sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: cerchio e circonferenza; moltiplicatore 88/7; problemi sui triangoli; triangolo 13-14-15; triangolo rettangolo 3-4-5; problemi sui quadrilateri; sfera; cono; problemi sui solidi; vaso vinario; ruote; problemi sui poligoni; teorema delle corde; costruzione geometrica di radici quadrate e cubiche; poligoni inscritti; lunule; unità di misura; rapporti aritmetici.

LA GEOMETRIA DI NICOLAS CHUQUET

Nicolas Chuquet è stato un matematico francese, nato a Parigi fra il 1445 e il 1455 e morto a Lione verso il 1488.

Ha lasciato un trattato di geometria e un trattato di aritmetica (*Triparty en la science des nombres*).

Il secondo è stato stampato da un altro francese, Estienne de La Roche, che ne trasse ampi passi e lo pubblicò a suo nome a Lione nel 1520.

L'opera geometrica (*La géométrie*) è stata studiata, trascritta e commentata da Hervé L'Huillier in un volume pubblicato a Parigi presso l'Editore Vrin nel 1979. L'opera di Chuquet risalirebbe al 1484.

La géométrie è stata compilata in più fasi: una prima stesura è contenuta nel manoscritto *n.a.fr. 1052* della Biblioteca nazionale di Parigi. Questa prima versione risalirebbe a circa dieci anni prima della stesura definitiva che è contenuta nel manoscritto *Paris fr. 1346*: la prima versione risalirebbe a circa il 1474.

L'edizione curata da Hervé L'Huillier è basata sul secondo e più recente manoscritto.

Il testo è contenuto in un manoscritto steso su carta di produzione italiana.

Secondo L'Huillier l'opera di Chuquet sarebbe stata influenzata dai risultati delle scuole d'abbaco dell'Italia centrosettentrionale e dai manoscritti preparati dai maestri d'abbaco.

Nei paragrafi che seguono sono spiegate e approfondite alcune costruzioni presenti nel trattato di Chuquet.

Non è stato considerato l'argomento "Astrolabio" e al tema della misurazione delle "Botti" e del loro contenuto è stato fatto solo un limitato accenno.

NOTE

Nel testo originale sono presenti alcune figure e parte di esse sono state aggiunte da Hervé L'Huillier: in questo articolo sono inclusi numerosi schemi che talvolta modificano i pochi originali, ma gran parte di quelli di seguito presentati sono stati realizzati a partire dai dati contenuti nel trattato di Chuquet. Essi mirano a spiegare meglio la natura e la soluzione dei problemi.

I paragrafi del trattato sono contrassegnati con una numerazione progressiva che *non* è qui riprodotta dal testo a stampa: i numeri sono racchiusi fra due punti: ".1.". Essi sono scritti sulla riga del titolo, a sinistra.

Molti problemi non recano alcuna indicazione di unità di misura lineari, superficiali o cubiche.

Allo scopo di semplificare l'esposizione, per l'operazione aritmetica di divisione è usata la barra " / " invece della barra orizzontale " ----- " o dei due punti " : ". La stessa soluzione è stata adottata per la barra della frazione fra due numeri.

Per la moltiplicazione è usato il simbolo "*", invece dei più comuni " x " o " · ".

La descrizione dei problemi presentati e delle soluzioni offerte da Chuquet è spesso ampliata con appositi riquadri – gli APPROFONDIMENTI – debitamente evidenziati. Ovviamente si tratta di contenuti, approfondimenti e citazioni di lavori di altri Autori, introdotti da chi scrive.

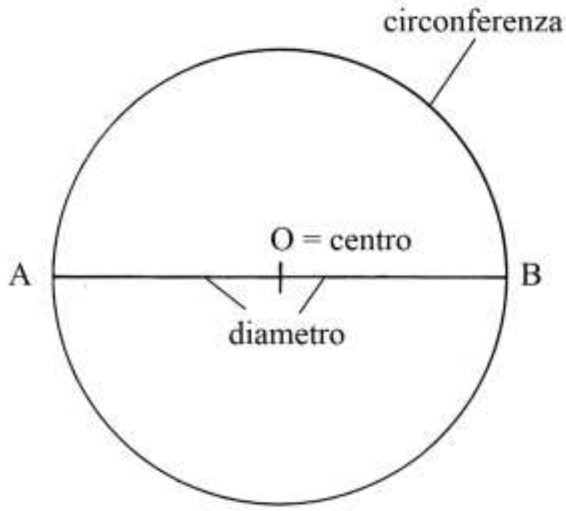
Le soluzioni contenute nel trattato originale sono espresse con numeri misti formati da una parte intera e da una frazionaria: ad esempio "38 ½", ma priva del simbolo infisso dell'addizione "+"; qui è sempre stato scritto il simbolo: "38 + ½".

L'area di una superficie piana è indicata sia con la lettera maiuscola "A" sia con la "S": quest'ultima è preferita quanto può esservi possibilità di errore con la "A" usata per indicare un punto sulla figura collegata al problema presentato.

GEOMETRIA PIANA

Il cerchio

La prima figura piana considerata è il *cerchio*:



Un cerchio è caratterizzato da tre termini:

* il *centro* O è il punto interno equidistante da tutti i punti che formano la circonferenza;
* la *circonferenza* è la linea che racchiude il cerchio: i suoi punti sono tutti equidistanti dal centro O: OA e OB sono due *raggi*;
* AB è un segmento passante ed è il più lungo segmento tracciabile all'interno che collega due punti della circonferenza fra loro opposti: è conosciuto con il termine *diametro* e ha lunghezza doppia del raggio: AB = 2 * OA = 2 * OB.

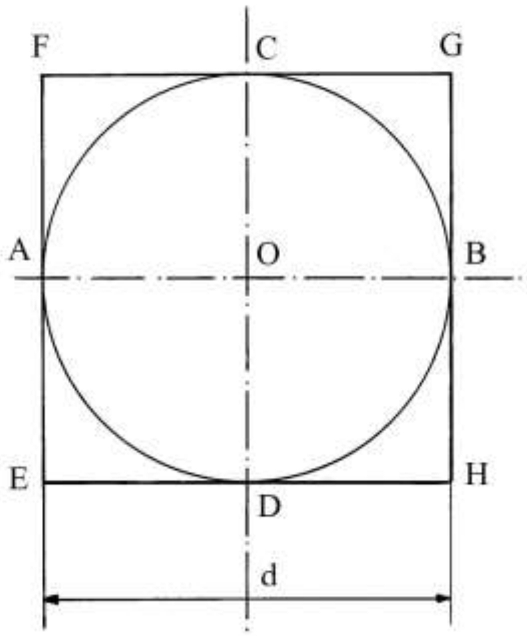
Chuquet propone un *primo metodo* per calcolare l'area A del cerchio di diametro *d* conoscendo anche la lunghezza *c* della circonferenza:

$$A = c^2 * 7/88.$$

Una circonferenza è lunga 22 piedi e la sua area è:
$A = 22^2 * 7/88 = (38 + ½)$ piedi^2.

Un *secondo metodo* è:
$A = d^2 * 11/14$.
La circonferenza *c* lunga 22 piedi ha diametro *d* che è:
$d = c/\pi = 22/(22/7) = 7$ piedi.
Per "π" è usato il valore approssimato 22/ = (3 + 1/7).
Con *d* lungo 7 piedi, l'area è:
$A = d^2 * 11/14 = 7^2 * 11/14 = 49 * 11/14 = 38{,}5$ piedi^2.

Il coefficiente 11/14 è originato dal rapporto esistente fra l'area di un cerchio di diametro *d* e quella di un quadrato ad esso circoscritto e con lati lunghi quanto *d*:



L'area del cerchio di raggio *r* è:
$A_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 11/14 * d^2$.
L'area del quadrato EFGH è:
$A_{\text{EFGH}} = EH^2 = d^2$.
Il rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato è:
$A_{\text{CERCHIO}}/A_{\text{EFGH}} = (11/14 * d^2)/d^2 = 11/14$.

Un *terzo metodo* è:
$A_{\text{CERCHIO}} = c * d/4 = 22 * 7/4 = 154/4 = (38 + ½)$ piedi^2.
La formula può essere spiegata così:
$A_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * r * r = (2 * \pi * r/2) * d/2 = c/2 * d/2 = c * d/4$.

Infine, Chuquet propone un *quarto metodo*:
$A_{\text{CERCHIO}} = c/2 * d/2 = 22/2 * 7/2 = 154/4 = (38 + ½)$ piedi^2.

<u>Rapporti fra l'area e le lunghezze del diametro e della circonferenza</u>

La radice quadrata del prodotto dell'area di un cerchio per (1 + 3/11) è la lunghezza del diametro:

$\sqrt{[A\ CERCHIO * (1 + 3/11)]} = d$.

L'espressione (1 + 3/11) equivale a 14/11.

Nel caso dell'area uguale a (38 + ½) piedi^2 si ha:

$\sqrt{[(38 + ½) * (1 + 3/11)]} = \sqrt{49} = 7$ piedi.

La lunghezza della circonferenza, *c*, è ricavata dalla radice quadrata del prodotto dell'area per (12 + 4/7):

$\sqrt{[38 + ½) * (12 + 4/7)} = \sqrt{(38,5 * 88/7)} = \sqrt{484} = 22$ piedi.

- APPROFONDIMENTO -

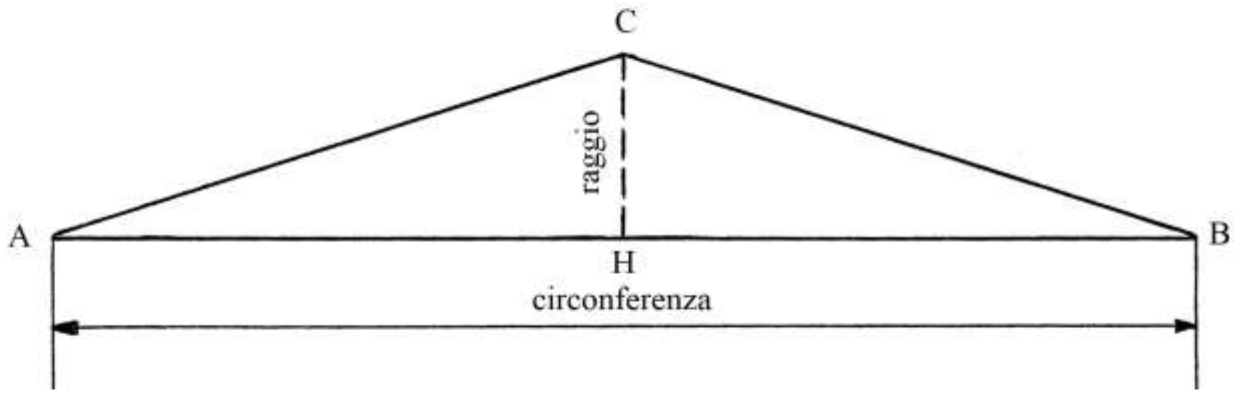
Il *moltiplicatore* 88/7

La frazione 88/7 equivale al *numero misto* (12 + 4/7).

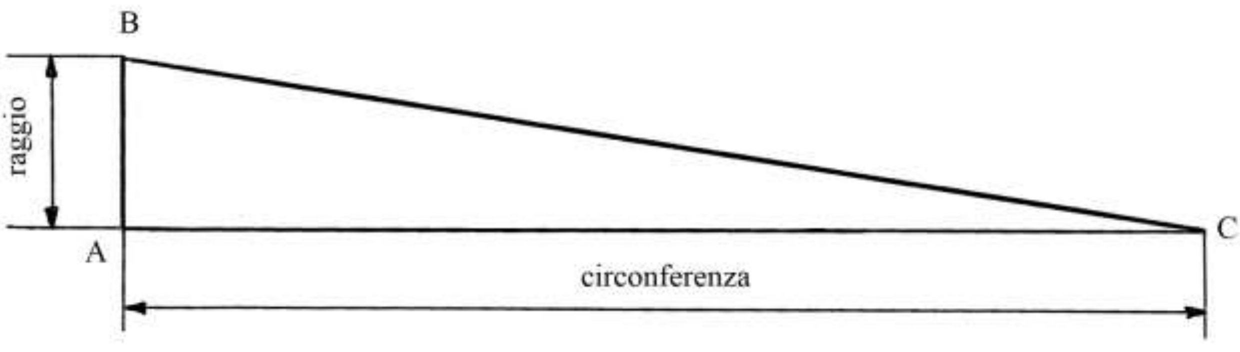
Questa espressione è il *moltiplicatore della superficie* e si ritrova – senza essere citato con questa espressione – in alcuni trattati degli abacisti toscani del Medioevo e del Rinascimento (ad esempio in quelli di Paolo Gherardi e di Orbetano da Montepulciano).

Approfondiamo l'origine e il significato del *moltiplicatore*.

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza e altezza CH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

$A_{ACB} = (AB * CH)/2 = (circonferenza * raggio)/2$.

Ma:

circonferenza = diametro * 22/7 = 2 * raggio * 22/7 = 44/7 * raggio.

Inversamente:

raggio = circonferenza/(44/7) = circonferenza * 7/44.

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha:

A_{CERCHIO} = (circonferenza) * (circonferenza * 7/44)/2 = circonferenza^2 * 7/88.

Da questa formula si può ricavare la lunghezza della circonferenza:

circonferenza = √(A_{CERCHIO} * 88/7).

La frazione 88/7 vale:

88/7 = (12 + 4/7)   ed è il *moltiplicatore della superficie*: esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

circonferenza^2 = A_{CERCHIO} * 88/7   e

(circonferenza^2)/(A_{CERCHIO}) = 88/7.

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio *r* è data da:

Area cerchio = π * r^2, mentre la circonferenza è lunga:

circonferenza = 2 * π * r.

Ne consegue che:

circonferenza^2/A_{CERCHIO} = (4 * π^2 * raggio^2)/(π * raggio^2) = 4 * π.

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

4 * 22/7 = 88/7 = (12 + 4/7).

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di 4*π.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

<u>Alcune formule su cerchio e circonferenza</u>

Sono qui riassunte alcune formule utili per risolvere i problemi relativi al cerchio e alla circonferenza.

Sono usati i seguenti simboli:

* r = raggio;
* d = diametro;
* c = circonferenza.

Per π è usata l'approssimazione:

π ≈ 22/7 = (3 + 1/7).

A_{CERCHIO} = π * r^2 = π * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2.

La formula inversa è:

d = √(A_{CERCHIO} * 14/11).

A_{CERCHIO} = π * r^2 = π * r * r = (2 * π *r)/2 * d/2 = c/2 * d/2 = c * d/4.
c = π * d = 22/7 * (2 * r) = 44/7 * r.
r = c/(44/7) = 7/44 * c.
d = 2 * r = 2 * [c/(44/7)] = 2 * c * 7/44 = c * 7/22.
A_{CERCHIO} = c/2 * d/2 = c/2 * (c * 7/22)/2 = c^2 * 7/88.

$c = \sqrt{(A_{\text{CERCHIO}} * 88/7)}$.

$c^2/A_{\text{CERCHIO}} = (2 * \pi * r)^2/(\pi * r^2) = 4 * \pi = 4 * (22/7) = 88/7 = (12 + 4/7)$.

- -

L'applicazione della regola del tre semplice

Chuquet utilizza semplici regole di algebra per risolvere problemi geometrici: in particolare utilizza quella del *tre semplice*.

Eccone un esempio: se una circonferenza ha diametro lungo 7 e circonferenza lunga 22, quanto è la circonferenza che ha diametro 4? La risposta scritta in modo moderno è:

$22 : 7 = x : 4$, con "x" lunghezza della seconda circonferenza:

$x = 22 * 4/7 = (12 + 4/7)$.

Chuquet scrive (12 4/7) senza usare il simbolo infisso dell'addizione, "+", fra i due componenti del numero misto.

Un altro esempio è il seguente: una seconda circonferenza è lunga 16 e deve essere calcolato il suo diametro:

$22 : 7 = 16 : d$ da cui

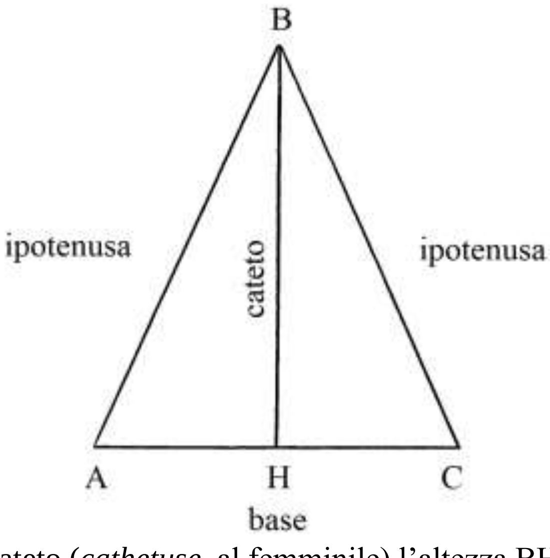
$D = (7 * 16)/22 = (5 + 1/11)$.

I TRIANGOLI

===========

Un triangolo è una figura piana delimitata da tre segmenti di retta: uno è chiamato *base* (perché è orizzontale) e gli altri due, obliqui, sono chiamati da Chuquet *ipotenuse*.

Lo schema che segue presenta un generico triangolo, isoscele in questo caso:



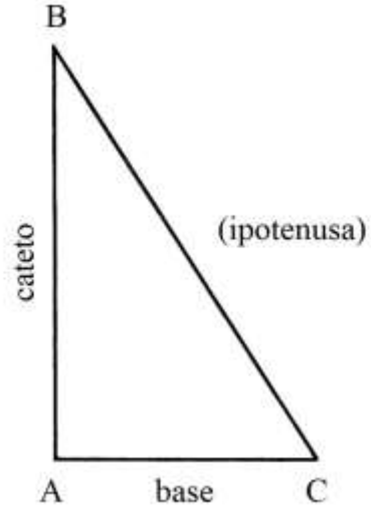
Chuquet chiama cateto (*cathetuse*, al femminile) l'altezza BH: nei coevi testi italiani cateto è al maschile. Egli chiama *ypothenusse* i due lati obliqui (AB e BC), termine qui tradotto con *ipotenusa*.

La terminologia usata da Chuquet per questi due ultimi lati non è del tutto scorretta. BH divide ABC in due triangoli rettangoli, ABH e HBC. AB e BC sono le ipotenuse rispettivamente di ABH e di HBC.

Chuquet distingue quattro tipi di triangoli:

* equilateri, con i tre lati di uguale lunghezza;

* isosceli, con due lati di uguale lunghezza;
* scaleni, con i lati di diversa lunghezza;
* rettangoli: un triangolo rettangolo ("*orthogone*") ha un angolo retto e i due segmenti che lo definiscono sono la base e il cateto, come spiega la figura che segue:



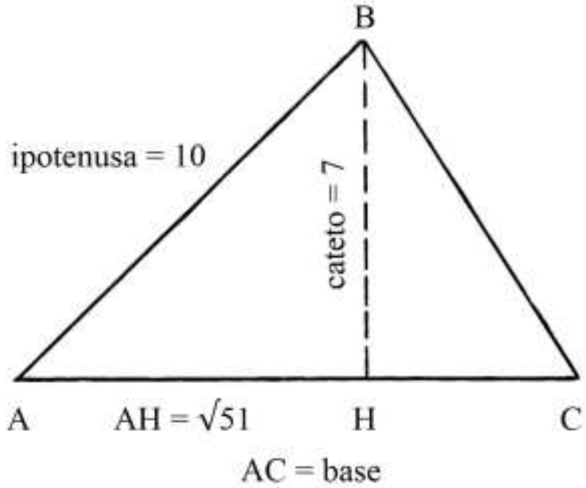
Nel vertice A si trova l'angolo retto.

I problemi relativi ai triangoli sono ordinati secondo una successione:

* triangoli rettangoli;
* triangoli ottusangoli (*amblygone*);
* triangoli acutangoli (*osygone*);
* triangoli equilateri;
* triangoli isosceli;
* triangoli scaleni.

PROBLEMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Un triangolo generico ABC ha un'ipotenusa AB lunga 10 e un cateto, BH (altezza) è lungo 7:



Nel testo di Chuquet non vi è alcuna figura: per quanto riguarda questo problema lo schema precedente è solo un'ipotesi costruttiva.

