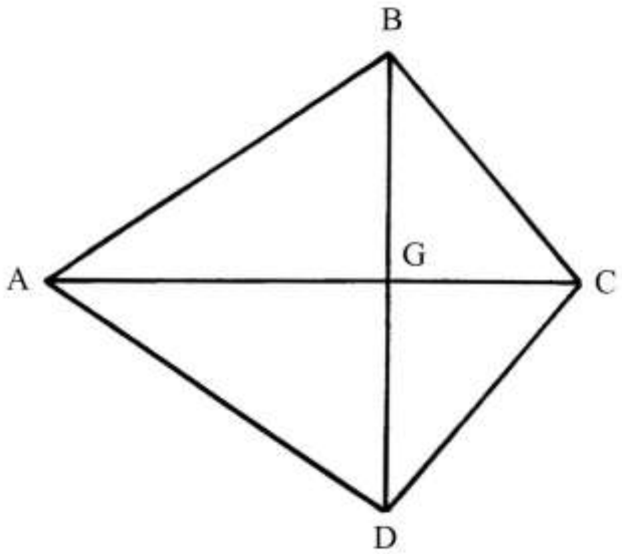
Il parallelogramma deve essere diviso in due parti di uguale superficie con un segmento uscente da F e passante per il punto P fino a incontrare il lato AB nel punto G.

I segmenti BG e FD hanno uguale lunghezza.

FG divide il parallelogramma ABCD in due quadrilateri di uguale area: AGFD e GBCF.

Divisione in due parti uguali di un aquilone

Il quadrilatero contenuto nella figura che segue è oggi conosciuto come *aquilone* o *deltoide*.



Le coppie di lati *consecutivi* (BC e CD) e (AB e AD), hanno lunghezze uguali.

Il quadrilatero possiede una diagonale maggiore, AC, che è il suo *asse di simmetria*, e una diagonale minore, BD, che è divisa in due segmenti di uguale lunghezza: BG = GD.

La diagonale maggiore è divisa in due segmenti, AG e GC, di differente lunghezza.

Le due diagonali si incontrano ad angolo retto nel punto G.

La diagonale maggiore AC divide il quadrilatero in due triangoli di uguale area: ABC e ADC. Inoltre, con l'ausilio della diagonale minore BD, essa divide i due triangoli ABD e BCD in due triangoli rettangoli ciascuno (rispettivamente ABG – AGD e BGC – GDC).

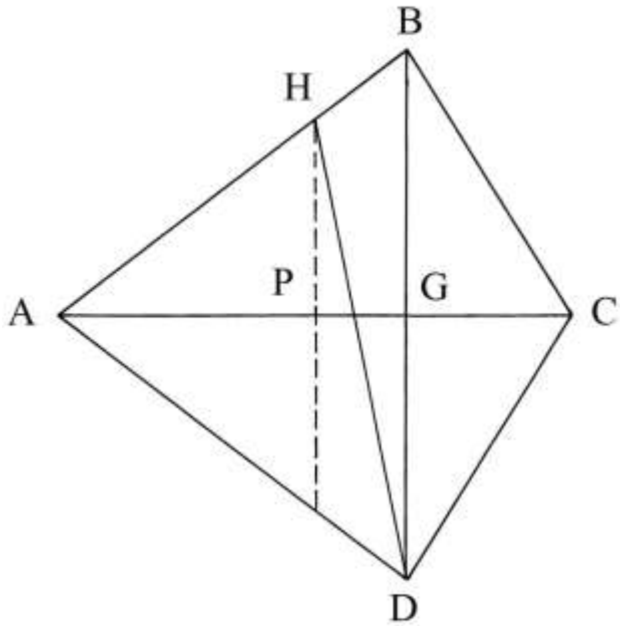
Il quadrilatero ABCD deve essere diviso in due parti di uguale superficie.

Nell’esempio di Savasorda, i lati BC e CD sono lunghi 10,6 cubiti (10 + 3/5 secondo la notazione dell’Autore) e i lati AB e AD sono lunghi 15 cubiti.

La diagonale maggiore AC è lunga 17,6 cubiti (17 + 3/5) e il segmento AG è 12 cubiti; ne consegue che il segmento GC è lungo: GC = AC – AG = 17.6 – 12 = 5,6 cubiti.

Con tutti questi dati, il quadrilatero ABCD è costruibile.

Dividere la diagonale maggiore in due parti uguali: P è il punto medio.



Per il punto P tracciare la parallela alla diagonale minore BD: la corda fissa i punti P e H.

La lunghezza di AP è:

AP = PC = AC/2 = 17,6/2 = 8,8 cubiti.

Il segmento PG è lungo:

PG = PC – GC = 8,8 – 5,6 = 3,2 cubiti.

Sul lato AB è fissato il punto H che dista da B il risultato della proporzione che segue:

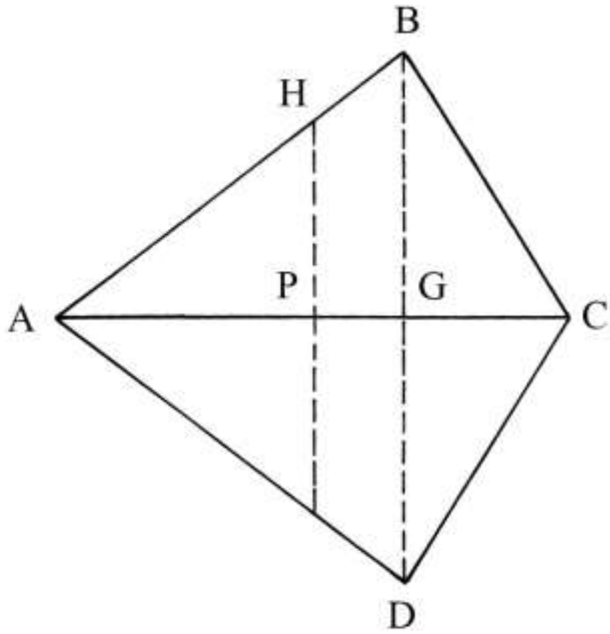
HB : AB = PG : AG   da cui

HB = (AB * PG)/AG = (15 * 3,2)/12 = 4 cubiti.

Tracciare la corda HD: essa divide il quadrilatero ABCD in due poligoni di uguale superficie: il triangolo AHD e il quadrilatero HBCD.

- APPROFONDIMENTO -

Il punto H della precedente figura può essere fissato ricorrendo al *teorema di Talete*; dal punto P condurre la parallela alla diagonale BD: essa taglia il lato AB nel punto H.



Per i punti B, G e D passa una retta: per il punto P tracciare una retta parallela a quella BGD. Questa seconda retta interseca AB in un punto che è H.

Applicando il teorema di Talete si ha la seguente proporzione:

HB : PG = AB : AG

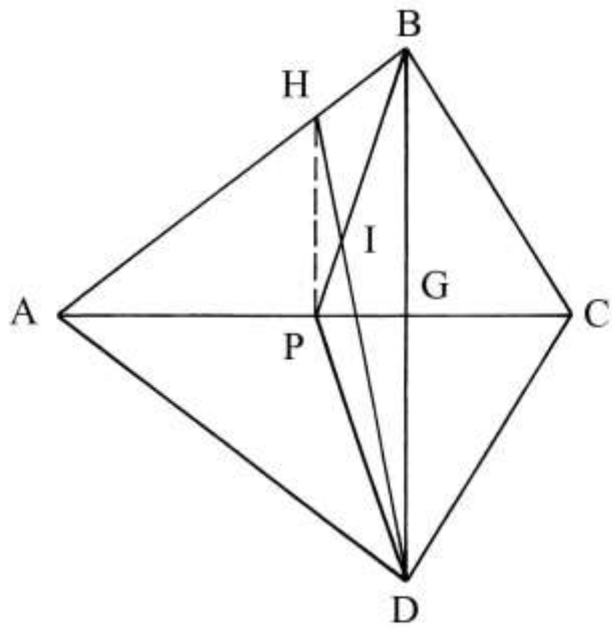
Invertendo i *medi* della precedente proporzione si ritrova la proporzione incontrata in precedenza:

HB : AB = PG : AG

Pur senza citarlo espressamente, Savasorda applicò il teorema di Talete.

- -

La dimostrazione proposta da Savasorda richiede il collegamento di P con i vertici B e D. PB e HD si incontrano nel punto I:



I triangoli PBC e PDC hanno uguale area: il quadrilatero PBCD ha superficie uguale a metà di quella di ABCD e quindi uguale all'area del quadrilatero HBCD.

Consideriamo i triangoli DPH e BPH: essi hanno in comune il lato PH e l'altezza PI che è relativa allo stesso lato: essi hanno uguale area.

Anche i triangoli BIH e DPI hanno uguale area.

Sommando BIH oppure DPI a BCDI, il risultato è identico: BPDC ha la stessa area di HBCD.

L'area del quadrilatero ABCD è data da:

$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = AC * BG/2 + AC * GD/2 = AC * (BG/2 + GD/2)$.

Ma BG = GD = BD/2 per cui si ha:

$A_{ABCD} = AC * (BG/2 + BG/2) = AC * BG = AC * BD/2$.

L'area del triangolo PBC è:

$A_{PBC} = PC * BG/2 = (AC/2) * (BD/2)/2 = AC * BD/8$.

Il triangolo PCD ha le stesse dimensioni di quello PBC e quindi possiede uguale area. L'area di ciascuno di questi due triangoli è uguale a *un quarto* di quella di ABCD.

L'area di BCDP è:

$A_{BCDP} = A_{PBC} + A_{PCD} = 2 * (AC * BD/8) = AC * BD/4$.

BCDP ha area uguale a metà di quella di ABCD.

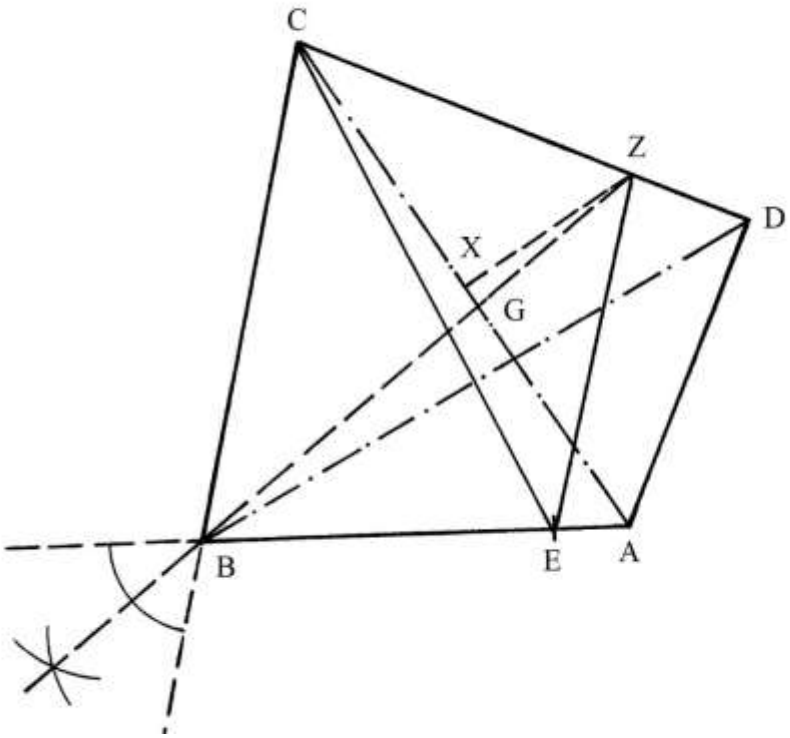
Ne consegue che il quadrilatero ABPD ha area:

$A_{ABPD} = A_{ABCD} – A_{BCDP} = AC * BD/2 – AC * BD/4 = AC * BD/4$.

Il quadrilatero ABPPD ha area uguale a metà di quella di ABCD e uguale a quella di BCDP.

Divisione in 2 parti uguali di un quadrilatero

ABCD è un quadrilatero che deve essere diviso in due parti uguali:



Le due diagonali AC e BD si incontrano nel punto G, ma non si tagliano reciprocamente a metà.

Il poligono è un esempio di quadrilateri della *classe terza*.

BZ è la bisettrice dell'angolo CBA; essa divide ABCD in due poligoni:

* il triangolo BCZ;
* il quadrilatero ABDZ.

Dal punto Z tracciare la corda ZE, parallela al lato BC.

Collegare E con C. CE divide ABCD in due poligoni che hanno aree uguali a metà di quella dello stesso quadrilatero iniziale:

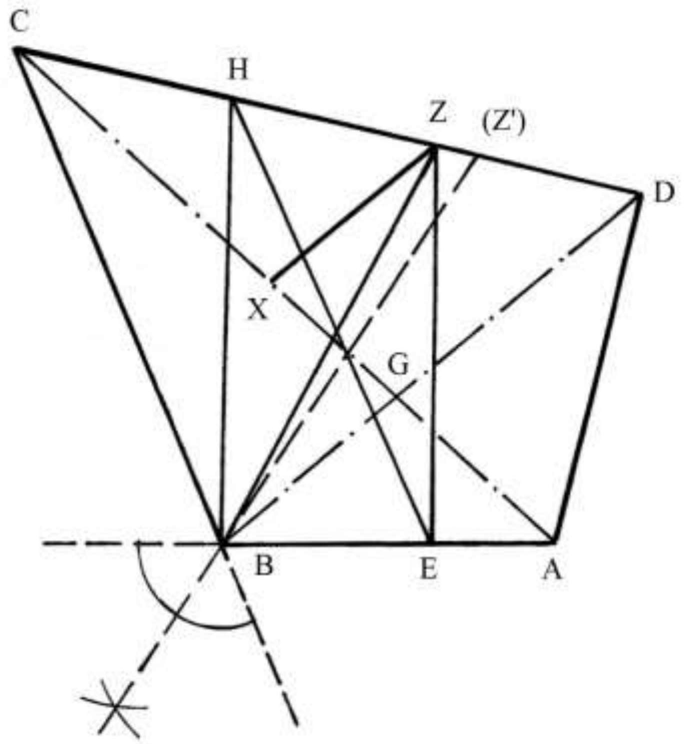
* il triangolo CEB;
* il quadrilatero CDAE.

Il triangolo BCZ ha area uguale a quella di CEB.

Nel testo non è fornita alcuna informazione su ZX, perpendicolare alla diagonale AC.

<u>Quadrilatero diviso in 2 parti uguali</u>

Nel quadrilatero ABCD non si verifica la condizione posta da Savasorda riguardo al caso precedente: infatti la corda EZ non è parallela al lato BC.



Nel testo non è fornita alcuna informazione sulla posizione dei punti E e Z.

La retta passante per B e per (Z') è la bisettrice dell'angolo CBA: il punto (Z') non coincide con Z.

Le diagonali del poligono si incontrano nel punto G.

Dal punto B è tracciato BH, che è parallelo a EZ.

Collegare H con E.

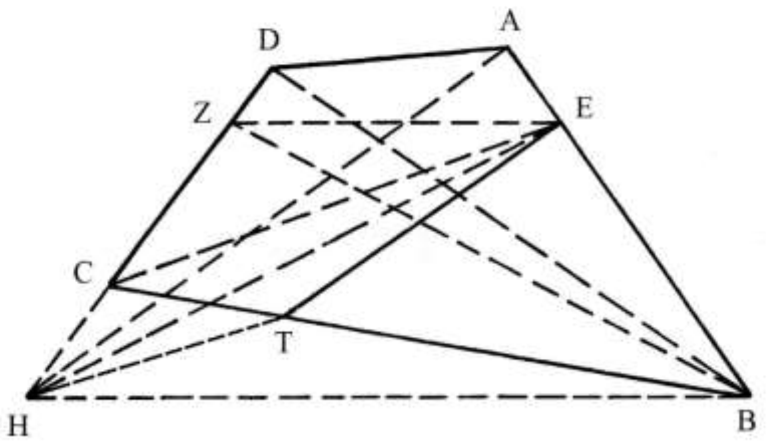
La corda HE divide ABCD in due quadrilateri che hanno aree uguali:

* AEHD;
* EBCH.

Il testo non informa sulla funzione del segmento ZX.

Divisione di un quadrilatero in 2 parti uguali

ABCD è il quadrilatero da dividere in due parti uguali con un segmento che deve uscire dal punto E.



Tracciare la diagonale BD e la bisettrice dell'angolo DCB: questa ultima incontra il lato AB nel punto E.

Non è fornita alcuna informazione sulla posizione del punto Z.

La corda EZ non è parallela ad alcuno dei lati di ABCD..

Dal punto B condurre verso sinistra una linea parallela a EZ e prolungare verso il basso il lato CD: viene fissato il punto H. Collegare A e E con H.

Dal punto H disegnare una parallela a CE fino a tagliare il lato CD in un nuovo punto, T.

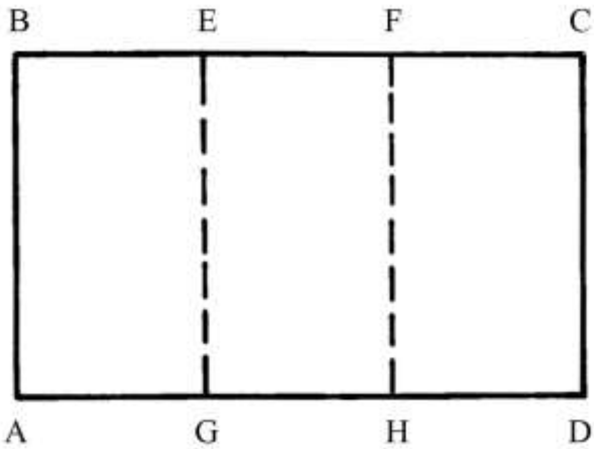
TE divide ABCD in due poligoni con aree uguali:

* il triangolo TEB;
* il pentagono non regolare CDAET.

DIVISIONE DI QUADRILATERI IN TRE PARTI

Divisione di un rettangolo in tre parti uguali

ABCD è un rettangolo che deve essere diviso in tre parti di uguale superficie:



Savasorda divise per via aritmetica in tre parti uguali il lato BC fissando i punti E e F. Da questi sono abbassati due segmenti paralleli ai lati verticali AB e CD: le corde EG e FH dividono il rettangolo in tre parti uguali.

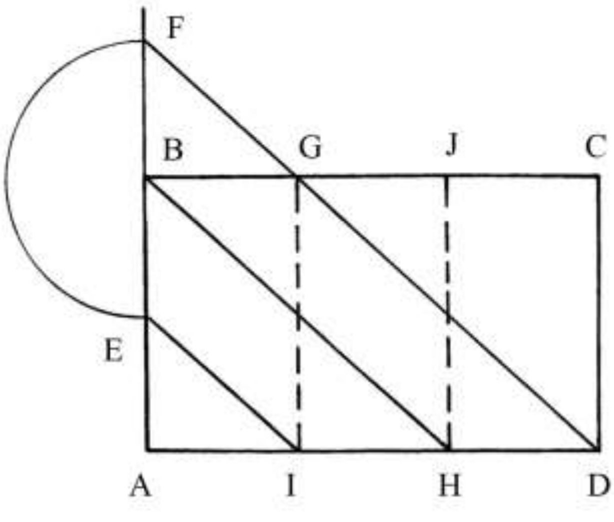
Savasorda si limitò a questa semplice soluzione, certamente adatta alla divisione di un lungo terreno.

- APPROFONDIMENTO -

Savasorda sarà stato a conoscenza di altri metodi geometrici più precisi di quello aritmetico da lui impiegato nel caso del rettangolo della figura precedente.

Ecco due metodi.

ABCD è un rettangolo e il suo lato orizzontale AD deve essere diviso in 3 parti uguali:



Determinare il punto medio di AB: è E. Prolungare questo lato verso l'alto.

Riportare da B in F la lunghezza di BE.

Collegare il punto F con D.

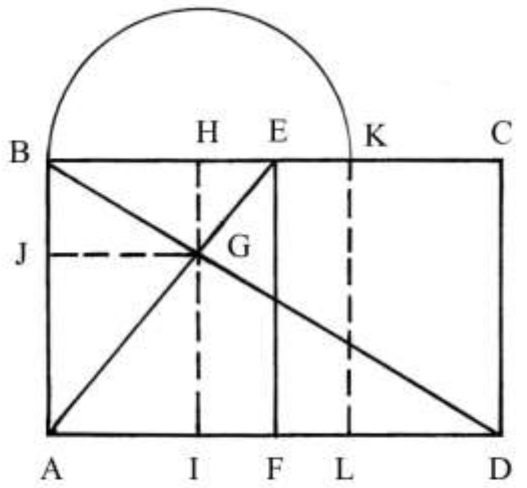
Dai punti B e E tracciare due linee parallele a FD fino a intersecare il lato AD in due punti, I e H.

Il lato AD è diviso in tre parti uguali: AI = IH = HD.

Dai punti I e H innalzare le perpendicolari ai lati AD e BC. Il rettangolo è diviso in tre parti uguali.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCD è il solito rettangolo da dividere:



La corda EF è la *mediana* verticale del rettangolo e lo divide in due rettangoli di uguale superficie.

Disegnare la diagonale BD e la corda AE che è una diagonale del rettangolo ABEF.

Le due diagonali si intersecano nel punto G.

Proiettare perpendicolarmente la posizione del punto G sui lati AB e BC.

Il segmento AI è lungo 1/3 del lato AD.

Pure il segmento BJ è lungo 1/3 del lato AB.

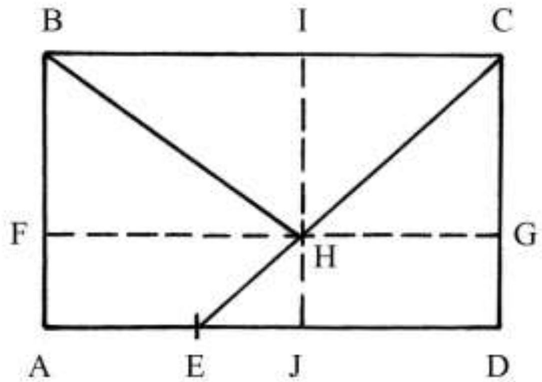
Riportare la lunghezza di HB in HK e completare tracciando la corda KL.

Il rettangolo ABCD è diviso in tre rettangoli di superficie uguale a 1/3 della sua.

- -

<u>Divisione di un rettangolo in 3 parti da un vertice</u>

ABCD è un rettangolo che deve essere diviso in tre parti uguali con una corda uscente dal vertice C:



Fissare il punto E a distanza 1/3 * AD da A.

Collegare C con E.

Stabilire i punti F e G a distanza di 1/3 di AB, rispettivamente da A e da D.

Tracciare la corda FG: essa taglia CE in un punto, H.

Il punto H divide EC in due parti: EH : 1 = HC : 2.

Per il punto H disegnare una corda, IJ, parallela ai lati AB e CD.

Tracciare BH.

Savasorda non approfondì la spiegazione: evidentemente, il suo scopo era quello di fornire soluzione corrette ma senza mostrare dimostrazioni: il fine era quello di offrire un manuale di geometria pratica.

Qui di seguito viene esposta una spiegazione della procedura di Savasorda.

I lati del rettangolo sono con AB = a e AD = b.

L'area di ABCD è data da:

$$A_{ABCD} = a * b.$$

L'area del triangolo rettangolo ECD è:

$$A_{ECD} = (ED * CD)/2 = ((2/3 * a) * b/2 = 1/3 * a * b = 1/3 * A_{ABCD}.$$

Per differenza, l'area del trapezio ABCE è uguale a 2/3 di quella di ABCD.

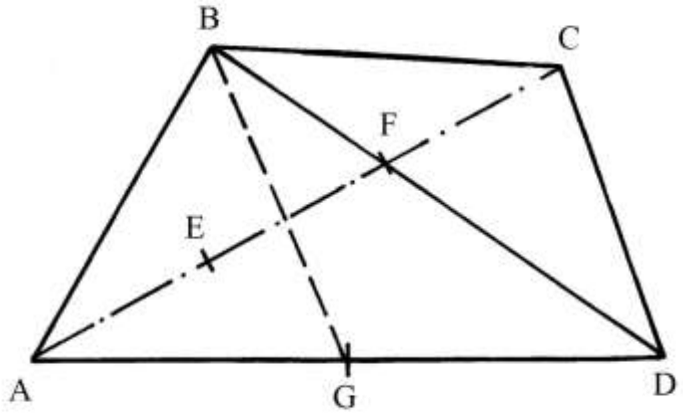
L'area del triangolo BCH è:

$$A_{BCH} = (BC * IH)/2 = b * (2/3 * a)/2 = 1/3 * a * b.$$

Di nuovo per differenza, l'area del trapezio ABHE è uguale a 1/3 di quella di ABCD.

<u>Divisione di un quadrilatero in 3 parti uguali</u>

Savasorda affrontò il caso di un quadrilatero che non è un parallelogramma:



Tracciare le diagonali AC e BD: esse si incontrano nel punto F.

Nel caso specifico, che è del tutto eccezionale, il segmento EC è lungo esattamente 1/3 della diagonale AC:

$$AE = EF = FC = 1/3 * AC.$$

Il triangolo BCD ha area uguale a 1/3 di quella di ABCD.

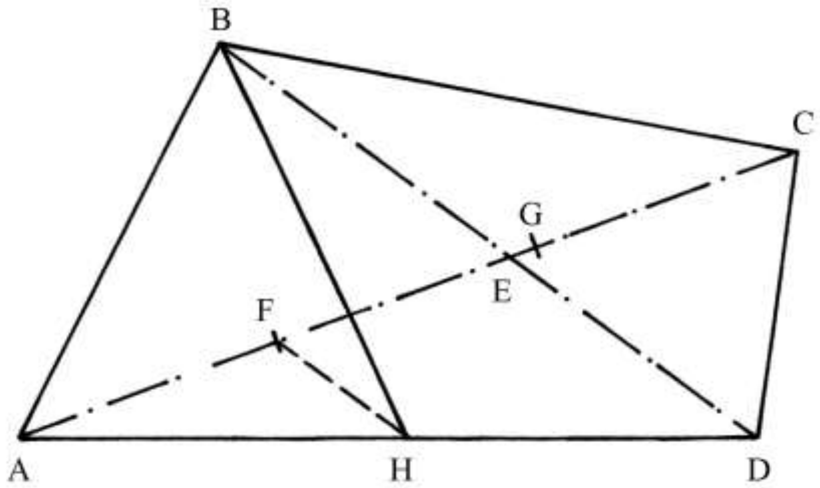
Il triangolo residuale ABD ha area uguale a 2/3 di quella di ABCD.

Determinare il punto medio del lato AD: è G.

La mediana BG divide ABD in due parti con aree uguali a 1/3 di quella di ABCD: sono i triangoli ABG e GBD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il caso successivo è più generale: il segmento EC non è lungo esattamente 1/3 della diagonale AC:



Dividere la diagonale AC in tre parti uguali:

AF = FG = GC = 1/3 * AC.

Dal punto F condurre una parallela a BD fino a incontrare in H il lato AD.

Collegare i punti B e H.

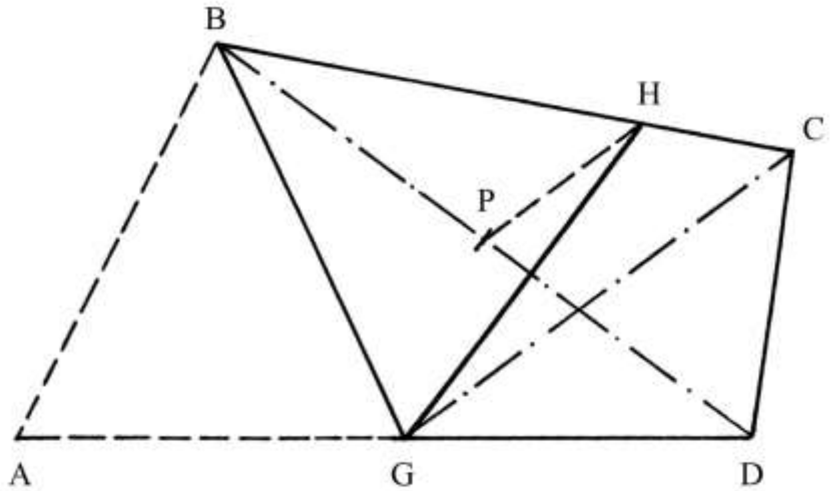
Il triangolo ABH ha superficie uguale a 1/3 di quella di ABCD e il quadrilatero HBCD ha area uguale a 2/3 di ABCD.

Per completare il compito deve essere diviso in *due* parti uguali il quadrilatero BCDG.

- APPROFONDIMENTO -

Savasorda si limitò a evidenziare la necessità di dividere in due parti uguali il quadrilatero BCDG ma non propose alcun metodo aritmetico o geometrico per raggiungere lo scopo.

La figura che segue descrive una soluzione non dovuta a Savasorda:



Disegnare le diagonali BD e GC.

Fissare il punto medio della diagonale maggiore BD: è P.

Dal punto P tracciare la parallela alla diagonale minore GC fino a incontrare il lato BC in un punto, H.

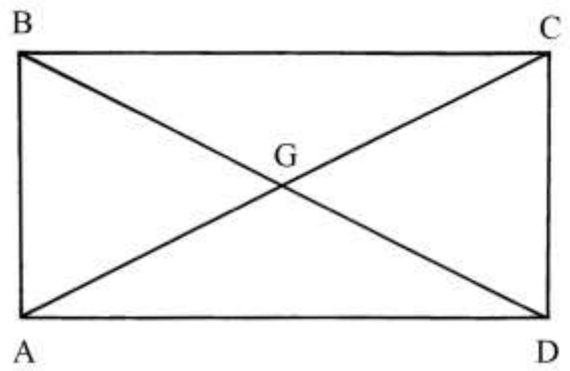
La corda GH divide BCDG in due figure di uguale superficie: il triangolo BGH e il quadrilatero GHCD.

- -

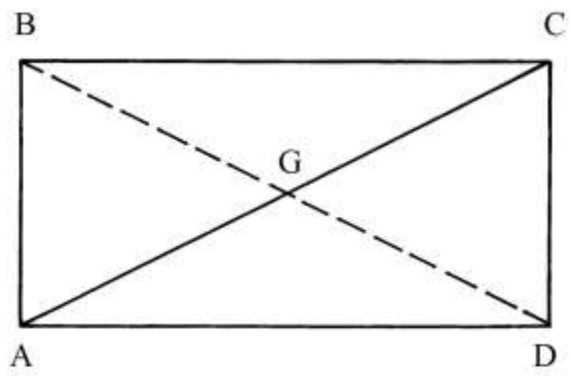
DIVISIONE DI QUADRILATERI IN QUATTRO PARTI

Divisione di un rettangolo in 4 parti uguali

Il rettangolo ABCD è diviso in *quattro* parti dalle diagonali AC e BD che si incrociano nel punto G dividendosi in due parti uguali, ma senza formare angoli retti (come accade nel quadrato e nel rombo).



Consideriamo il rettangolo diviso con una sola diagonale, ad esempio quella AC:



I triangoli rettangoli ABC e ACD hanno uguale area che è metà di quella del rettangolo ABCD.