La lunghezza della proiezione dell'ipotenusa sul lato di base, AH, è:

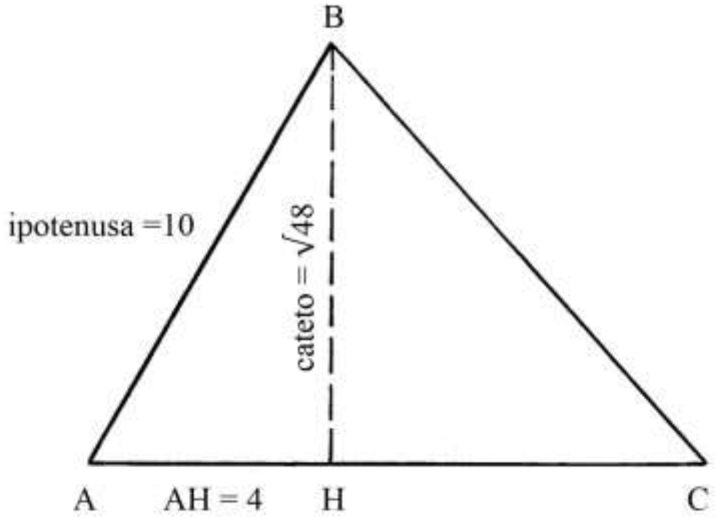
$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 10^2 – 7^2 = 100 – 49 = 51$ e

$AH = \sqrt{51}$.

Nello schema sono presenti due triangoli rettangoli: ABH e HBC.

ABC *non* è un triangolo rettangolo.

Un secondo triangolo rettangolo ha il lato AB, ipotenusa di ABH, lungo 8 e la sua proiezione sulla base, AH, è lunga 4.



Il cateto o altezza BH è lungo:

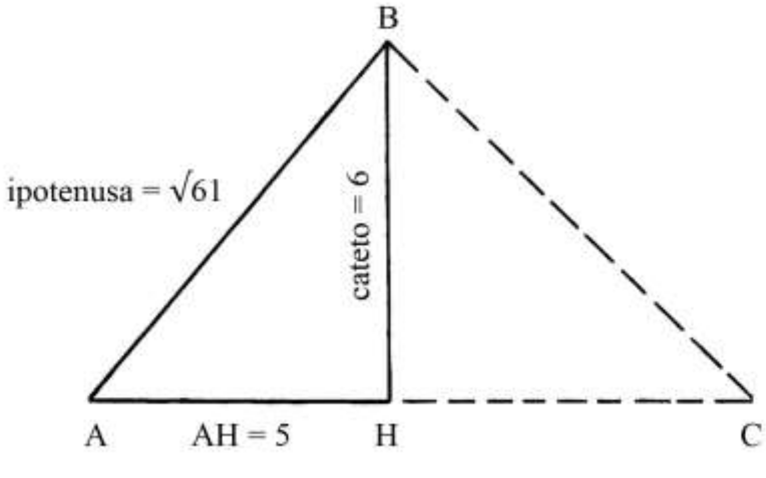
$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 8^2 – 4^2 = 64 – 16 = 48$ e

$BH = \sqrt{48}$.

ABH e HBC sono due triangoli rettangoli, mentre ABC non lo è.

Le lunghezze di HC e di BC sono ipotetiche.

Un terzo triangolo ha altezza BH lunga 6. La sua proiezione sulla base è 5:



La lunghezza dell'ipotenusa AB è:

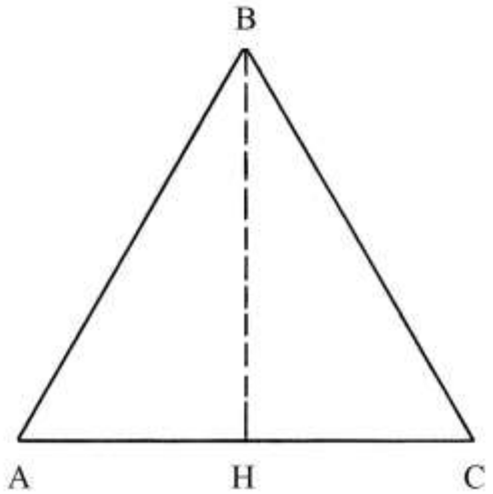
$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$ e

$AB = \sqrt{61}$.

Di nuovo, il triangolo HBC è puramente ipotetico.

TRIANGOLO EQUILATERO

ABC è un triangolo equilatero e BH è l'altezza relativa al lato AC.



Chuquet fornisce alcune informazioni sui rapporti fra i quadrati delle lunghezze di lati e di altezze.

Fissiamo la lunghezza di un lato come "2 * a":

$AC = 2 * a$ e

$AH = HC = a$.

L'altezza BH è lunga:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = (2 * a)^2 - a^2 = 3 * a^2$.

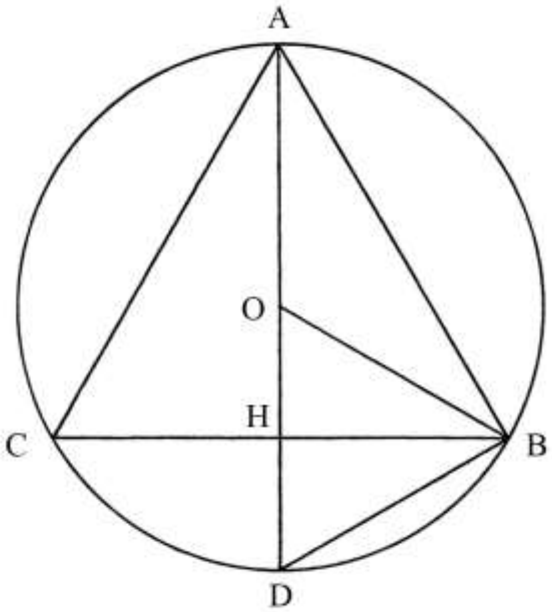
Fra i quadrati delle lunghezze esiste una proporzione:

$AC^2 : BH^2 : AH^2 = 4 * a^2 : 3 * a^2 : a^2 = 4 : 3 : 1$.

È questa la proporzione evidenziata da Chuquet.

Il rapporto fra il quadrato delle lunghezze di un lato e di un'altezza è 4 : 3 ed è chiamato *sesquiterzo*.

Uno schema contenuto a p. 113 del volume di Hervé L'Huillier fornisce ulteriori informazioni:



ABC è un triangolo equilatero inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA = OB = OC.

BD è una corda che è lunga quanto il raggio ed è anche un lato dell'esagono regolare inscritto (che non è disegnato).

OH è lungo un terzo dell'altezza AH:

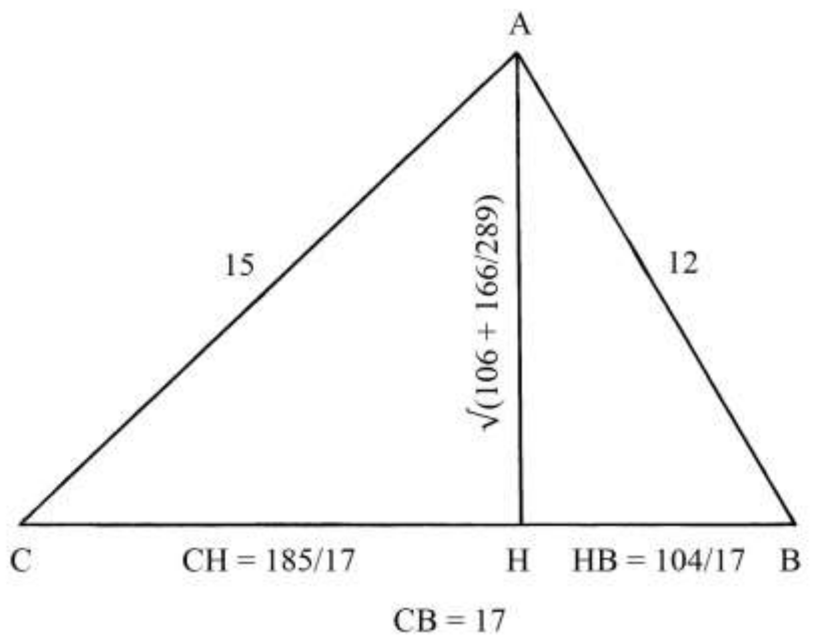
$OH = AH/3$ e $AH = 3 * OH$.

Ma OH = HD, per cui si ha:

$AD = AH + HD = 3 * OH + OH = 4 * OH = 4 * (AH/3) = 4/3 * AH$.

TRIANGOLO SCALENO

Un triangolo scaleno ha lati lunghi 12, 15 e 17:



È da notare che molto spesso Chuquet non indica unità di misura delle lunghezze e inoltre la sua passione per i numeri irrazionali espressi da radici quadrate.

Questo problema richiede la lunghezza dell'altezza AH. La soluzione è ottenuta con l'impiego di semplici regole di algebra.

AH divide ABC in due triangoli rettangoli, AHC e AHB: essi hanno in comune il cateto AH, che è un'altezza di ABC.

La lunghezza di AH è data da:

$AH^2 = AC^2 - CH^2$ oppure da

$AH^2 = AB^2 - HB^2$.

Le due espressioni sono equivalenti:

$AC^2 - CH^2 = AB^2 - HB^2$.

L'Autore assegna alla lunghezza di CH il valore dell'incognita: in termini moderni è "x" e HB è lungo:

$HB = CB - CH = (17 - x)$.

La precedente uguaglianza diviene:

$15^2 - x^2 = 12^2 - (17 - x)^2$

$225 - x^2 = 144 - 289 + 34 * x - x^2$

$34 * x = 225 - 144 + 289$

$34 * x = 370$

$x = 370/34 = 185/17 = (10 + 15/17)$.

La lunghezza di HB è:

$HB = 17 – (10 + 15/17) = (6 + 2/17)$.

L'altezza AH è lunga:

$AH^2 = AC^2 – CH^2 = 15^2 – (10 + 15/17)^2 = 225 – (185/17)^2 = (65025 – 34225)/289 =$
$= 30800/289 = (106 + 166/289)$ e
$AH = \sqrt{(106 + 166/289)}$ [$\approx 10,32$].

AH non scompone ABC in due triangoli rettangoli con lati lunghi quanto terne primitive o derivate.

Inoltre, Chuquet sembra utilizzare anche una nota formula risalente a Erone di Alessandria per calcolare le lunghezze dei segmenti CH e HB:

$CH = (AC^2 + CB^2 – AB^2)/(2 * CB)$.

In questo caso concreto si ha:

$CH = (15^2 + 17^2 – 12^2)/(2 * 17) = (225 + 289 – 144)/34 = 370/34 = 185/17$, che è il risultato ottenuto con l'aiuto dell'algebra.

La formula di Erone ha validità generale e può essere applicata al calcolo della lunghezza di HB:

$HB = (CB^2 + AB^2 – AC^2)/(2 * CB) = (17^2 + 12^2 – 15^2)/(2 * 17) =$
$= (289 + 144 – 225)/34 = 207/34 = 104/17$.

La somma delle lunghezze di CH e di HB è:

$CH + HB = 185/17 + 104/17 = (185 + 104)/17 = 289/17 = 17 = CB$.

La formula di Erone può essere così riassunta:

La lunghezza della proiezione di un lato obliquo di un triangolo sul lato di base è data dalla somma dei quadrati delle lunghezze del lato obliquo adiacente e del quadrato della lunghezza del lato di cui fa parte la proiezione meno il quadrato della lunghezza del lato obliquo opposto alla proiezione, il tutto diviso per il doppio della lunghezza di cui essa proiezione fa parte.

Area di un triangolo

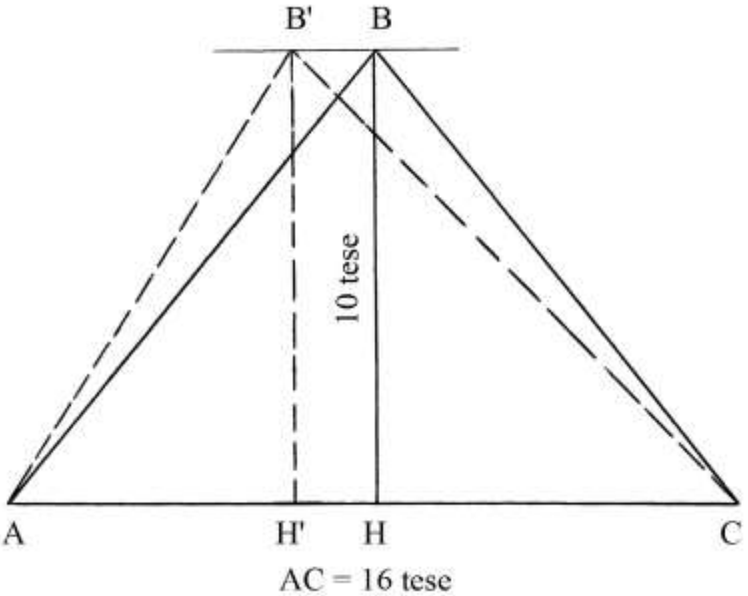
Un triangolo ha base lunga 16 *tese* e cateto (altezza) lungo 10 *tese*.

Nel testo non è specificata la natura del triangolo: se è isoscele o scaleno.

Uno schema avrebbe aiutato Chuquet a chiarire: forse aveva poca dimestichezza con gli strumenti da disegno e ciò conferma che la geometria senza figure è solo fantageometria.

La figura che segue presenta due triangoli: ABC è isoscele (AB = BC) e AB'C è scaleno (AB' < B'C).

Le due altezze, BH e B'H' hanno uguale lunghezza: 10 tese.



L'area di ABC è:

$A_{ABC} = (BH * AC)/2 = (10 * 16)/2 = 80$ tese^2.

Altre forme di scrittura alternative alla precedente conducono allo stesso risultato:

$A_{ABC} = (BH/2) * AC = (10/2) * 16 = 5 * 16 = 80$ tese^2, oppure:

$A_{ABC} = BH * (AC/2) = 10 * (16/2) =10 * 8 = 80$ tese^2.

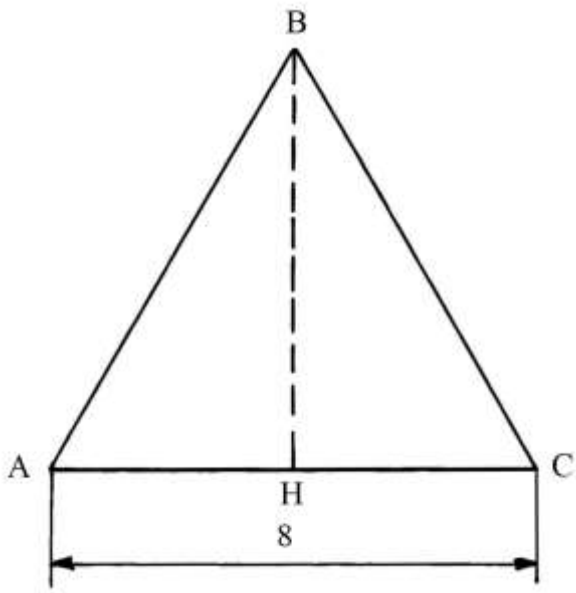
Anche il triangolo AB'C ha area uguale:

$A_{AB'C} = (B'H' * AC/2) = (10 * 16)/2 = 80$ tese^2.

Nota: qui abbiamo introdotta l'unità di misura convenzionale "tese^2", ignorando l'unità di misura utilizzata per le superfici. In APPENDICE sono contenute ulteriori informazioni sulle unità di misura.

AREA DI UN TRIANGOLO EQUILATERO

Un triangolo equilatero ha lati ("*facce*") lunghi 8: Chuquet non indica alcuna unità di misura della lunghezza.



La procedura impiegata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza della base: $AC/2 = 8/2 = 4$;
* moltiplicare per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* elevare al quadrato la lunghezza di un'*ipotenusa* (ad esempio AB): $AB^2 = 8^2 = 64$;
* sottrarre 16: $64 – 16 = 48$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48}$, lunghezza dell'altezza (cateto") BH;
* moltiplicare per metà della lunghezza di AC: $(\sqrt{48}) * 4 = \sqrt{768}$ area del triangolo ABC.

La procedura per calcolare l'altezza BH è riassunta nella formula che segue:

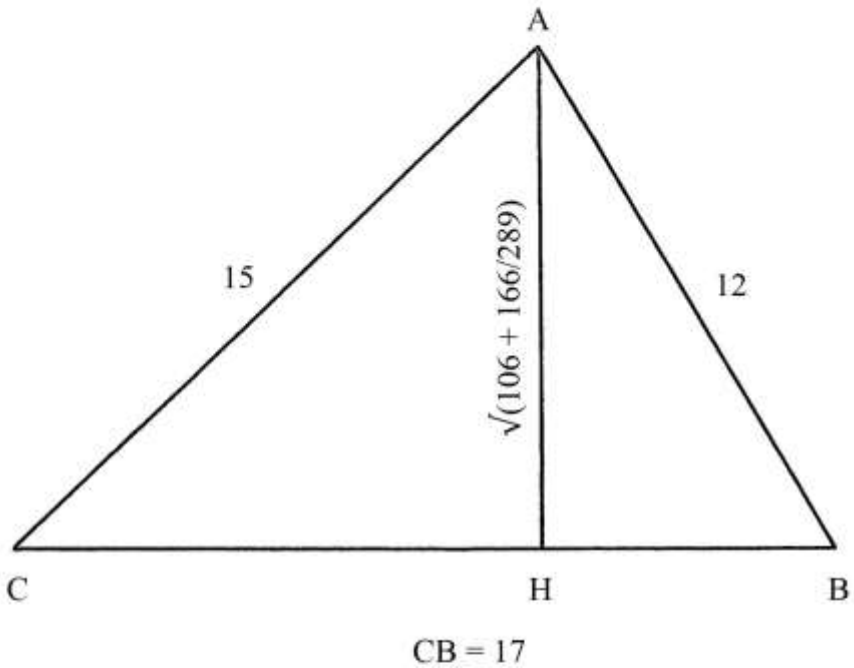
$$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{(8^2 – 4^2)} = \sqrt{(64 – 16)} = \sqrt{48}.$$

L'area è correttamente ricavata:

$$A_{ABC} = BH * AH = \sqrt{48} * 4 = \sqrt{(48 * 16)} = \sqrt{768}.$$

<u>AREA DI UN TRIANGOLO SCALENO</u>

Chuquet riprende in considerazione il triangolo scaleno 12-15-17.



È nota l'altezza AH:

$$AH = \sqrt{(106 + 166/289)}.$$

L'area è data da:

$$A_{ABC} = AH * (CB/2) = \sqrt{(106 + 166/289)} * 17/2 = \sqrt{7700}\ [\approx 87,75].$$

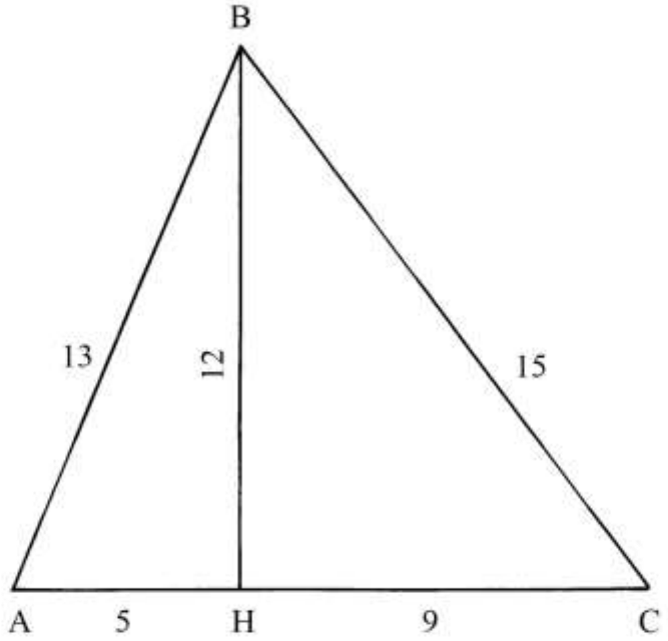
<u>TRIANGOLO 13 – 14 – 15</u>

Chuquet propone di calcolare l'area di un triangolo che ha lati lunghi 13, 14 e 15. Si tratta del classico triangolo studiato da Erone di Alessandria e, poi, da molti altri geometri.

Le lunghezze dei lati sono in progressione aritmetica di ragione 1:

$$13 – (13 + 1) – [(13 + 1) + 1] \rightarrow 13 – 14 – 15.$$

La proprietà fondamentale che possiede questo triangolo lo rende quanto mai utile, almeno ai fini didattici: le lunghezze dei lati, quella di un'altezza (BH nella figura) e l'area sono espresse da *numeri interi*.



AC = 14

Nella disposizione mostrata nella figura, l'altezza BH è lunga 12 e divide la base in due segmenti che hanno anche essi lunghezze definite da numeri interi:

AH = 5 e HC = 9.

Chuquet calcola l'area applicando la formula di Erone (senza citarlo):

* sommare le lunghezze dei tre lati: 13 + 14 + 15 = 42 [è il perimetro];
* dividere per 2: 42/2 = 21 [è il semiperimetro];
* sottrarre 13 da 21: 21 – 13 = 8;
* sottrarre 14 da 21: 21 – 14 = 7;
* sottrarre 15 da 21: 21 – 15 = 6;
* moltiplicare 8 per 7 per 6: 8 * 7 * 6 = 336;
* moltiplicare per 21 [il semiperimetro]: 336 * 21 = 7056;
* estrarre la radice quadrata: √7056 = 84, area del triangolo ABC.

La procedura può essere ulteriormente chiarita:

* AB = a;
* AC = b;
* BC = c;
* a + b + c = 2 * p [perimetro];
* (a + b + c)/2 = p [semiperimetro;
* A_{ABC} = area del triangolo ABC.

$A_{ABC} = \sqrt{[p * (p – a) * (p – b) * (p – c)]} = \sqrt{[21 * (21 – 13) * (21 – 14) * (21 – 15)]} =$
$= \sqrt{(21 * 8 * 7 * 6)} = \sqrt{7056} = 84.$

- APPROFONDIMENTO -

Il testo originale non contiene alcuno schema e non fornisce alcuna informazione sulle lunghezze di BH e delle due proiezioni AH e HC.

L'uso della formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo richiede soltanto la conoscenza delle lunghezze dei tre lati.

Come già visto in precedenza, nella soluzione del problema del triangolo scaleno con lati lunghi 12-1517, le tre lunghezze possono essere ricavate come segue: fissiamo come incognita "x" la lunghezza di AH; ne consegue:

$HC = AC – AH = (14 – x)$.

Valgono le due seguenti relazioni:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 13^2 – x^2 = 169 – x^2$.

$BH^2 = BC^2 – HC^2 = 15^2 – (14 – x)^2 = 225 – 196 + 28 * x – x^2 = 29 + 28 * x – x^2$.

Eguagliando le due espressioni di BH^2 si ha:

$169 – x^2 = 29 + 28 * x – x^2$

$140 = 28 * x$

$x = 140/28 = 5$ e

$HC = 14 – 5 = 9$.

L'altezza BH è lunga:

$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{(13^2 – 5^2)} = \sqrt{(169 – 25)} = \sqrt{144} = 12$.

L'altezza BH divide il triangolo 13 – 14 – 15 in due triangoli rettangoli i cui lati hanno lunghezze formanti terne:

ABH → 5 – 12 – 13

BHC → 9 – 12 – 15.

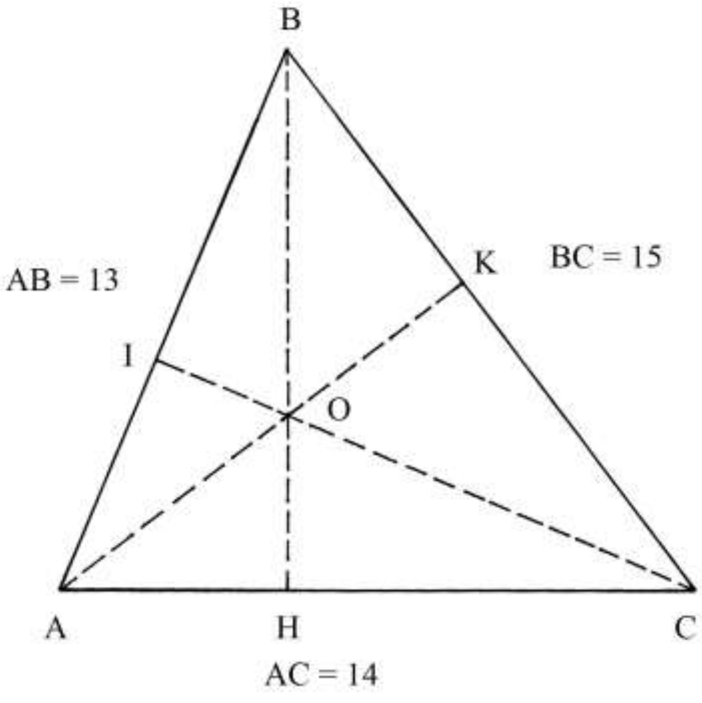
5 – 12 – 13 è la seconda terna *primitiva*, mentre la seconda è una terna *derivata* perché le sue lunghezze sono multipli della prima terna primitiva 3 – 4 – 5 di un fattore 3.

L'area di ABC è:

$A_{ABC} = BH * (AC/2) = 12 * (14/2) = 12 * 7 = 84$, che è un altro numero intero.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nello schema che segue sono disegnate le tre altezze: AK, BH e CI. Esse si incontrano nell'*ortocentro* O:



La lunghezza di AK è data da:

$AK = 2 * A_{ABC}/BC = 2 * 84/15 = 56/5 = 11,2$.

La lunghezza di CI è:

$CI = 2 * A_{ABC}/AB = 2 * 84/13 = 168/13 = (12 + 12/13)$.

Soltanto un'altezza, BH, è espressa da un numero intero.

Completiamo con il calcolo delle lunghezze dei segmenti AI, IB, BK e KC.

Tutte le altezze scompongono ABC in due triangoli rettangoli, quindi si ha:

$AI^2 = AC^2 – CI^2 = 14^2 – (168/13)^2 = 196 – 28224/169 = (33124 – 28224)/169 =$
$= 4900/169$ e

$AI = \sqrt{(4900/169)} = 70/13 = (5 + 5/13)$

$IB = AB – AI = 13 – (5 + 5/13) = (7 + 8/13)$.

$BK^2 = AB^2 – AK^2 = 13^2 – (56/5)^2 = 169 – (3136/25) = (4225 – 3136)/25 =$
$= 1089/25$ e

$BK = \sqrt{(1089/25)} = 33/5$.

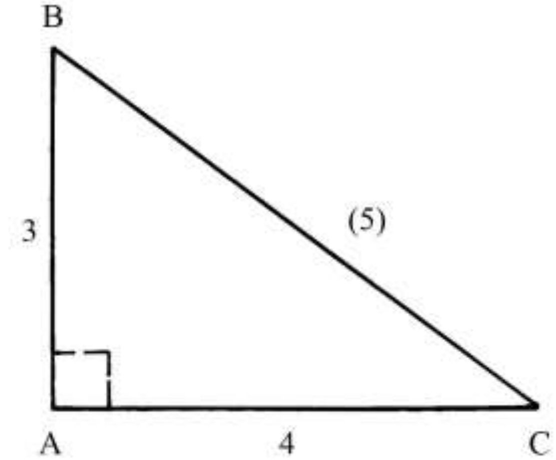
$KC = BC – BK = 15 – 33/5 = 42/5$.

Nessuno dei quattro segmenti è espresso da un numero intero.

- -

Triangolo rettangolo 3 – 4 – 5

Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 3 e 4: il problema chiede la lunghezza dell'ipotenusa.



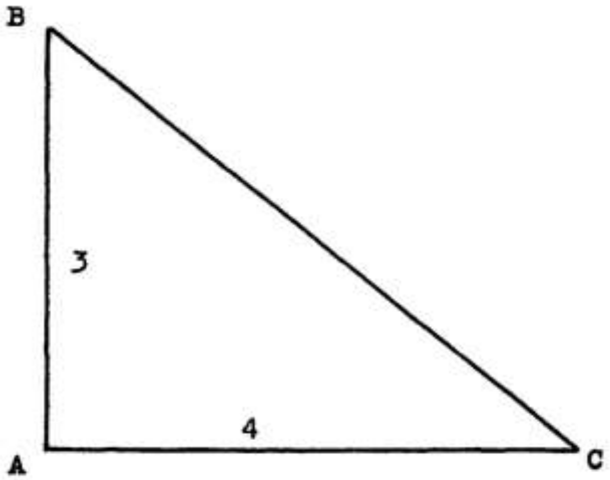
Il cateto AB è lungo 3 e quello AC è 4. L'angolo nel vertice A è retto per costruzione.

La lunghezza dell'ipotenusa BC è data da:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ e

$BC = \sqrt{25} = 5$.

Lo schema originale contenuto a p. 120 dell'edizione curata da L'Huillier riporta le dimensioni dei due cateti scritte all'interno:



L’area del triangolo rettangolo è calcolabile a partire dalla conoscenza delle lunghezze dei due cateti:

$$A_{ABC} = (AB * AC)/2 = (3 * 4)/2 = 12/2 = 6.$$

Pochissimi trattati medievali considerano il triangolo rettangolo 3 – 4 – 5 (le cui lunghezze formano la prima terna primitiva): altri, più numerosi, studiano triangoli rettangoli con lunghezze multipla della terna 3 – 4 – 5 e formano terne derivate quali le seguenti:

* 6 – 8 – 10;
* 12 – 16 – 20;
* 30 – 40 – 50.

In alcuni casi è considerata la seconda terna primitiva: 5 – 12 – 13.

I QUADRILATERI

Alcuni quadrilateri angoli tutti retti, altri non possiedono angoli retti.

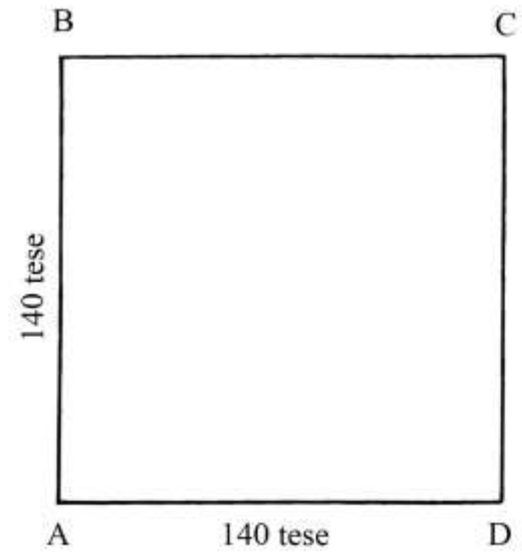
Esistono poi quadrilateri con alcuni angoli retti e altri che non lo sono.

Certi quadrilateri hanno lati di uguale lunghezza e angoli tutti retti: sono i quadrati.

Altri hanno angoli tutti retti e sono più lunghi che larghi: sono i rettangoli (“*tetragones*”).

Area di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 140 *tese*:

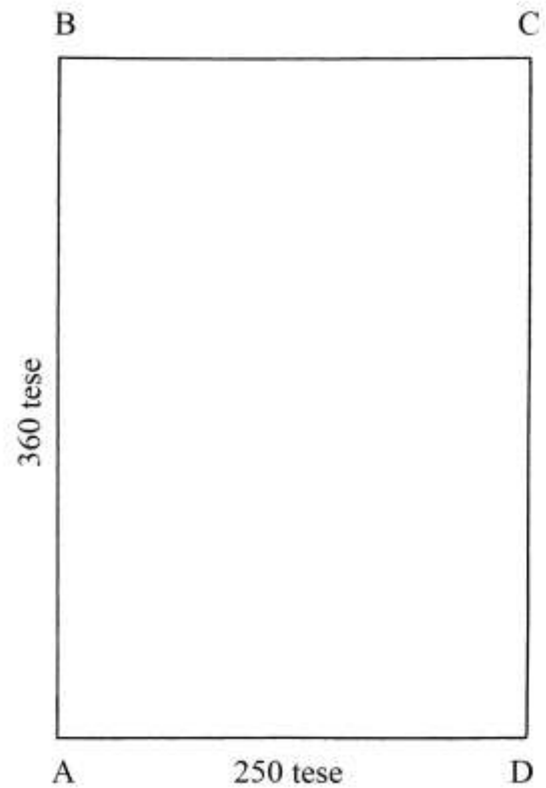


La sua area è:

$A_{ABCD} = AD * AB = AD^2 = 140^2 = 19600 \text{ tese}^2$.

<u>Area di un rettangolo</u>

Un rettangolo ha lati lunghi 250 e 360 tese:

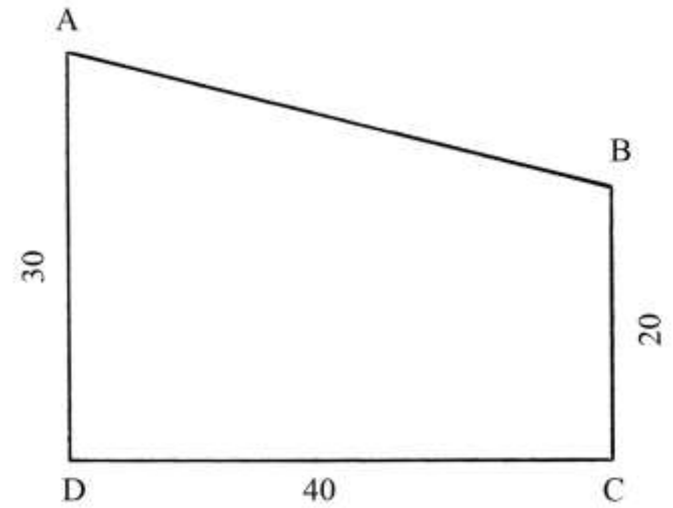


La sua area è data da:

$A_{ABCD} = AB * AD = 360 * 250 = 90\,000 \text{ tese}^2$.

Trapezio rettangolo

ABCD è un trapezio rettangolo che possiede due angoli retti nei vertici C e D.



Le basi sono lunghe:

* la base maggiore AD è 30;
* la base minore BC è 20.

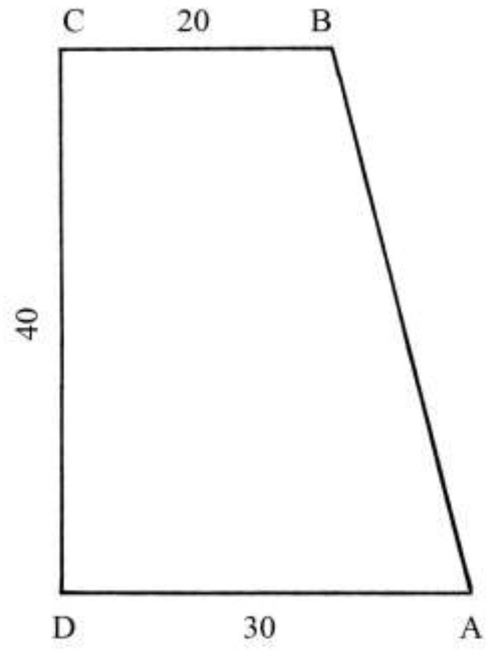
L'altezza del trapezio DC, che è perpendicolare alle due basi, è lunga 40.

L'area è correttamente calcolata con il prodotto della semisomma delle basi per l'altezza:

A ABCD = [(AD + BC)/2] * CD = [(30 + 20)/2] * 40 = 25 * 40 = 1000.

- APPROFONDIMENTO -

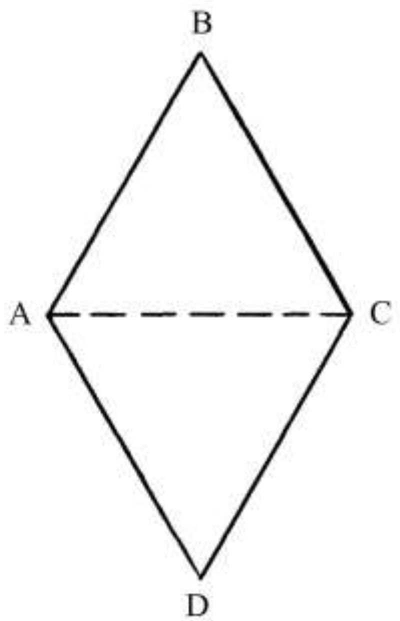
Nei testi odierni, lo stesso trapezio è generalmente disegnato con le basi orizzontali e con la base maggiore in basso, come mostra lo schema che segue:

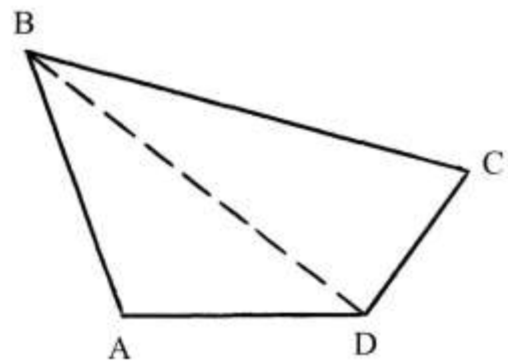


- -

Quadrilateri privi di angoli retti

Chuquet presenta esempi di quadrilateri privi di angoli retti:



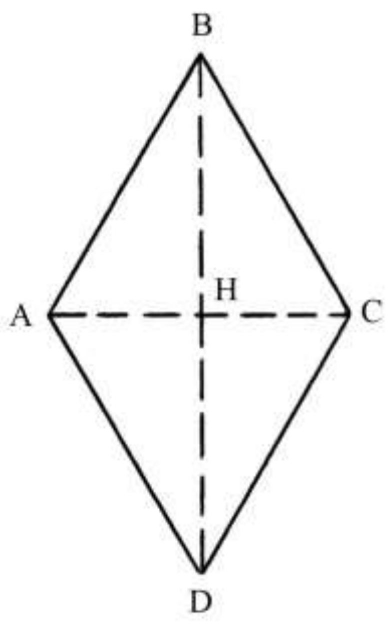


Egli propone di dividerli in triangoli dei quali è facile calcolare l'area con i metodi impiegati in precedenza e in particolare con la formula di Erone.

A sinistra vi è un esempio di *rombo* al cui interno è tracciata la diagonale minore AC che divide il quadrilatero in due triangoli, ABC e ACD, che sono almeno isosceli.

Nel caso concreto si tratta di un quadrilatero regolare: è un rombo formato dall'unione lungo AC di due triangoli equilateri di uguali dimensioni.

Oggi l'area del rombo è calcolata con il semiprodotto delle due diagonali:



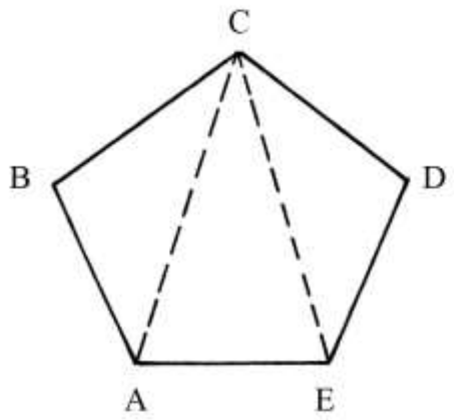
A_{ABCD} = (AC * BD)/2 = AC * BD/2 = AC * BH.

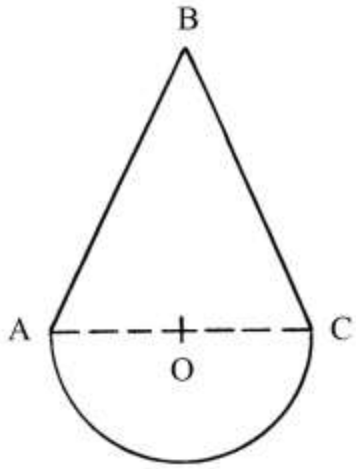
Conosceva questa regola?