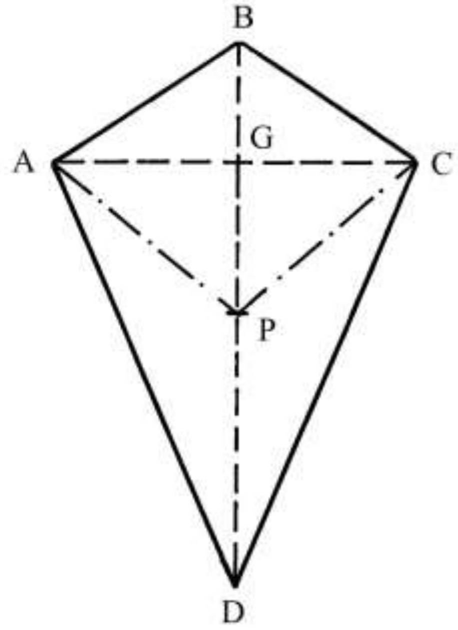
Il segmento BG è una *mediana* del triangolo ABC e quello GD è una *mediana* di ACD: le due mediane hanno uguale lunghezza e formano la diagonale BD.

La mediana BG divide ABC in due triangoli di area uguale e pari a un quarto di quella di ABCD: lo stesso accade alla mediana GD nel triangolo ACD.

Il rettangolo ABCD è diviso in quattro triangoli di uguale superficie.

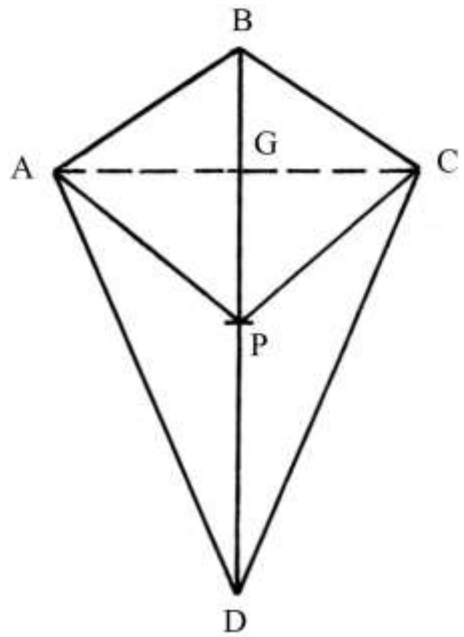
Divisione in 4 parti uguali di un aquilone

Nella figura che segue è disegnato un *aquilone* o *deltoide* ABCD:



La diagonale maggiore BD taglia in due parti uguali la diagonale minore AC ma non viceversa.

BD divide in due triangoli di uguale area l'aquilone: sono ABD e CBD.



Infatti le loro aree sono:

$A_{ABD} = AG * BD/2$ e

$A_{CBD} = GC * BD/2$.

Ricordiamo che AG = GC = AC/2.

Determinare il punto medio di BD: è P.

AP e CP sono due mediane: la prima è una delle tre mediane del triangolo ABD e la seconda – CP – lo è nel triangolo CBD.

Le due mediane dividono ABD e CBD in due triangoli di uguali dimensioni.

Il triangolo ABP ha area data da:

$A_{ABP} = AG * BP/2$ e quello APD ha area:

$A_{APD} = AG * PD/2$.

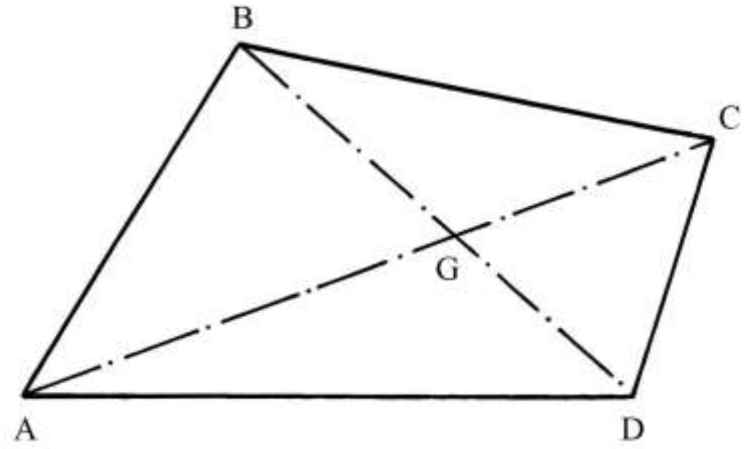
Le due aree sono uguali perché BP = PD; inoltre AG è un'altezza del triangolo APD rispetto al lato PD: essa giace all'esterno del poligono, sul prolungamento del lato PD.

Analoghe considerazioni valgono per il triangolo CBD e per i due triangoli in esso contenuti: CBP e CPD.

Ciascuno dei quattro triangoli ha superficie uguale a *un quarto* di quella di ABCD.

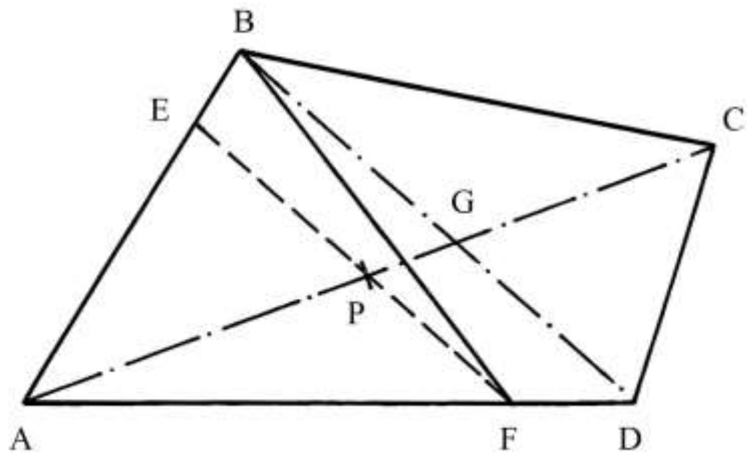
Divisione di un quadrilatero in 4 parti uguali

ABCD è un quadrilatero le cui diagonali AC e BD si incontrano nel punto G senza che esse si dividano reciprocamente in parti uguali.



Con il metodo descritto nel precedente APPROFONDIMENTO, non dovuto a Savasorda, il quadrilatero ABCD deve essere diviso in due parti uguali.

Fissare il punto medio della diagonale maggiore AC: è P.

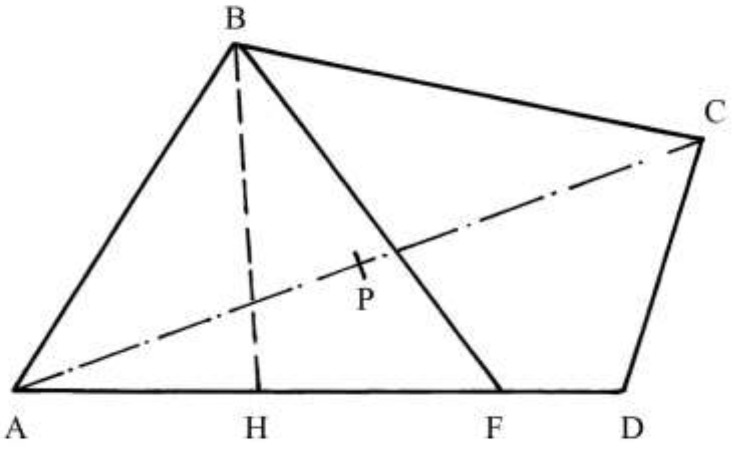


Parallelamente alla diagonale BD, tracciare una corda passante per P: è EF.

Collegare B con F: la corda BF divide ABCD in due poligoni che hanno aree uguali a metà di quella del quadrilatero originario:

* il triangolo ABF;
* il quadrilatero BCDF.

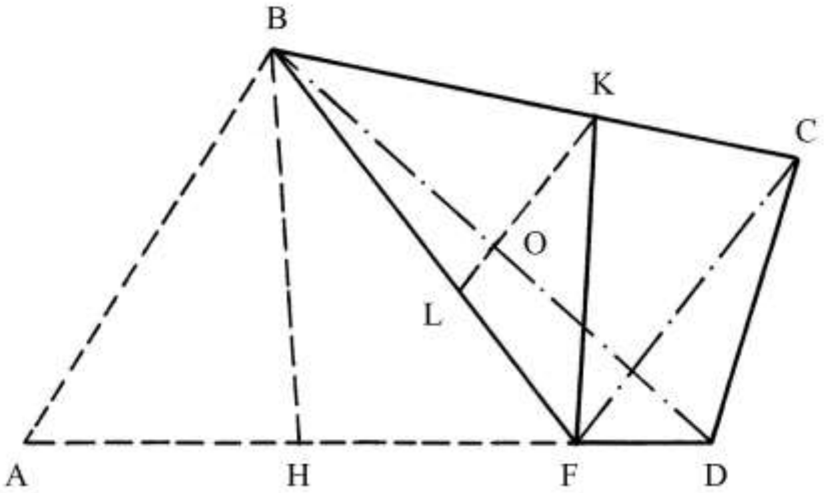
Per dividere ulteriormente il triangolo ABF è sufficiente disegnare la mediana BH:



I triangoli ABH e BHF hanno uguale superficie che è uguale a un quarto di quella di ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Con il metodo già applicato, possiamo dividere in due parti uguali il quadrilatero BCDF.



Disegnare le diagonali del quadrilatero: sono BD e FC.

O è il punto medio della diagonale maggiore BD.

Per il punto O tracciare una corda parallela alla diagonale minore FC: è KL.

Collegare K con F. Il segmento KF divide il quadrilatero in due poligoni di area uguale:

* il triangolo BKF;
* il quadrilatero KCDF.

Con questa ulteriore costruzione, il quadrilatero originario ABCD è diviso in *quattro* poligoni con aree uguali a un quarto di quella del poligono originario:

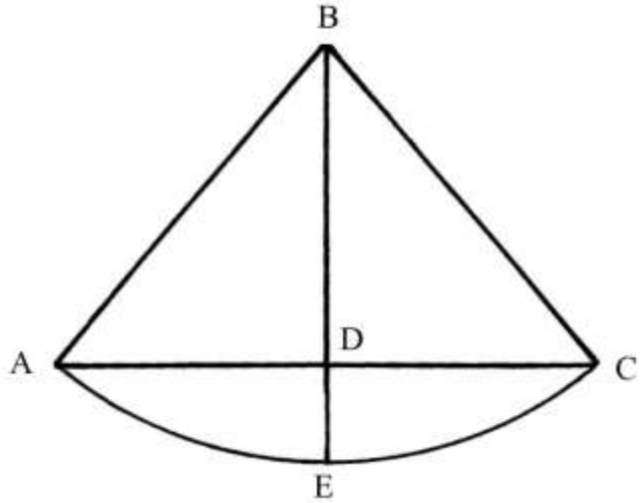
* il triangolo ABH;
* il triangolo BHF;
* il triangolo BKF;
* il quadrilatero KCDF.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda suggerì di applicare il metodo della scomposizione in triangoli e quadrilateri ai poligoni non regolari con 4, 5, 6 e più lati.

DIVISIONE DI FIGURE CURVILINEE

ABC è una figura piana che è delimitata da due segmenti, AB e BC, e da un arco di circonferenza, AC: è un *settore circolare*.



ABCE deve essere divisa in due parti uguali.

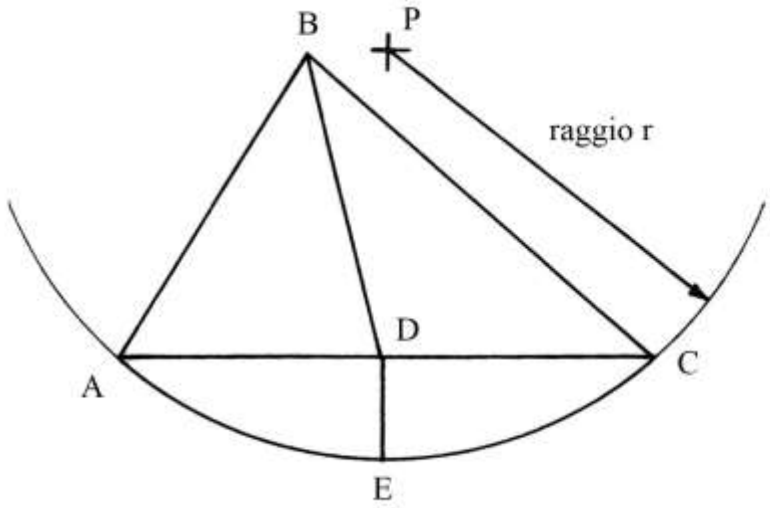
Tracciare la corda AC e fissare il suo punto medio, D.

Per i punti B e D disegnare una linea che taglia l'arco nel punto E: il segmento BE divide la figura in due parti uguali.

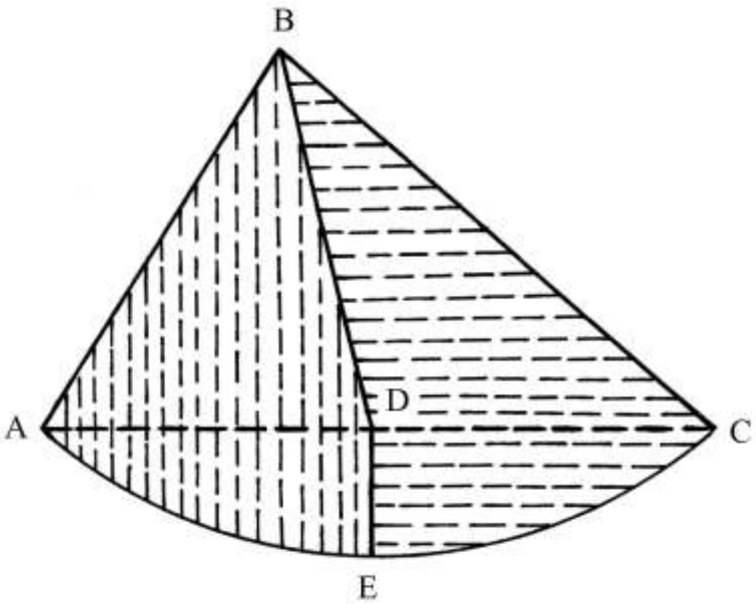
Il caso è di facile soluzione perché ABCE è un *settore circolare* di raggio AB = BC = BE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso della figura formata dal triangolo scaleno ABC e dal segmento circolare che ha per centro il punto P, esterno alla figura stessa, le cose sono appena più complicate:

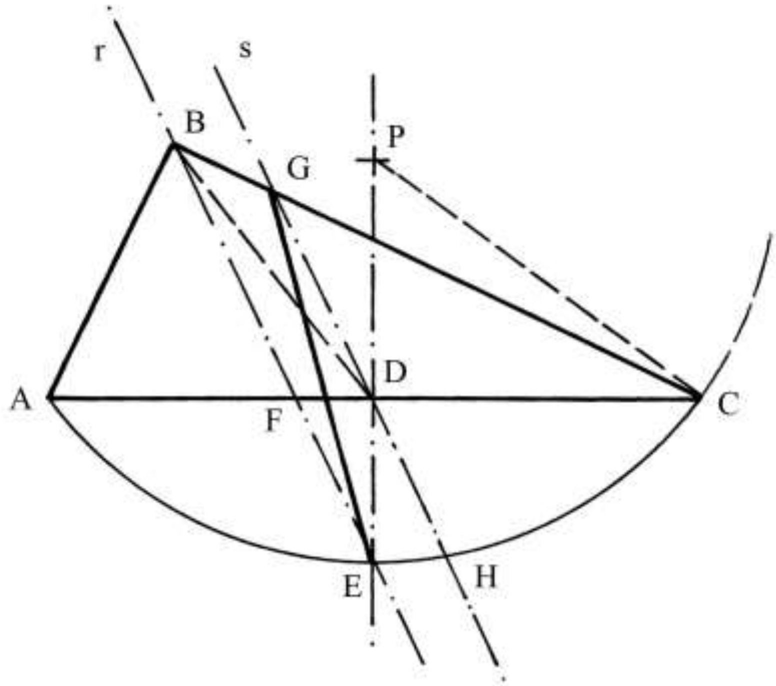


Determinare il punto medio della corda AC: è D.
Tracciare il segmento BD: esso è una *mediana* del triangolo ABC.
Dal punto D abbassare la perpendicolare a AC fino a incontrare l’arco nel punto E.
Le figure ABDE e EDBC hanno uguale superficie:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda propose un secondo metodo per dividere in due parti uguali una figura piana con una forma complessa e simile ai due ultimi schemi:



ABC è un triangolo generico, scaleno. D è il punto medio di AC e BD è una mediana.

Per il punto D tracciare una perpendicolare: su di essa giace il punto P, centro dell'arco di circonferenza AEC: PC è il suo raggio:

PC = PE = PA.

AEC è un segmento circolare che è delimitato dalla corda ADC e dall'arco AEC: DE è la sua freccia.

Nel triangolo ABC la mediana divide il poligono in due triangoli di aree uguali: ABD e BCD.

Il problema chiede di dividere in due parti uguali la figura creata dall'unione del triangolo ABC e del segmento circolare AEC.

La soluzione presentata da Savasorda richiede che la divisione sia effettuata con una retta e non con una spezzata, come è stato il caso della *spezzata* BDE dell'esempio precedente. Anche in questo caso la spezzata sarebbe BDE.

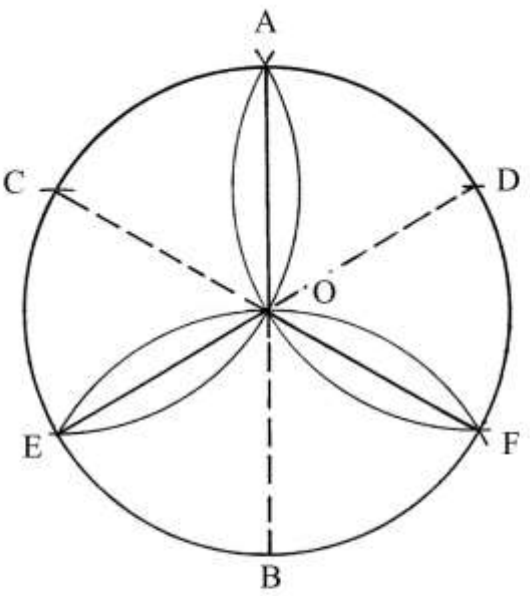
Per i punti B e E tracciare la retta *r* e parallela ad essa la retta *s* passante per G: questa ultima incontra il lato BC in G.

Collegare G con E: il segmento GE divide la complessa figura in due parti uguali:

* ABGE;
* GCE.

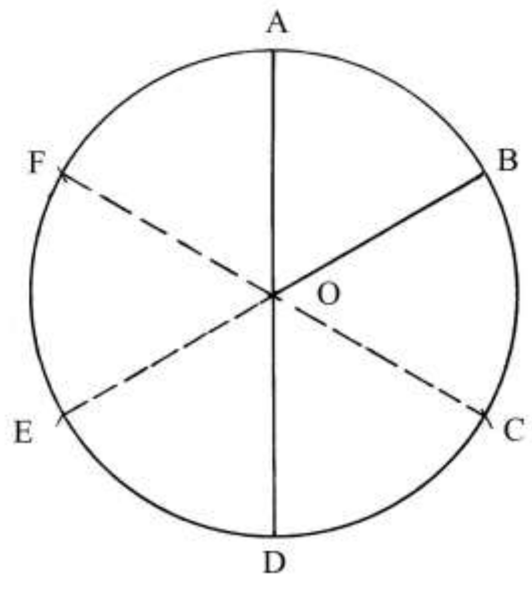
<u>Divisione di un cerchio in più parti</u>

Nella figura che segue, il cerchio di centro O ha raggio OA:



Dividere la circonferenza in *sei* parti uguali. Tracciare i raggi OA, OE e OF.
Il cerchio è sezionato in *tre* parti uguali, tre settori circolari di uguali dimensioni: AOE, AOF e EOF.
Ciascuno di essi ha superficie uguale a 1/3 di quella del cerchio.
Quest'ultimo è divisibile in *sei* settori circolari di uguale area: AOD, DOF, FOB, BOE, EOC e COA.

Il cerchio può essere diviso in parti di differente superficie:



Il settore circolare AOB ha area uguale a 1/6 di quella del cerchio, il settore BOD ha area uguale a 2/6 = 1/3 e il settore DEFA è ampio 3/6 = ½ del cerchio.

IL CONTRIBUTO DI ARCHIBALD

Raymond Clare Archibald (1875 – 1955) è stato un matematico canadese-americano. Si è occupato di storia della matematica e della sua didattica.

Fra i suoi studi vi è quello considerato in questo articolo: la ricostruzione del perduto libro sulla divisione delle figure scritto da Euclide.

Il suo lavoro è basato sulle tracce del libro perduto nei lavori di Erone di Alessandria (I secolo), di Abu'l – Wafa (940 – 998), di Abraham Bar Hiyya (nato fra il 1065 e il 1070 e morto intorno al 1136) noto con il nome di *Savasorda*, di Giordano Nemorario (XIII secolo), Leonardo da Pisa (o Fibonacci, 1170 circa – 1142 circa) e sulle ricerche condotte dal tedesco Franz Woepcke (1826 – 1864) e dall'italiano Antonio Favaro (1847 – 1922).

Un'altra importante fonte è stata il citato testo di Federico Commandino e John Dee.

Le convenzioni impiegate

I disegni che sono contenuti in questo paragrafo sono stati rielaborati su quelli presenti nel testo di Archibald e sono state effettuate alcune aggiunte: ad esempio le altezze nei triangoli.

Nel lavoro dello storico canadese-americano le lettere *minuscole* apposte ai vertici delle figure sono qui convertite nelle corrispondenti *maiuscole*.

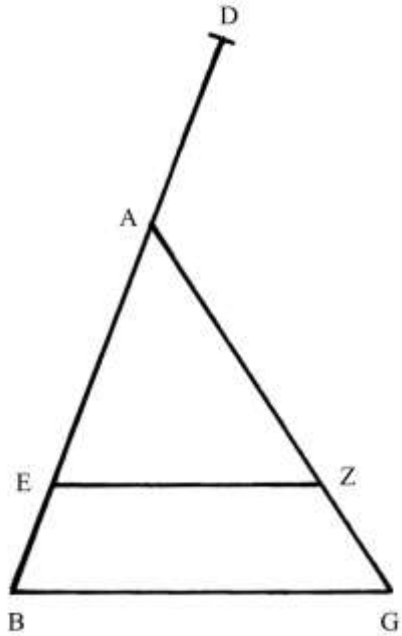
È da notare l'uso della lettera "g" invece della "c" e ciò per la probabile influenza delle opere greche consultate da tutti gli Autori.

L'ordine in cui le lettere sono scritte segue un andamento antiorario con la "a" talvolta posizionata in alto.

Archibald riprende alcune costruzioni dal trattato geometrico di Leonardo da Pisa (Fibonacci).

PROPOSIZIONE 1
Divisione di un triangolo in due parti uguali con una linea parallela alla base
(ripreso da Fibonacci)

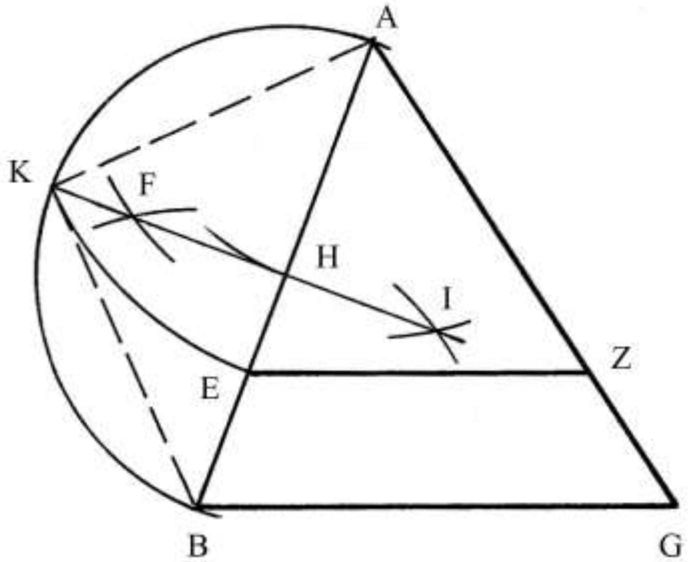
ABG è un generico triangolo, scaleno.



EZ divide ABC in due poligoni che hanno aree uguali a metà del triangolo iniziale.

Nei testi medievali usati per ricostruire il perduto libro di Euclide non tutti i problemi sono corredati con le necessarie costruzioni geometriche risolutive.

Una prima soluzione è descritta nello schema che segue:



Costruire l'asse del lato AB: è FI. Fare centro nel punto medio di AB, H, e con raggio HA = HB tracciare una semicirconferenza da A a B.

K è l'intersezione fra la semicirconferenza e l'asse passante per F e per I.

AKB è un triangolo rettangolo isoscele inscritto nel semicerchio.

Fare centro in A e con raggio AK disegnare un arco da K fino a tagliare in E il lato AB.

EZ è una corda parallela a BG.

Il segmento AE è lungo:

$$AE = AK = \sqrt{(KH^2 + HA^2)} = \sqrt{(2 * HA^2)} = HA * \sqrt{2} = (AB/2) * \sqrt{2} = (\sqrt{2}) * AB/2.$$

Lo stesso metodo grafico può essere impiegato per calcolare la lunghezza di AZ.

EZ divide il triangolo ABC in due poligoni che hanno area uguale a metà di quella dello stesso triangolo:

* il triangolo AEZ;
* il trapezio EBGZ.

- APPROFONDIMENTO -

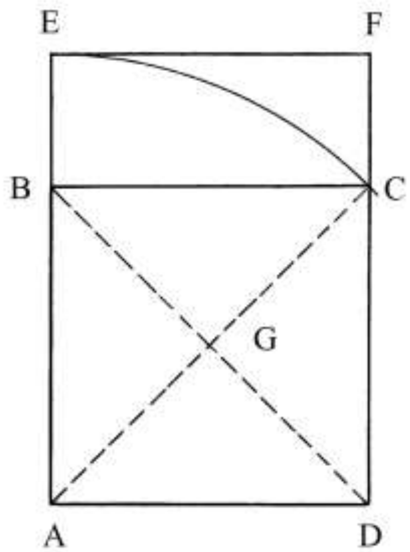
Ricordiamo un dato di fatto: l'area di un generico triangolo è sempre proporzionale, con coefficienti dei quali si omette il calcolo, al quadrato della lunghezza di un lato o di un'altezza.

La divisione di un triangolo in 2 o in 3 parti uguali è possibile facendo ricorso a metodi geometrici oppure aritmetici: questi ultimi richiedono l'estrazione di radici quadrate.

Tutti questi metodi erano sicuramente noti ai geometri e ai tecnici medievali.

I metodi aritmetici sono approssimati perché nella divisione in 2 o in 3 parti uguali intervengono $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ che forniscono numeri irrazionali.

La figura che segue presenta la costruzione di $\sqrt{2}$ e di $(\sqrt{2})/2$.



ABCD è un quadrato. Prolungare verso l'alto i lati AB e DC. Tracciare le due diagonali AC e BD.

AC e BD hanno lunghezze uguali a (√2 * AB).

Se il lato AB ha lunghezza convenzionale "1", le diagonali AC e BD hanno lunghezze uguali a √2.

Fare centro in A e con raggio AC disegnare un arco da C fino a tagliare il prolungamento di AB in E.

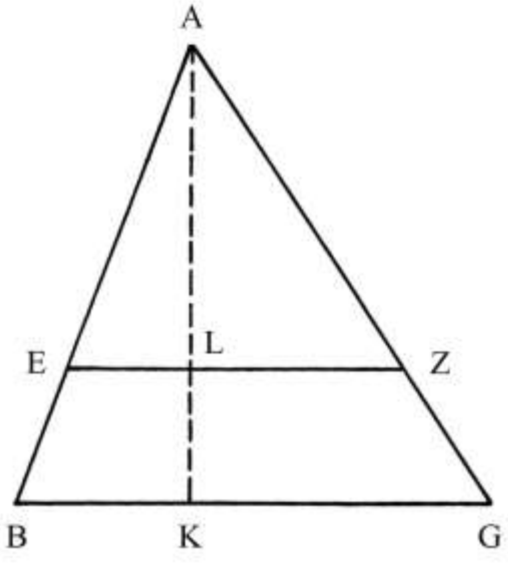
AEFD è un rettangolo che ha lati:

* AD;
* AE = AC = AD * √2.

I segmenti GA, GB, GC e GD sono quattro semidiagonali e sono tutti convenzionalmente lunghi (√2)/2.

- -

Riprendiamo in considerazione il triangolo ABG: in esso è tracciata l'altezza AK che incontra in L la corda EZ.



ABG e AEZ sono due triangoli simili. Come già spiegato, il lato AE è lungo [(√2) * AB/2]. Anche gli altri due lati di AEZ soddisfano lo stesso rapporto:

AZ = AG * (√2)/2 e

EZ = BG * (√2)/2.

Pure fra le due altezze intercorre la stessa proporzione:

AL = AK * (√2)/2.

L'area di ABG è:

A_{ABG} = AK * BG/2.

L'area di AEZ è data da:

A_{AEZ} = AL * EZ/2.

Sostituendo a AL e a EZ i valori calcolati sopra si ha:

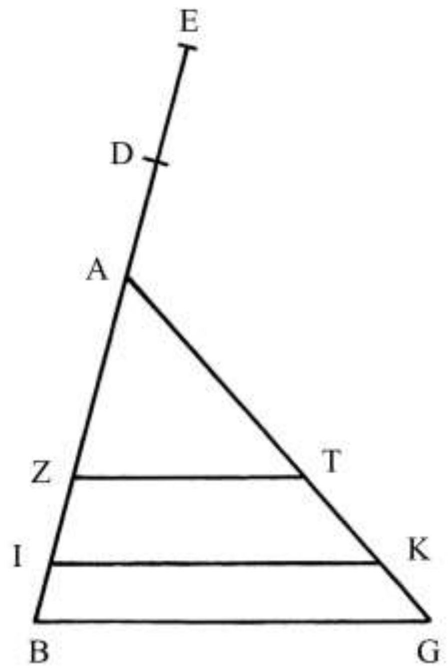
A_{AEZ} = [AK * (√2)/2 * BG * (√2)/2] = [(AK * BG)/2]2 = AK * BG/4.

L'area di AEZ è esattamente la metà di quella del triangolo ABG.

La costruzione del segmento EZ porta a un risultato corretto.

PROPOSIZIONE 2
Divisione di un triangolo in tre parti uguali con segmenti paralleli alla base
(da Fibonacci)

ABG è un triangolo che deve essere diviso in tre parti uguali con delle corde parallele alla base.



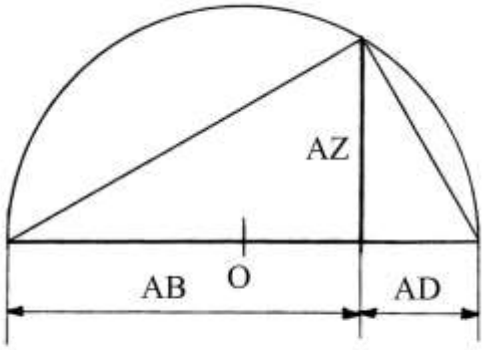
Prolungare verso l'alto il lato AB. Fissare il segmento AD lungo

AD = AB/3 e poi DE = AD.

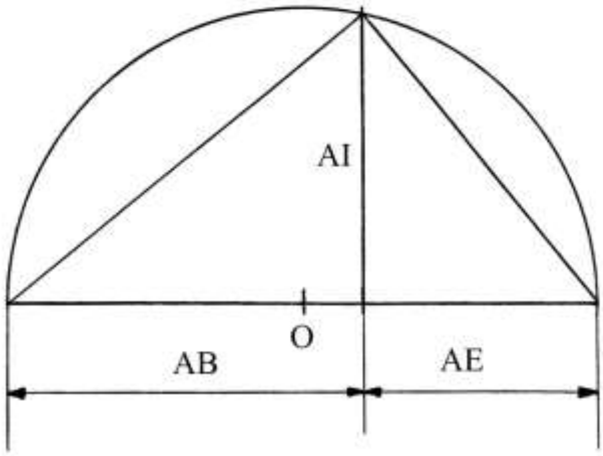
Ne consegue:

AE = 2/3 * AB.