Lo schema a destra nella penultima figura rappresenta il quadrilatero ABCD: la diagonale BD lo scompone nei due triangoli ABC e BCD dei quali è facile calcolare l'area conoscendo le lunghezze dei loro lati.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il pentagono, l'esagono e altri poligoni sono scomposti con delle diagonali in alcuni triangoli dei è calcolabile l'area:





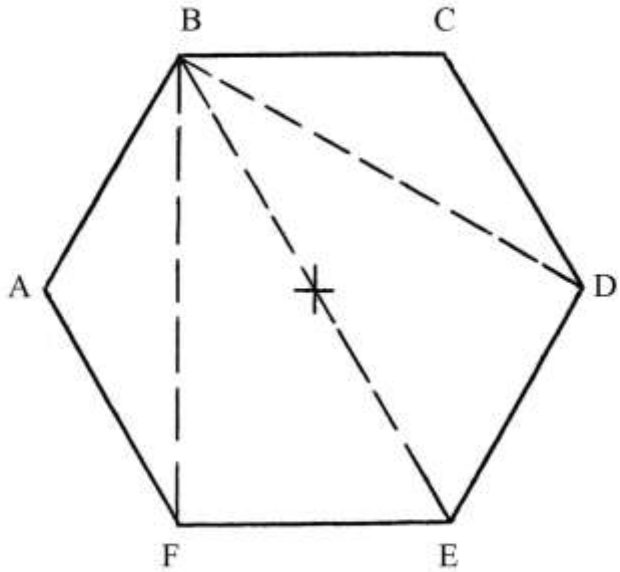
Anche l'area di una figura formata da un triangolo isoscele e da un semicerchio è calcolabile scomponendola in due parti separate dal diametro AC.

Chuquet propone di calcolare l'area del semicerchio a partire da quella del cerchio di cui il primo è parte e dividere per 2 il risultato: la cosa è ovvia.

- APPROFONDIMENTO -

Nel pentagono dello schema precedente il poligono è stato scomposto in *tre* triangoli tracciando soltanto *due* diagonali, CA e CE, uscenti dallo stesso vertice C.

Nel caso dell'esagono esso è scomposto in *quattro* triangoli con la tracciatura di *tre* diagonali uscenti dal vertice C:



A titolo di ipotesi possiamo suggerire la presenza di una relazione fra i numeri dei lati, delle diagonali e dei triangoli generati:

* *n* = numero dei lati del poligono (regolare o non regolare);
* *d* = numero delle diagonali;
* *t* = numeri triangoli generati.

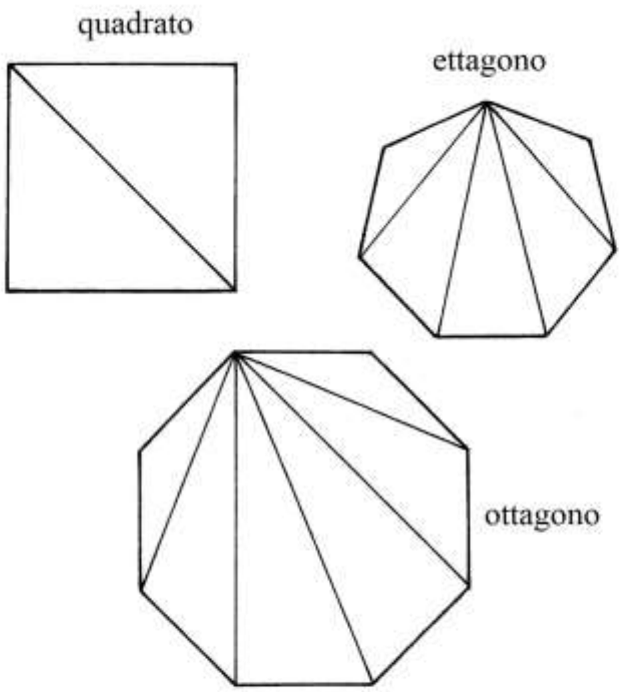
Per il pentagono vale la seguente relazione:

$$n = d + t$$
$$5 = 2 + 3.$$

La tabella che segue riassume le proprietà dei primi poligoni:

Poligoni	Numero lati *n*	Numero diagonali *d*	Numero triangoli *t*
Quadrato	4	1	2
Pentagono	5	2	3
Esagono	6	3	4
Ettagono	7	4	5
Ottagono	8	5	6

Le diagonali che dividono un poligono in triangoli devono uscire da un solo vertice, come spiega lo schema che segue:



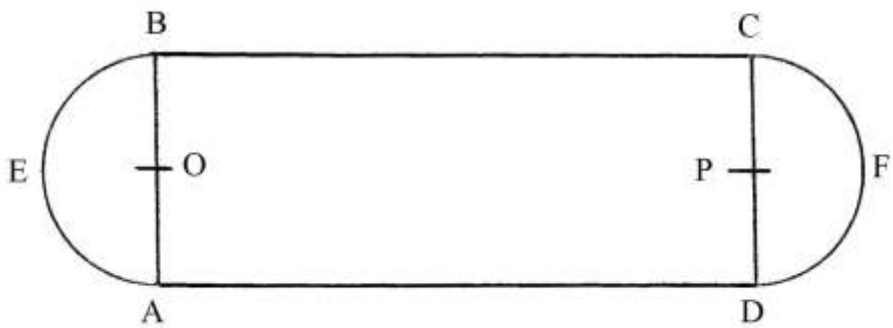
Il numero dei lati *n*, il numero delle diagonali *d* e il numero dei triangoli *t* sono espressi da numeri interi che crescono secondo progressioni aritmetiche di ragione “1”.

Dagli esempi contenuti sembra potersi dedurre l’esistenza di alcune relazioni:

* $n = d + 3$;
* $t = d + 1$;
* $n = t + 2$.

FIGURE CIRCOLARI

Lo schema che segue presenta una figura formata dal rettangolo ABCD e da due semicerchi di uguali dimensioni e con centri, O e P, collocati sui punti medi dei lati corti del rettangolo:



L’area S della figura è:

$$S = S_{ABCD} + S_{AEB} + S_{CFD}.$$

L’area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = AB * AD.$$

L’area del semicerchio AEB è data da:

$$S_{AEB} = (\pi * r^2)/2 = 22/7 * (AB/2)^2/2 = 11/7 * AB^2/4 = 11/28 * AB^2.$$

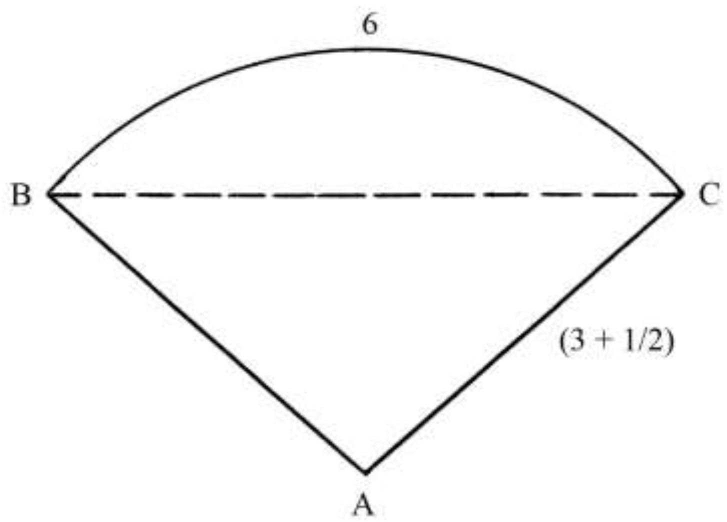
L’area del semicerchio CFD è uguale a quella di AEB.

L'area totale dell'intera figura è:

$S\ AB * AD + 2 * (11/28) * AB^2 = AB * AD + 11/14 * AB^2 =$
$= AB * (AD + 11/14 * AB).$

Area di un settore circolare

Un settore circolare proviene da un cerchio che ha raggio *r* lungo (3 + ½).



L'arco BC è lungo.

Il diametro *d* del cerchio di origine è:

$d = 2 * r = 2 * (3 + 1/2) = 7.$

La circonferenza *c* di questo cerchio è lunga:

$c = 2 * \pi * r = \pi * d = (22/7) * 7 = 22.$

L'area del cerchio, $S_{CERCHIO}$, è:

$S_{CERCHIO} = 22/28 * d^2 = 22/28 * 7^2 = 22/28 * 49 = (38 + ½).$

L'area di un settore circolare è proporzionale alla lunghezza dell'arco che lo delimita:

$S_{ABC} : S_{CERCHIO} = BC : c$

$S_{ABC} = (S_{CERCHIO} * BC)/c = [(38 + ½) * 6]/22 = (10 + 1/2).$

Area di un doppio segmento circolare

A p. 134 dell'edizione di L'Huillier è presentata una figura che è definita come "in forma di uovo".

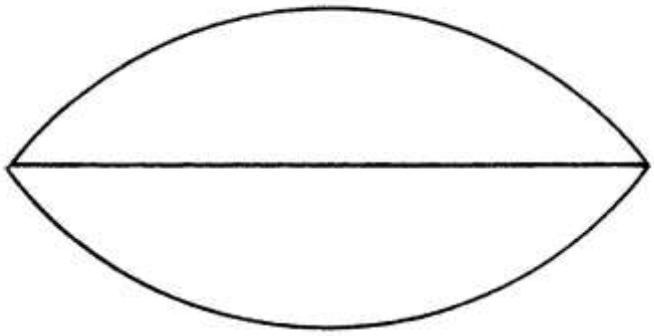
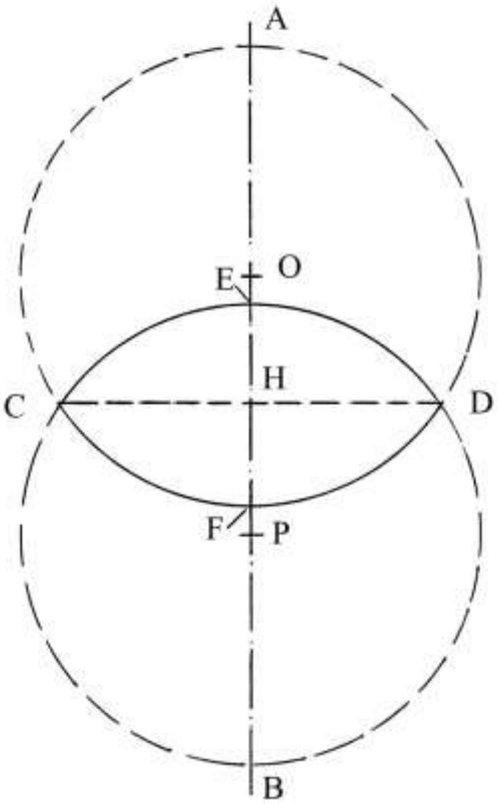


FIGURE DITE EN FORME D'OEUF

La figura non rappresenta il profilo di un uovo (che non punte ma solo curve), ma è un doppio segmento circolare delimitato dall’intersezione di due circonferenze di uguali raggi e con i centri O e P disposti sullo stesso asse passante per i punti A e B.

CD è una corda comune ai due cerchi. CEDH e CFDH sono due segmenti circolari di uguali dimensioni, uniti lungo la corda immaginaria CD.

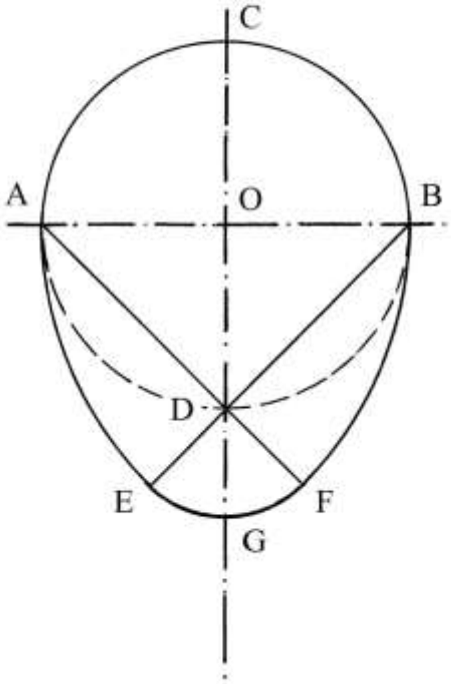


- APPROFONDIMENTO -

Ovolo

La figura geometrica che più si avvicina al profilo di un uovo è l'*ovolo*: si tratta di una curva piana chiusa.

Nello schema che segue è mostrata una sua semplice costruzione, ottenuta a partire dalla lunghezza dell'asse minore AB.



Per il punto O tracciare l'asse di simmetria verticale. Fare centro nel punto medio di AB, O, e con raggio OA = OB disegnare le due semicirconferenze ACB e ADB.

Tracciare le corde AD e DB e prolungarle verso il basso.

Fare centro in A e in B e con raggio AD disegnare due archi: sono AE e BF.

Infine, con centro in D e raggio DE = DF tracciare l'arco EGF.

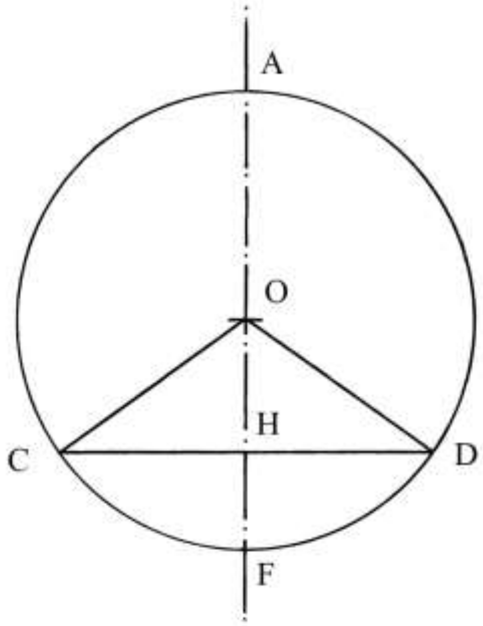
CG è l'asse maggiore dell'ovolo.

La curva è stata ottenuta raccordando quattro archi di circonferenza: ACB, AE, BF e EGF.

- -

Area di un segmento circolare

L'area di un segmento circolare può essere calcolata in almeno due modi:



CHDF è un segmento circolare. OCFD è un settore circolare che è scomponibile in due figure:
* il triangolo isoscele COD;
* il segmento circolare CHDF.

L'area di questo ultimo è data da una differenza:

$$S_{CHDF} = S_{OCFD} - S_{COD}.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

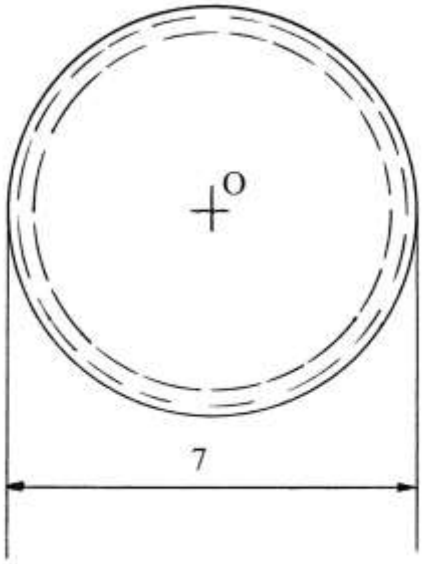
Paolo dell'Abbaco (1282 – 1374) utilizzò una formula per calcolare l'area di un segmento circolare:
* OC = OD = raggio = r;
* CFD = arco = a;
* CHD = corda = c;
* HF = freccia = f.

La formula è:

$$S_{CHDF} = [r * (a - f) + c * f]/2.$$

Superficie di una sfera

Una sfera ha diametro lungo 7:



La sua superficie S è data da:

$S = 4 * \pi * r^2 = 4 * (22/7) * (d/2)^2 = 4 * 22/7 * d^2/4 = 22/7 * d^2 = 22/7 * 7^2 = 154.$

r e *d* sono rispettivamente il raggio e il diametro.

Chuquet suggerisce l'uso di altri due metodi che richiedono la conoscenza della lunghezza della circonferenza *c* del solido:

$c = 2 * \pi * r = \pi * d = (22/7) * 7 = 22.$

Il primo metodo è:

$S = c * d = 22 * 7 = 154.$

Il secondo metodo è:

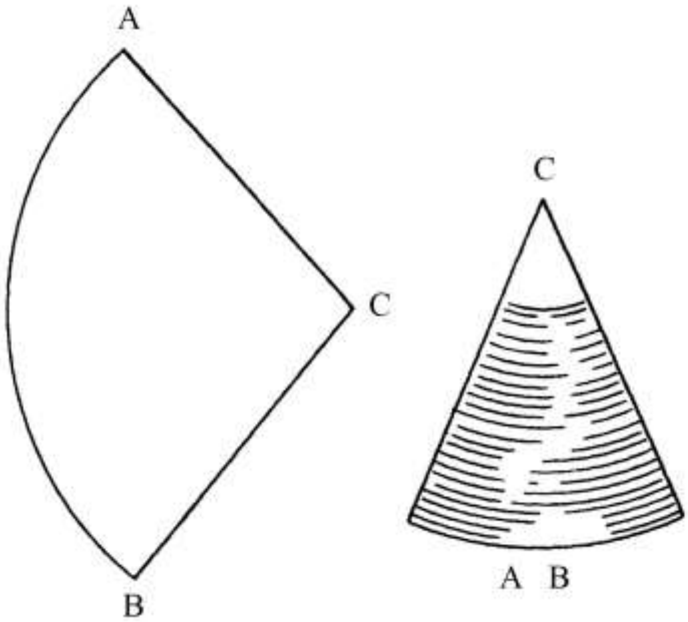
$S = c^2 * 7/22 = 22^2 * 7/22 = 154.$

La seconda formula deriva dalla prima: infatti

$d = c/(22/7) = c * 7/22.$

Superficie laterale di un cono

Lo schema che segue è una rielaborazione dello schema contenuto a p. 138 dell'edizione di L'Huillier.



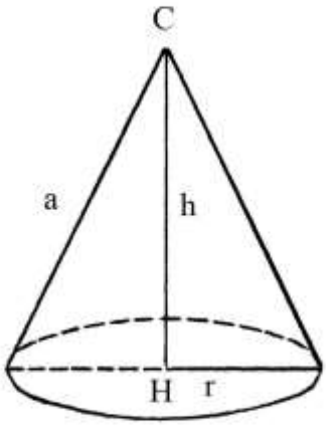
A destra è disegnato, in maniera un po' primitiva, il cono e a sinistra è il suo sviluppo.

CA e CB sono entrambi l'*apotema* del cono.

Lo sviluppo della superficie laterale di un cono su di un piano orizzontale ha la forma di un settore circolare con raggio uguale all'apotema e centro in C (che è il vertice del cono).

La superficie laterale del cono è data da:

S = AB * AC/2.



Nell'esempio, la circonferenza della base è lunga 22 e l'apotema 7. La superficie laterale è:

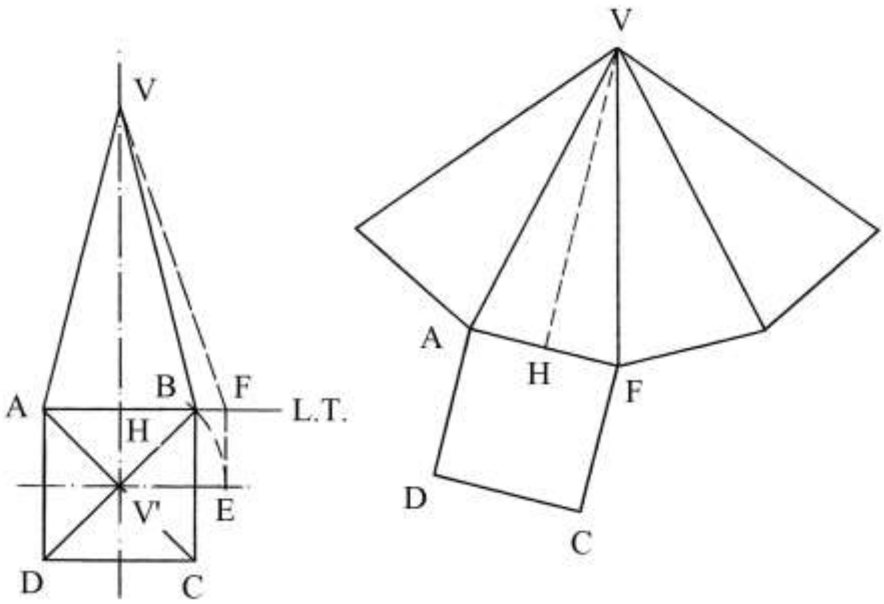
S = 22 * 7/2 = 77.

Superficie laterale di una piramide

La superficie laterale di una piramide è data dalla somma delle aree dei triangoli che formano le sue facce laterali.

Nel testo di Chuquet non è presentato alcun esempio concreto.

Il caso che qui è considerato è quello di una piramide retta a base quadrata:



A sinistra è la proiezione ortogonale della piramide di fronte e dall'alto: con centro in V' e raggio V'B è tracciato l'arco di circonferenza BE. Da E è elevata la perpendicolare alla L.T. (linea di terra): VF è la vera lunghezza dei quattro spigoli laterali della piramide: VA, VB, VC e VD.

A destra, la piramide è sviluppata su un piano orizzontale con il metodo del *rotolamento*.

Gli spigoli sono lunghi quanto VF e l'apotema VH (che è un'altezza di AVF) è correttamente lunga quanto lo spigolo VB nella proiezione frontale: in proiezione frontale VH è scorciata.

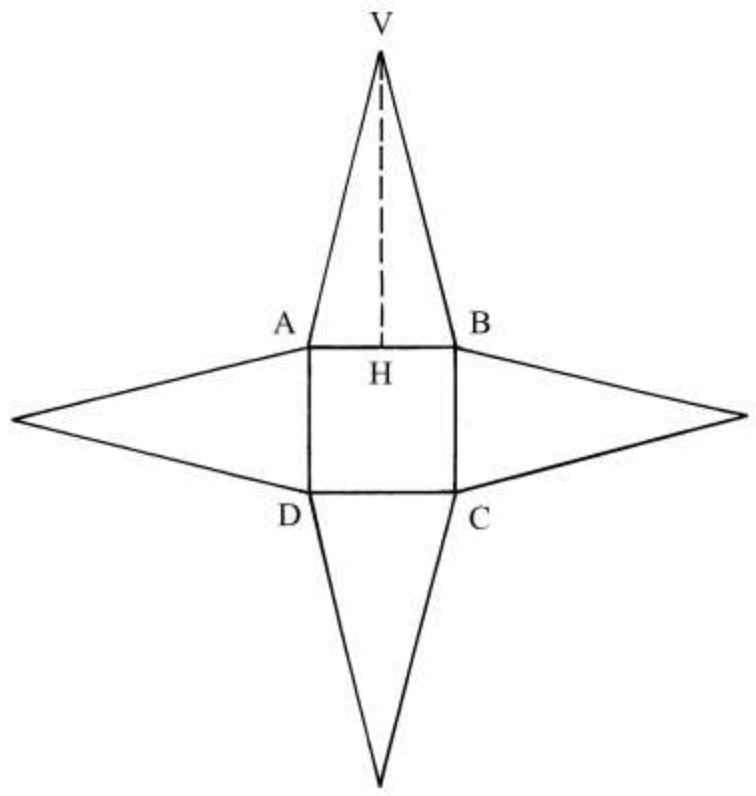
L'area della superficie laterale della piramide a base quadrata è:

$$S = 4 * (AF * VH/2) = 2 * AF * VH.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo metodo utilizzabile per lo sviluppo su di un piano di solido è quello detto *a fiore* che è avvicinabile al modo in cui si aprono i petali della corolla di un fiore.

Una piramide cava di cartone o di lamiera ottenuta con questo metodo richiede un eccessivo numero di tagli e comporta un maggiore spreco di materiale rispetto allo sviluppo per rotolamento.


V
A
B
H
D
C

VOLUME DEI SOLIDI

I solidi possiedono tre dimensioni: lunghezza, larghezza e profondità (meglio, *altezza*).

Mentre le superfici sono misurate con unità quadrate, i volumi sono espressi in unità cubiche.

Dopo questa semplice introduzione, Chuquet presenta il caso della sfera. Egli riprende l'esempio della sfera con diametro *d* lungo 7 e raggio *r* lungo (3 + ½): il suo volume è dato da:

$$V = 11/21 * d^3 = 11/21 * 7^3 = (179 + 2/3).$$

Ricostruiamo l'origine di questa formula.

$$V = S * r/3 = (22/7 * d^2) * (d/2)/3 = 11/21 * d^3 = 11/21 * 7^3 = (179 + 2/3).$$

La superficie S è data da:

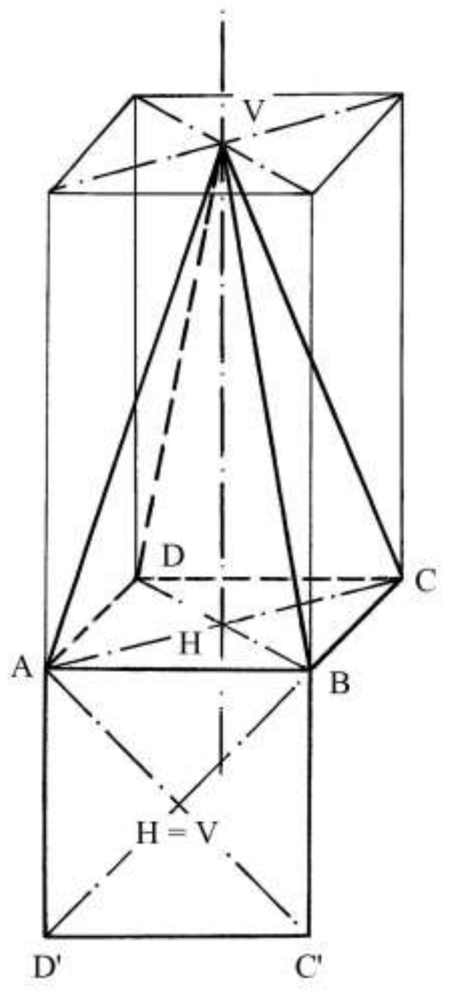
$$S = 4 * \pi * r^2 = 4 * 22/7 * r2 = 88/7 * r^2 = 88/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2.$$

Il volume è V dato da:

$$V = 4/3 * \pi * r^3 = (4 * \pi * r^2) * r/3 = S * r/3.$$

Volume delle piramidi

La figura che segue presenta l'assonometria cavaliera di una piramide retta a base quadrata:



VH è l'altezza del solido: essa è perpendicolare alla base ABCD e collega il vertice V con il centro del quadrato di base che è fissato dall'intersezione delle sue diagonali.

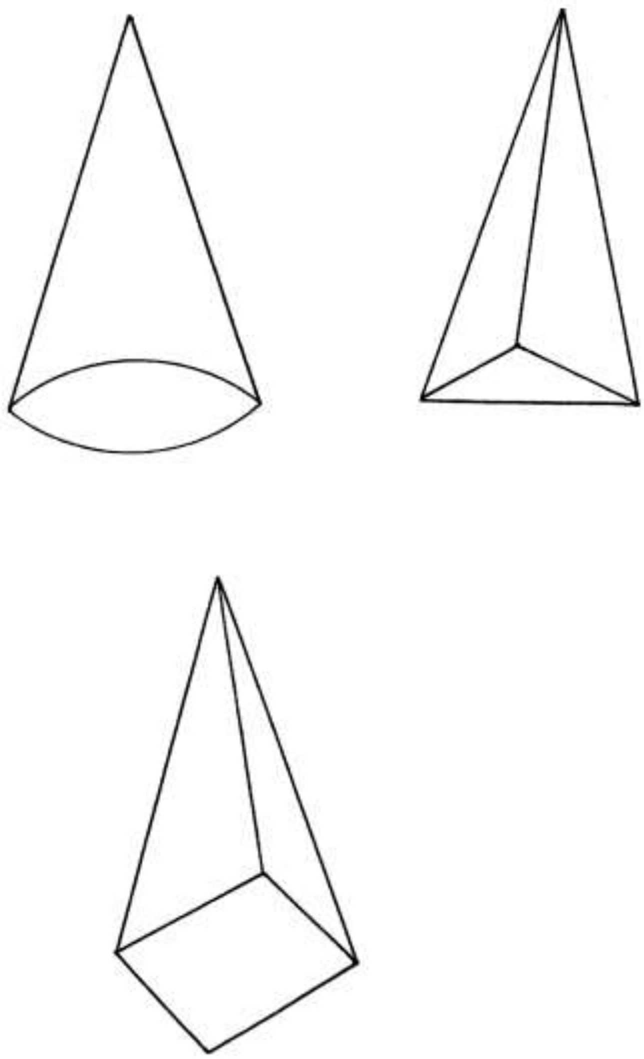
La piramide è inscritta nel prisma retto a base quadrata dal quale essa deriva.

Il volume della piramide è *un terzo* di quello del prisma:

$$V_{PIRAMIDE} = S_{BASE} * altezza/3 = S_{ABCD} * VH/3.$$

Nella pagina 146 del testo pubblicato da L'Huillier sono presentati tre diversi solidi "a punta": un cono retto, una piramide a base triangolare (vista dal basso) e una piramide a base quadrata (anche questa vista dal basso).

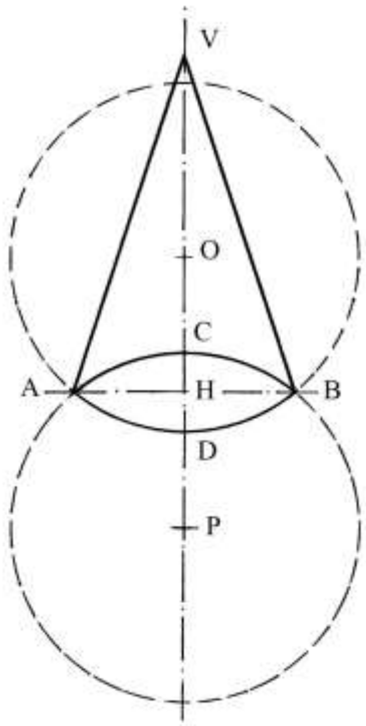
-146-



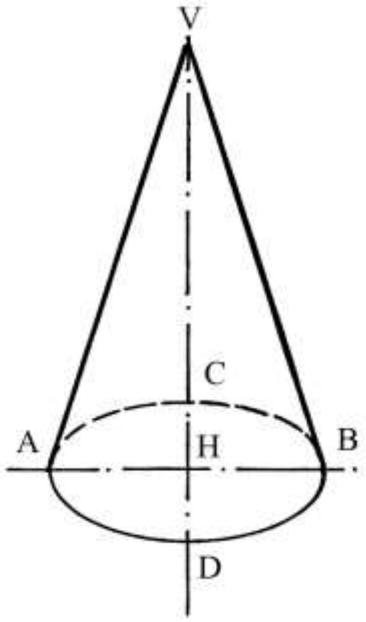
In tutti e tre i casi, il volume è:

$$V = S_{BASE} * (altezza/3).$$

La base del cono retto è approssimata a un doppio segmento circolare: i segmenti sono ricavati da due cerchi di raggio uguale (OA = PA) che hanno centri O e P posizionati sull'asse di simmetria del cono:



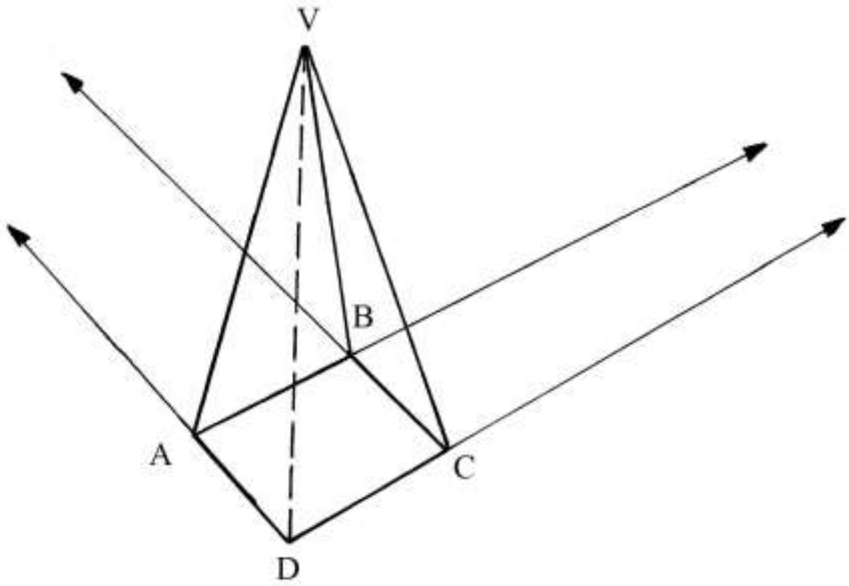
La corretta rappresentazione del cerchio di base, che è scorciato, è data da un’ellisse, come è mostrato nello schema che segue:



La lunghezza dell’asse minore CD è legata al metodo assonometrico scelto.

La piramide a base triangolare è disegnata in una prospettiva poco chiara.

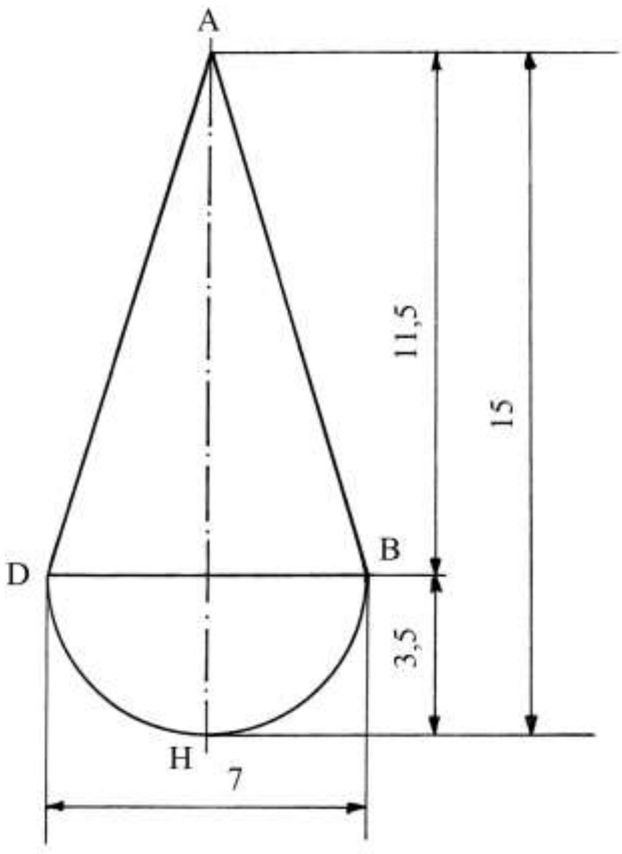
Infine, la piramide a base quadrata pare rappresentata in prospettiva e vista dal basso: nello schema originale non è disegnato lo spigolo VD.



Gli spigoli AB e DC prolungati tendono verso un punto di fuga a destra.
I prolungamenti di AD e di BC tendono verso un punto di fuga a sinistra.

<u>Un solido composto</u>

Un solido è composto da un cono e da una semisfera unite. Il cerchio massimo della semisfera è la base del cono.



Il problema chiede il volume dell'intero solido.

Il cerchio massimo della semisfera, DB, ha diametro 7 piedi. L'altezza *h* del cono è 11,5 piedi (11 + ½ secondo la notazione usata da Chuquet e che qui viene semplificata).

La semisfera ha profondità HC uguale alla lunghezza del raggio, 3,5 piedi.

Il solido ha altezza totale AC che è data da:

$$AC = AH + HC = 11{,}5 + 3{,}5 = 15 \text{ piedi.}$$

Il volume di una sfera è dato dalla formula, già incontrata in precedenza:

$$V = 11/21 * d^3.$$

Nel caso della semisfera, il volume è dato da:

$$V_{\text{SEMISFERA}} = (11/21 * d^3)/2 = 11/42 * d^3.$$

Nel caso concreto, esso vale:

$$V_{\text{SEMISFERA}} = 11/42 * 7^3 = (89 + 5/6) \text{ piedi}^3.$$

L'area del cerchio di base del cono è:

$$S_{\text{BASE}} = \pi * r^2 = 22/7 * (7/2)^2 = 38{,}5 \text{ piedi}^2.$$

Il volume del cono è:

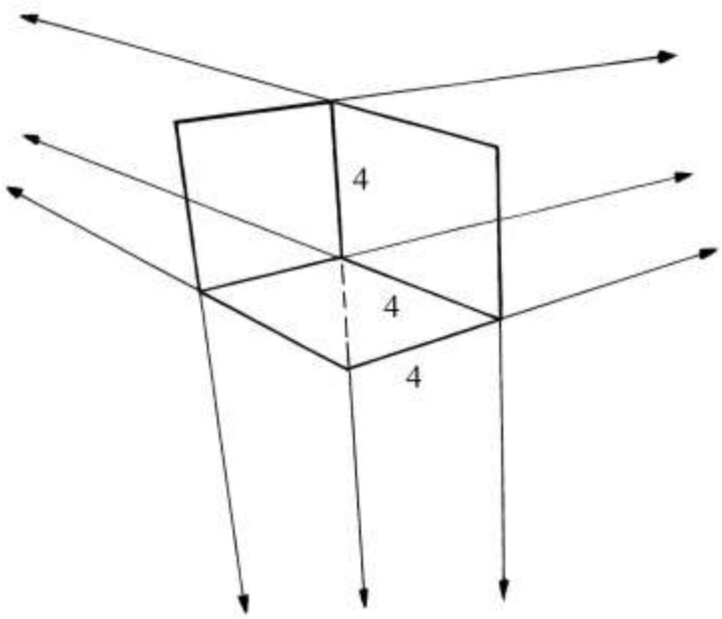
$$V_{\text{CONO}} = S_{\text{BASE}} * (h/3) = 38{,}5 * 11{,}5/3 = (147 + 7/12) \text{ piedi}^3.$$

Il volume totale del solido è:

$$V_{\text{TOTALE}} = V_{\text{SEMISFERA}} + V_{\text{CONO}} = (89 + 5/6) + (147 + 7/12) =$$
$$= (237 + 5/12) \text{ piedi}^3.$$

<u>Volume di un cubo</u>

Un cubo ha spigoli lunghi 4 piedi.



Il volume del cubo è:

$$V = \text{lato}^3 = 4^3 = 64 \text{ piedi}^3.$$

Nello schema originale, il solido è disegnato in prospettiva a tre punti di fuga, come mostrano i prolungamenti degli spigoli del cubo.

<u>Volume di un cilindro</u>

Un cilindro retto ha circonferenza di base lunga 22 piedi ed è alto 40 piedi.

Il problema chiede il volume del solido.

L'area S delle basi è calcolata a partire dalla lunghezza della circonferenza, *c*, con la formula già incontrata:

$S = c^2 * 7/88 = 22^2 * 7/88 = 38,5$ piedi^2.

Il volume è:

$V = S *$ altezza $= 38,5 * 40 = 1540$ piedi^3.

Lo schema originale, riprodotto qui sopra, presenta alcune proprietà geometriche già incontrate: il solido è visto da sotto. La base inferiore è disegnata come un doppio segmento circolare invece che come una più corretta ellisse.

Il diametro dei due cerchi è lungo 7 piedi: l'altezza è fuori scala perché è assai più corta di quanto sarebbe corretto.

<u>Volume di un prisma a base triangolare</u>

Un blocco di legno ha la forma di un prisma retto con base a forma di triangolo equilatero con lati lunghi 2,5 piedi. Il solido è alto 30 piedi.

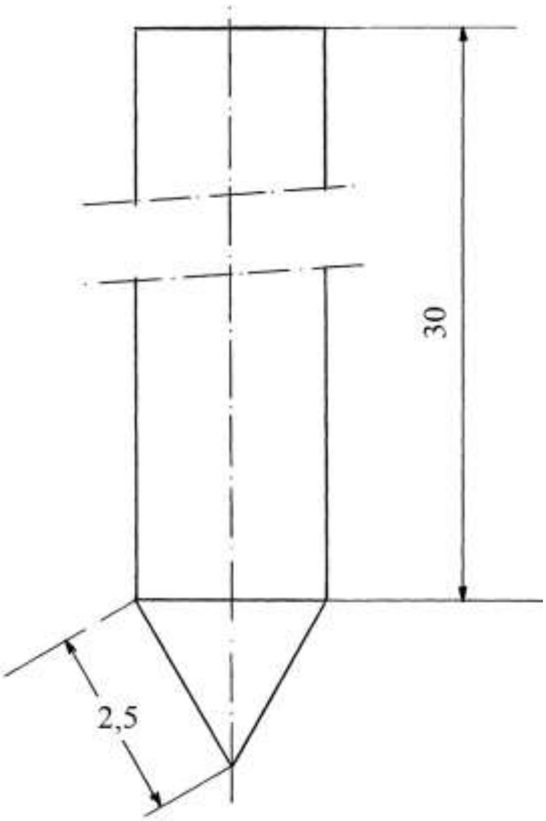
Il problema chiede il volume.

Chuquet calcola correttamente l'area della base (forse applicando la formula di Erone):

$S_{BASE} = \sqrt{7,32421875}$ piedi^2, che Chuquet scrive come $\sqrt{(7 + 83/256)}$.