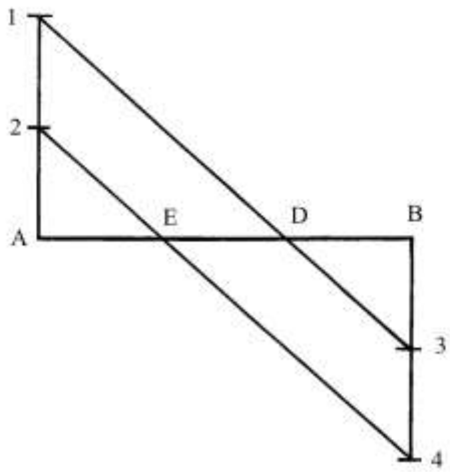
Con l'applicazione del 2° teorema di Euclide sui triangoli, determinare la lunghezza di AZ come medio proporzionale fra quelle di AB e di AD:



Il lato AI è medio proporzionale fra le lunghezze di AB e di AE:



La divisione in *tre* parti uguali di un segmento quale AB può essere effettuata con una semplice costruzione geometrica, nota già ai geometri Arabi:



Agli estremi A e B disegnare due segmenti perpendicolari rivolti in direzioni opposte. Fissare i punti 1, 2, 3 e 4 a distanze scelte a piacere ma:

A-1 = 1-2 = B-3 = 3-4.

Collegare le coppie di punti 1-3 e 2-4: questi segmenti tagliano AB dividendolo in *tre* parti uguali:

AE = ED = DB.

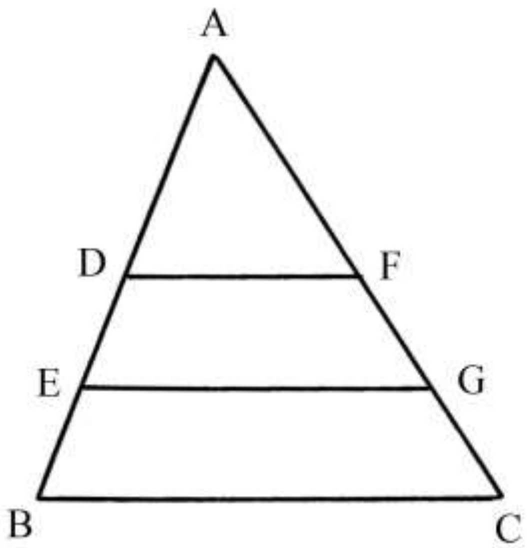
- APPROFONDIMENTO -

Un volgarizzamento della "*Practica geometriae"* di Fibonacci risalirebbe al 1441 ed è contenuto nel Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze: esso è noto dal nome del suo copista, il pisano Cristofano di Gherardo di Dino. Il codice è stato trascritto e pubblicato da Gino Arrighi.

Fra i problemi descritti vi è la divisione di un triangolo in tre parti.

Divisione di un triangolo in tre parti

Il triangolo scaleno ABC deve essere ripartito in tre parti uguali tagliando i lati AB e AC con segmenti paralleli alla base BC:



La procedura impiegata per dividere il triangolo ABC prevede i seguenti passi:

* calcolare il quadrato della lunghezza di AB: AB^2;
* dividere per 3: $AB^2/3$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(AB^2/3)}$, lunghezza del segmento AD;
* moltiplicare il quadrato di AB per 2/3: $2/3 * AB^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(2/3 * AB^2)}$, lunghezza di AE.

Le due lunghezze possono essere scritte come segue:

$$AD = \sqrt{(AB^2/3)} = AG/\sqrt{3} = \sqrt{3} * AB/3;$$

$$AE = \sqrt{(2/3 * AB^2)} = AB * (\sqrt{2})/(\sqrt{3}) = AB * (\sqrt{2} * \sqrt{3})/3 = AB * (\sqrt{6})/3.$$

Dai punti D e E tracciare le parallele DF e EG alla base BC: il triangolo è diviso in tre poligoni che hanno area uguale a *un terzo* di quella di ABC:

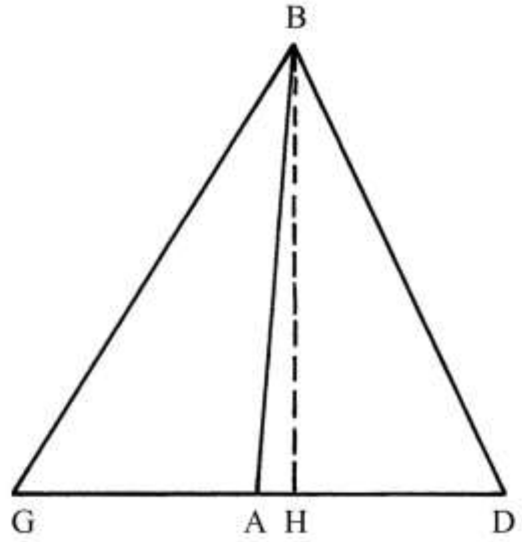
* il triangolo ADF (simile a quello ABC);
* il trapezio scaleno DEGF;
* il trapezio scaleno EBCG.

- -

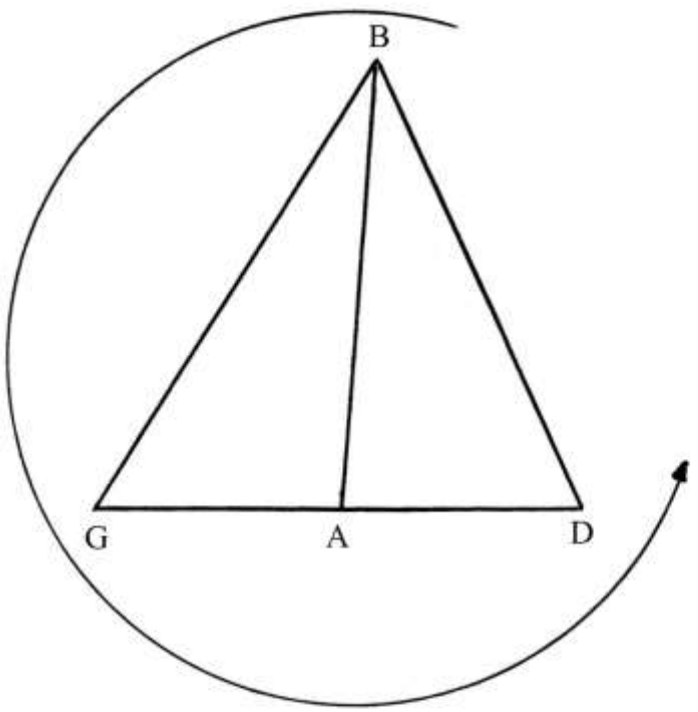
PROPOSIZIONE 3

Dividere un triangolo in due parti uguali (da Fibonacci)

BGD è un triangolo che deve essere diviso in due parti di uguale superficie:



È da notare l'andamento *antiorario* dell'apposizione delle lettere: B → G → D.



Il triangolo deve essere diviso in due parti uguali con una corda tracciata dal vertice B al punto medio del lato opposto: è BA.

Il segmento BH è l'altezza comune a BGD e ai due triangoli BGA e BAD.

L'area di BGD è:

A_{BGD} = BH * GD/2 = BH * GA.

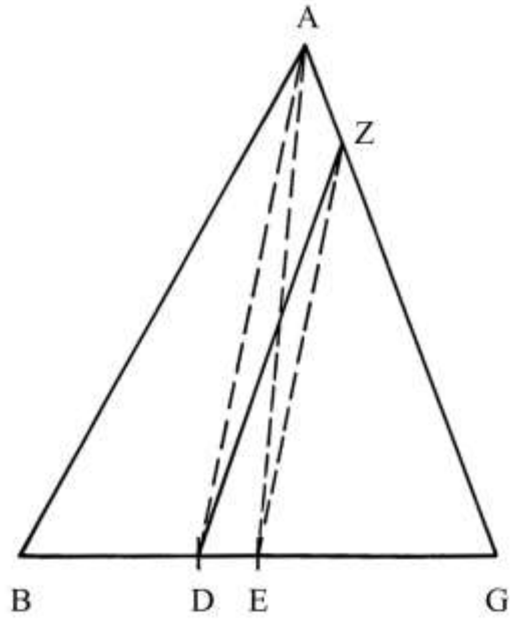
Le aree degli altri due triangoli sono:

* A_{BGA} = BH * GA/2 = BH * (GD/2)/2 = BH * GD/4;
* A_{BAD} = BH * AD/2 = GH * (GD/2)/2 = BH * GD/4.

Le aree dei triangoli BGA e BAD sono fra loro uguali e sono la metà di quella di BGD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della precedente costruzione è presentata nello schema che segue:



Il triangolo ABG deve essere diviso in due poligoni di area uguale, con una corda uscente da un punto generico D, posizionato sul BG: esso non è il suo punto medio.

Fissare il punto medio di BG: è E.

Collegare A con D e con E.

Dal punto E tracciare la parallela a AD: è EZ.

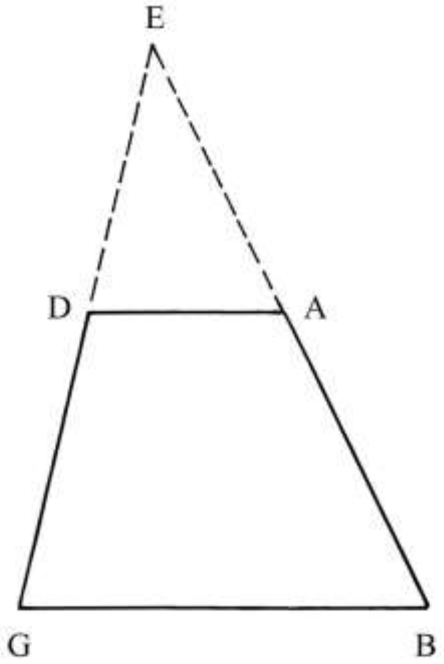
Infine disegnare la corda DZ: essa divide il triangolo ABG in due poligoni che hanno aree uguali:

* il triangolo DZG;
* il quadrilatero ABDZ.

PROPOSIZIONE 4

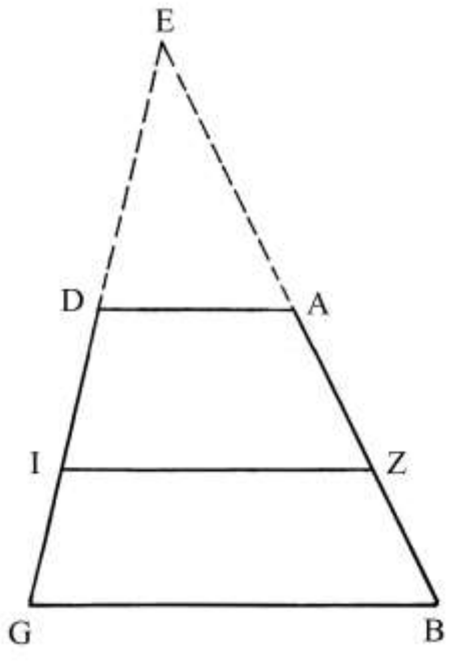
Divisione di un trapezio in due parti uguali (da Fibonacci)

ABGD è un trapezio che deve essere diviso in due parti uguali con una corda parallela alle sue basi.



Prolungare i lati AB e DG verso l'alto fino a farli incontrare in E: il trapezio ABGD è originato dal taglio del triangolo DEA lungo il segmento DA.

Il punto Z è un estremo della corda che effettua la divisione:



La soluzione proposta per stabilire la posizione di Z è riassunta con la formula che segue:

$2 * ZE^2 = EB^2 + EA^2$ e

$ZE^2 = (EB^2 + EA^2)/2.$

A sua volta, ZE è:

$ZE = \sqrt{[(EB^2 + EA^2)/2]}.$

IZ è la corda cercata.

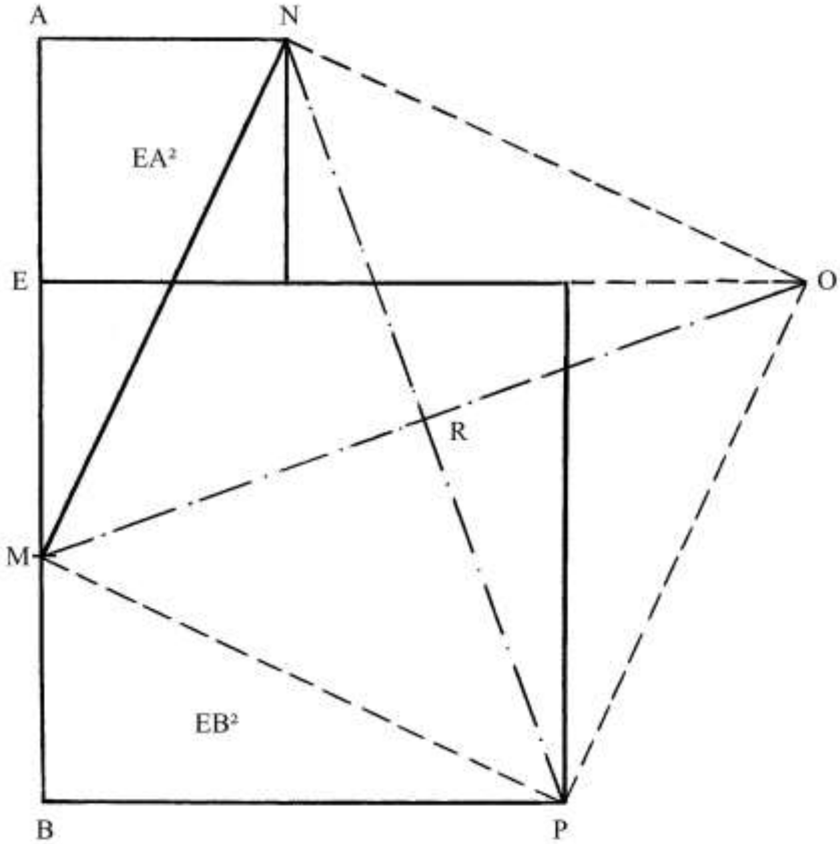
AZID e ZBGI sono due trapezi che hanno aree uguali.

- APPROFONDIMENTO -

Proponiamo una soluzione geometrica del problema della determinazione della lunghezza di EZ, a partire dalla formula appena presentata.

Occorre in primo luogo misurare le lunghezze di EA e di EB (oppure quelle corrispondenti di ED e di EG).

Tracciare un segmento lungo quanto EB e prolungarlo verso l'alto: da E riportare la lunghezza di AE e poi stabilire BM = AE.



Costruire i quadrati su BE e su EA: essi devono essere fusi in un quadrato somma che è MNOP.

La lunghezza di ZE è data dalla radice quadrata della metà dell'area di MNOP:

$ZE = \sqrt{(A_{MNOP})/2}$.

Un quadrato che ha area uguale a metà di quella di MNOP è quello che ha per lato la semidiagonale MR di quel quadrato e quindi:

$ZE = \sqrt{MR^2} = MR$.

MR è la lunghezza di EZ.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Alcuni importanti storici della matematica quali lo svedese Jöran Friberg e il danese Jens Høyrup ritengono che il problema della bisezione di un trapezio con un segmento parallelo alle due basi del quadrilatero risalga ai Babilonesi: il contenuto di una tavoletta attribuita al XXIII secolo a.C. lo dimostrerebbe.

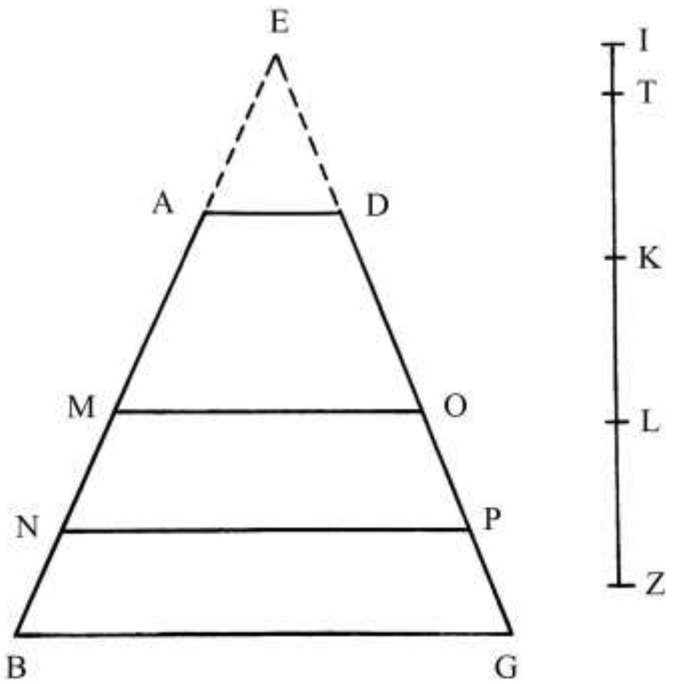
Nella stesura del suo "*Sulle divisioni delle figure*" Euclide sarebbe stato influenzato dalle conoscenze degli agrimensori Babilonesi.

- -

PROPOSIZIONE 5

Divisione di un trapezio in tre parti uguali (da Fibonacci)

ABGD è un trapezio che deve essere diviso in tre poligoni di aree uguali, per mezzo di due corde parallele alle basi.



Prolungare verso l'alto AB e GD fino a fissare E.

A fianco è disegnato il segmento verticale ZTI le cui lunghezze sono calcolate con metodi aritmetici:

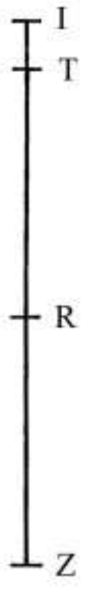
$$ZI : IT = EB^2 : EA^2.$$

Il rapporto ZI/IT è dato da:

$$ZI/IT = EB^2/EA^2.$$

Dopo aver scelta una lunghezza per ZI, quella di IT ne risulta di conseguenza.

Un passaggio intermedio contenuto nel testo di Archibald prevede la divisione di TZ in *due* parti uguali:



TR = RZ.

A questo punto, Archibald introduce una nuova proporzione:

$EM^2 : EB^2 = RI : ZI$.

Essa permette di determinare la posizione di M sul lato EB: MO è una corda parallela alle due basi AD e BG.

L'Autore divide in *tre* parti uguali il segmento TZ:

TK = KL = LZ.

È ora utilizzata una nuova proporzione:

$EN^2 : EB^2 = IL : ZI$.

La soluzione di questa proporzione, per via aritmetica, fornisce la lunghezza di EN e la posizione di N sul segmento EB.

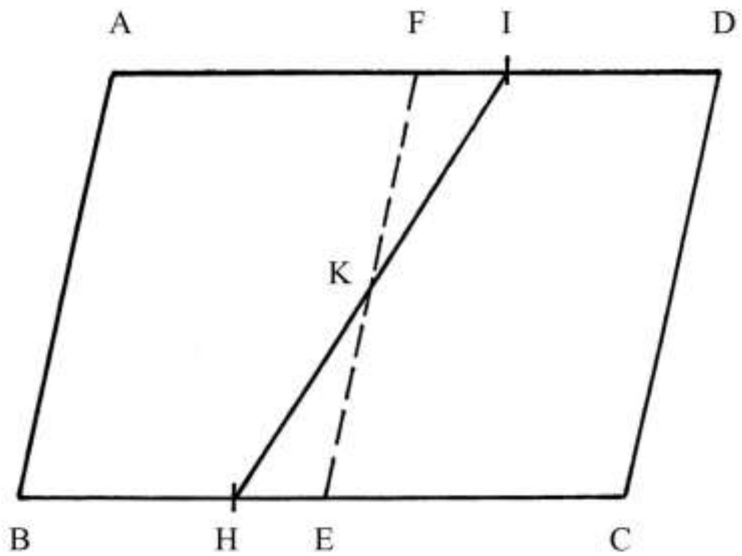
NP è la seconda corda parallela alle due basi del trapezio ABGD.

I trapezi AMOD, MNPO e NBGP hanno aree uguali, pari a *un terzo* di quella di ABGD.

PROPOSIZIONE 6

Dividere un parallelogramma con una corda uscente da un punto (da Fibonacci)

ABCD è un parallelogramma. Deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente da un punto, I, collocato sul lato AD:



Stabilire i punti medi delle due basi: sono E e F. EF è una mediana.

Dal punto E riportare verso sinistra la lunghezza di FI: è fissato il punto H.

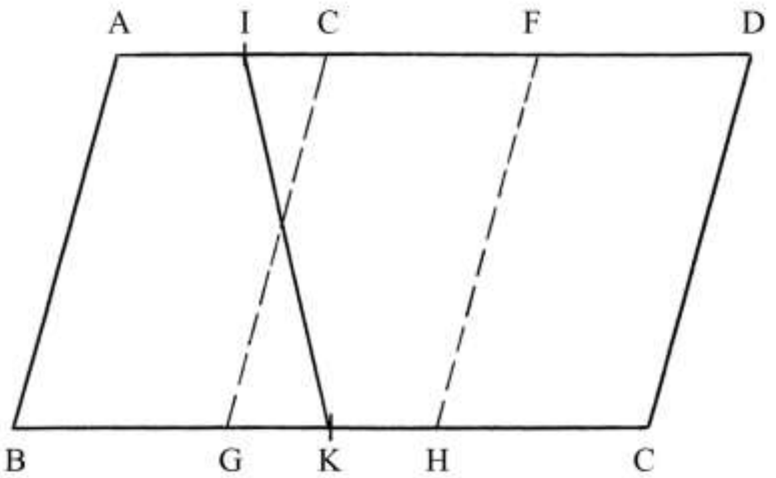
Collegare I con H: la corda IH divide il parallelogramma in due quadrilateri di aree uguali: sono ABHI e HCDI.

Il punto K è l'intersezione fra EF e IH: è il loro comune punto medio.

PROPOSIZIONE 7

Divisione di un parallelogramma in due parti proporzionali (da Fibonacci)

ABCD è un parallelogramma: esso deve essere diviso in due parti proporzionali a 1/3 e a 2/3 con una corda uscente da un punto, I, del lato AD.



Dividere i lati AD e BC in *tre* parti uguali e tracciare le corde CG e FH.

Fissare il punto medio di BC: è K.

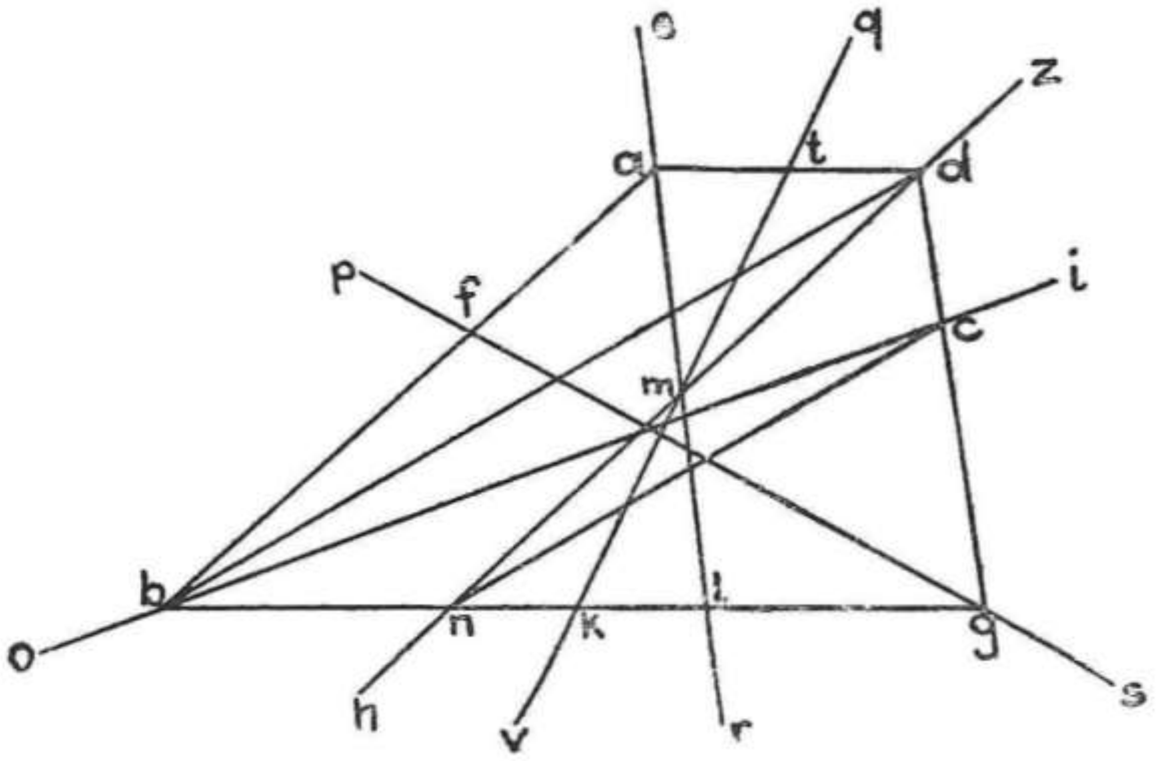
Disegnare la corda IK: il trapezio ABKI ha area uguale a un terzo di quella di ABCD e il trapezio IKCD ha area uguale a due terzi.

PROPOSIZIONE 8

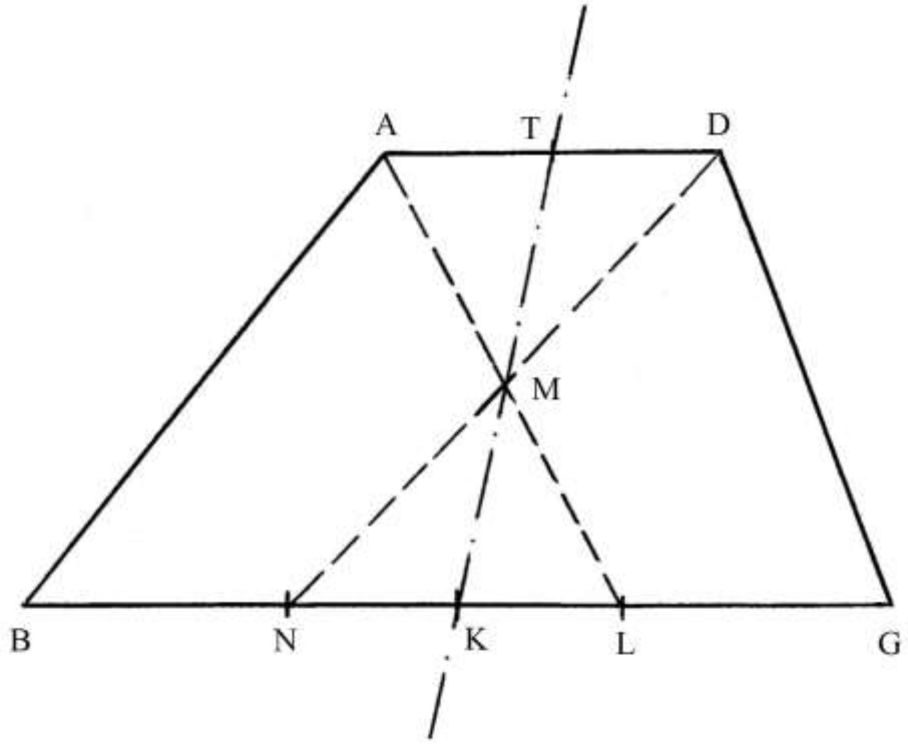
Divisione di un trapezio in due parti uguali (da Fibonacci)

ABGD è un trapezio che deve essere diviso in *due* parti uguali.

Lo schema originale pubblicato da Archibald è abbastanza complesso:



Esso racchiude diverse soluzioni che, per maggiore chiarezza, di seguito sono separate.
Fissare i punti medi delle basi: sono T e K. Collegare T e K.



Dal punto K riportare sul lato BG la lunghezza di AT: NK e KL hanno la stessa lunghezza di AT (e di TD).

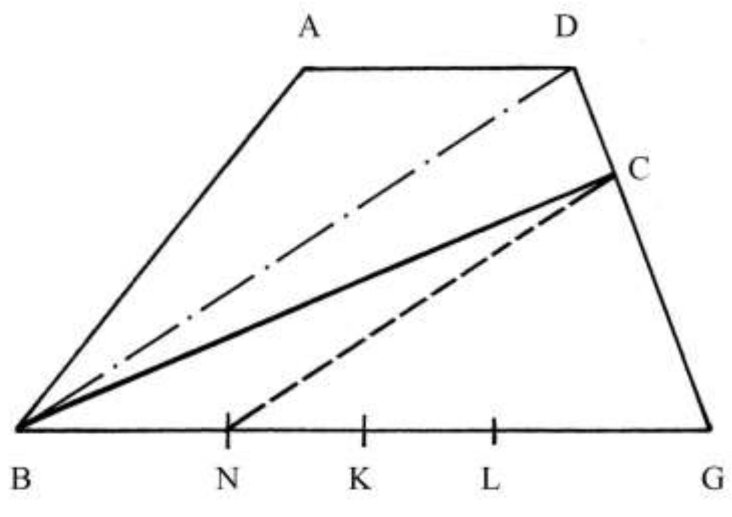
Collegare A con L e D con N.

Il trapezio è diviso in due poligoni di aree uguali, con tre diverse ripartizioni:

* il quadrilatero ABKT e il trapezio TKGD;
* il triangolo ABL e il quadrilatero ALGD;
* il triangolo NDG e il quadrilatero ABND.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un'ulteriore divisione è descritta nella figura che segue:



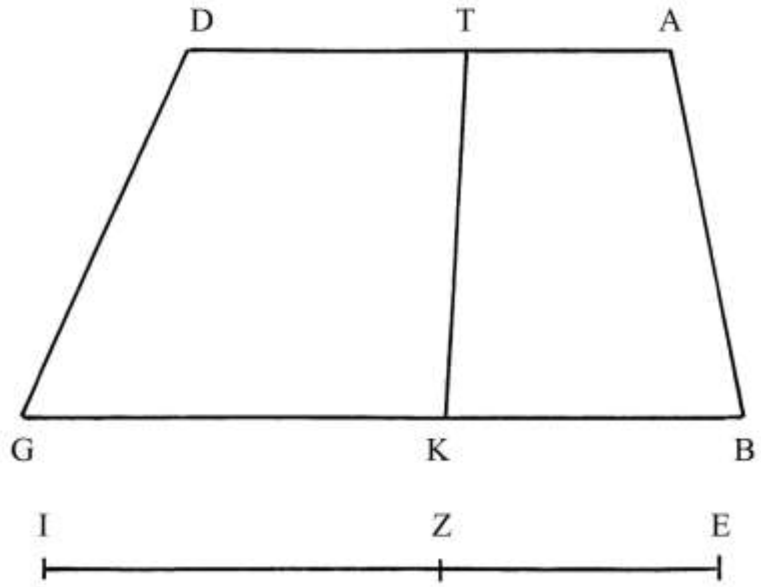
Tracciare la diagonale BD. Parallela ad essa condurre la corda NC.
Infine, collegare B con C: BC divide il trapezio in due poligoni di uguale area:

* il quadrilatero ABCD;
* il triangolo BGC.

PROPOSIZIONE 9

Divisione di un trapezio in proporzione a due lunghezze (da Fibonacci)

ABGD è un trapezio che deve essere diviso in due poligoni con aree proporzionali alle lunghezze dei segmenti IZ e ZE.