Il volume è:

$V = S *$ altezza $= \sqrt{(7 + 83/256)} * 30 = \sqrt{(6591 + 51/64)}$ piedi^3.



Volume di un parallelepipedo

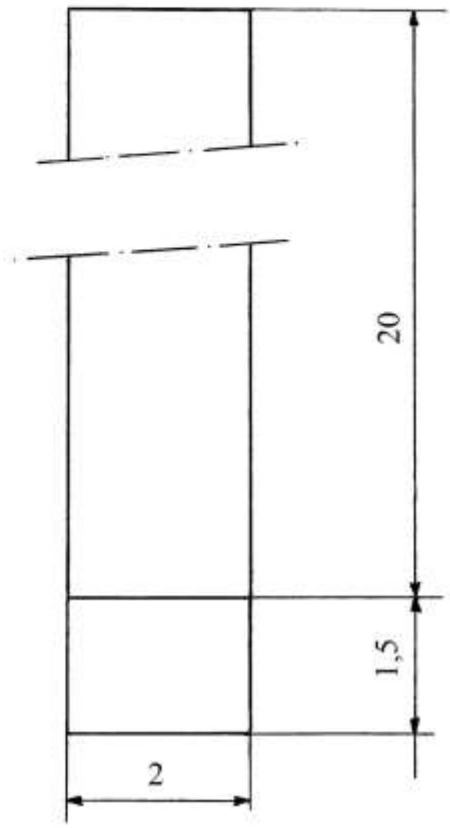
Un blocco di legno ha la forma di un parallelepipedo. La base ha dimensioni 2 per 1,5 piedi ed è alto 20 piedi.

L'area della base è:

$S_{BASE} = 2 * 1,5 = 3$ piedi^2.

Il volume è:

$V = S_{BASE} * altezza = 3 * 20 = 60$ piedi^3.



Volume di un tronco di piramide

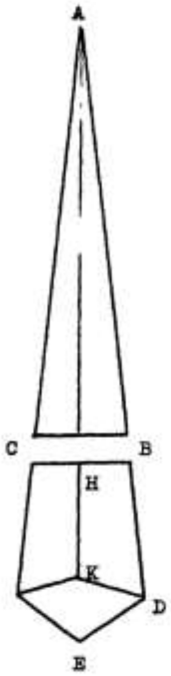
Un tronco di piramide retta ha basi quadrate: la base maggiore ha lati lunghi 4 piedi e la base minore li ha di 3 piedi.

Il solido è alto 12 piedi.

Il problema chiede il volume del tronco di piramide.

La figura che segue riproduce la pagina 158 dell’edizione di L’Huillier:

-158-



TRONC DE PYRAMIDE BCDE

HK = 12

Aire de base = 4 x 4

Aire de sommet = 3 x 3

$\boxed{\text{Volume du tronc de pyramide BCDE}}$

$$V_{(BCDE)} = V_{(ADE)} - V_{(ABC)}$$

$$V_{(ADE)} = \frac{1}{3} AK \times DE^2$$

$$AK = \frac{HK \times DE}{DE - BC}$$

$$= 4 \times 12 = 48$$

$$V_{(ADE)} = 16 \times 16 = 256$$

$$V_{(ABC)} = \frac{1}{3} AH \times BC^2$$

$$AH = AK - KH$$

$$= 48 - 12 = 36$$

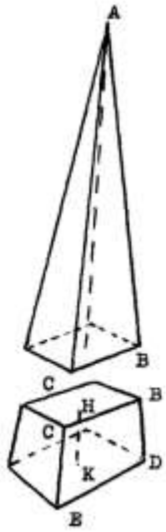
$$V_{(ABC)} = 12 \times 9 = 108$$

De là

$$V_{(BCDE)} = 256 - 108$$

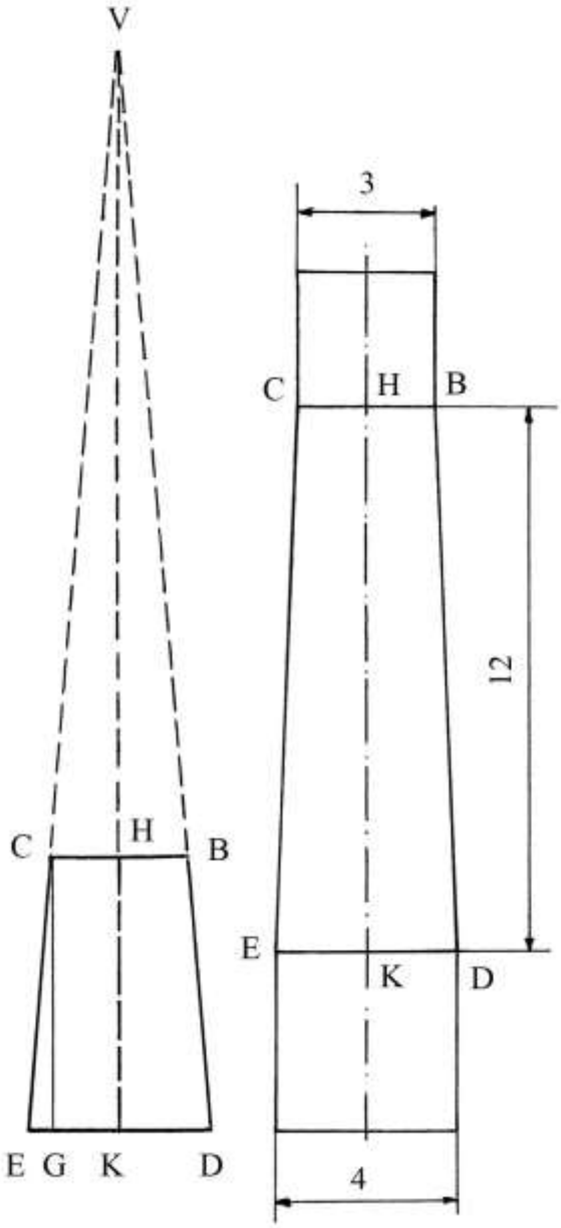
$$= 148.$$

(Figure exacte refaite)



Il tronco di piramide proviene da una piramide che è tagliata con un piano parallelo alla base maggiore e passante per i punti C, H e B.

La figura che segue presenta, a destra, la doppia vista frontale e dall'alto del tronco di piramide. A sinistra è disegnata la vista frontale dell'intera piramide: essa è tracciata in scala uguale *alla metà* di quella impiegata per la doppia proiezione di destra.



Con l'aiuto dello schema di sinistra possiamo determinare l'altezza VK della intera piramide.

CGE e VGE sono due triangoli rettangoli e sono simili: vale la proporzione:

EG : GC = EK : KV

EG è lungo:

EG = (ED – CB)/2 = (4 – 3)/2 = 0,5.

Dalla proporzione si ha:

KV = (GC * EK)/EG = 12 * (4/2)/0,5 = 12 * 2/0,5 = 48 piedi.

Chuquet calcola correttamente l'altezza VK. Egli ricava il volume del tronco di piramide sottraendo il volume della piramide tagliata da quello dell'intera piramide:

$V_{TRONCO} = V_{VK} – V_{VH}$.

L'area della base maggiore è:

$S_{ED} = ED^2 = 4^2 = 16$ piedi^2.

L’area della base minore è:

$S_{CB} = CB^2 = 3^2 = 9$ piedi^2.

Il volume della piramide intera è dato da:

$V_{VK} = S_{ED} * VK/3 = 16 * (48/3) = 16 * 16 = 256$ piedi^3.

Il volume della piramide alta VH è dato da:

$V_{VH} = S_{CB} * VH/3$.

VH è lunga: VH = VK – HK = 48 – 12 = 36 piedi. Ne consegue:

$V_{VH} = 9 * (36/3) = 9 * 12 = 108$ piedi^3.

Infine, il volume del tronco di piramide è:

$V_{TRONCO} = 256 – 108 = 148$ piedi^3.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La formula che attualmente è usata è la seguente, con *h* altezza del solido:

$V_{TRONCO} = 1/3 * h * [S_{ED} + S_{CB} + \sqrt{(S_{ED} * S_{CB})}] =$

$= 1/3 * 12 * [16 + 9 + \sqrt{(16 * 9)}] = 4 * (25 + 12) = 4 * 37 = 148$ piedi^3, risultato uguale a quello calcolato da Chuquet con la sua più lunga procedura.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet propone poi due metodi approssimati per calcolare il volume del tronco di piramide. Entrambi offrono risultati errati.

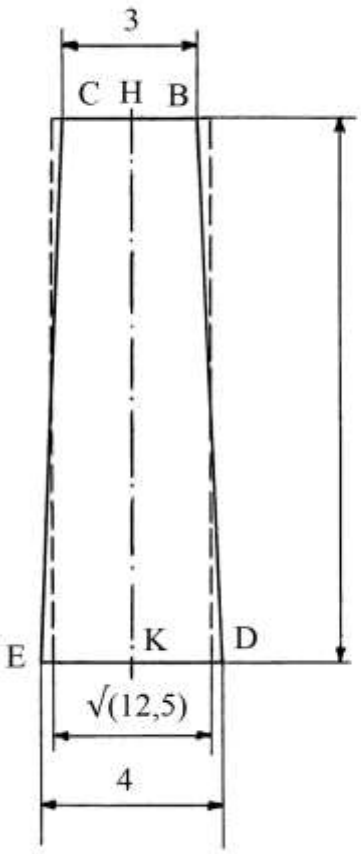
Il *primo metodo* contiene i seguenti passi:

* calcolare l’area della base maggiore: 4 * 4 = 16;
* calcolare l’area della base minore: 3 * 3 = 9;
* sommare le due aree: 16 + 9 = 25;
* dividere per 2: 25/2 = 12,5;
* moltiplicare per l’altezza del tronco di piramide: 12,5 * 12 = 150 piedi^3, volume del tronco di piramide.

La procedura è riassunta nella formula:

$V_{TRONCO} = [(S_{ED} + S_{CB})/2] *$ altezza.

Chuquet ha, per così dire, assimilato il tronco di piramide a un prisma che ha la stessa altezza, 12 piedi, e area di base uguale a 12,5 piedi^2: il lato di questo ipotetico quadrato è lungo: $\sqrt{12,5}$.



Più correttamente, l'area di questo quadrato sarebbe:

$A_{BASE} = V_{TRONCO}/h$ = 148/12 = (12,33) e il lato sarebbe lungo:

lato = √(148/12) = √(12 + 1/3) = √(12,33).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *secondo metodo* prevede i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei lati delle due basi: 4 + 3 = 7;
* dividere per 2: 7/2 = 3,5;
* moltiplicare per sé stesso: 3,5 * 3,5 = 12,25;
* moltiplicare per l'altezza del tronco: 12,25 * 12 = 147 piedi^3, volume del solido.

Con questo secondo metodo, il tronco di piramide è assimilato a un prisma a base quadrata con lati lunghi quanto la *media aritmetica* fra le lunghezze dei lati delle due basi del tronco di piramide.

MISURA DI UN CORPO

L'Huillier ritiene che il problema presentato da Chuquet sia ispirato a uno simile contenuto nel manoscritto di Anonimo Fiorentino, "Trattato di geometria pratica" (codice L.IV.18 della Biblioteca Comunale di Siena).

Deve essere misurato ad esempio un blocco di ferro che pesa 543 libbre: è disponibile un campione di ferro di forma cubica con volume di 8 pollici^3 e pesante 3 libbre.

Chuquet applica la regola del *tre semplice*: se 3 libbre sono il peso di un cubo che ha volume di 8 pollici^3, qual è il volume di un blocco che pesa 543 libbre?

3 : 8 = 543 : x con *x* che indica il volume incognito.

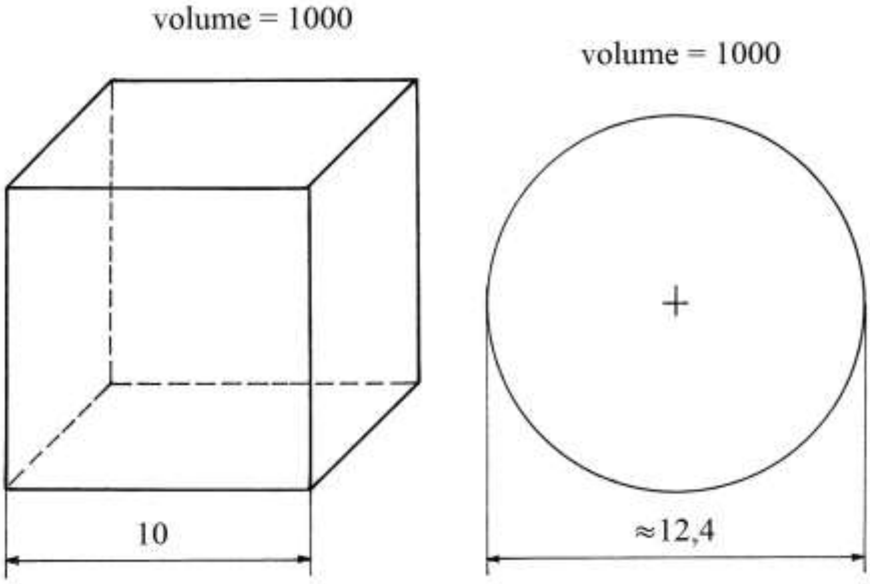
x = (8 * 543)/3 = 1448 pollici^3.

Un *piede* vale 10 pollici e un piede cubico equivale a 1000 pollici cubici.
Il volume incognito vale:

$$1448/1000 \text{ piedi}^3 = 1{,}448 \text{ piedi}^3 = (1 + 56/125) \text{ piedi}^3.$$

Conversione di un corpo in una sfera

Un cubo ha spigoli lunghi 10 e volume pari a 1000.
Deve essere convertito in una sfera di uguale volume.



Il volume di una sfera di raggio *r* e diametro $d = 2 * r$ è dato da:

$$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * (22/7) * (d/2)^3 = 88/21 * d^3/8 = 11/21 * d^3.$$

Il diametro *d* della sfera è:

$$d = \sqrt[3]{(21/11 * V \text{ sfera})}.$$

Nell'esempio si ha:

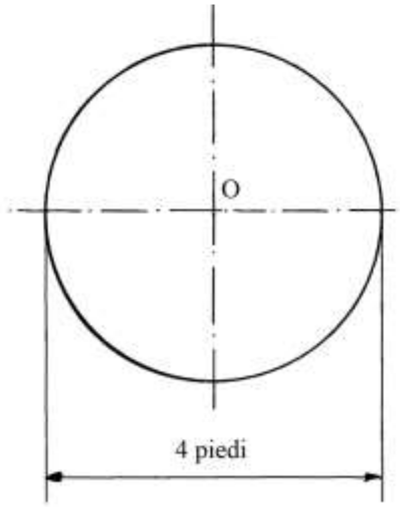
$$d = \sqrt[3]{(21/11 * 1000)} = \sqrt[3]{21000/11} \approx 12{,}40.$$

Lo stesso metodo può essere applicato alla conversione di un solido qualsiasi in una sfera equivalente.

PICCOLI PROBLEMI

Una pietra sferica

Una pietra di forma sferica ha diametro *d* di 4 piedi.



La circonferenza *c* è lunga:

$c = \pi * d = 22/7 * 4 = 88/7 = (12 + 4/7)$ piedi.

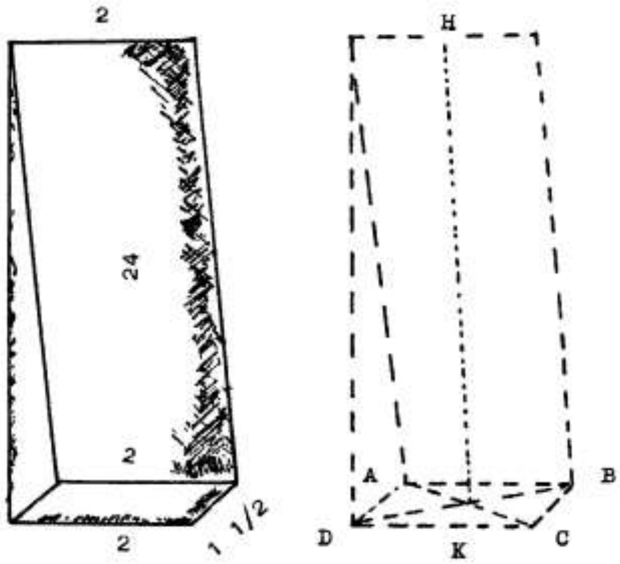
La superficie è calcolata moltiplicando la lunghezza della circonferenza per quella del diametro:

$S = c * d = (12 + 4/7) * 4 = (50 + 2/7)$ piedi^2.

<u>Volume di un prisma di legno</u>

Un blocco di legno ha base rettangolare con dimensioni di 2 per 1,5 piedi e il altezza ha il profilo di un triangolo isoscele con altezza *h* lunga 24 piedi.

Lo schema che segue è riprodotto da pagina 205 dell'edizione a stampa:



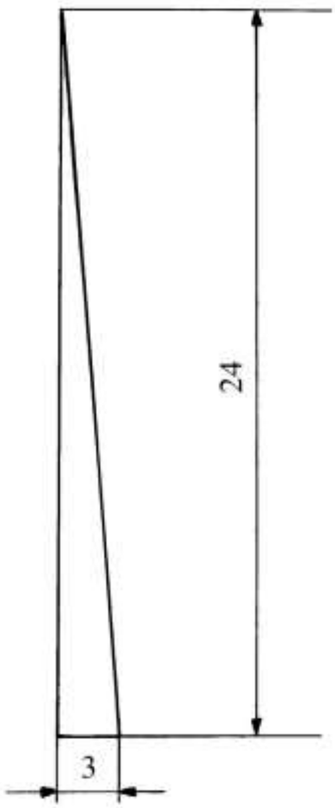
L'area della base è:

$S_{BASE} = 2 * 1{,}5 = 3$ piedi^2.

Il volume è dato da:

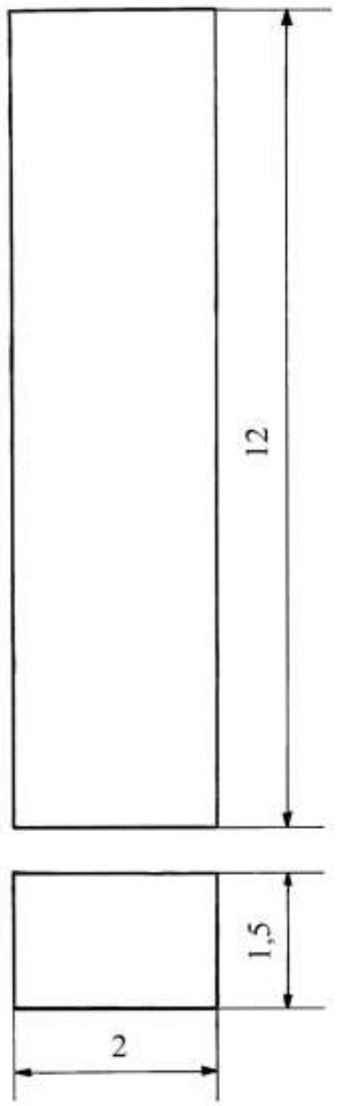
$V = (S_{BASE} * h)/2 = (3 * 24)/2 = 72/2 = 36$ piedi^3.

Lo schema che segue presenta il prisma visto di fronte:



Il prisma ha volume uguale a quello di un parallelepipedo con la stessa base e altezza *k* uguale a metà di *h*:

$k = h/2 = 24/2 = 12$ piedi.



Un vaso di vino

Chuquet inizia una serie di *sei* problemi dedicati a vasi vinari e a botti.

Nessun disegno accompagna i testi per cui risulta un po' difficile capire la forma di questi manufatti. Essi sembrano essere tutti di forma cilindrica e disposti in senso verticale, al contrario di alcune botti.

I trattati italiani ai quali si è ispirato questo matematico francese contenevano problemi (*Ragioni*) spesso accompagnati da figure.