Le due basi sono divise in proporzione:

DT : TA = IZ : ZE e

GK : KB = IZ : ZE.

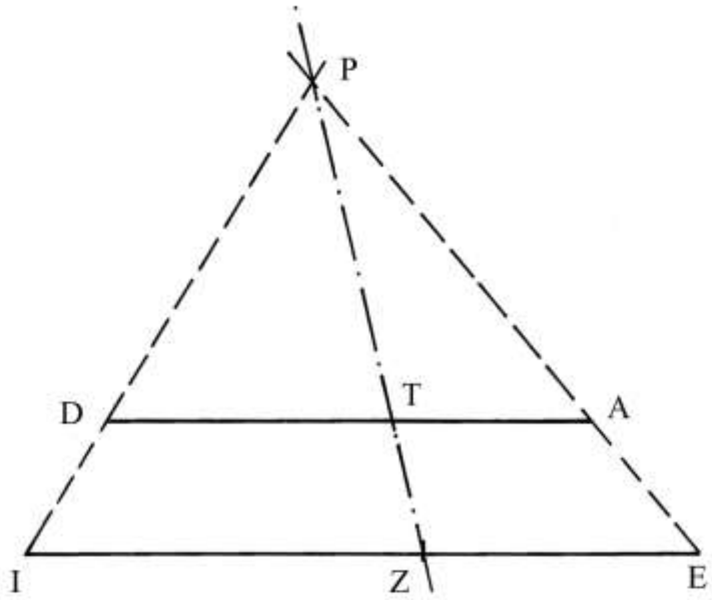
Le aree sono nella stessa proporzione:

$A_{DGKT} : A_{ABKT}$ = IZ : ZE.

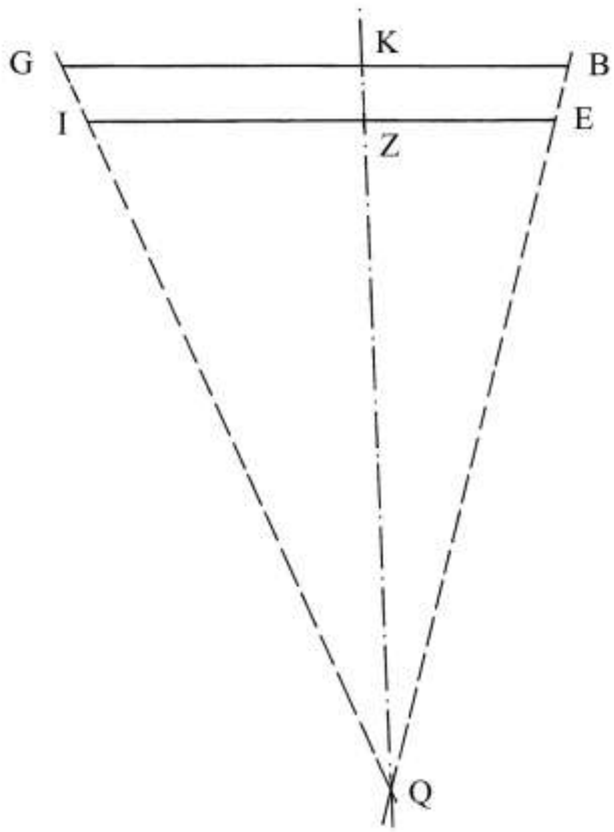
Le lunghezze di DT e di TA possono essere ricavate per via aritmetica oppure per via geometrica con l'applicazione del teorema di Talete sulle rette parallele.

Tracciare due rette parallele a distanza a piacere: su quella inferiore riportare il segmento IZE. Sulla retta superiore riprodurre la base minore DA.

Per le coppie di punti I-D e E-A tracciare verso l'alto due semirette: esse si incontrano nel punto P. Da questo ultimo disegnare una retta passante per Z: essa taglia DA nel punto T.



Con lo stesso metodo può essere determinata la posizione di Z:

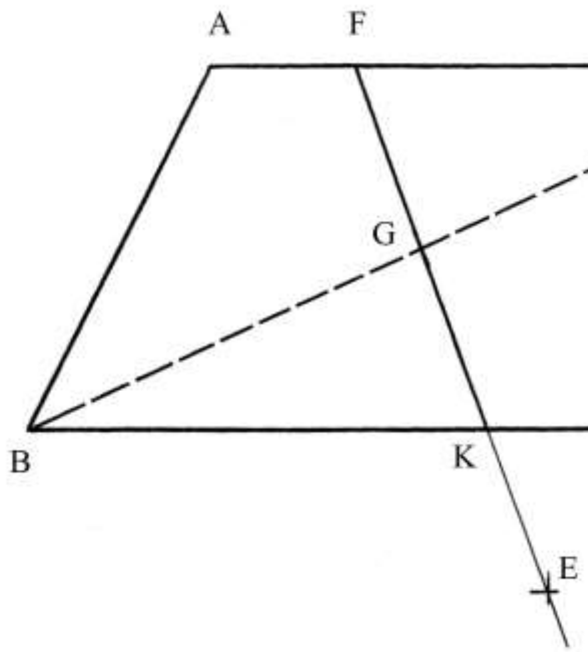


Nota: per ragioni di spazio, l'ultimo schema è riprodotto in scala ridotta (il 70% rispetto ai precedenti grafici).

PROPOSIZIONE 10

Divisione di un parallelogramma in due parti uguali (da Fibonacci)

ABCD è un parallelogramma che deve essere diviso in due parti di uguali aree con una linea passante per un punto esterno, E.



Disegnare la diagonale maggiore BD e fissare il suo punto medio, G.

Tracciare una linea passante per E e per G: essa taglia il lato BC in K e quello AD in F.

La corda FK divide il parallelogramma ABCD in due trapezi di aree uguali: ABKF e FKCD.

PROPOSIZIONE 11

Dividere un parallelogramma in due parti uguali

Il testo di Archibald non è accompagnato da alcuno schema.

Il quadrilatero deve essere diviso in due parti di uguale area con una linea passante per un punto esterno al poligono.

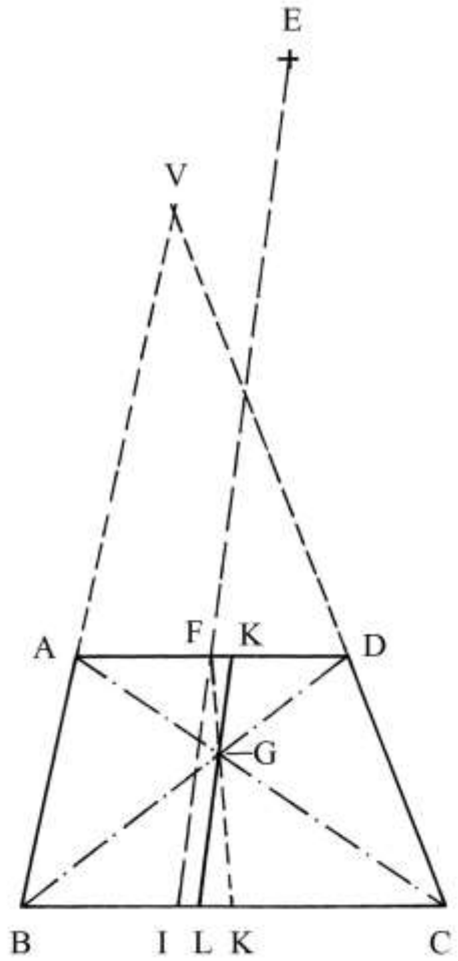
La costruzione sembra simile a quella della Proposizione 10.

PROPOSIZIONE 12

Divisione di un trapezio in due parti uguali con una linea passante per un punto esterno (da Fibonacci)

Anche questa Proposizione non è accompagnata da uno schema. Qui se ne dà un'interpretazione.

Il trapezio ABCD deve essere diviso in due parti uguali con una linea passante per un punto esterno, E, o con una parallela ad essa. Questo punto deve trovarsi all'esterno dell'area delimitata dai prolungamenti dei lati AB e DC, che si incontrano in V.

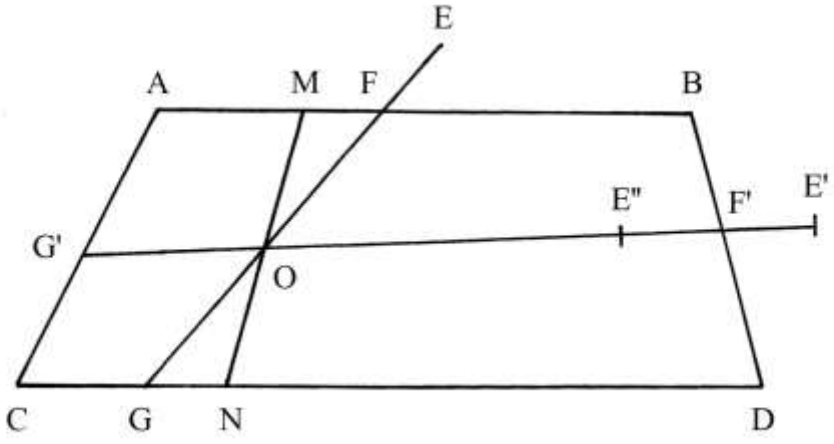


Disegnare le diagonali AC e BD: G è la loro intersezione.
Fissare i punti medi delle basi: sono F e H. FH divide il trapezio in due parti di aree uguali.
Tracciare una linea da E e passante per il punto E: essa incontra BC in I.
Per G disegnare una corda parallela a FI: è KL.
ABCD è diviso in due quadrilateri che hanno uguali aree: ABLK e KLCD.

PROPOSIZIONE 13

Taglio di un trapezio con una linea passante per un punto dato (da Fibonacci)

Il problema sembra essere in parte collegato a quello risolto nella Proposizione 8.
ABDC è il trapezio e E è il punto dato.



La costruzione è piuttosto oscura: qui se ne dà una soluzione.

Il trapezio è diviso in due poligoni con la corda MN: sono AMNC e MNDB.

A titolo di ipotesi, può essere stabilita una proporzione:

AM : MB = CN : ND = 2 : 5.

Anche le aree dei due quadrilateri sono nella stessa proporzione:

$A_{AMNC} : A_{MNDB} = 2 : 5$.

L'area di AMNC è pari a 2/7 di quella di ABDC e quella di MNDB è quella a 5/7 di quella di ABDC.

Sono fissati due ulteriori punti: E' (esterno) e E'' (interno al trapezio): la linea che li collega taglia BD in F, MN in O e AC in G'.

Tracciare una linea passante per E e per O: essa incontra AB in F e CD in G.

I triangoli OMF e ONG hanno uguali dimensioni.

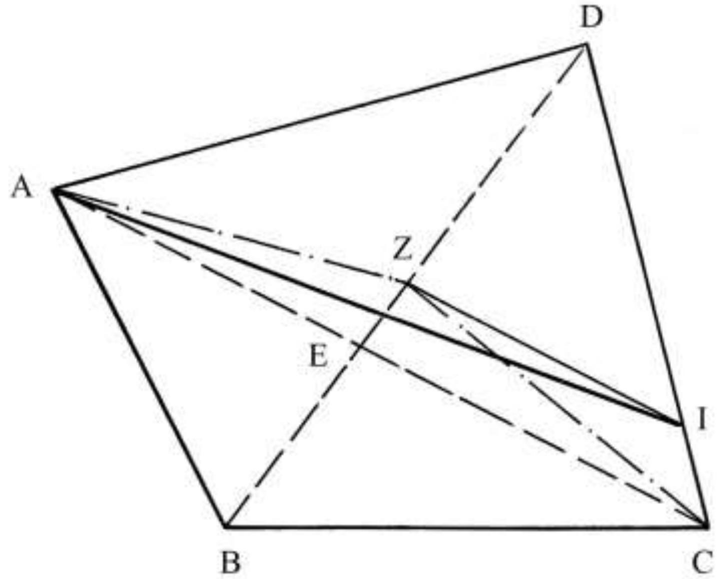
La corda G'F' *non* divide il trapezio ABDC in due parti uguali.

PROPOSIZIONE 14

Divisione di un quadrilatero in due parti uguali con una corda uscente da un vertice

(da Fibonacci)

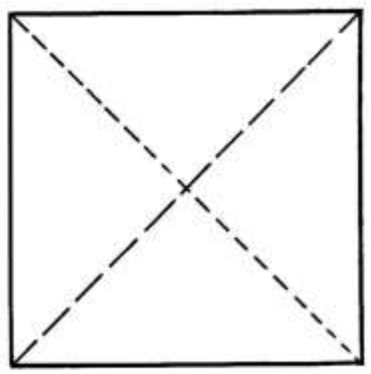
ABCD è il quadrilatero da dividere con una corda uscente da A.

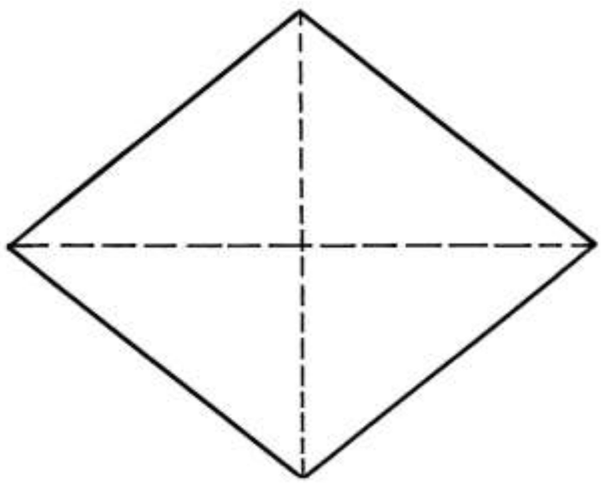


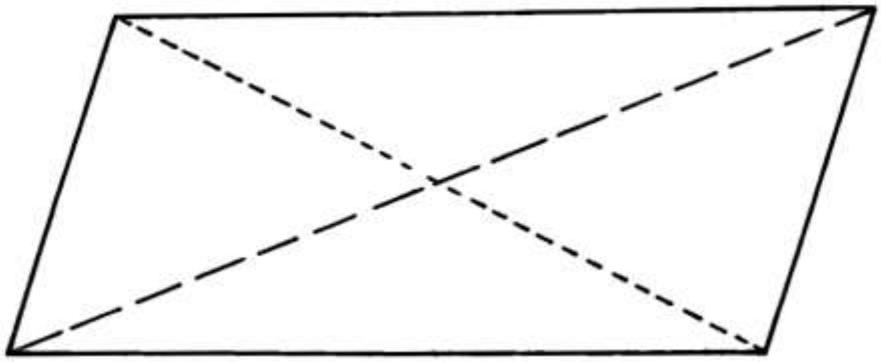
Disegnare le diagonali AC e BD che si incontrano in E.
Se BE fosse lungo quanto ED, la diagonale AC dividerebbe il quadrilatero in due parti uguali e il problema sarebbe risolto: ma non è così.
Fissare il punto medio di BD: è Z.
Collegare Z con A e con C.
Dal punto Z tracciare una parallela a AC: è ZI.
Disegnare la corda AI: essa divide ABCD in due poligoni di aree uguali: il quadrilatero AICB e il triangolo ADI.

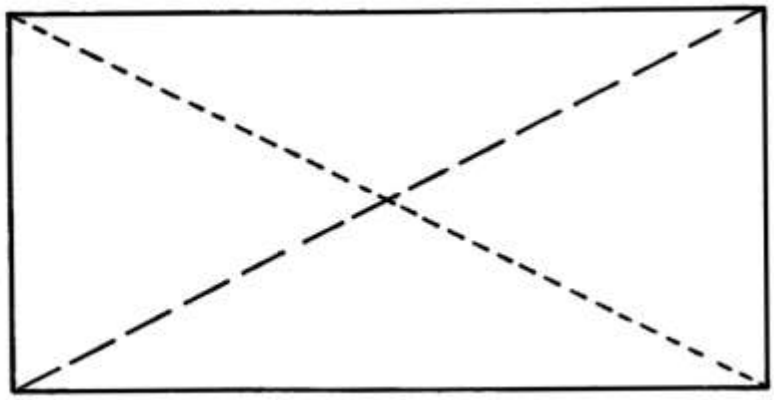
- APPROFONDIMENTO -

Fra i quadrilateri solo i quadrati, i rombi, i parallelogrammi e i rettangoli possono essere divisi in due parti uguali con una sola diagonale:



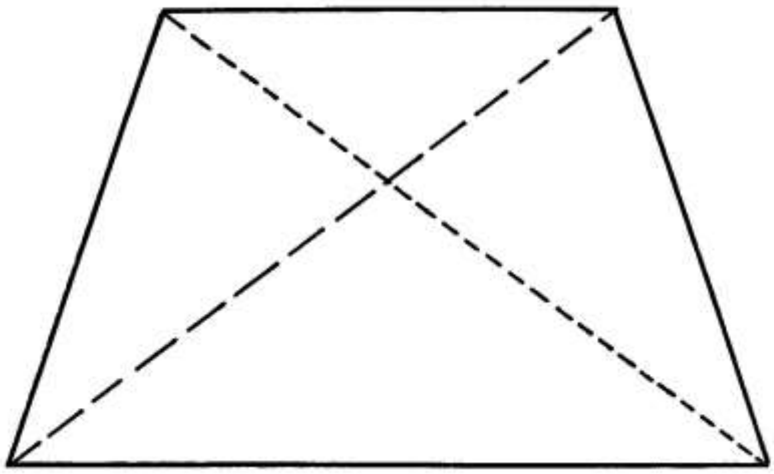






La tracciatura di entrambe le diagonali di questi poligoni porta alla loro scomposizione in *quattro* triangoli di aree uguali.

Un trapezio non può essere diviso in due o quattro parti uguali per mezzo delle diagonali, come è il caso di quello isoscele della figura che segue:

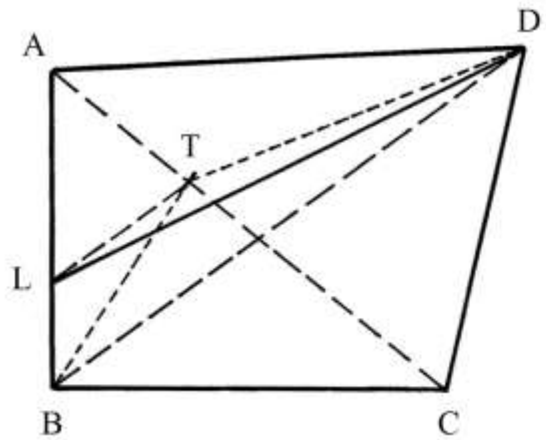


- -

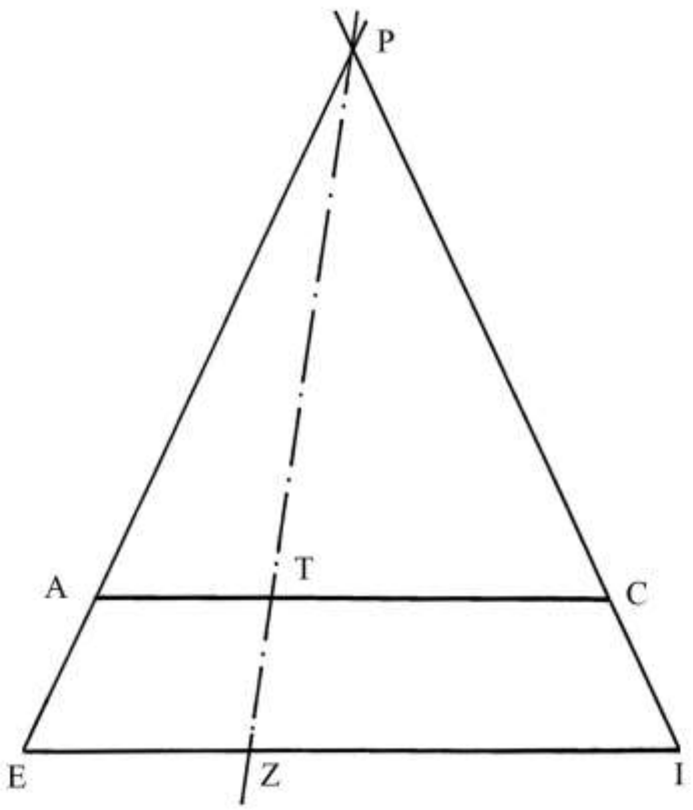
PROPOSIZIONE 15

Dividere un quadrilatero secondo una proporzione data (da Fibonacci)

Il quadrilatero ABCD deve essere diviso, con una corda uscente dal vertice D, in due parti proporzionali alle lunghezze dei segmenti EZ e ZI.



Tracciare le diagonali AC e BD. Dividere la diagonale AC in proporzione alle lunghezze di EZ e di ZI: a questo scopo provvede la costruzione che è mostrata nello schema che segue:



Su due linee parallele riportare le lunghezze di AC e di EZI: disegnare le semirette passanti per le coppie di punti E-A e I-C. Esse si intersecano nel punto P: per questo punto e per Z tracciare una retta che taglia AC nel punto T.

Sul primo schema riportare le lunghezze di AT e di TC sulla diagonale AC.

Dal punto T disegnare una parallela a BD: è TL.

Collegare L con D.

La corda LD divide il quadrilatero in due poligoni: il triangolo ALD e il quadrilatero BLDC. Le loro aree sono proporzionali:

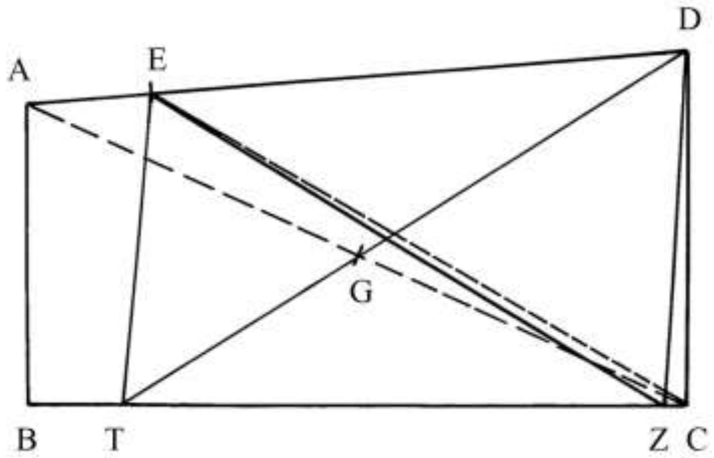
$A_{ALD} : EZ = A_{BLDC} : ZI.$

PROPOSIZIONE 16

Dividere un quadrilatero in due parti uguali con una corda uscente da un punto di un lato (da Fibonacci)

I CASO

ABCD è il quadrilatero da dividere con una linea uscente dal punto E.



Tracciare la diagonale AC e la corda EC.

Determinare il punto medio di AC: è G.

Dal punto D disegnare una corda passante per G: è DGT.

Collegare E con T.

Dal punto D tracciare la parallela a ET: è DZ.

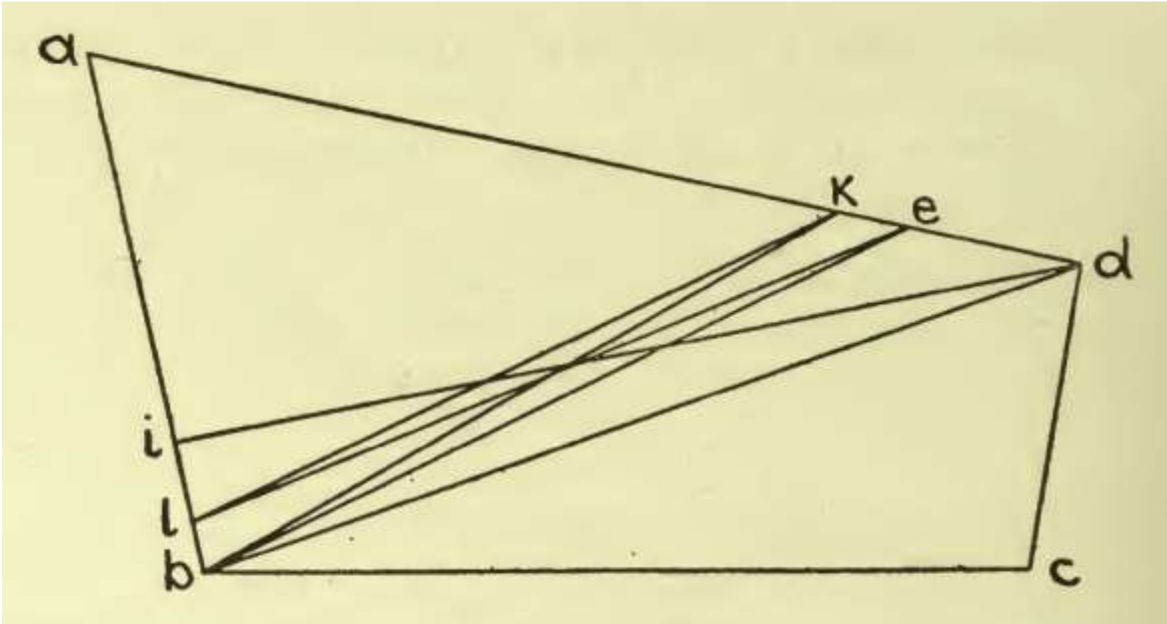
La corda EZ divide il quadrilatero in due poligoni che hanno aree uguali: il quadrilatero ABZE e il quadrilatero EDCZ.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

II CASO

Il punto E è collocato sul lato AD del quadrilatero. Probabilmente, lo schema originale di Archibald presenta almeno due difetti:

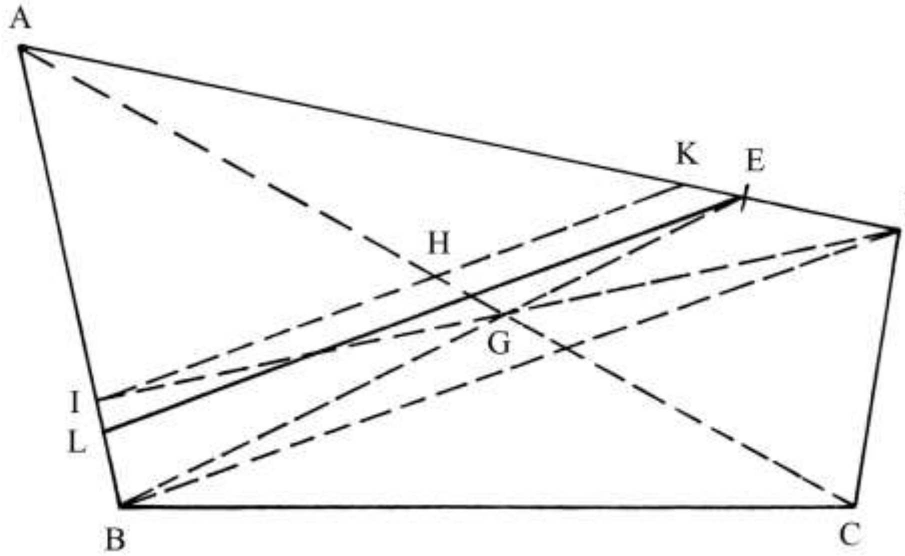
* mancano alcune linee (la diagonale AC e la corda IK);
* non vi è distinzione grafica fra le linee di costruzione interne al poligono e ausiliarie (diagonali e corde) e la corda che lo divide (EL).



Il testo di Archibald non contiene alcuna spiegazione. Anche per questa Proposizione si tenta un'interpretazione.

Tracciare le diagonali AC e BD e la corda EB.

Questa ultima incontra la diagonale AC in G.



Per il punto G disegnare una corda uscente da D: è DGI.

H è il punto medio di AC.

Per il punto H tracciare una corda parallela a BD: è IHK.

Collegare I con D: la corda passa per il punto G.

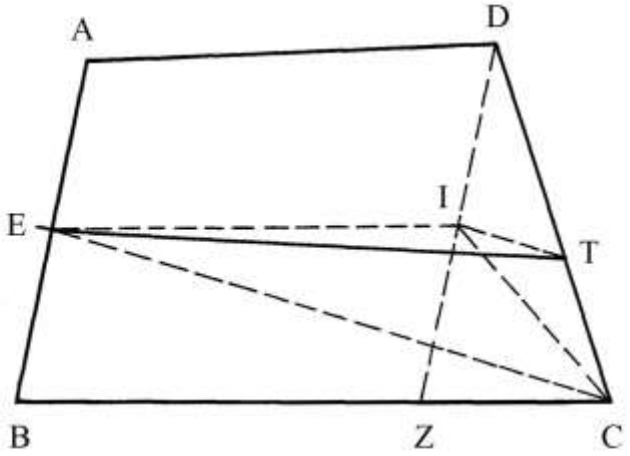
Dal punto E disegnare una corda parallela a KI: è EL.

EL divide il quadrilatero ABCD in due poligoni con aree uguali: il triangolo ALE e il pentagono non regolare LBCDE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

III CASO

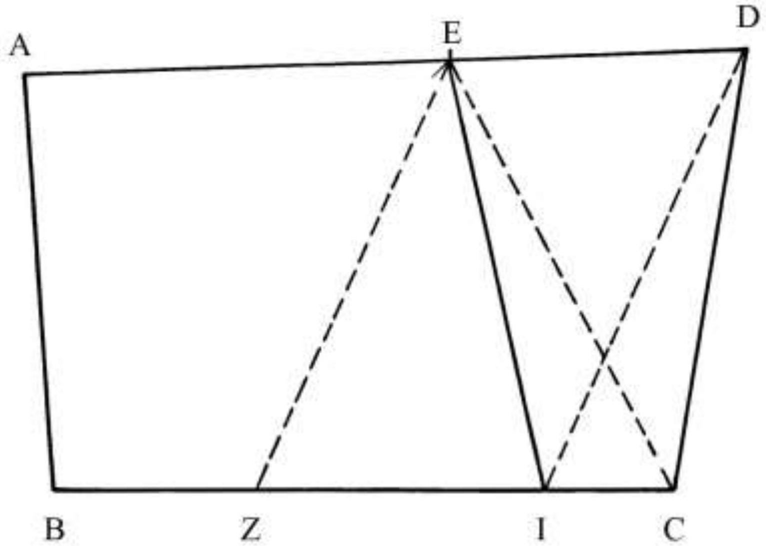
ABCD è un quadrilatero che deve essere diviso in due parti uguali con una linea uscente dal punto medio di AB, E.



Dal punto D tracciare la parallela DZ al lato AB.
Fissare i punti medi di AB e di DZ: sono E e I.
Collegare E con I, E con C e I con C.
Parallelo a EC disegnare il segmento IT.
ET divide in due parti uguali il quadrilatero ABCD: sono i quadrilateri ADTE e ETCB.
Archibald fa notare che i triangoli ITC e ITE hanno aree uguali.

PROPOSIZIONE 17
Divisione di un quadrilatero a partire da un punto di un lato (da Fibonacci)
I CASO

ABCD è un quadrilatero che deve essere diviso in due parti con una corda uscente da E: una delle due parti deve essere uguale a *un terzo* dell'area del poligono.



Sul lato BC fissare il punto Z a distanze:

* BZ = 1/3 di BC;
* ZC = 2/3 di BC.

Collegare E con Z r con C: dato che EZ non è parallelo al lato DC, dal punto D tracciare la parallela a EZ, che è EI.

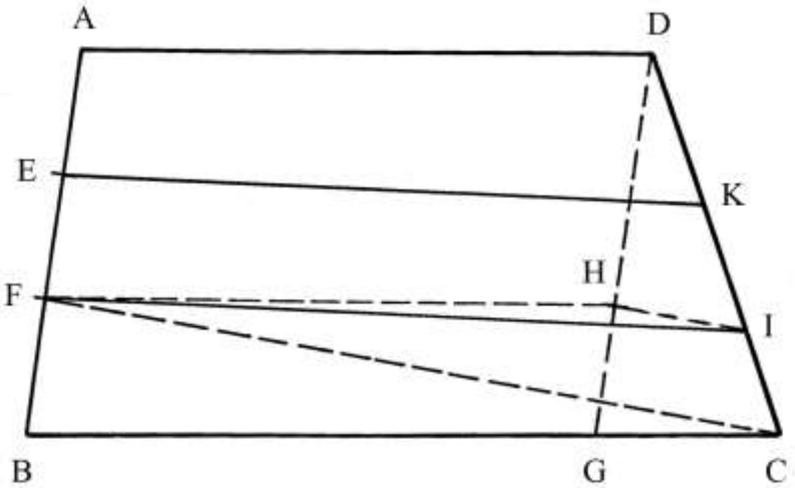
EI divide il parallelogramma ABCD in due quadrilateri:

* EDCI che ha area uguale a 1/3 di quella di ABCD;
* AEIB che ha area uguale a 2/3 di quella di ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

II CASO

ABCD è un quadrilatero che deve essere diviso in *tre* parti uguali.

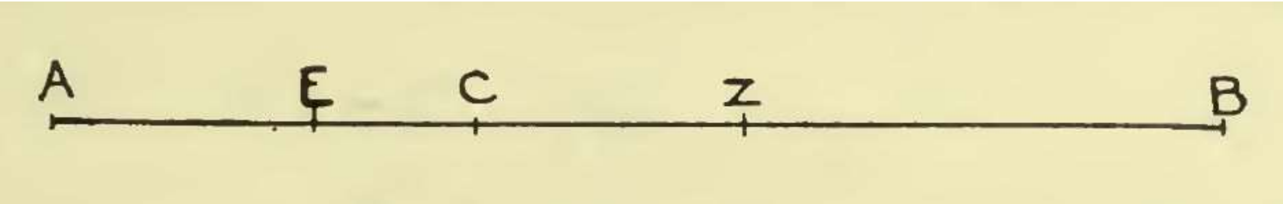


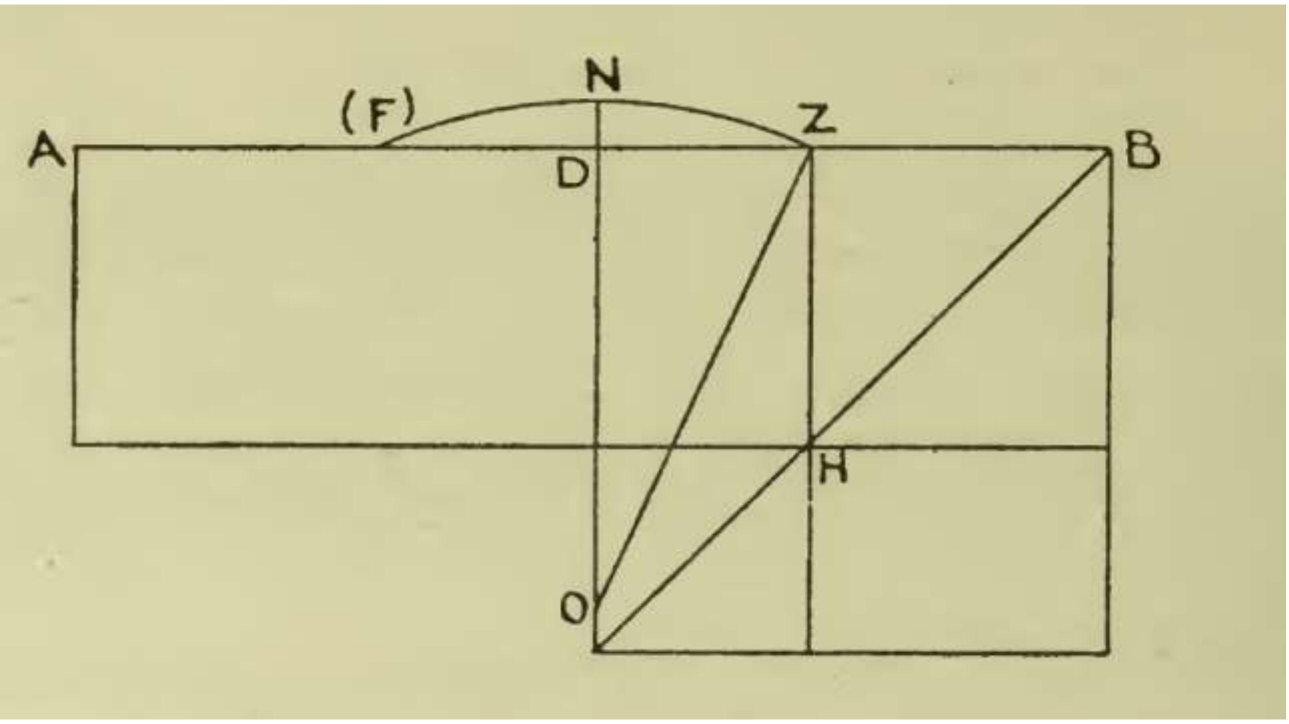
Dividere in *tre* parti uguali AB: sono fissati i punti E e F.
Dal vertice D tracciare la parallela al lato AB: è DG.
Su DG stabilire il punto H a distanza:
HG = 1/3 * DG.
Collegare F con C.
Parallelamente a FC disegnare HI.
Tracciare FI e parallela ad essa disegnare la corda EK.
I quadrilateri ADKE, EKIF e FICB hanno aree uguali a *un terzo* di quella di ABCD.

PROPOSIZIONE 18
Rettangolo equivalente a un altro

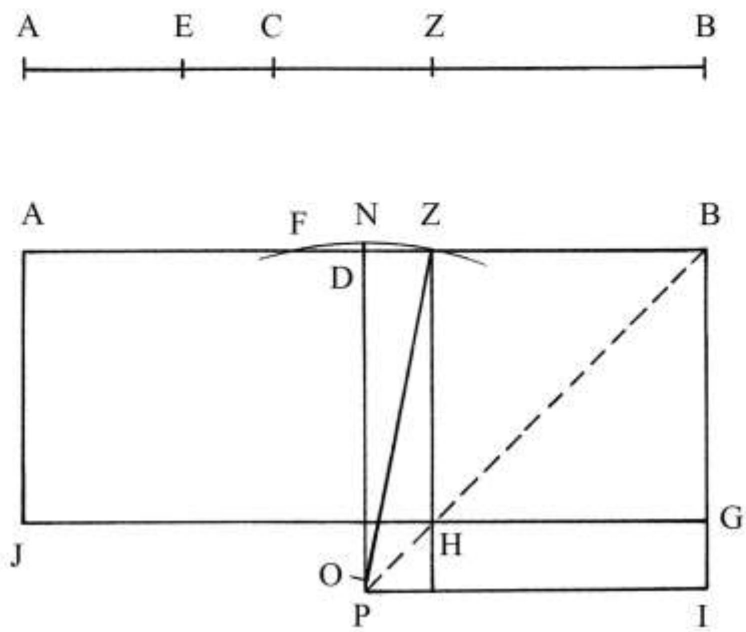
Il titolo che qui è assegnato a questa Proposizione non è l'originale ma è stato semplificato e adattato al seguito della descrizione.

I due schemi che accompagnano la soluzione originaria di Archibald non sono molto precisi e non sono stati disegnati nella stessa scala.





La figura che segue ricostruisce i due schemi precedenti utilizzando un’unica scala:



Il punto D è il medio di AB.

Su ZB è costruito il quadrato ZBGH. ABGJ è un rettangolo che ha lati lunghi AB e BG (che è lungo quanto ZB).

DBIP è un quadrato che ha lati lunghi quanto NB = AN = AB/2.

Con raggio DB fare centro in Z e tracciare un arco che fissa il punto O sul lato DP: ZO è una corda.

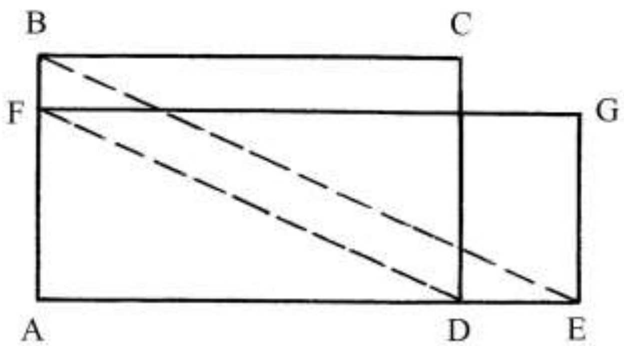
Fare centro in O e con raggio OZ traccia una arco che passa per Z e stabilisce il punto F.

La Proposizione sembra finalizzata alla composizione e scomposizione di rettangoli e quadrati con lati secondo date proporzioni.

- APPROFONDIMENTO -

Il problema della costruzione di un rettangolo equivalente a un altro può essere risolto per via geometrica.

ABCD è un rettangolo: deve essere costruito un secondo rettangolo che abbia la stessa superficie e il lato orizzontale lungo quanto AE.



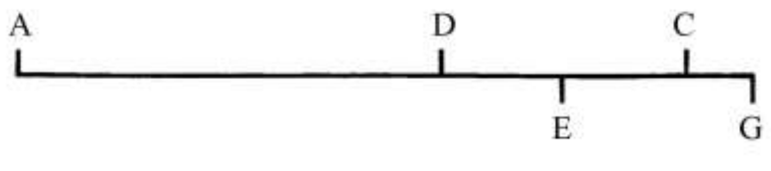
Collegare B con E. Dal punto D tracciare una corda parallela a BE: è DF.

Da E e da F condurre le parallele a AB e a AE: G è il quarto vertice del rettangolo equivalente AFGE.

$A_{ABCD} = A_{AFGE}$

AD * DC = AE * EG.

Lo schema che segue riporta su di una stessa retta le lunghezze dei lati dei due rettangoli:



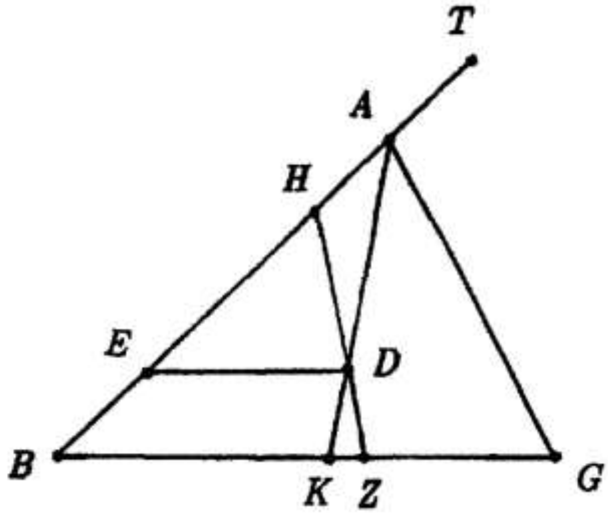
- -

PROPOSIZIONE 19

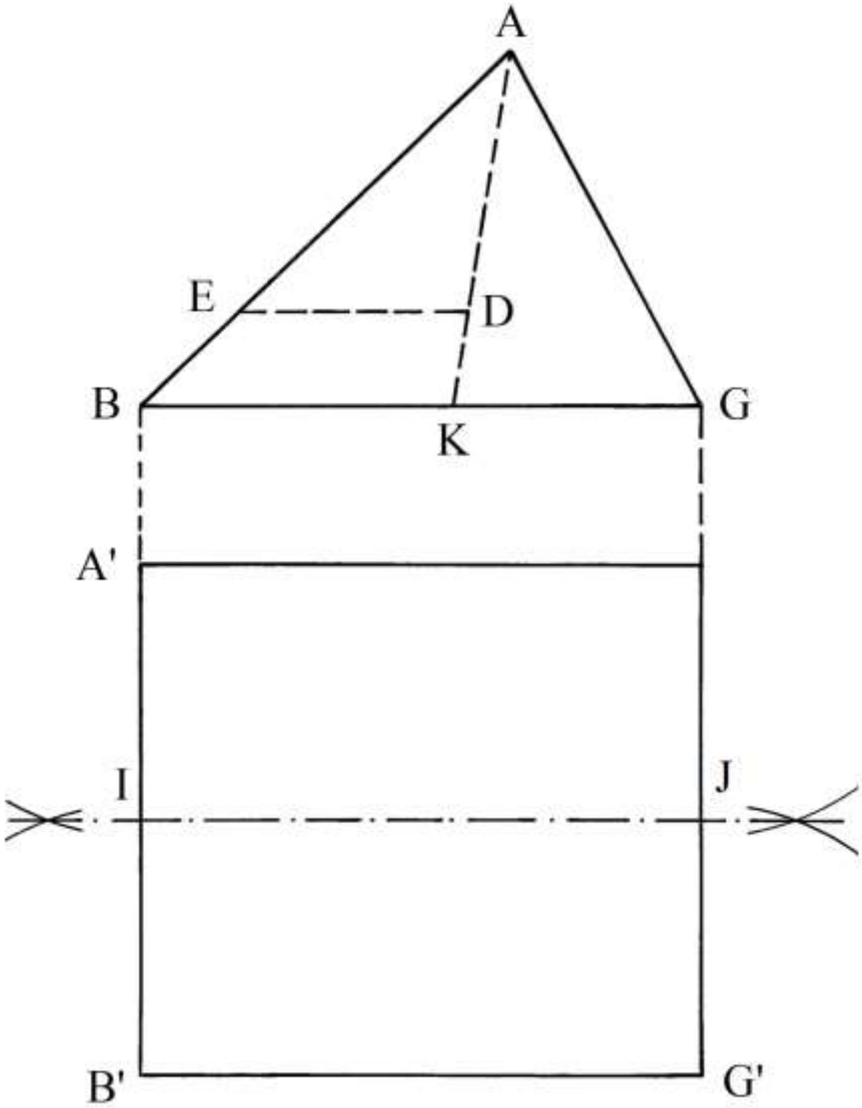
Divisione di un triangolo in due parti uguali con una linea passante per un punto interno (da Fibonacci)

La soluzione contenuta nel testo di Archibald non fornisce una chiara descrizione del metodo grafico impiegato. Qui utilizziamo la soluzione offerta dallo storico della matematica olandese Jan Hogendijk nel contributo citato in bibliografia.

Il triangolo ABG deve essere diviso in due parti uguali con una linea passante per il punto interno D.



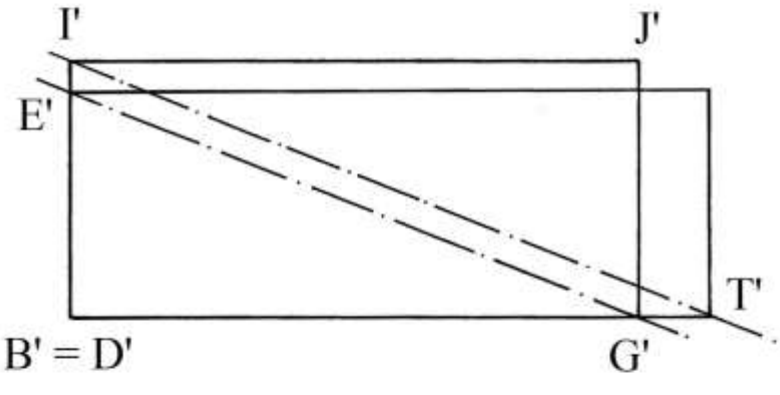
Tracciare il segmento DE parallelo alla base BG e la corda ADK.



Costruire il quadrilatero lungo quanto BG e largo quanto il lato AB.

Dividerlo in due parti uguali con la mediana IJ.

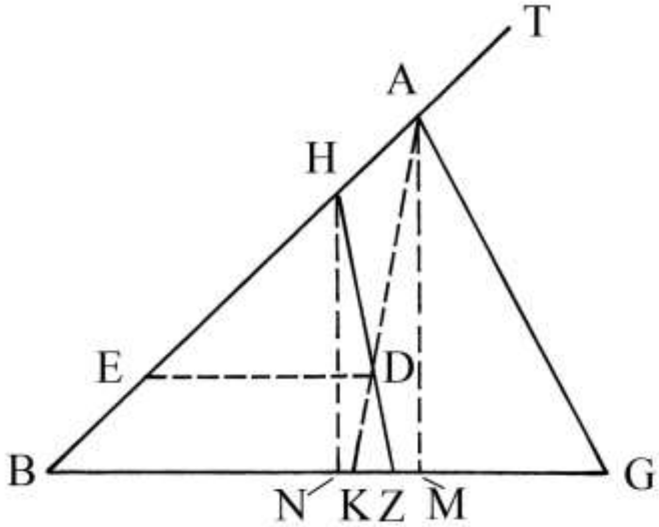
Occorre costruire un rettangolo largo quanto ED e con area uguale a quella di IB’G’J: è il rettangolo I’B’G’J’:



Dal punto B’=D’ riportare sul lato B’I’ la lunghezza di DE: è stabilito il punto E’.

Serve ora impiegare una ulteriore costruzione: tracciare una retta passante per E’ e G’ e parallelamente ad essa disegnare una seconda retta passante per il vertice I’: è I’T’.

B’T’ è la lunghezza del segmento BT da riportare sulla prima figura:



Hogendijk afferma che la posizione del punto H da cui muove la corda dividente il triangolo, e passante per D, può essere determinata solo costruendo un rettangolo con lati lunghi BH e HT: esso dovrebbe avere la stessa area del rettangolo I’B’G’J’.

Quindi:

$$BH * HT = BG * AB/2.$$

Ma $BH + HT = BT.$

Dando alla lunghezza di BH il valore dell’incognita “x”, si ha:

$$HT = BT – BH = BT – x.$$

Sostituendo nella prima espressione si ha:

$$x * (BT – x) = BG * AB/2$$
$$BT * x – x^2 – BG * AB/2 = 0$$
$$2 * x^2 – 2 * BT * x + BG * AB = 0.$$

Da cui:

$$x = [2 * BT \pm \sqrt{(4 * BT^2 – 4 * 2 * BG * AB)}]/4.$$

L’ultima figura richiede una spiegazione. HZ divide ABG in due poligoni di area uguale e pari alla metà dello stesso triangolo:

* il triangolo HBZ;
* il quadrilatero HZGA.

HN è l’altezza del triangolo HBZ la cui area è data da:

$$A_{HBZ} = BZ * HN/2 = ½ * A_{ABG}.$$

L’area dell’intero triangolo ABG è:

$$A_{ABG} = BG * AM/2 .$$

Di conseguenza si ha:

$$BZ * HN/2 = ½ * (BG * AM/2) = BG * AM/4.$$

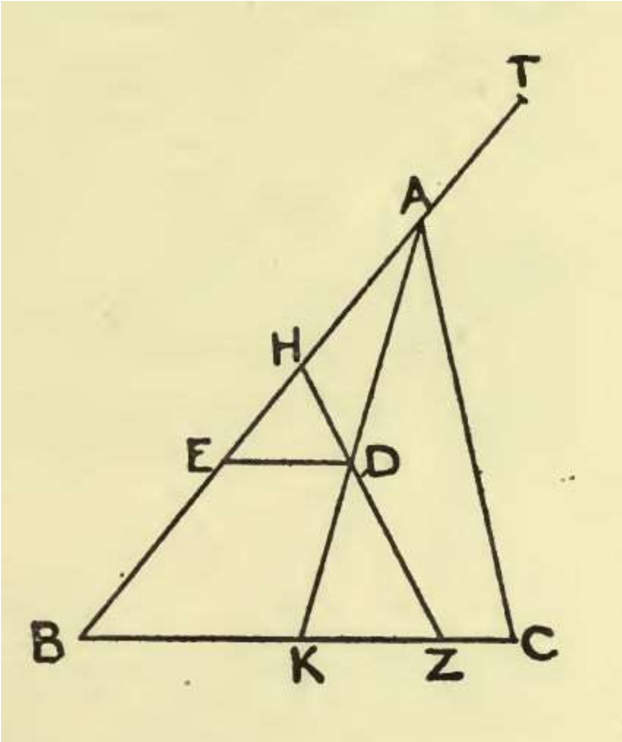
<u>PROPOSIZIONE 20</u>

<u>Divisione di un triangolo in due parti secondo un dato rapporto</u> (da Fibonacci)

Il triangolo ABC deve essere diviso in due parti con una linea passante per il punto interno D: la parte più piccola deve avere area uguale a *un terzo* di quella dell'intero triangolo.

La Proposizione è simile a quella numero 19.

Lo schema che segue è riprodotto dal testo di Archibald.

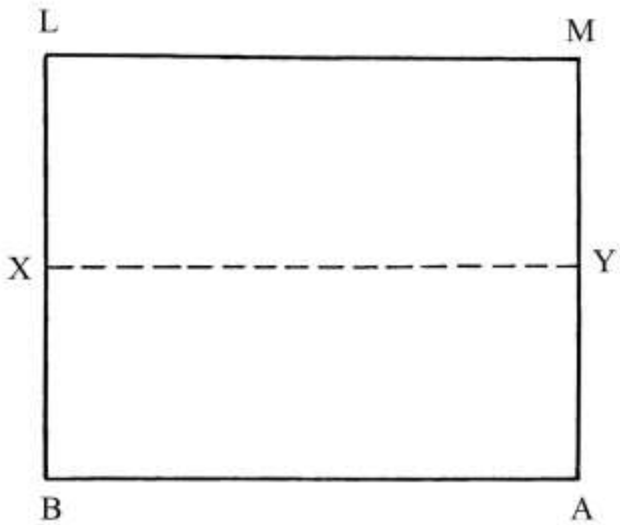


La soluzione è ottenuta per via aritmetica con l'ausilio delle proporzioni fra lunghezze e aree. Non è sostenuta da alcuna costruzione grafica.

- APPROFONDIMENTO -

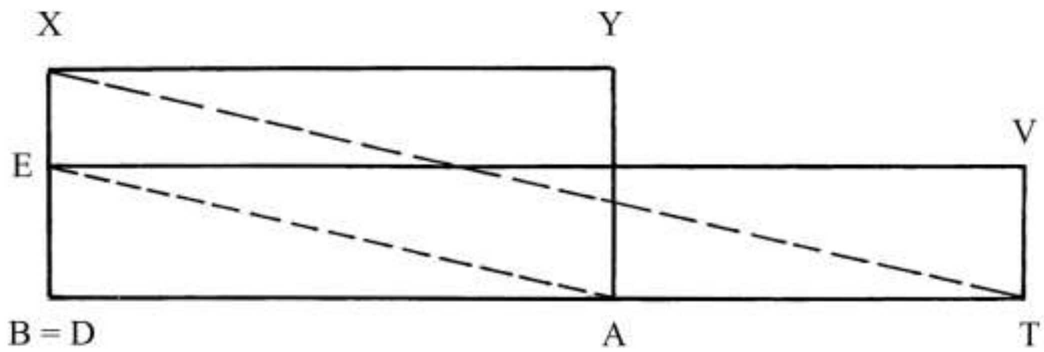
La procedura impiegata da Archibald è qui parzialmente convertita in soluzioni grafiche.

Costruire un rettangolo con lati lunghi AB e BC, con BL = AM = BC:



Dividere a metà per mezzo della *mediana* XY.

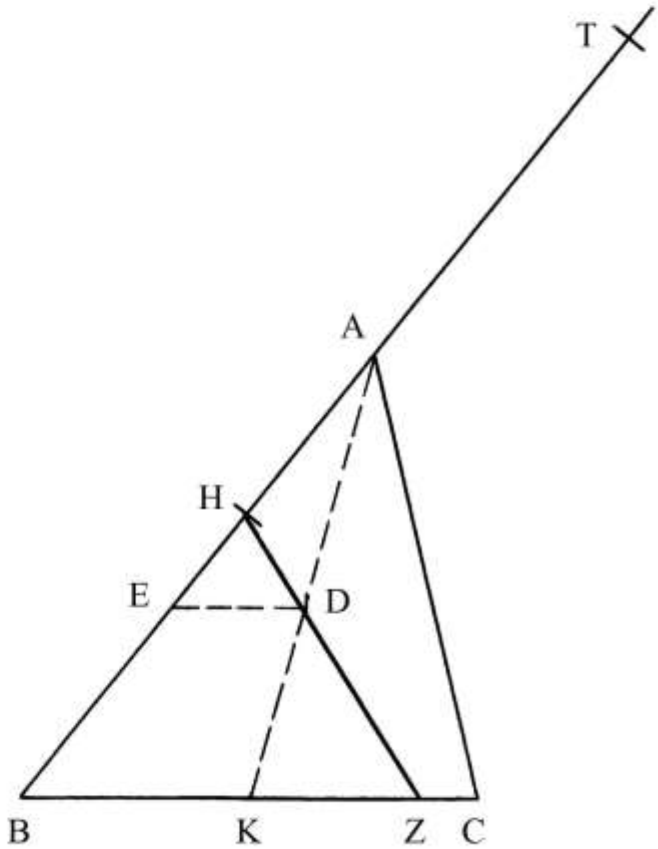
Riprodurre il rettangolo BXYA:



Sul lato BX riportare da B la lunghezza di DE. Collegare E con A e parallelamente a EA tracciare una linea da X fino a incontrare in T il prolungamento verso destra di BA.

Il rettangolo BEVT ha area uguale a quella di BEVT.

Riportare la lunghezza di BT sullo schema del triangolo da dividere, a partire da B sul prolungamento di BA:



Occorre determinare la posizione del punto H sul segmento BT. Archibald propone la seguente uguaglianza:

BH * HT = TB * BE.

La soluzione può essere ottenuta attribuendo a BH il valore dell'incognita "x":

BH = x.

Ne consegue:

$HT = TB – BH = TB – x$.

La precedente uguaglianza diviene:

$x * (TB – x) = TB * BE$

$x * TB – x^2 = TB * BE$

$x^2 – x * TB + TB * BE = 0$ da cui

$x = [TB \pm \sqrt{(TB^2 – 4 * TB * TE)}]/2$.

La radice corretta è la seguente:

$x_1 = [TB – \sqrt{(TB^2 – 4 * TB * TE)}]/2$, che è la più piccola delle due radici.

A partire da B riportare sul lato BA la lunghezza di x_1: è stabilito il punto H.

Disegnare la corda uscente H e passante per D: HDZ divide il triangolo ABC in due poligoni che hanno aree uguali:

* il triangolo BHZ;
* il quadrilatero HACZ.

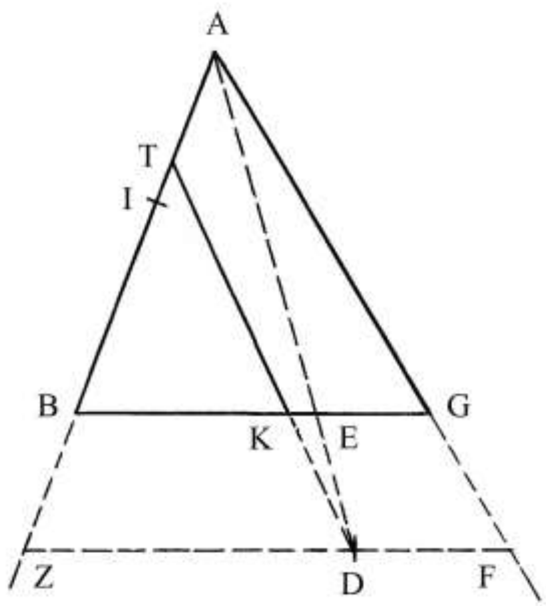
La soluzione del problema è stata ottenuta in parte per via geometrica e in parte con l'ausilio dell'algebra elementare.

- -

PROPOSIZIONE 26

Divisione di un triangolo in due parti uguali con una linea passante per un punto esterno (da Fibonacci)

La soluzione è ricavata con una serie di proporzioni fra lunghezze e aree. Il triangolo è ABG e deve essere diviso in due parti uguali con una linea passante per il punto esterno D.



Per il punto D tracciare una parallela a BG. Prolungare verso il basso i lati AB e AG fino a incontrare la parallela nei punti Z e F.

Collegare D con il vertice A.

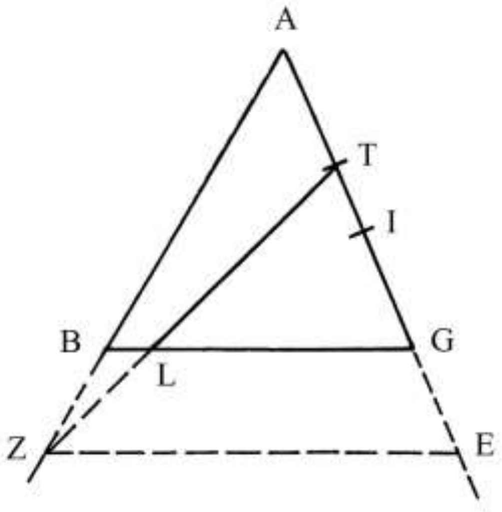
Come risultato della soluzione ricavata dalle proporzioni è disegnata una linea passante per T e per D: TK è la corda che divide in due poligoni di area uguale:

* il triangolo BTK;
* il quadrilatero KTAG.

Nessuna costruzione grafica è fornita da Archibald.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso mostrato nello schema che segue, il punto Z da cui deve essere condotta la linea, per dividere in parti uguali il triangolo, è posizionato al suo esterno, sul prolungamento del lato AB:



Prolungare verso il basso il lato AG. Per il punto Z condurre la parallela ZE al lato BG.

Anche questo caso è risolto con le proporzioni fra lunghezze e aree. In particolare si hanno le seguenti proporzioni:

ZE * GI = (AG * GB)/2

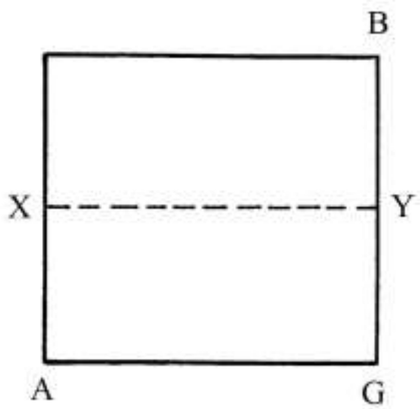
EG * GI = GT * TI.

Senza l'ausilio di alcuna costruzione, Archibald traccia una linea che collega Z con T: TL divide il triangolo originario in due poligoni di aree uguali:

* il quadrilatero ABLT;
* il triangolo LTG.

- APPROFONDIMENTO -

L'uguaglianza ZE * GI = (AG * GB)/2 può essere risolta come segue.

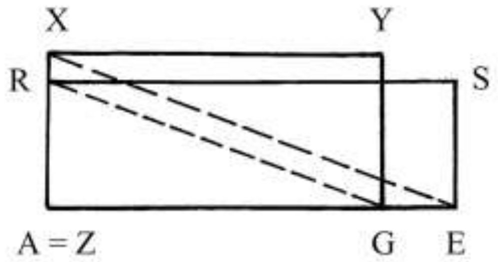


Disegnare un rettangolo con lati lunghi AG e GB e la mediana XY.

AXYG ha area uguale al rettangolo che ha lati ZE e GI.

ZE è un lunghezza nota e GI è incognita: per ricavarla per via geometrica occorre una costruzione.

Riprodurre il rettangolo AXYG e prolungare verso destra AG:



Collegare X con E e parallelamente a XE tracciare il segmento GR. Da R e da E disegnare le parallele a ZE e a AX. È stabilito il punto S.