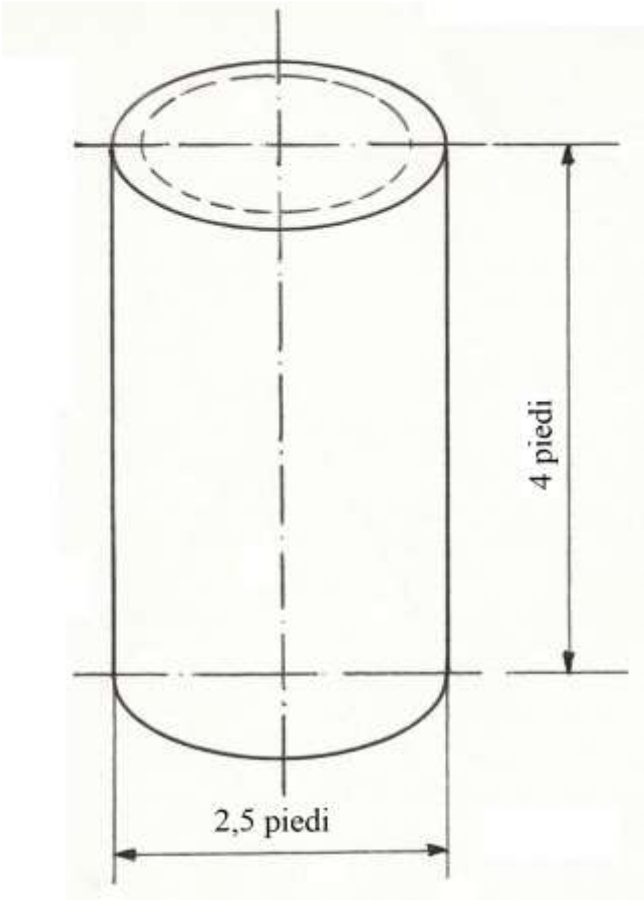
Un vaso circolare ha diametro di 2,5 piedi e contiene del vino. Esso è profondo h = 4 piedi.

L'area del cerchio è:

$$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * (2{,}5/2)^2 = (4 + 51/56) \text{ piedi}^2.$$

Il volume è:

$$V = S_{\text{CERCHIO}} * h = (4 + 51/56) * 4 = (19 + 9/14) \text{ piedi}^3.$$



Il termine francese *vaisseau* usato da Chuquet è stato sopra reso con *vaso*, ma può anche essere tradotto con *botte*.

Un secondo vaso

Il volume del precedente vaso è approssimato a 20 piedi^3 e serve per la soluzione di questo nuovo problema.

Il nuovo recipiente deve avere un volume che è dato da:

$V = 1{,}5 * 20 = 30$ piedi^3: è 1,5 volte più capiente del precedente vaso.

La profondità è sempre uguale a 4 piedi.

Il cerchio delle due basi del cilindro ha area che è data da:

$S_{CERCHIO}$ = volume/altezza = 30/4 = 7,5 piedi^2.

Un cerchio di diametro *d* ha area S che è data da:

$S_{CERCHIO} = 11/14 * d^2$.

Conoscendo l'area possiamo ricavare il diametro:

$d^2 = 14/11 * S_{CERCHIO} = 14/11 * 7{,}5 = (9 + 6/11)$ e

$d = \sqrt{(9 + 6/11)}$ piedi.

Una terza botte

Un bottaio deve costruire un recipiente cilindrico con volume 4 volte quello del primo vaso.

Il nuovo vaso deve avere volume uguale a:

$V = 4 * 20 = 80$ piedi^3.

La profondità del nuovo vaso è sempre uguale a 4 piedi.

L'area delle due basi è:

$S_{CERCHIO}$ = V/altezza = 80/4 = 20 piedi^2.

Il quadrato del diametro *d* è:

d^2 = 14/11 * $S_{CERCHIO}$ = 14/11 * 20 = (25 + 5/11) piedi^2.

Il diametro *d* è lungo:

d = √(25 + 5/11) piedi.

Una quarta botte

Lo stesso bottaio vuole costruire un recipiente con profondità uguale a 5 piedi e volume pari a 80 piedi^3.

Le basi del vaso hanno area uguale a:

$S_{CERCHIO}$ = V/altezza = 80/5 = 16 piedi^2.

Il quadrato del diametro delle basi è:

d^2 = 14/11 * $S_{CERCHIO}$ = 14/11 * 16 = (20 + 4/11).

Il diametro è lungo:

d = √(20 + 4/11) piedi.

Una quinta botte

Un bottaio deve costruire un recipiente cilindrico con diametro lungo 7 piedi e volume V di 80 piedi^3.

Il problema chiede la profondità.

L'area delle basi è:

$S_{CERCHIO} = \pi * r^2 = (22/7) * (7/2)^2$ = 22/7 * 49/4 = 38,5 piedi^2.

La profondità *h* è:

h = V/$S_{CERCHIO}$ = 80/38,5 = (2 + 6/77) piedi.

Una sesta botte

Il problema è piuttosto generico e prevede il calcolo del volume di un recipiente ricavato dall'unione di due o più fra i corpi cilindrici considerati nei cinque casi precedenti.

Ad esempio, la fusione di due recipienti di dimensioni uguali a quello del primo problema, conservando la profondità iniziale (4 piedi), produce un vaso di volume uguale a:

V = 2 * (19 + 9/14) = (39 + 4/14) = (39 + 2/7) piedi^3.

L'area delle due basi circolari del nuovo recipiente è:

$S_{CERCHIO}$ = V/h = (39 + 2/7)/4 = (9 + 23/28) piedi^2.

Il quadrato del diametro è:

d^2 = 14/11 * $S_{CERCHIO}$ = 14/11 * (9 + 23/28) = 12,5.

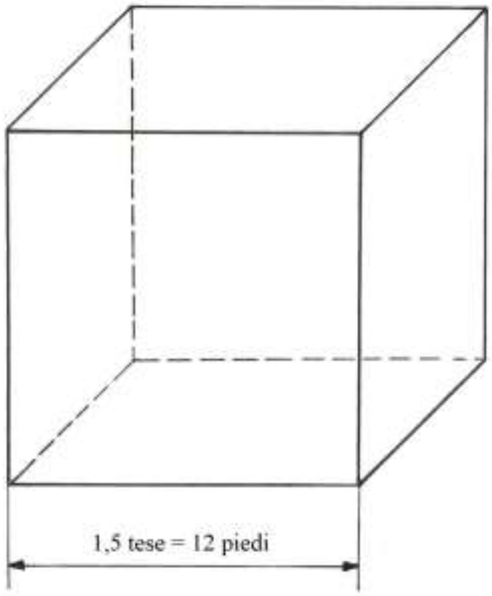
Il diametro *d* vale:

d = √12,5 piedi.

Un volume di grano

È il primo di tre problemi centrati su prestiti di grano: essi implicano conversioni fra unità di misura cubiche e fra volumi di solidi di forme differenti.

Un uomo ha prestato ad un altro una quantità di grano contenuta in un manufatto di forma cubica che ha spigoli lunghi 1,5 tese.



Il problema domanda il numero dei piedi cubici di grano che il secondo deve restituire al primo.

Una tesa equivale a 8 piedi.

Lo spigolo del manufatto è lungo:

1,5 tese * 8 = 12 piedi.

Il volume del grano espresso in piedi cubici è:

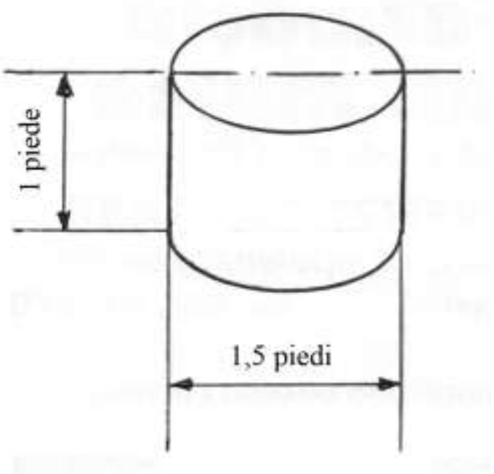
V = 12^3 = 1728 piedi^3.

<u>Un altro volume di grano</u>

Il quantitativo di grano prestato è uguale a quello del caso precedente.

Il cereale deve essere restituito usando come contenitore un solido cilindrico che ha diametro *d* lungo 1,5 piedi e profondità *h* uguale a 1 piede.

Il problema chiede il numero di recipienti occorrenti per contenere il grano da restituire.



L'area del cerchio che forma le basi del recipiente è:

$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * (1{,}5/2)^2 = 22/7 * 2{,}25/4 =$
$= (1 + 43/56)$ piedi^2.

Il volume V del recipiente è:

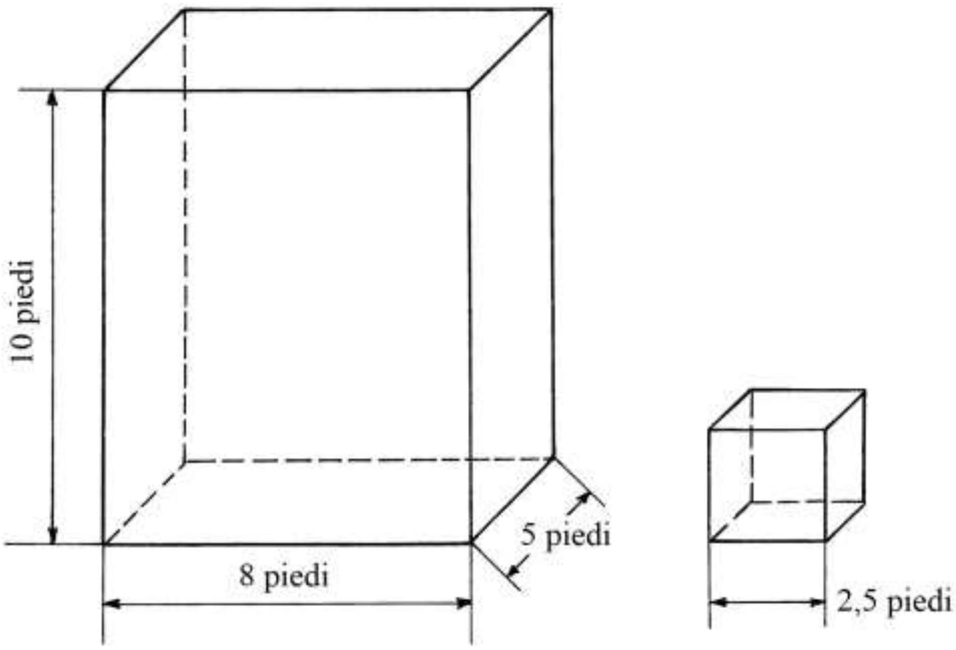
$V = S_{\text{CERCHIO}} * h = (1 + 43/56) * 1 = (1 + 43/56)$ piedi^3.

La quantità di grano da restituire ha volume uguale a 1728 piedi^3 per cui occorrono N recipienti:

$N = V_{\text{GRANO}}/V = 1728/(1 + 43/56) = (977 + 5/11)$ recipienti.

Un altro prestito di grano

Un uomo ha prestato a un altro il grano contenuto in un parallelepipedo che è largo 5 piedi, lungo 8 e profondo (alto) 10 piedi.



Il problema chiede il numero dei contenitori cubici con spigoli lunghi 2,5 piedi che devono essere riempiti per restituire il cereale.

Il parallelepipedo ha volume V:

$V = 5 * 8 * 10 = 400$ piedi^3.

Il contenitore ha volume:

$V_{\text{CUBO}} = 2{,}5^3 = 15{,}625$ piedi^3.

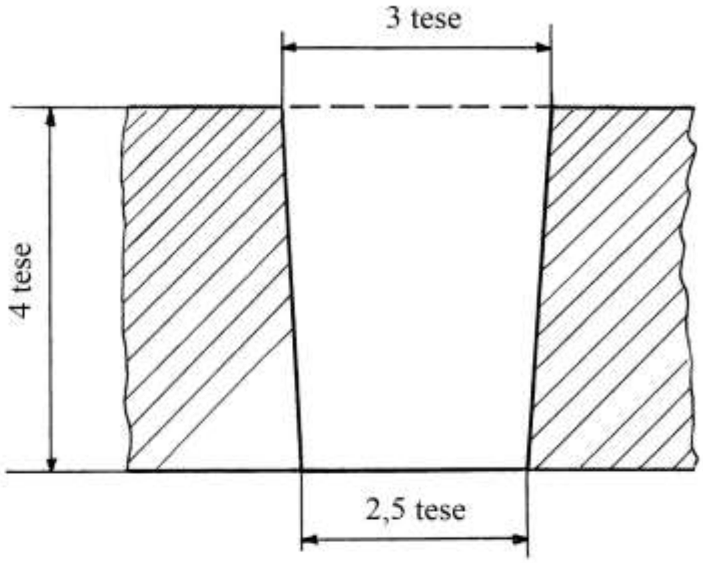
Il numero di contenitori N occorrenti è dato da:

$N = V/V_{\text{CUBO}} = 400/15{,}625 = 25{,}6$.

Scavo di un fossato

Un cavatore ha scavato un fossato lungo 16 tese, largo 3 in alto e 2,5 in basso e profondo 4 tese.

È chiaro che il profilo dello scavo è quello di un trapezio isoscele, come mostra lo spaccato qui sotto:



Il problema chiede il volume della terra scavata, in tese cubiche.

L'area del trapezio è data da:

$S_{\text{TRAPEZIO}} = [(3 + 2{,}5)/2] * 4 = (5{,}5/2) * 4 = 11$ tese^2.

Il volume dello scavo è:

$V = S_{\text{TRAPEZIO}} *$ lunghezza $= 11 * 16 = 176$ tese^3.

<u>Torre cilindrica</u>

Un muratore ha costruito una torre rotonda alta 12,5 tese. Alla base ha diametro esterno di 3,25 tese e in cima il diametro si riduce a 3 tese.

La circonferenza della base è:

$c_{\text{BASE}} = 22/7 * 3{,}25 = (10 + 3/14)$ tese.

La circonferenza in cima è:

$c_{\text{CIMA}} = 22/7 * 3 = (9 + 3/7)$ tese.

Lo spessore della torre alla base è 7,5 piedi e in cima è 6,5 piedi: una tesa equivale a 8 piedi per cui i due spessori sono:

7,5 piedi = 7,5/8 tese = 0,9375 tese e

6,5 piedi = 6,5/8 tese = 0,8125 tese.

Non sembra che Chuquet abbia utilizzato i dati degli spessori per risolvere il problema.

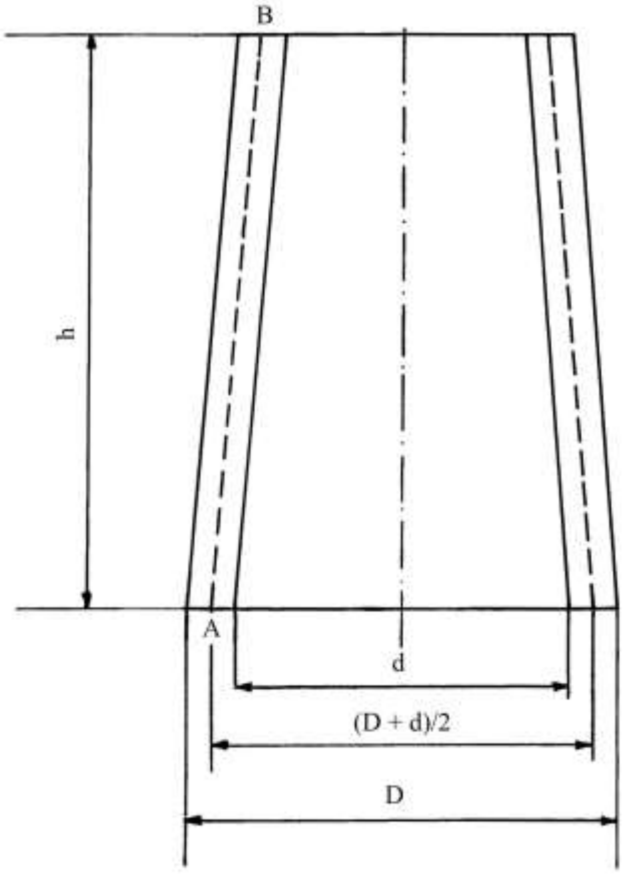
Il diametro esterno *D* misura, come già visto, 3,25 tese.

Il diametro interno *d* misura:

d = D – 2 * spessore = 3,25 – 2 * (7,/8) = 3,25 – 15/8 = 3,25 – 1,875 =
= 1,375 = (1 + 3/8) tese.

Il diametro (D + d)/2 è lungo:

(D + d)/2 = 3,25 + 1,375)/2 = (2 + 5/8).



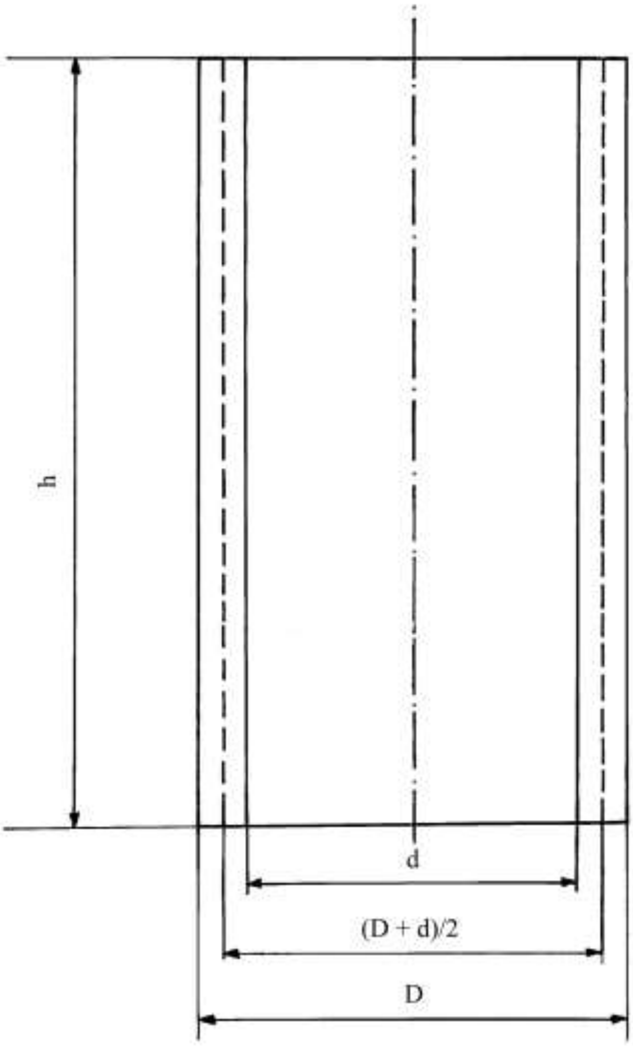
Il problema chiede di calcolare le tese quadrate per le quali deve essere pagato il costruttore. La base e la cima sono due corone circolari che rappresentano il muro.

Se la torre è di forma circolare, Chuquet propone di calcolare il compenso del costruttore con la seguente procedura:

* calcolare la lunghezza della circonferenza esterna: 22/7 * D;
* calcolare la lunghezza della circonferenza interna: 22/7 * d;
* sommare le lunghezze delle due circonferenze: 22/7 * D + 22/7 * d = 22/7 * (D + d);
* dividere per 2: 22/7 * (D + d)/2 = 11/7 * (D + d)
  [l'espressione (D + d)/2 misura il diametro del cilindro che in figura è tratteggiato];
* moltiplicare per l'altezza *h*: 11/7 * (D + d) * h, superficie calcolata che è la base per determinare il compenso da corrispondere al costruttore.

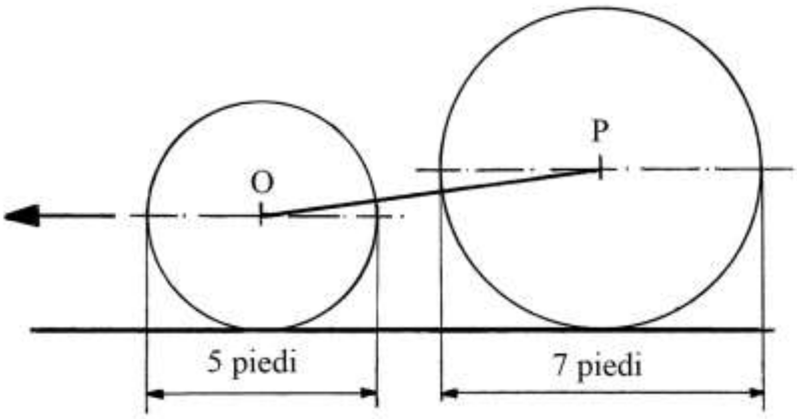
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso di una torre di forma tronco conica, il metodo appena presentato fornisce un risultato approssimato perché non tiene conto dell'inclinazione: AB è leggermente più lungo dell'altezza *h* del solito. Il risultato è leggermente sottostimato.