ES è la lunghezza di GI da riportare a partire da G sul lato AG del triangolo ABG: è fissato il punto I.

L'uguaglianza $EG * GI = GT * TI$ può essere trasformata in una proporzione:

$EG : GT = TI : GI$.

Le lunghezze di EG e di GI sono note, mentre sono sconosciute quelle di TI e di GT.

Attribuiamo a TI il valore dell'incognita:

$TI = x$.

Ne discende:

$GT = TI + GI = x + GI$.

La proporzione diviene:

$EG : (x + GI) = x : GI$ e

$x * (x + GI) = EG * GI$

$x^2 + x * GI - EG * GI = 0$

$x = [- GI + \sqrt{(GI^2 + 4 * EG * GI)}]/2 = TI$.

La seconda radice deve essere scartata perché è *negativa*.

Riportare il valore di "x" sul lato AG di ABG a partire da I.

TZ è la linea che divide il triangolo.

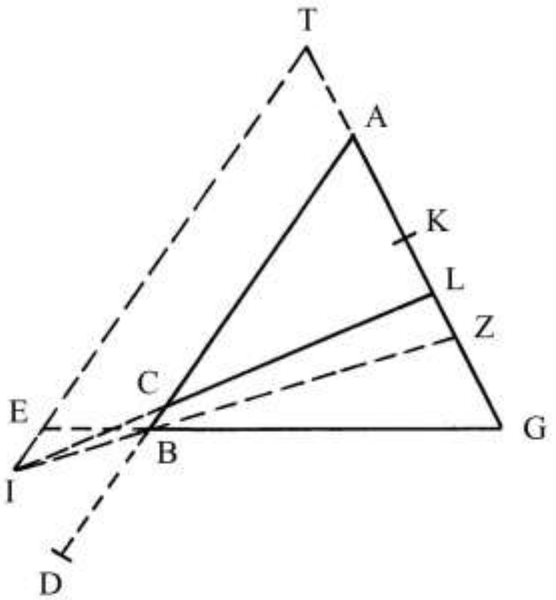
La soluzione qui esposta è mista: a una parte iniziale geometrica è seguita una parte algebrica.

Nel testo di Archibald non è presente alcuna costruzione ausiliaria in grado di aiutare i geometri pratici. Altri testi manifestano la stessa limitazione.

- -

La Proposizione presenta un altro caso un po' più complesso.

ABG è il triangolo che deve essere diviso in due parti uguali con una linea passante per il punto esterno I:



Dal punto I disegnare la parallela al lato AB e prolungare verso l'alto AG: le due linee si incontrano in T.

Il punto E si trova sulla linea passante per B e G: esso giace su IT.

Prolungare verso il basso AB: su di esso è situato il punto D, a distanza DB non specificata nel testo.

La soluzione del problema è ottenuta con alcune proporzioni, ma senza alcuna costruzione geometrica.

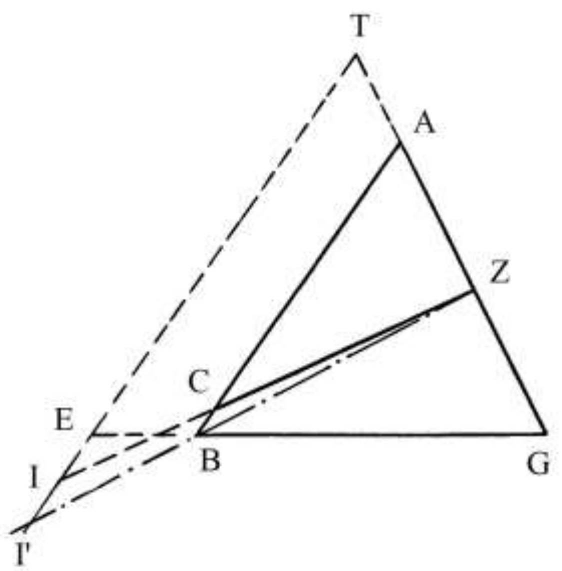
Dal punto I è disegnata una linea che taglia AB in C e incontra AG nel punto L.

La corda CL divide ABG in due poligoni di aree uguali:

* il triangolo ACL;
* il quadrilatero BCLG.

Il testo *sembra* adombrare l'ipotesi che nel precedente triangolo una linea tracciata da I giunga al punto medio di AG, Z, dividendo con la corda CZ il triangolo in due parti uguali:

* il triangolo ACZ;
* il quadrilatero CBGZ.



L'ipotizzata soluzione *non* è corretta perché il triangolo ACZ ha area leggermente minore della metà di ABG e il quadrilatero CBGZ ha area leggermente superiore alla metà.

La corretta soluzione è spiegata nella stessa figura: Z è il punto medio di AG. BZ è una delle tre mediane del triangolo.

Il punto I' è posizionato sul prolungamento della mediana BZ: con questa soluzione, BZ divide ABG in due poligoni di aree uguali:

* il triangolo ABZ;
* il triangolo BZG.

PROPOSIZIONE 27

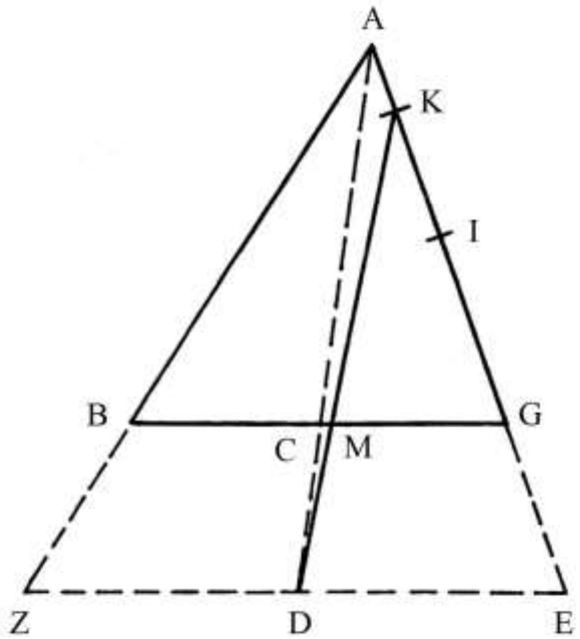
Divisione di un triangolo secondo un dato rapporto, con una linea passante per un punto esterno (da Fibonacci)

ABG è il triangolo da dividere in due parti: la più piccola delle due deve avere area uguale a *un terzo* di quella dell'intero triangolo.

La linea che lo divide deve passare per il punto esterno D.

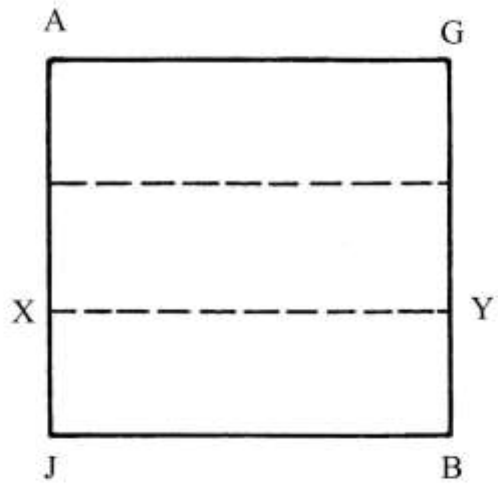
Per il punto D tracciare una parallela alla base BG. Prolungare verso il basso i lati AB e AG: i prolungamenti definiscono i punti Z e E.

Collegare A con D.

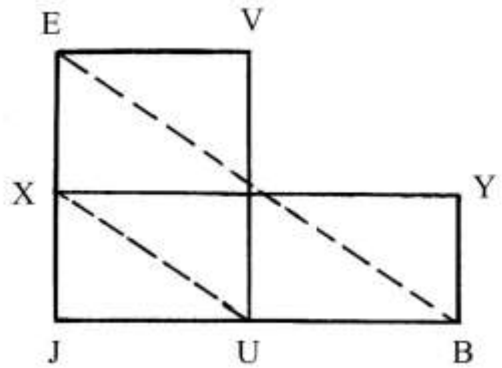


La procedura impiegata da Archibald è basata su alcune proporzioni. Per migliorarne la comprensione, sono di seguito utilizzati dei grafici.

Costruire un rettangolo con lati lunghi AG e BG: per mezzo di due corde, il quadrilatero è diviso in tre rettangoli uguali.



Lo schema che segue serve a trasformare il rettangolo JXYB in un rettangolo *equivalente* che abbia dimensioni DE (lunghezza nota) e GI (lunghezza ignota):



Prolungare verso l'alto il lato JX: su di esso riportare da J la lunghezza di DE:

JE = DE.

Dal punto E tracciare una linea fino al vertice B. Parallelamente a EB disegnare il segmento XU. Da U elevare la perpendicolare a JB: è UV.

I rettangoli JXYB e JEVU sono equivalenti perché hanno aree uguali.

Il segmento JU è la lunghezza di GI che deve essere riportata sulla prima figura.

Il punto I svolge esclusivamente una funzione limitata: contribuisce a determinare la posizione di K sul lato AG.

Per Archibald vale l'uguaglianza

EG * GI = IK * GK.

Essa può trasformata in una proporzione:

EG : GK = IK : GI.

Con una serie di passaggi qui non riprodotti, Archibald introduce una nuova proporzione:

EK : GK = GK : GI.

In sintesi: la lunghezza di GK è medio proporzionale fra quelle di EK e di GI.

Dato che

EK = GK + GE, la proporzione diviene:

(GK + GE) : GK = GK : GI.

GE e GI hanno lunghezze note.

Assegnando a GK il valore dell'incognita "x" si ha:

(x + GE) : x = x : GI

GI * (x + GE) = x^2

$x^2 - x * GI - GI * GE = 0$

$x = [GI \pm \sqrt{(GI^2 + 4 * GI * GE)}]/2.$

Le radici sono una positiva e l'altra negativa. La soluzione è data dalla radice positiva.

Dal punto G riportare su GA la lunghezza di x = GK.

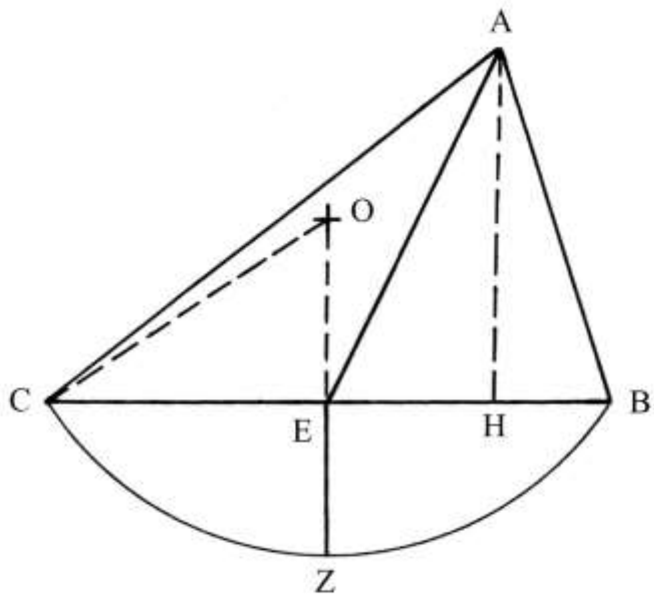
Tracciare la linea KD: essa divide ABG in due poligoni:

* il triangolo MKG, che ha area uguale a *un terzo* di quella di ABG;
* il quadrilatero AKMB che ha area uguale ai *due terzi* di quella di ABG.

PROPOSIZIONE 28

Dividere in due parti uguali una figura formata da un triangolo e da un segmento circolare (da Fibonacci)

La figura è formata dal triangolo ABC e da un segmento circolare ricavato da un cerchio con centro in O e raggio OC = OZ = OB.



Il lato di base del triangolo, CB, è anche la *corda* che delimita il segmento circolare.

Il punto medio di CB è E: EZ è la *freccia* che divide in due parti uguali il segmento circolare.

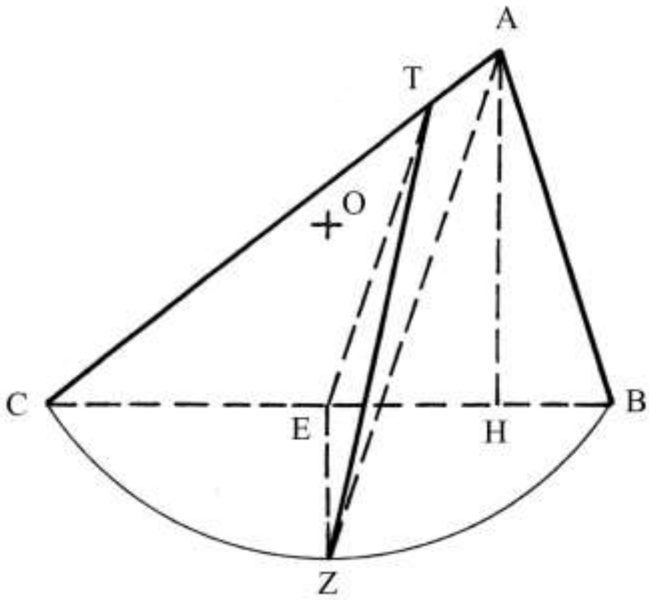
AH è l'altezza relativa alla base CB.

AE è una *mediana* che divide il triangolo ABC in due triangoli di aree uguali: ACE e AEB. Essi hanno le basi CE e EB di uguale lunghezza e, in comune, l'altezza AH.

La linea spezzata AEZ divide la figura in due parti uguali: ABZE e AEZC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Dalla descrizione che Archibald fa di questa Proposizione, pare che sia possibile una diversa soluzione:



Collegare A con Z. Dal punto E condurre la parallela a AZ: è ET.

Tracciare la corda TZ: essa divide la figura in due parti di uguali aree:

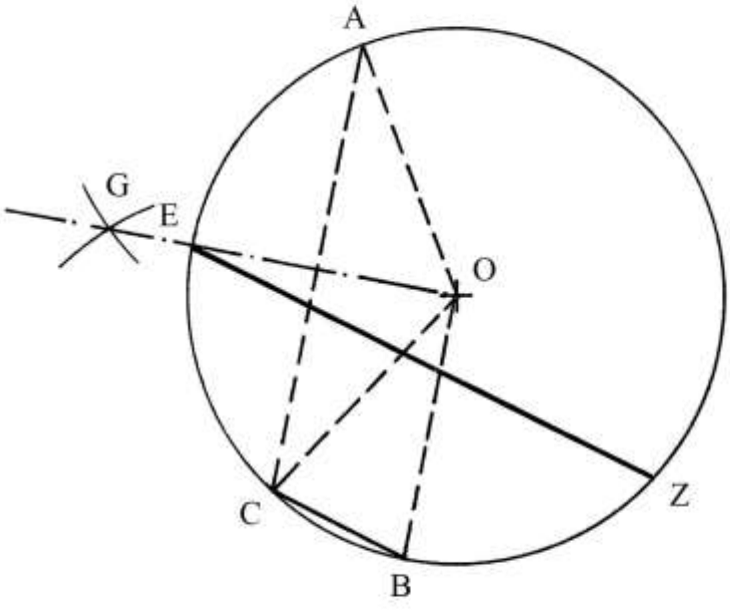
* ABZT;
* CTZ.

PROPOSIZIONE 29

Dividere un cerchio in due parti con due corde parallele (da Fibonacci)

È dato un cerchio di centro O: sulla circonferenza sono fissati tre punti, A, B e C.

Il cerchio deve essere diviso in due parti, una delle quali abbia area uguale a *un terzo* di quella dell'intero cerchio.



Tracciare i raggi OA, OB e OC.

Disegnare le corde AC e CB.

L'angolo AOC deve essere diviso in due parti uguali: fare centro in A e in C e tracciare due archi che si incontrano nel punto G: la semiretta uscente da O e passante per G divide l'angolo AOC in due angoli di uguale ampiezza: AOE e EOC.

Dal punto E disegnare una corda parallela a quella CB: è EZ.

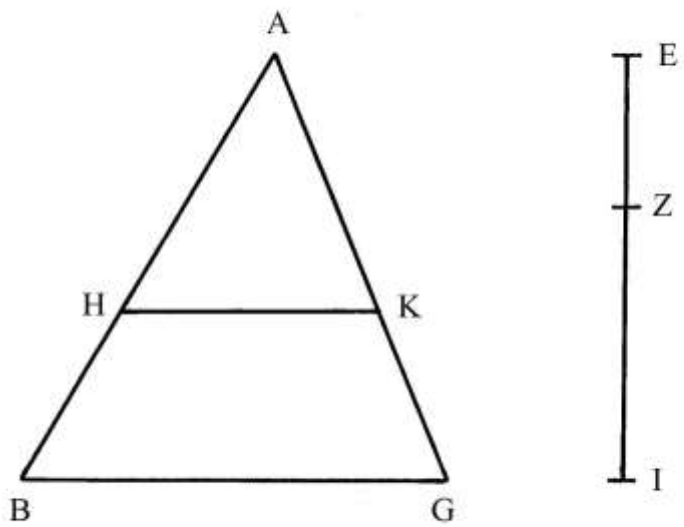
EZ divide il cerchio in due segmenti circolari:

* ECBZ, che ha area uguale a *un terzo* di quella dell'intero cerchio;
* EAZ, che ha area uguale a *due terzi*.

PROPOSIZIONE 30

Dividere un triangolo in due parti proporzionali alle lunghezze di due segmenti

ABG è il triangolo che deve essere diviso in due parti con aree proporzionali alle lunghezze dei segmenti EZ e EI.



Il lato AB deve essere diviso secondo la seguente proporzione:

$AH^2 : AB^2 = EZ : EI$.

La soluzione del problema è quindi proposta da Archibald con un metodo aritmetico. AH^2 è lungo:

$AH^2 = AB^2 * EZ/EI$ e AH è:

$AH = \sqrt{(AB^2 * EZ/EI)} = AB * \sqrt{(EZ/EI)}$.

Ne consegue:

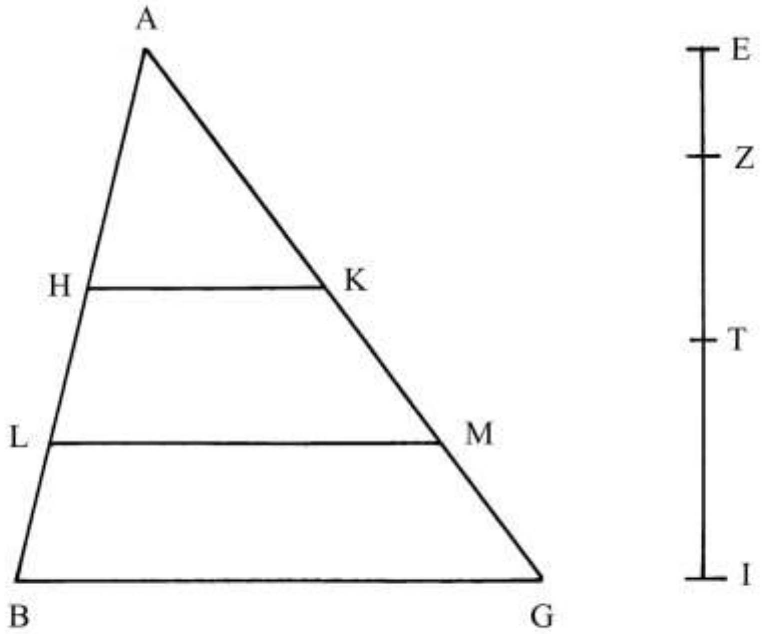
$A_{AHK} : A_{ABG} = AH^2 : AB^2 = EZ : EI$

$A_{BHKG} : A_{ABG} = EZ : ZI$.

PROPOSIZIONE 31

Divisione di un triangolo in tre parti proporzionali alle lunghezze di tre segmenti

ABG è il triangolo che deve essere diviso in tre parti con aree proporzionali alle lunghezze dei segmenti EZ, ET e EI.



Anche la soluzione di questa Proposizione è ottenuta per via aritmetica con le seguenti proporzioni:

$AH^2 : AB^2 = EZ : ZI$ e

$AL^2 : AB^2 = ET : EI$.

I rapporti fra le aree sono i seguenti:

$A_{AHK} : A_{ALM} = EZ : ET$

$A_{AHK} : A_{HLMK} = EZ : ZT$

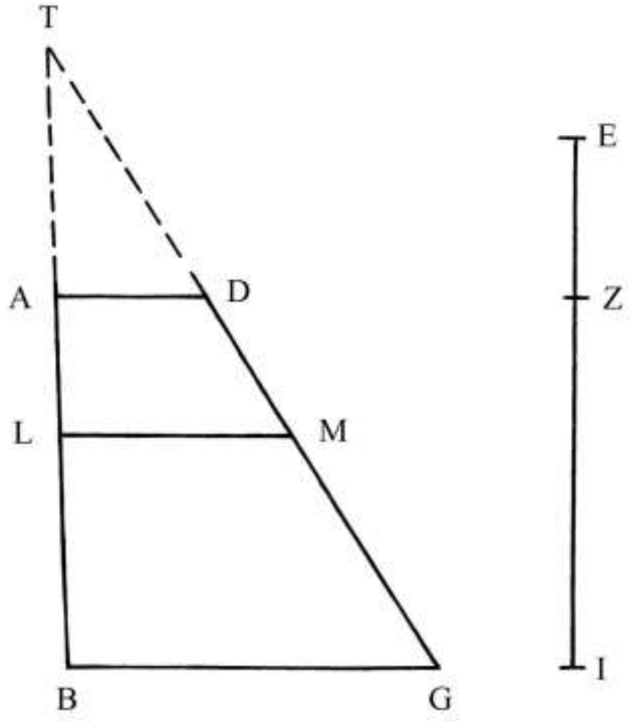
$A_{ALM} : A_{HLMK} : A_{LBGM} = EZ : ZT : TI$.

PROPOSIZIONE 32

Divisione di un trapezio in due parti proporzionali alle lunghezze di due segmenti

(da Fibonacci)

ABGD è il trapezio da dividere in due parti con aree proporzionali alle lunghezze dei segmenti dati:



Esso deve essere diviso in due parti proporzionali alle lunghezze dei segmenti ZI e EZ.
Prolungare verso l'alto i lati AB e DG: essi si incontrano in T.
La soluzione del problema ricorre alle proporzioni:

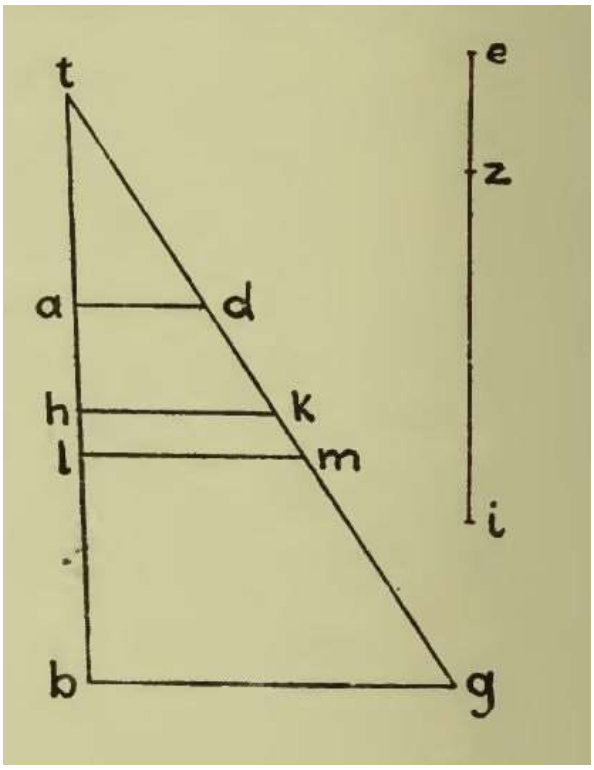
$TL^2 : AT^2 = ZI : EZ$ da cui

$TL^2 = AT^2 * ZI/EZ$ e

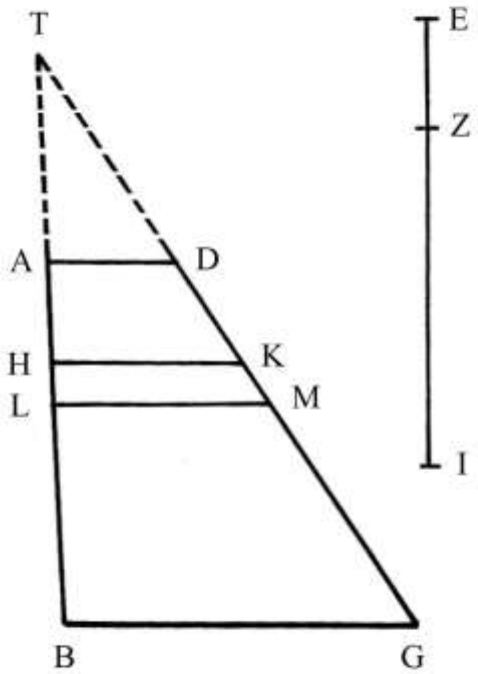
$TL = AT * \sqrt{(ZI/EZ)}$.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema originale presenta dei dubbi perché il trapezio ABGD è diviso in *tre* parti anziché in *due*, come è stato fatto qui sopra:

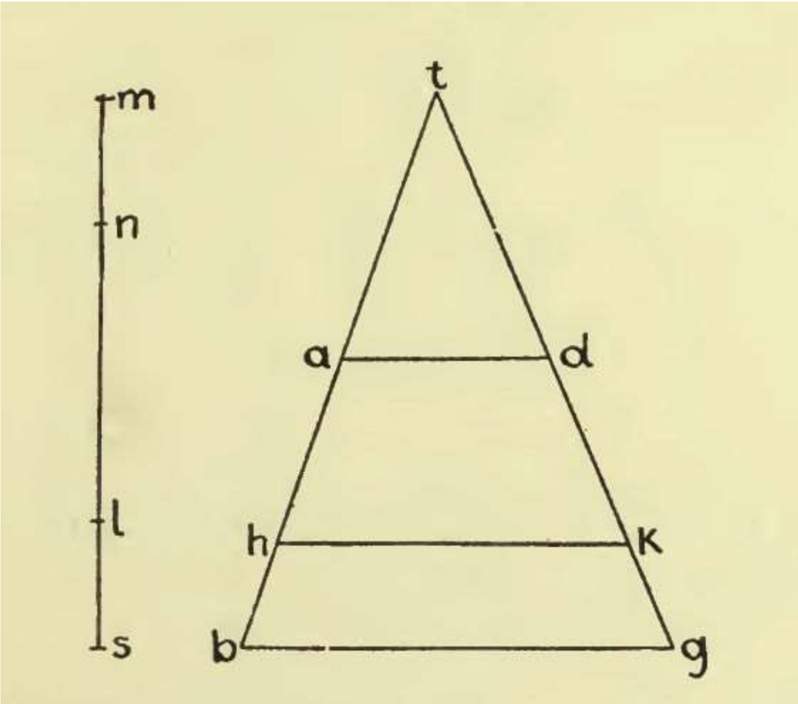


I disegni contenuti nel libro di Archibald non distinguono fra le linee che definiscono una figura e quelle ausiliarie: in questo articolo si è cercato di disegnare questi ultimi segmenti con *linee a tratti*.

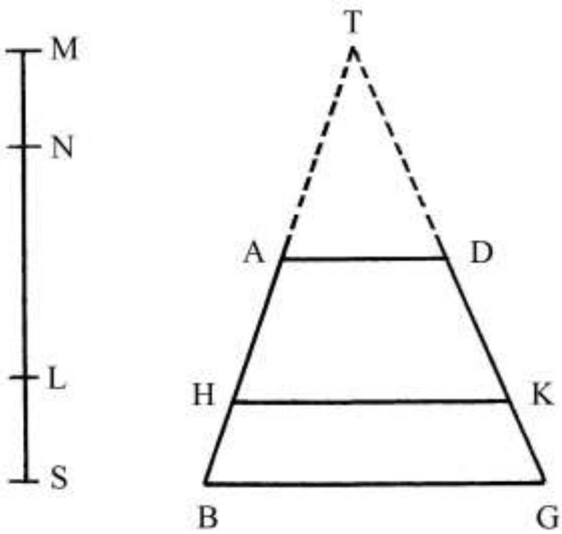


- -

La Proposizione offre un secondo esempio di trapezio da dividere:



Forse il disegnatore delle tavole contenute nel testo di Archibald ha scambiato i due segmenti laterali con le lunghezze da rapportare.



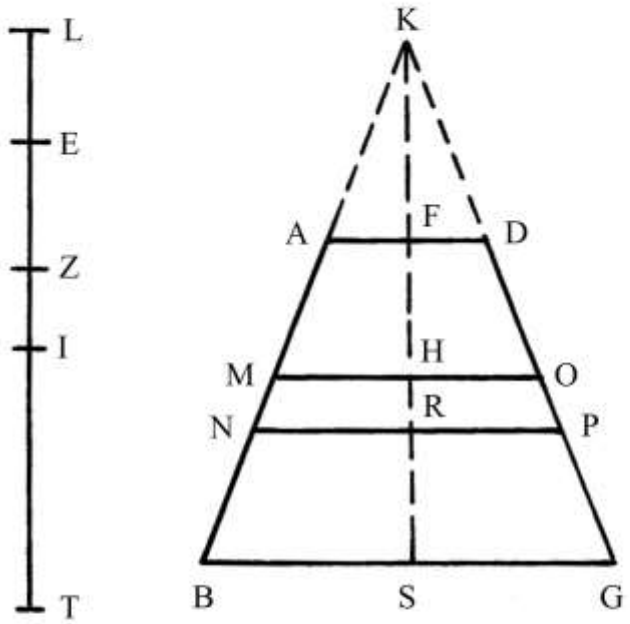
PROPOSIZIONE 33

Divisione di un trapezio in tre parti (da Fibonacci)

ABGD è un trapezio che deve essere diviso in *tre* parti con aree proporzionali alle lunghezze di segmenti dati.

Prolungare verso l'alto i lati AB e DG: essi si incontrano nel vertice K.

Da questo punto è tracciata la mediana KS: il suo tratto FS è una mediana del trapezio.



Le lunghezze dei segmenti lungo il lato AB sono determinate con la soluzione delle seguenti proporzioni:

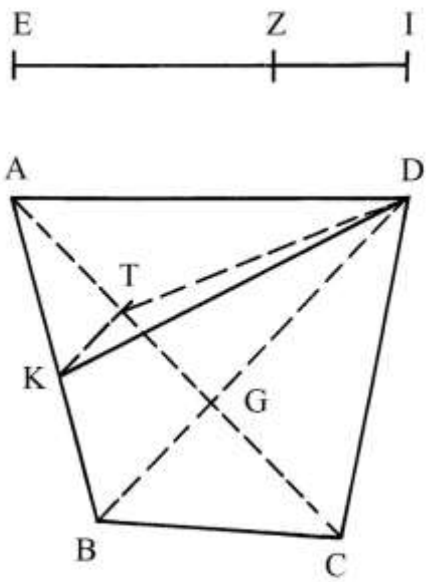
$BK^2 : AK^2 = IL : EL$
$BK^2 : KN^2 = TL : IL$
$\text{Area}_{ADOM} : \text{Area}_{NPGB} = ZI : IT$
$\text{Area}_{KBG} : \text{Area}_{KAD} = TL : EL.$

PROPOSIZIONE 34

Dividere un quadrilatero in parti proporzionali alle lunghezze di due segmenti

(da Fibonacci)

ABCD è il quadrilatero: deve essere diviso in due parti proporzionali alle lunghezze di EZ e di ZI con una linea uscente dal vertice D.

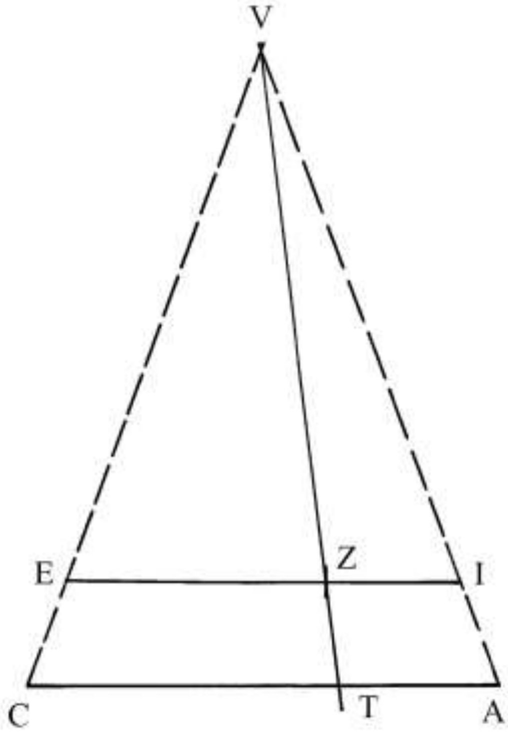


Tracciare le due diagonali AC e BD.

Dividere la diagonale AC in proporzione alle lunghezze di EZ e di ZI:

CT : AT = EZ : ZI.

Questa divisione proporzionale può essere facilmente ottenuta con il metodo descritto nello schema che segue:



Su due linee parallele riportare, in basso, la lunghezza di CA e sopra la lunghezza di EZI.

Tracciare le linee passanti per le coppie di punti C-E e A-I: esse si incontrano in V. Da questo punto condurre una retta per Z: essa incontra in T il segmento CA.

Riportare la lunghezza di CT sulla diagonale AC, a partire dal vertice C.

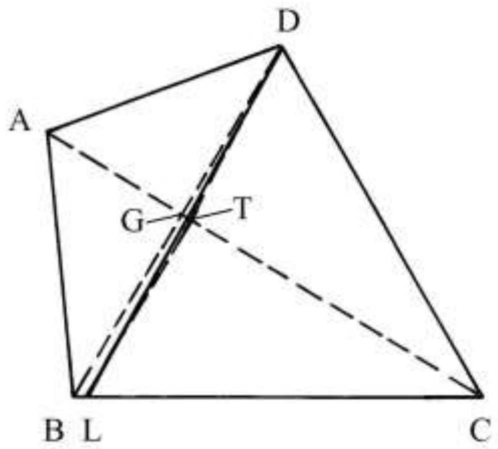
Da T disegnare un segmento parallelo a BD: è TK.

Collegare K con D: la corda KD divide il quadrilatero in due parti proporzionali alle lunghezze di EZ e di ZI:

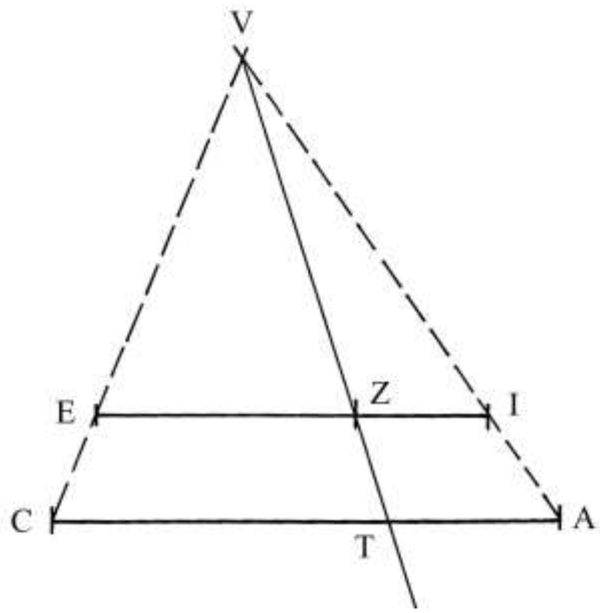
$A_{BKDC} : EZ = A_{AKD} : ZI$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel secondo caso, il punto T si colloca a valle dell'intersezione delle due diagonali, G:



Le lunghezze di CT e di TA sono ricavate con il metodo usato per il precedente caso:



Vale la proporzione:

$$CT : TA = EZ : ZI.$$

Dal punto T tracciare la parallela alla diagonale BD: è TL.

Collegare D con L: DL è la corda che divide in due parti il quadrilatero. Fra le due aree vale la proporzione:

$$A_{ADLB} : ZI = A_{DLC} : ZE.$$

PROPOSIZIONE 35

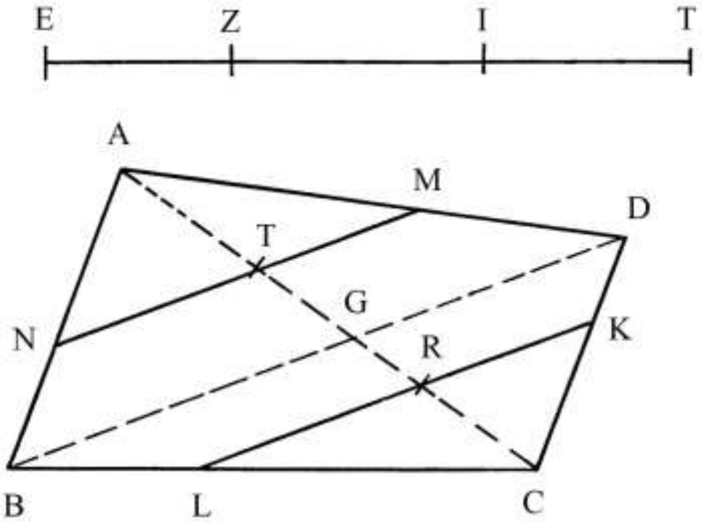
Dividere un quadrilatero in tre parti proporzionali alle lunghezze di tre segmenti

La Proposizione non è accompagnata da alcuno schema: è soltanto presentato il segmento EZIT.

Il testo è estremamente sintetico.

L'ipotesi che qui è scelta è quella della divisione di un ipotetico quadrilatero ABCD con due corde parallele alla diagonale BD.

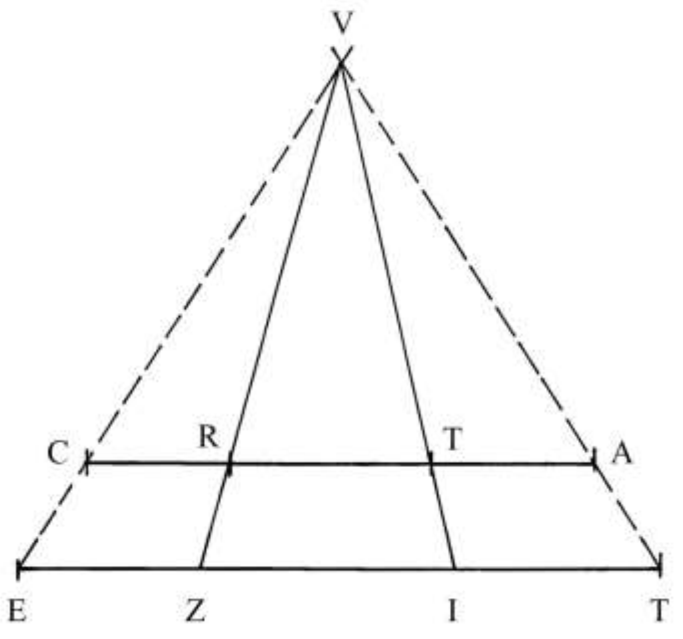
Le tre parti devono avere aree proporzionali alle lunghezze di EZ, ZI e IT.



Tracciare le due diagonali AC e DB che si incontrano in G.

Occorre dividere la diagonale CA in tre parti in proporzione alle lunghezze di EZ, ZI e IT: a questo scopo provvede la costruzione che segue, la quale fornisce la proporzione

CR : RT : TA = EZ : ZI : IT.



Sulla diagonale CA riportare dal vertice C le lunghezze di CR, RT e TA.

Parallelamente a BD disegnare le corde KL e MN.

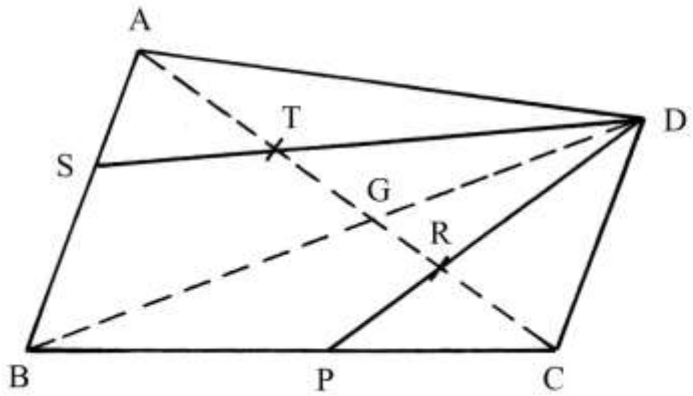
Il quadrilatero ABCD è diviso in tre poligoni:

* il triangolo NAM, che *dovrebbe* avere area proporzionale alla lunghezza di IT;
* l'esagono non regolare NMDKLB, che dovrebbe avere area proporzionale alla lunghezza di IZ;
* il triangolo LCK, con area *forse* proporzionale alla lunghezza di ZE.

Il condizionale “*dovrebbe*” e l’ipotetico “*forse*” appena impiegati segnalano dubbi: non sembra che le aree dei tre poligoni siano esattamente proporzionali alle lunghezze dei tre segmenti.

- APPROFONDIMENTO -

Come adombrato nel testo di Archibald, se la soluzione fosse data dalla tracciatura di due corde (DP e DS) uscenti dal vertice D e passanti per i punti R e T già fissati sulla diagonale CA, lo schema che segue mostra la ripartizione che ne conseguirebbe:



ABCD risulta diviso in tre poligoni:

* il triangolo PDC;
* il quadrilatero BSDP;
* il triangolo SAD.

Le aree dei tre poligono *sarebbero* in proporzione:

$$A_{PDC} : EZ = A_{BSDP} : ZI = A_{SAD} : IT.$$

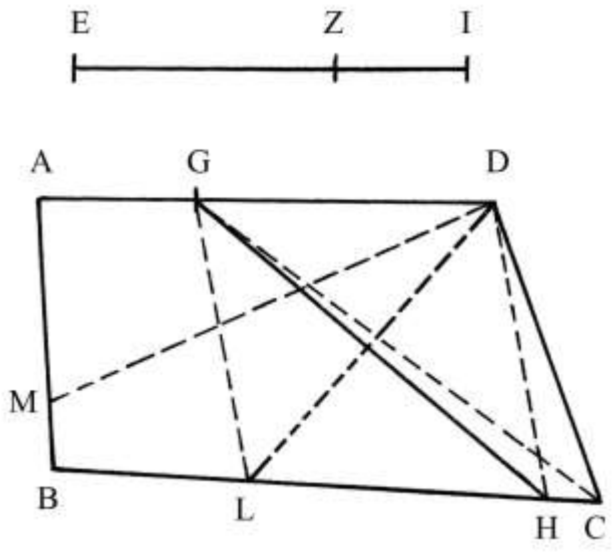
- -

PROPOSIZIONE 36

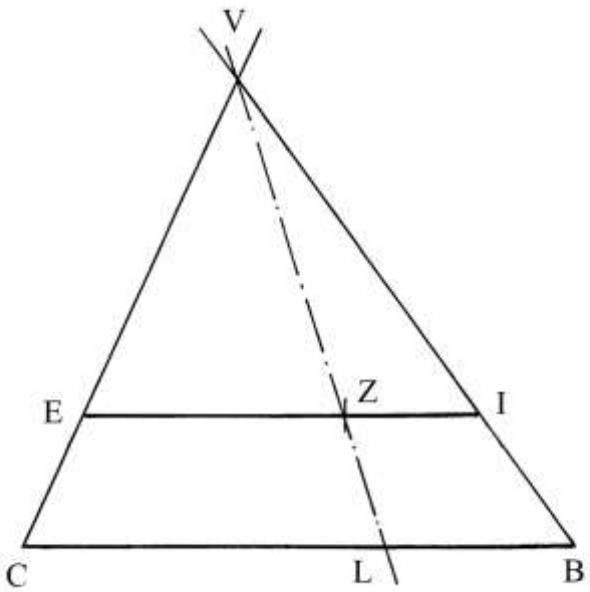
Divisione di un quadrilatero in due parti proporzionali alle lunghezze di due segmenti

La Proposizione utilizza i segmenti EZ e ZI già impiegati nella soluzione della Proposizione 34.

Il quadrilatero ABCD deve essere diviso in due parti con aree proporzionali alle lunghezze di EZ e ZI con una corda uscente dal punto G.



La descrizione è piuttosto oscura. Proponiamo un'ipotesi piuttosto discutibile: dividere il lato BC in due parti in proporzione alle lunghezze di EZ e ZI, come spiega lo schema che segue:



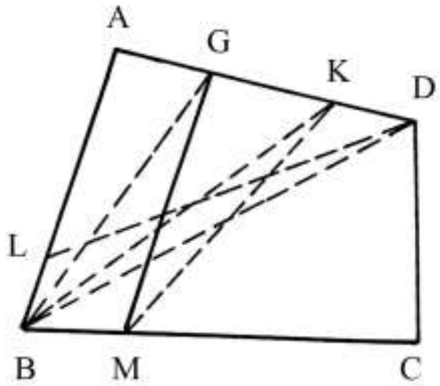
Riportare la lunghezza di BL sul lato BC, a partire da B.
Collegare G con L.
Dal vertice D condurre la parallela a GL: è la corda DH.
Tracciare la corda GH: essa divide ABCD in due poligoni:

* il quadrilatero GDCH, che ha area proporzionale alla lunghezza di ZI;
* il quadrilatero AGHB, con area proporzionale alla lunghezza di EZ.

L'Autore non fornisce alla alcuna informazione sulla corda DM.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda costruzione è riprodotta di seguito:



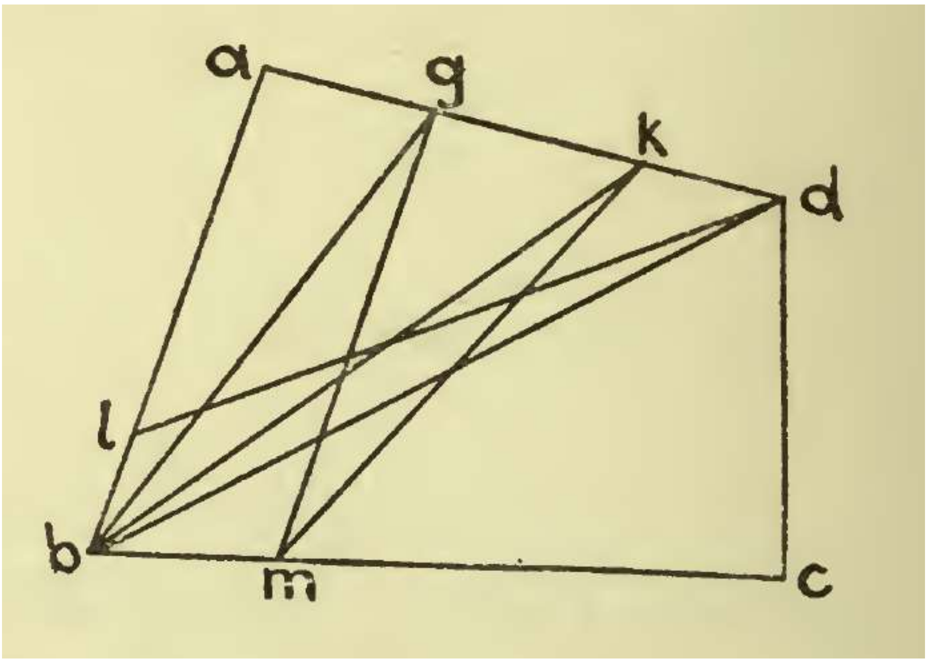
ABCD deve essere diviso in due parti con aree proporzionali alle lunghezze di EZ e di ZI, con una corda tracciata da G.

Dal punto G condurre la parallela a AB: è GM. Il quadrilatero è diviso in due poligoni:

* il quadrilatero ABMG che *avrebbe* area proporzionale alla lunghezza di ZI;
* il quadrilatero GMCD che *avrebbe* area proporzionale alla lunghezza di EZ.

Questa soluzione è piuttosto discutibile.

La figura che segue è riprodotta da p. 76 del testo di Archibald ed è lo schema originale di questa seconda costruzione.



LE COSTRUZIONI DI GIORDANO NEMORARIO

Giordano Nemorario è stato un matematico e astronomo europeo attivo nella prima metà del XIII secolo.

Non vi è certezza sulle sue origini.

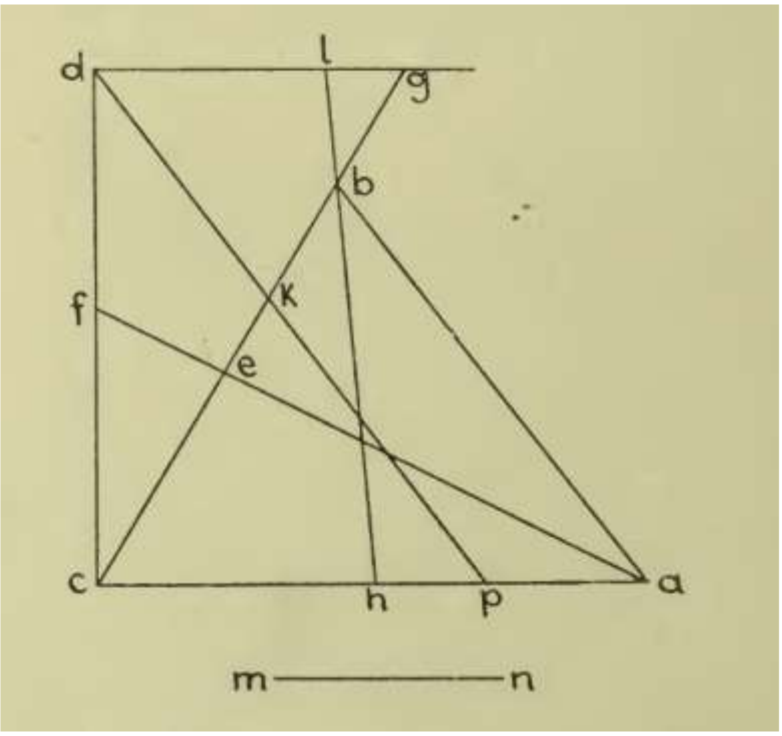
Fra le opere in latino che gli sono attribuite sono due testi di natura geometrica:

* il *Liber philotegni Iordani de Nemore*;
* il *Liber de triangulis Iordani*.

Alcune costruzioni geometriche di Giordano Nemorario

Archibald presenta alle pp. 19 – 23 due costruzioni relative alla divisione in due parti uguali di due triangoli. Esse sono attribuite a Giordano Nemorario.

Il primo triangolo è riprodotto dal testo di Archibald:



ABC deve essere diviso in due parti uguali tracciando una linea a partire da un punto esterno, D, e rispettando una proporzione con la lunghezza di un segmento dato, MN.

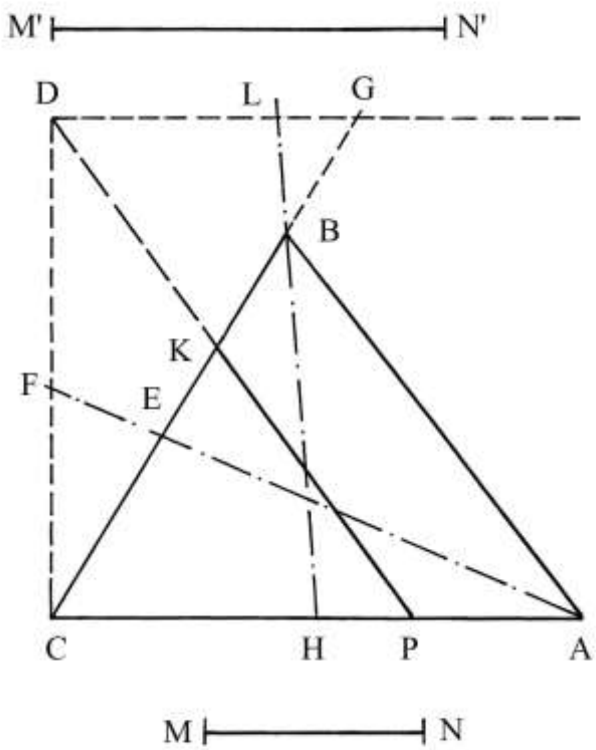
La soluzione è ottenuta per mezzo di alcune proporzioni. Forse le due più significative sono le seguenti:

I. Area $_{CDG}$: Area $_{AEC}$ = CG : MN, con
   Area $_{AEC}$ = ½ * Area $_{ABC}$.

II. GK : KC = KC : MN.

Se la lunghezza di MN è ricavata dalla soluzione della prima proposizione, il valore che viene ricavato è *maggiore* di quella che è mostrata nella figura originale.

Lo schema che segue è una ricostruzione della precedente soluzione:



Collegare D con C e da D condurre la parallela a CA.
AE e BH sono due mediane del triangolo che terminano nei punti F e L.
Il lato CB è prolungato fino a intersecare in G la linea orizzontale passante per D.
DKB divide ABC in poligoni che hanno aree uguali:

* il triangolo CKP;
* il quadrilatero KBAP.

Le lunghezze di GK e di KC sono calcolate risolvendo la risolvendo la seconda proporzione (II):

GK : KC = KC : MN, da cui
$KC^2 = GK * MN$.

La soluzione contenuta nello schema originale è anch'essa *errata*: la lunghezza di MN lì proposta è sbagliata per difetto. La lunghezza esatta è quella del segmento M'N' nella figura qui sopra.

La proporzione diviene:

GK : KC = KC : M'N'.

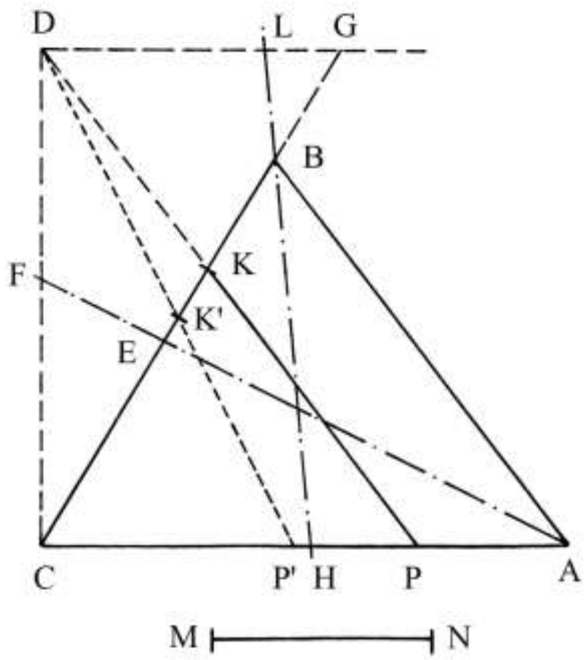
Attribuiamo a KC il valore dell'incognita: KC = x.

GK vale: GK = GC – KC = GC – x.

$(GC - x) : x = x : M'N'$
$x^2 = (GC - x) * M'N'$
$x^2 + x * M'N' - GC * M'N' = 0$
$x = \{- M'N' \pm \sqrt{[(M'N')^2 + 4 * GC * (M'N')]}\}/2 = KC$.

La soluzione di questa equazione di secondo grado offre due radici, una positiva e una negativa. La radice utilizzabile è quella positiva.

Applicando alla costruzione la lunghezza errata di MN, ricavata dall'originale, la soluzione della proporzione GK : KC = KC : MN offre il risultato che è mostrato nello schema che segue:



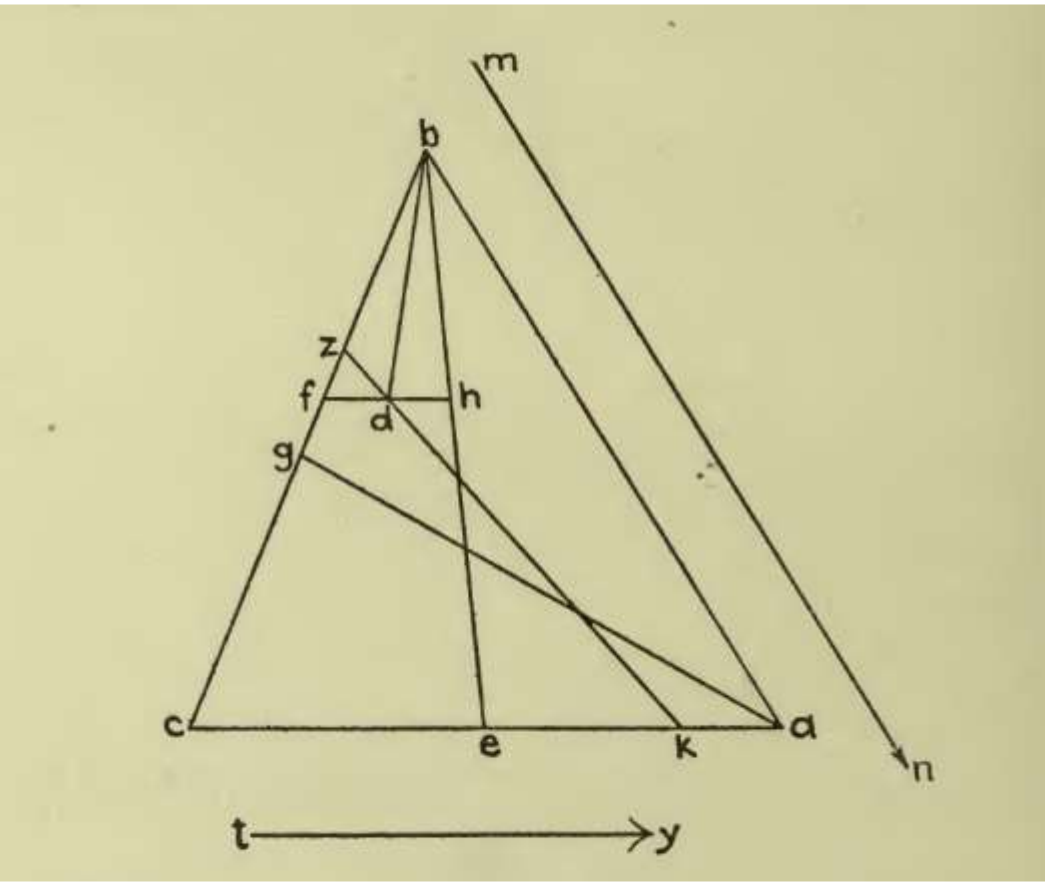
La lunghezza di KC diviene K’C che è più corto di KC. La linea DK’P’ divide ABC in due poligoni di differenti aree:

* il triangolo CK’P’;
* il quadrilatero K’BAP’.

Chiaramente il triangolo CK’P’ ha area nettamente inferiore a quella di K’BAP’.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso di triangolo da dividere in due parti uguali è mostrato nella figura che segue, riprodotta da p. 22 di Archibald:



Il problema è risolto con una serie di proporzioni fra lunghezze di segmenti, fra aree e fra segmenti e aree.

I segmenti AG e BE sono due mediane del triangolo ABC.

Il punto D è interno al triangolo: per questo punto deve essere disegnata una corda in grado di dividere in due parti uguali ABC.

Parallelamente alla base CA, per il punto D è tracciato il segmento FDH.

A fianco e sotto a ABC sono disegnati due segmenti paralleli a due lati (AB e CA): sono MN e TY.

Sembra che la lunghezza di MN sia ricavata dalla proporzione:

$$BF : MN = A_{BDF} : A_{BEC}.$$

Ma l'area di BEC è metà di quella di ABC.

Nella precedente proporzione sono note o calcolabili la lunghezza di BF e le aree di BDF e di BEC.

Ne risulta:

$$MN = BF * A_{BEC}/A_{BDF} = BF * A_{ABC}/(2 * A_{BDF}).$$

La lunghezza di MN è notevole e il segmento non può essere interamente contenuto nel limitato spazio assegnato allo schema: forse è per questa ragione che nello schema pubblicato da Archibald nel punto N compare una freccia rivolta verso l'esterno. Le stesse considerazioni valgono per la freccia in Y nel segmento TY.

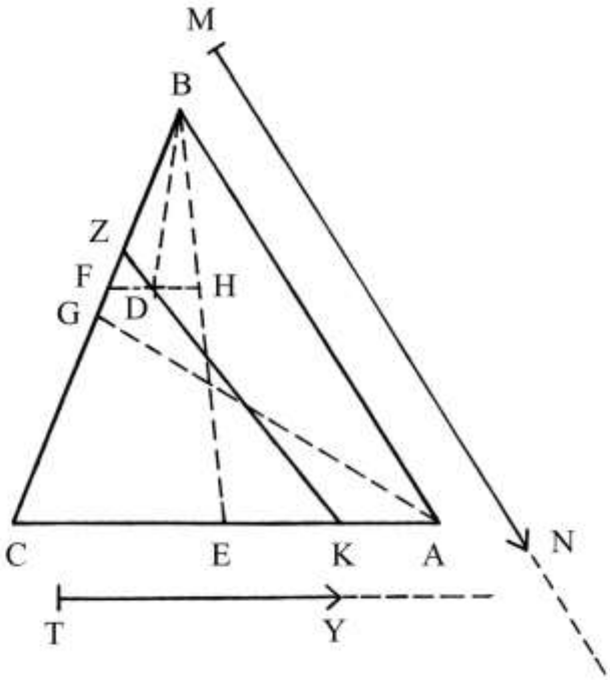
Fra le altre proporzioni sembrano rilevanti le due che seguono:

* BF : BC = BC : TY, da cui
TY = BC^2/BF: la lunghezza è notevole per cui TY non può essere interamente rappresentato nello schema: la necessità della freccia in Y è confermata.

** La seconda proporzione è:

$$FZ : ZC = ZC : MN.$$

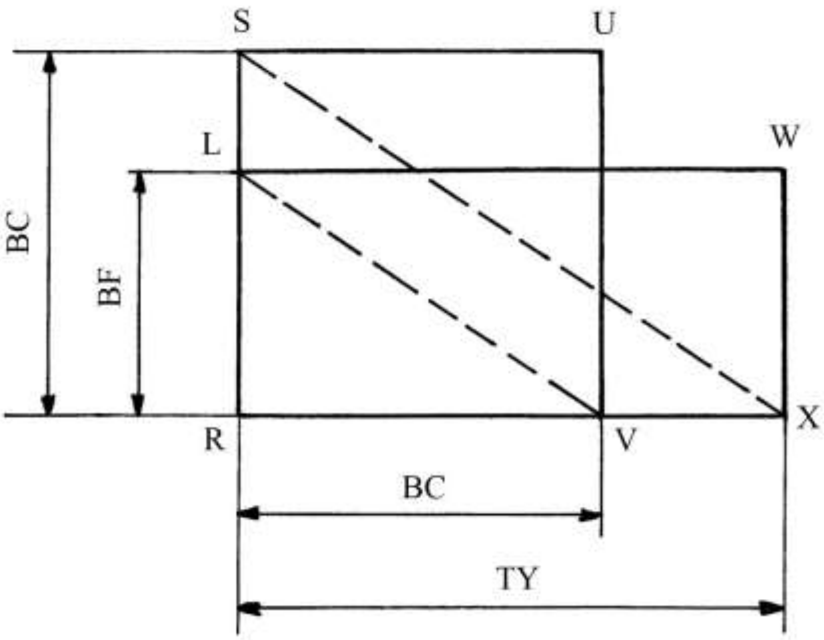
La sua soluzione consente di fissare il punto Z: la corda ZDK divide ABC in due poligoni che hanno aree uguali:
* il triangolo CZK;
* il quadrilatero ZBAK.



- APPROFONDIMENTO -

Le due ultime proporzioni possono essere risolte anche geometricamente.

Lo schema che segue è puramente indicativo e serve a mostrare un metodo, senza giungere a un rapporto effettivo con le lunghezze dei segmenti incontrate in precedenza.



Consideriamo la prima proporzione:

$BF : BC = BC : TY$, da cui:

$BC^2 = BF * TY$.

Il quadrato che ha lati lunghi BC ha area uguale a quella del rettangolo con lati lunghi BF e TY.

Le lunghezze di BC e di BF sono note mentre quella di TY è incognita.

Nello schema qui sopra è disegnato il quadrato RSUV con lati lunghi BC. A partire da R, sul lato RS è riportata la lunghezza di BF:

$RL = BF$.

Prolungare verso destra il lato RV. Collegare L con V.

Parallelamente a LV tracciare il segmento SX: esso è la diagonale del rettangolo RLWX.

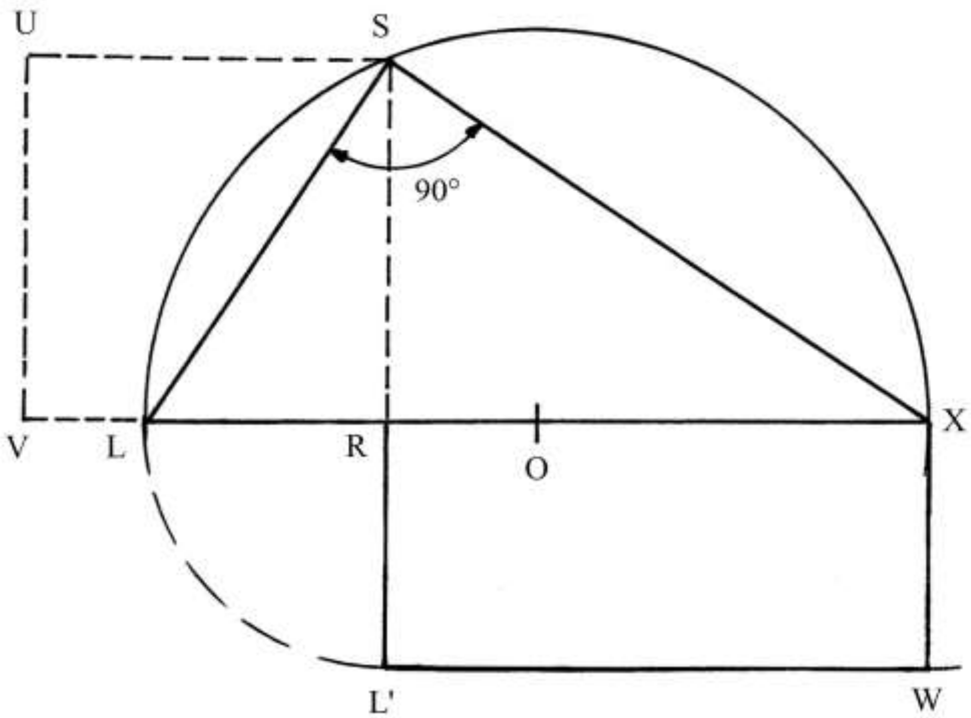
RSUV e RLWX hanno aree uguali.

RX è la lunghezza di TY.

Ovviamente, la lunghezza reale di TY da riportare sullo schema con il triangolo ABC è maggiore di quella ricavata con questa costruzione che ha solo finalità dimostrativa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una soluzione alternativa è data dall'applicazione del 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli.



Tracciare una retta orizzontale e su di essa costruire il quadrato RSUL, con lati lunghi quanto il lato BC del triangolo da dividere.

Dal punto R riportare verso sinistra la lunghezza di BF:

$RL = BF$.

Prolungare verso il basso SR.

Collegare L con S: dal punto S disegnare la perpendicolare a LS: è SX.

O è il punto medio di LX: fare centro in O e con raggio $OL = OS = OX$ tracciare una semicirconferenza.

LSX è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio che ha diametro LX.

RX è la lunghezza del rettangolo RXWL’ che ha area uguale a quella del quadrato RSUL.

Per il 2° teorema di Euclide, la lunghezza di SR è medio proporzionale fra le lunghezze di LR e di RX:

LR : SR = SR : RX   proporzione che equivale a:

BF : BC = BC : TY.

Il risultato ottenuto con questa seconda soluzione grafica è identico a quello della precedente.

\- -

APPENDICE
==========

DIVISIONE DELLE FIGURE – MEDIOEVO E RINASCIMENTO

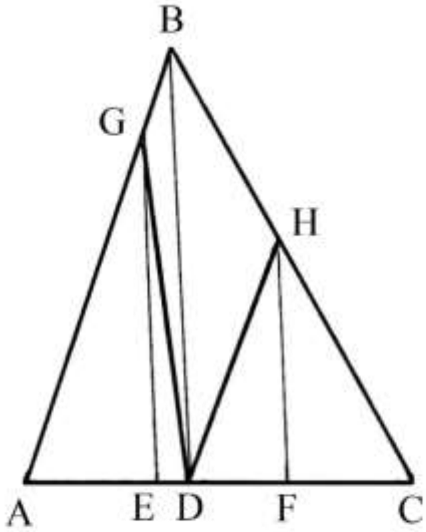
Alcuni geometri rinascimentali hanno proposto delle costruzioni per la divisione di figure piane in più parti.

Di seguito sono presentati alcuni esempi.

Divisione di un triangolo in parti uguali

La costruzione che segue fu proposta dal matematico francese Jacques Ozanam (1640-1717).

Il triangolo generico ABC deve essere diviso in un certo numero di parti uguali (*tre* nell'esempio), con segmenti uscenti da un punto dato, D:



Dividere il lato AC in *tre* parti uguali e fissare i punti E e F:

AE = EF = FC = AC/3.

Collegare i punti D e B.

Parallelamente al segmento DB, tracciare due segmenti a partire dai punti E e F: essi intersecano i lati AB (nel punto G) e BC (nel punto H).

Disegnare i segmenti DG e DH.

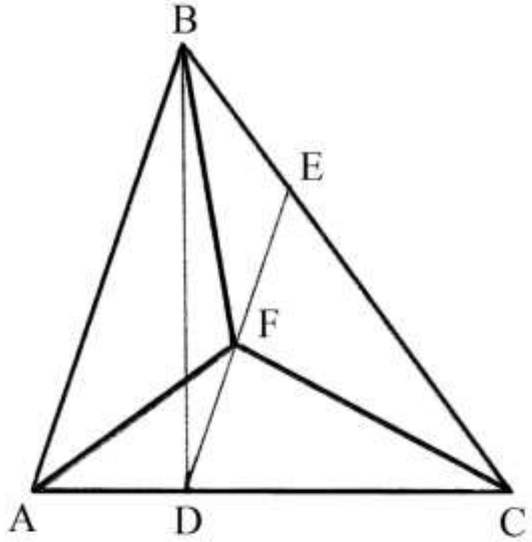
Il triangolo ABC risulta diviso in tre poligoni che hanno uguale superficie:

* il triangolo AGD;
* il quadrilatero GBHD;
* il triangolo DHC.

Divisione di un triangolo in tre parti uguali

Anche questa costruzione fu proposta da Jacques Ozanam.

Il triangolo generico ABC deve essere diviso in *tre* parti uguali con segmenti uscenti dai tre vertici:



Determinare il punto D in modo che sia AD = 1/3 AC.

Dal punto D tracciare una linea parallela al lato AB fino a intersecare BC in un punto, E.

Fissare il punto medio di DE: è F.

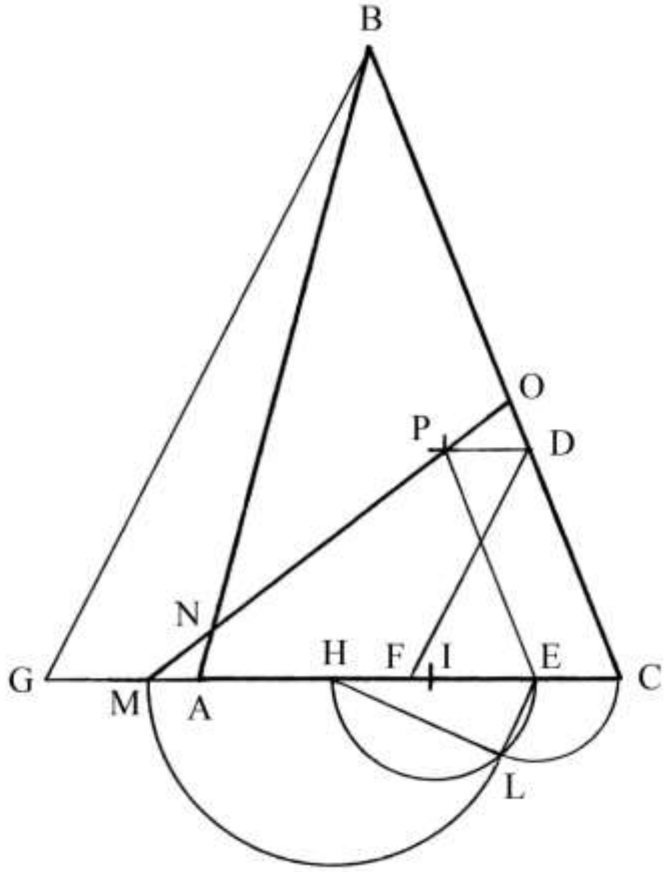
Collegare F con i tre vertici A, B e C.

Il triangolo originario ABC risulta diviso in tre triangoli di uguale superficie: ABF, FBC e AFC.

Divisione di un campo triangolare

La costruzione si deve al citato Ozanam.

ABC rappresenta un campo di forma triangolare (è un triangolo *scaleno*) che contiene al suo interno un pozzo, indicato con P:



Il campo deve essere diviso in *due* parti di uguale superficie con una linea che passi per il pozzo P.

Dal punto P tracciare due segmenti paralleli ai lati AC e BC: sono fissati i punti D e E.

Stabilire il punto medio del lato AC: è F.

Disegnare il segmento DF e parallelamente a questo ultimo un segmento da B fino a intersecare il prolungamento di AC in un nuovo punto: è G.

Determinare il punto medio di GC: è H.

Fissare il punto medio di HE: è I. Fare centro in I e, con raggio IH, tracciare una semicirconferenza da H a E.

Con centro in E e raggio EC, disegnare un arco da C fino a intersecare l'ultima semicirconferenza in un punto, L. Tracciare le corde HL e EL.

Fare centro in H e, con raggio HL, disegnare una arco da L fino a tagliare GC in un nuovo punto, M.

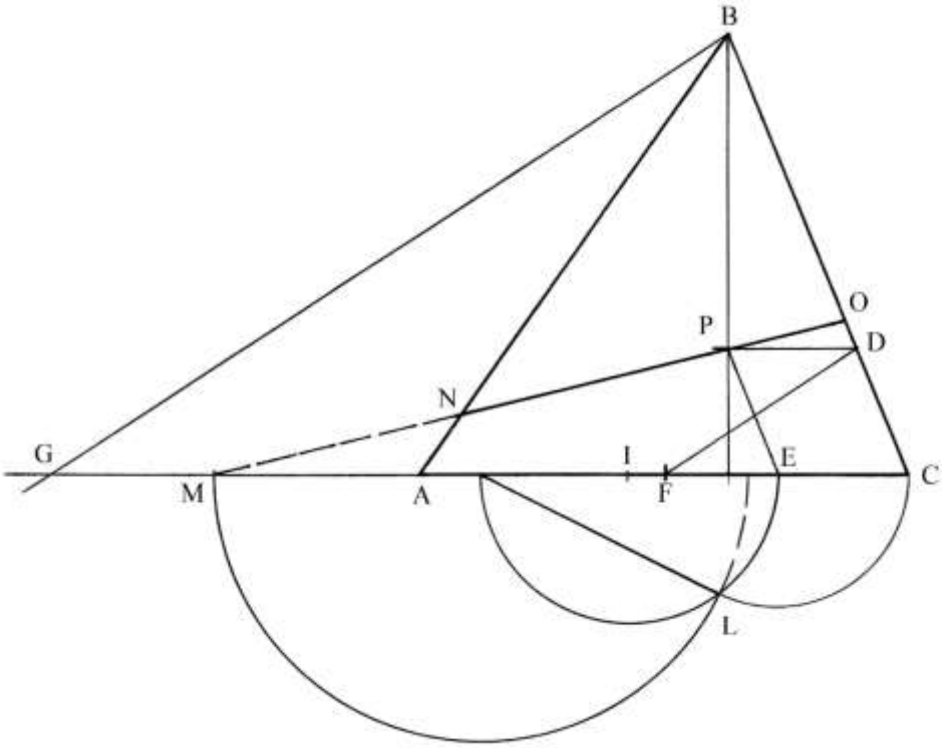
Tracciare il segmento MP fino a incontrare il lato BC in un punto: è O; MP interseca il lato AB in un punto, N.

Il triangolo ABC risulta diviso in due parti di uguale superficie:

* il triangolo NBO,
* il quadrilatero NOCA.

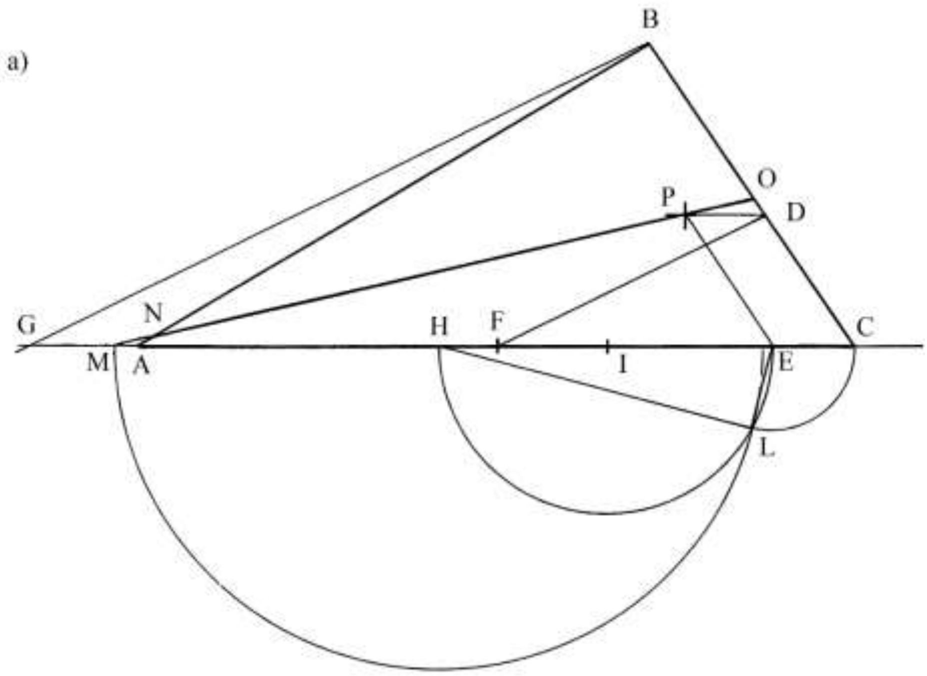
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nell'esempio che segue, il pozzo P è attraversato da una delle tre altezze del triangolo, quella relativa al lato AC:

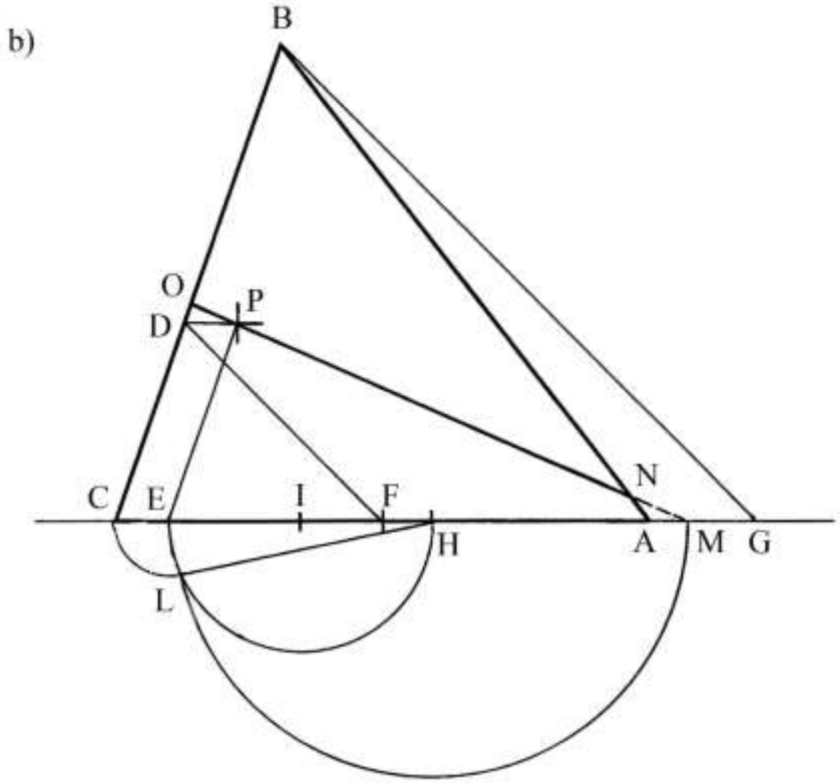


I quattro grafici che seguono applicano questa costruzione a differenti triangoli:

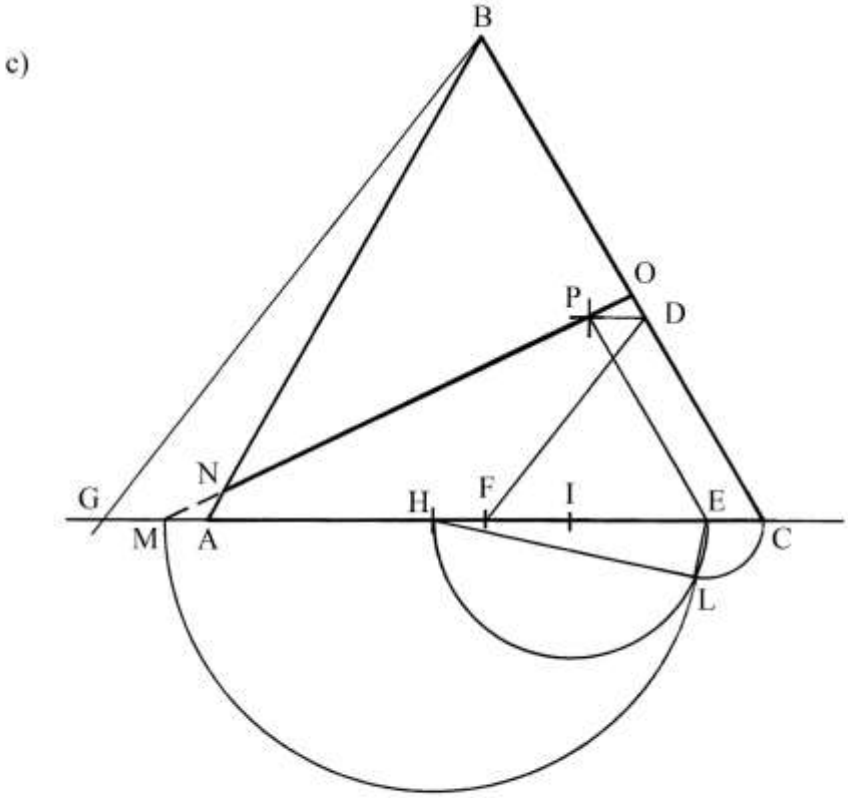
a) Un *triangolo scaleno* che ha l’angolo in B più ampio di 90° (ottusangolo):



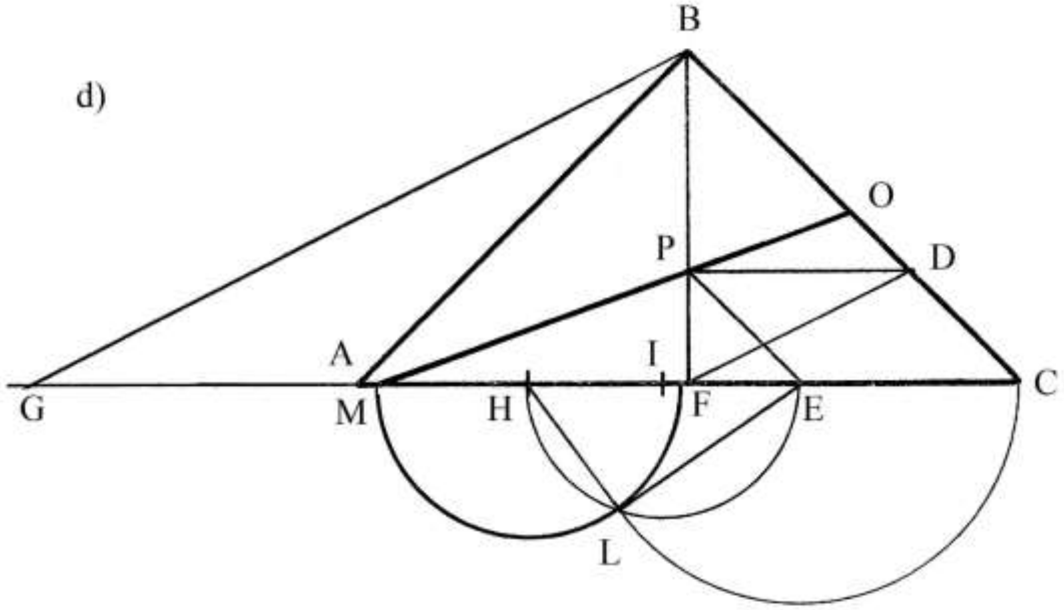
b) Un *triangolo scaleno* con il punto P collocato all’interno e sulla sinistra del poligono:



c) Un *triangolo equilatero* con il punto P posizionato vicino al lato BC:



d) Il triangolo ABC è *isoscele* e il pozzo indicato con P è intersecato sall'altezza BF:

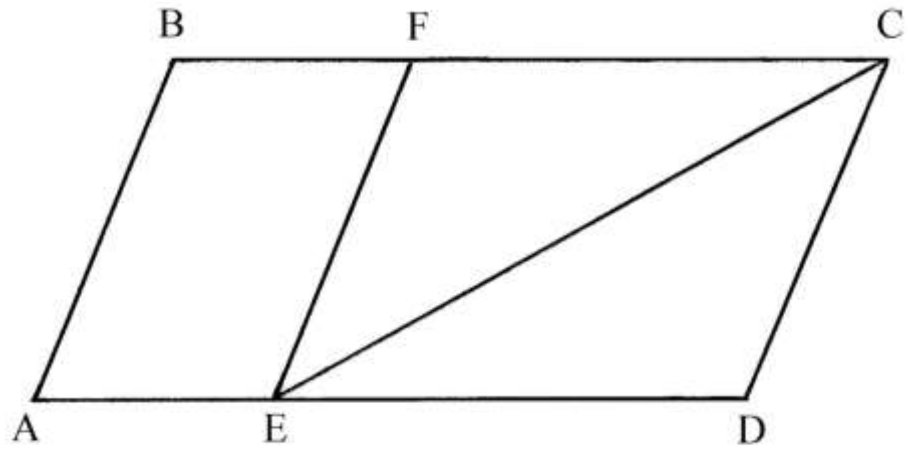


In questo ultimo esempio, il punto M viene a trovarsi sul segmento AC e non sul suo prolungamento verso sinistra.

Divisione di un quadrilatero in tre parti uguali

La costruzione che segue fu proposta dal matematico francese Jean Guillaume Garnier (1766 – 1840).

ABCD è un parallelogramma che deve essere diviso in tre parti uguali. Esso ha i lati due a due paralleli e di uguale lunghezza.



Determinare il punto E tale che AE = 1/3 AD e il punto F anch'esso posizionato a distanza di 1/3 di BC dal punto B.

Collegare i punti E e F. Tracciare la diagonale EC.

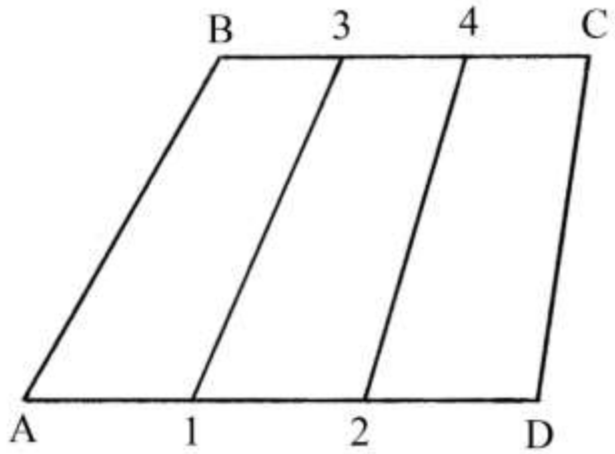
Il parallelogramma ABCD risulta suddiviso in tre parti di uguale superficie:

- Il parallelogramma ABFE;
- I triangoli EFC e ECD.

Divisione di un trapezio in parti uguali

Anche questa costruzione si deve al Garnier.

Il trapezio ABCD presenta due lati paralleli (AD e BC):



Il quadrilatero deve essere diviso in un certo numero di parti – *tre* nell'esempio – di uguale superficie, con dei segmenti tracciati fra i due lati paralleli.

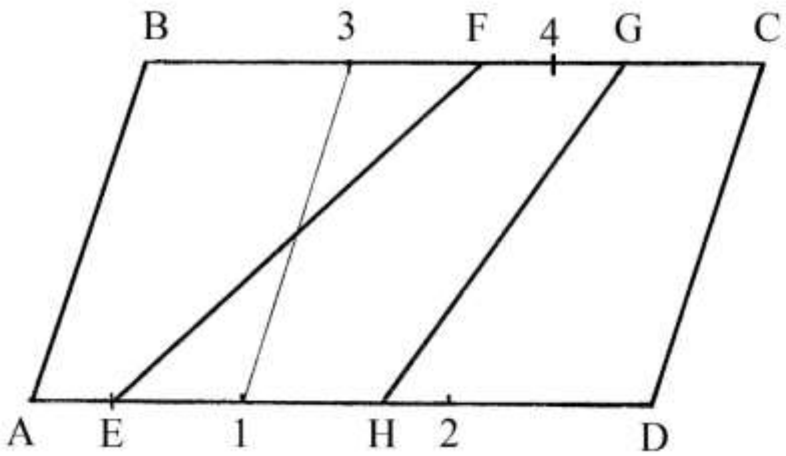
Dividere i due lati orizzontali AD e BC in *tre* parti uguali: sono stabiliti i punti 1, 2, 3 e 4.

I segmenti 1-3 e 2-4 dividono ABCD in tre trapezi di uguale superficie: AB-3-1, 1-3-4-2 e 2-4-CD.

Divisione di un parallelogramma in parti uguali

Pure questa costruzione risale al Garnier.

Il parallelogramma ABCD deve essere diviso in un certo numero di parti – *tre* nell'esempio – di uguale superficie, facendo in modo che sia interessato un punto dato, E, collocato su un lato (AD):



Dividere i due lati orizzontali, AD e BC, in *tre* parti uguali: sono fissati i punti 1, 2, 3 e 4.

Con il compasso misurare la lunghezza del segmento E-2 e riportarla sul lato BC, a partire da B, fino determinare il punto F: BF = E-2.

Il trapezio ABFE ha una superficie che è uguale a 1/3 di quella di ABCD.

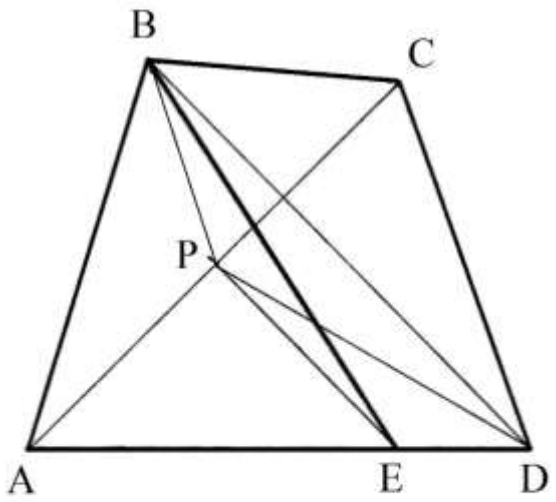
Dividere in *due* parti uguali i segmenti FC e ED: sono stabiliti, rispettivamente, i punti G e H. Disegnare il segmento GH.

I trapezi EFGH e HGCD hanno la stessa superficie che è uguale a 1/3 di quella di ABCD.

Divisione di un quadrilatero in due parti uguali

La costruzione che segue fu suggerita da Ozanam.

Il quadrilatero ABCD deve essere diviso in *due* parti di uguale superficie con una linea tracciata da uno dei suoi vertici, ad esempio B.



Disegnare le due diagonali, AC e BD. Determinare il punto medio della diagonale opposta al vertice B, AC: è P.

Collegare il punto P con B e con D.

A partire da P, tracciare una linea parallela a BD fino a intersecare il lato AD in un nuovo punto, E.

La corda BE divide il quadrilatero ABCD in due poligoni di uguale superficie (pari a metà di quella di ABCD):

* il triangolo ABE.
* il quadrilatero EBCD.

Bibliografia

1. Acerbi Fabio (a cura di), "Euclide – tutte le opere", Milano, Bompiani, 2007, pp. 2713.
2. Archibald Raymond Clare, "Euclid's book on divisions of figures". With a restoration based on Woepcke's test and the *Practica Geometriae* of Leonardo Pisano, Cambridge, at University Press, 1915, pp. vii-88.
3. Bar Hiia Abraam [Savasorda], "Llibre de Geometria (Hibbur hameixihà uehatixbòret)", versione dall'ebraico in catalano a cura di J.(osep Maria) Millàs I Vallicrosa, Barcellona, Editorial Alpha, 1931, pp. XXIX-153.
4. Calzolani Sergio, "I triangoli di Feynman".pdf, 2017, pp. 24, in www.geometriapratica.it.
5. Calzolani Sergio, "Volgarizzamento pisano Practica Geometriae".pdf, 2021, pp. 150, in www.geometriapratica.it.
6. Friberg Jöran, "Amazing traces of a Babylonian origin in Greek mathematics", Singapore, World Scientific Publishing, 2007, pp. xx+476.
7. Hogendijk Jan P., "The Arabic version of Euclid's *On Divisions*", in M. Folkerts and J. P. Hogendijk (eds.), "Vestigia Mathematica" (Amsterdam: Rodopi, 1993), pp. 143–62.
8. Høyrup Jens, "Sub-scientific mathematics: undercurrents and missing links in the mathematical technology of the Hellenistic and Roman world", 1990, pp. 50 (Hoyrup_1990_g_Undercurrents.pdf).
9. Hughes Barnabas, "Fibonacci's *De practica geometrie*", Springer, s.i.l., 2010, pp. xxxv-408.
10. "*Libro del modo di dividere le superficie attribuito a Machometo Bagdedino*", a cura di Giovanni [John] Dee e di Federico Commandino, Pesaro, 1570, Girolamo Concordia editore, pp. 12 + 88.
11. Moyon Marc, "La Géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines Médiévales", Turnhout (Belgio), Brepols Publishers n.v., 2017, pp. 652.

INDICE