Un carro con quattro ruote

Un carro ha quattro ruote: quelle anteriori hanno diametro 5 piedi e quelle posteriori hanno diametro di 7 piedi.



Il problema chiede il numero dei giri che fanno le ruote posteriori quando quelle anteriori ne compiono 100.

La procedura prevede i seguenti passi:

* calcolare la lunghezza della circonferenza di una ruota anteriore:
  $\pi * 5 = 22/7 * 5 = 110/7 = (15 + 5/7)$ piedi;
* calcolare la lunghezza della circonferenza di una ruota posteriore:
  $\pi * 7 = 22/7 * 7 = 22$ piedi;
* moltiplicare la lunghezza della circonferenza di una ruota anteriore per il numero dei giri:
  $(15 + 5/7) * 100 = (1571 + 3/7)$;
* dividere per la lunghezza della circonferenza di una ruota posteriore:
  $(1571 + 3/7)/22 = (71 + 3/7)$, giri che compiono le ruote posteriori.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo stesso carro è l'oggetto di un altro problema.

Una lega è lunga 1000 passi e un passo equivale a 6 piedi: una lega è lunga 6000 piedi.

Il problema chiede il numero dei giri che compiono le due coppie di ruote dopo aver percorso 10 leghe.

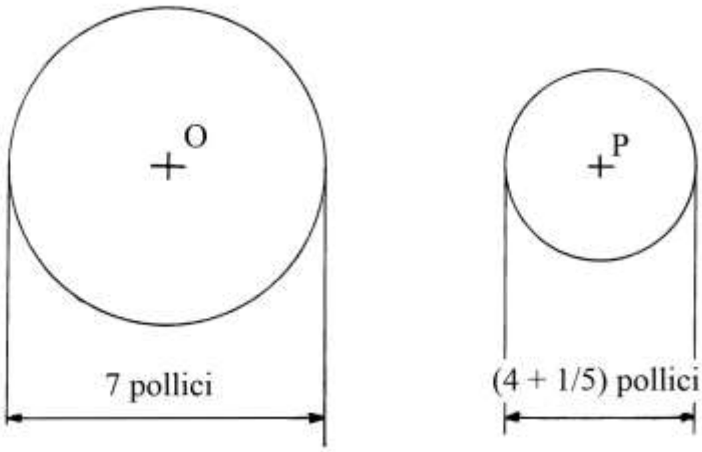
La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

* convertire la lunghezza di 10 leghe: 10 leghe = 10 * 1000 passi = 10000 passi =
  = 10000 * 6 piedi = 60000 piedi;
* dividere per la lunghezza della circonferenza delle ruote anteriori:
  $60000/(15 + 5/7) = (3818 + 2/11)$ giri;
* dividere 60000 per la lunghezza della circonferenza delle ruote posteriori:
  6000/(22 = (2727 + 3/11) giri che compiono le ruote posteriori.

Ruote per orologeria

Inizia qui una serie di *tre* problemi sulle ruote per orologeria.

Un orologiaio ha costruito una ruota che ha diametro lungo 7 pollici. Vuole produrne un'altra che ruotando compia 3 giri mentre la prima ne fa 5.



Il problema chiede il diametro della seconda ruota.

La procedura contiene i seguenti passi:

* calcolare la lunghezza della circonferenza della prima ruota: $\pi * 7 = 22/7 * 7 = 22$ pollici;
* moltiplicare per il numero dei giri: $22 * 3 = 66$;

*	dividere per 5:	66/5 = (13 + 1/5) pollici, lunghezza della circonferenza della seconda ruota;
*	dividere per 22/7:	(13 + 1/5)/(22/7) = (4 + 1/5) pollici, diametro della seconda ruota.

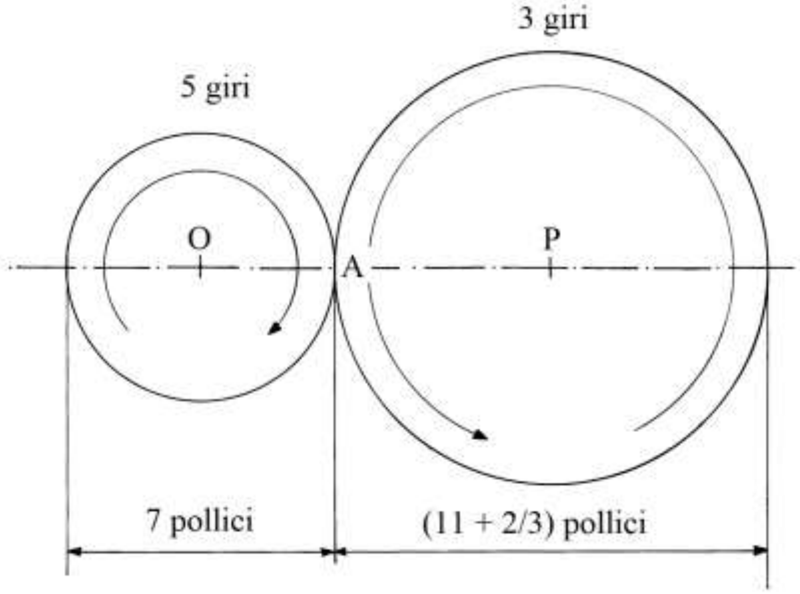
Lo schema qui sopra visualizza il risultato della soluzione proposta da Chuquet, che è errata.

- APPROFONDIMENTO -

Abbiamo appena affermato che la soluzione di Chuquet è errata.

Due ruote cilindriche montate su assi di rotazione paralleli sono accoppiate e hanno la stessa velocità periferica.

Le due ruote sono a stretto contatto nel punto A: se la ruota di centro O ruota, è detta *conduttrice* e quella di centro P è la ruota *condotta*.



Esse sono a contatto nel punto A. Se la pressione fra le due ruote è sufficiente, la prima ruota trascina la seconda: se la prima, ad esempio, ruota in senso orario, la seconda si muove in senso antiorario.

Ovviamente, lo schema è una semplificazione: in orologeria sono sempre state usate ruote dentate.

Le due ruote hanno la stessa velocità periferica.

Se la ruota di sinistra compie 5 giri e quella di destra ne effettua 3, questa seconda ruota deve avere un diametro la cui lunghezza è legata a quella della sua circonferenza.

La soluzione corretta è la seguente:

*	calcolare la lunghezza della circonferenza di centro O:	π * d = 22/7 * 7 = 22 pollici;
*	moltiplicare per il numero dei giri:	22 * 5 = 110;
*	dividere per il numero di giri della seconda ruota:
	110/3 = (36 + 2/3) pollici, lunghezza della seconda circonferenza;
*	dividere per π = 22/7:	(36 + 2/3)/(22/7) = (11 + 2/3) pollici, diametro della seconda ruota.

- -

Il secondo problema utilizza la prima ruota del precedente problema: mentre essa compie 11 giri, una seconda ruota ne fa solo 4. Deve essere calcolato il diametro di questa seconda ruota.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza della prima ruota per il numero di giri:
  $22 * 11 = 242$;
* dividere per il numero dei giri della seconda ruota: $242/4 = (60 + ½)$ pollici, lunghezza della circonferenza della seconda ruota;
* dividere per $\pi = 22/7$: $(60 + ½)/(22/7) = (19 + ¼)$ pollici, diametro della seconda ruota.

%%

Il terzo e ultimo problema coinvolge 4 ruote.

Mentre la prima ruota fa un 1 giro, la seconda 2, la terza 3 e la quarta compie 4 giri.

Il problema chiede di determinare la proporzione fra le lunghezze dei quattro diametri.

Occorre ricavare il più piccolo numero che sia divisibile per 1, 2, 3 e 4: è 12.

La procedura impiegata da Chuquet prevede i seguenti passi:

* dividere 12 per 1: $12/1 = 12$, lunghezza della circonferenza della prima ruota;
* dividere 12 per 2: $12/2 = 6$, lunghezza della circonferenza della seconda ruota;
* dividere 12 per 3: $12/3 = 4$, lunghezza della circonferenza della terza ruota;
* dividere 12 per 4: $12/4 = 3$, lunghezza della circonferenza della quarta ruota.

Chuquet suggerisce per la prima ruota una lunghezza effettiva della circonferenza uguale a 30.

La soluzione è poi data da una serie di proporzioni: se la prima circonferenza è lunga 30, la lunghezza *x* della seconda è:

$30 : 12 = x : 6$ e

$x = (30 * 6)/12 = 15$.

La terza ruota ha circonferenza lunga *y*:

$30 : 12 = y : 4$ e

$y = (30 * 4)/12 = 10$.

Infine, la quarta ruota ha la circonferenza *z* la cui lunghezza è:

$30 : 12 = z : 3$ e

$z = (30 * 3)/12 = 7{,}5$.

PROBLEMI SUI CERCHI

Cerchio doppio

Due cerchi di uguali dimensioni hanno aree di 12 piedi quadrati. Essi devono essere uniti per formare un altro cerchio con la circonferenza lunga quanto la somma delle circonferenze dei due cerchi iniziali. È chiaro che non si tratta della fusione delle aree dei due cerchi identici.

L'area di un cerchio è:

$S_{\text{CERCHIO}} = c^2 * 7/88$, con *c* circonferenza.

Ne consegue:

$c^2 = 88/7 * S_{\text{CERCHIO}} = 88/7 * 12 = 1056/7 = (150 + 6/7)$ e

$c = \sqrt{(150 + 6/7)}$ piedi.

Il cerchio finale ha circonferenza *C* che è lunga il doppio di *c*:

$C = 2 * c = 2 * \sqrt{(150 + 6/7)} = \sqrt{[4 * \sqrt{(150 + 6/7)}]} = \sqrt{(603 + 3/7)}$ piedi.

L'area del cerchio finale è:

$S_{\text{FINALE}} = C^2 * 7/88 = [\sqrt{(603 + 3/7)}]^2 * 7/88 = (603 + 3/7) * 7/88 = 48$ piedi^2.

Chuquet conclude con un'importante affermazione: dato che la lunghezza del cerchio finale è doppia, la sua area è quadrupla di quella di uno dei cerchi iniziali:

$C = 2 * c$
$S_{FINALE} = 4 * S_{CERCHIO}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet propone un'altra soluzione del problema che è riassunta con la seguente espressione:

$S_{FINALE} = S_{CERCHIO} + S_{CERCHIO} + 2 * \sqrt{(S_{CERCHIO} * S_{CERCHIO})}$.

Nel caso concreto sia ha:

$S_{FINALE} = 12 + 12 + 2 * \sqrt{(12 * 12)} = 24 + 2 * \sqrt{144} = 24 + 2 * 12 =$
$= 24 + 24 = 48$ piedi^2.

Unione di due cerchi differenti

Due cerchi hanno aree di 7 e di 9.

Le loro due circonferenze devono essere unite per formare la circonferenza di un terzo cerchio.

Il problema chiede l'area di questo nuovo cerchio.

La procedura contiene i seguenti passi:

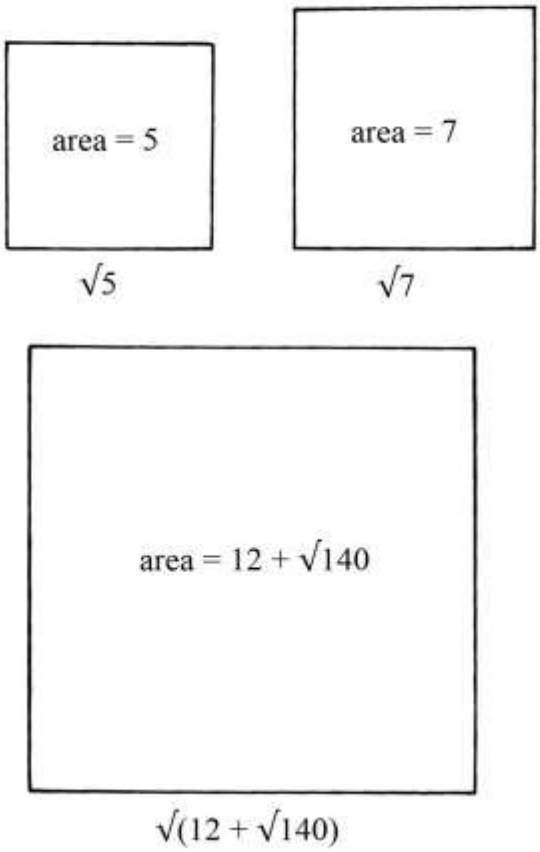
* sommare le due aree: $7 + 9 = 16$;
* moltiplicare le due aree: $7 * 9 = 63$;
* moltiplicare per 4: $63 * 4 = 252$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{252}$;
* sommare con 16: $(\sqrt{252} + 16)$, area del cerchio somma.

La soluzione richiama la formula utilizzata alla fine del precedente paragrafo.

Unione di due quadrati

Il problema non rientra fra quelli aventi per oggetto i cerchi, ma la soluzione adottata richiama quella impiegata per l'unione dei cerchi mediante la fusione delle loro circonferenze: il nuovo problema unisce i perimetri.

Due quadrati hanno aree uguali a 7 e a 5. I loro perimetri sono uniti per formare un altro quadrato che ha perimetro lungo quanto la loro somma.



La soluzione è articolata come segue:

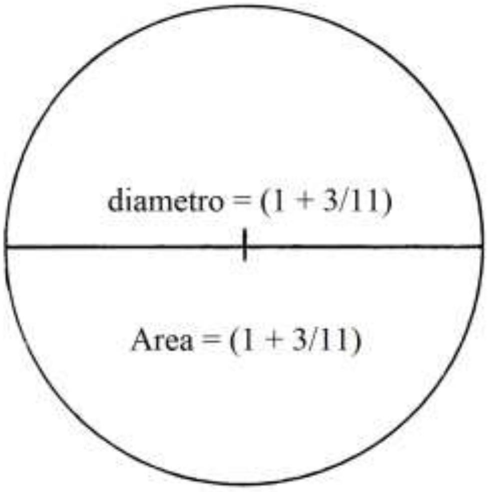
* sommare le due aree: $7 + 5 = 12$;
* moltiplica 7 per 5: $7 * 5 = 35$;
* moltiplicare per 4: $35 * 4 = 140$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{140}$;
* sommare a 12: $12 + \sqrt{140}$, area del quadrato somma;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(12 + \sqrt{140})}$, lunghezza del lato del quadrato somma.

<u>Diametro di un cerchio</u>

In un cerchio la lunghezza del diametro d e l'area S sono uguali, a parte le differenti unità di misura.

Devono essere calcolati i valori di d e di S.

In questo e nei successivi problemi sui cerchi, Chuquet on indica né unità di misura lineari né unità superficiali.



L'area S è:

$S = 11/14 * d^2$.

Ma S = d, per cui si ha:

$d = 11/14 * d^2$

$1 = 11/14 * d$

$d = 14/11 * 1 = (1 + 3/11)$.

Verifichiamo il valore dell'area:

$S = 11/14 * (14/11)^2 = 14/11 = 1 + 3/11$.

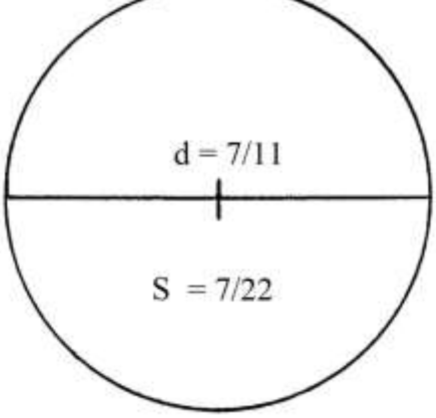
Il problema è la Ragione n. 44 del "*Trattato di geometria pratica*" di Anonimo Fiorentino (codice L.IV.18 della Biblioteca Comunale di Siena).

<u>Diametro di un altro cerchio</u>

Un cerchio ha diametro lungo d, in valore assoluto, il doppio dell'area S.

$S = 11/14 * d^2$ e

$d = 2 * S$.



Quindi si ha:

$S = 11/14 * (2 * S)^2$

$S = 11/14 * 4 * S^2$

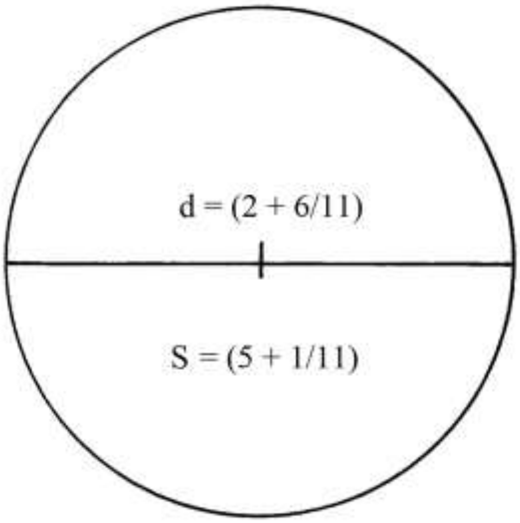
$1 = 22/7 * S$

$S = 7/22$ e

$d = 2 * S = 2 * (7/22) = 7/11.$

<u>Diametro di altro cerchio</u>

In un cerchio, il diametro *d* ha lunghezza uguale a metà dell'area *S*.



$S = 2 * d$
$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * (S/2)^2$
$S = 11/14 * S^2/4$
$S = 11/56 * S^2$
$1 = 11/56 * S$
$S = 56/11 = (5 + 1/11)$
$d = S/2 = (5 + 1/11)/2 = (2 + 6/11).$

<u>Un altro cerchio</u>

Il diametro *d* di un cerchio è lungo *un terzo* del valore assoluto dell'area *S*:

$d = S/3.$

La soluzione è ottenuta con i passi che seguono:

$d = S/3$
$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * (A/3)^2 = 11/14 * A^2/9 = 11/126 * S^2.$

Ne consegue:

$1 = 11/126 * S$
$S = 126/11 = (11 + 5/11).$

Il diametro è lungo:

$d = S/3 = (11 + 5/11)/3 = (3 + 9/11).$

<u>Un altro cerchio</u>

Il nuovo problema è, per così dire, opposto al precedente.
Il diametro *d* è lungo 3 volte l'area *S*:

$d = 3 * S.$

La soluzione è la seguente:

$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * (3 * S)^2 = 11/14 * 9 * S^2 = 99/14 * S^2$
$1 = 99/14 * S$
$S = 14/99$.

Il diametro è lungo:
$d = 3 * S = 3 * 14/99 = 42/99 = 14/33$.

Circonferenza e area uguali

In un cerchio la lunghezza della circonferenza, *c*, è uguale, in valore assoluto, all'area S.
Riprendiamo la formula dell'area del cerchio a partire dalla lunghezza della circonferenza:
$S = c^2 * 7/88$.

La soluzione è:
$c = c^2 * 7/88$
$1 = c * 7/88$
$c = 88/7 = (12 + 4/7)$.

L'area S è:
$S = c = (12 + 4/7)$.

Circonferenza lunga metà dell'area

Il cerchio ha la circonferenza lunga metà del valore assoluto dell'area:
$c = S/2$.

La soluzione è:
$S = c^2 * 7/88$
$S = (S/2)^2 * 7/88$
$S = S^2/4 * 7/88$
$1 = S * 7/352$
$S = 352/7 = (50 + 2/7)$
$c = s/2 = (50 + 2/7)/2 = (25 + 1/7)$.

Area di un cerchio conoscendo il diametro

Il diametro *d* di un cerchio è lungo $\sqrt{45}$.
Il problema chiede la sua area *S*.
$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * (\sqrt{45})^2 = 11/14 * 45 = (35 + 5/14)$.

- APPROFONDIMENTO -

A partire da questo esempio, inizia una serie di problemi sul cerchio e sui triangoli che sono caratterizzati dalla presenza di lunghezze e aree espresse da numeri irrazionali generati da radici quadrate.

In una nota a p. 221, l'editore del trattato, Hervé L'Huillier, avanza l'ipotesi che Chuquet abbia scelto quei numeri irrazionali allo scopo prevalente di insegnare a calcolare con numeri espressi da radici quadrate.

I maestri d'abaco italiani i cui trattati sono stati un'importante fonte per i lavori di Chuquet non utilizzavano simili accorgimenti assai poco didattici.

- -

Circonferenza di un cerchio

L'area *S* di un cerchio è $\sqrt{50}$. Il problema chiede la lunghezza della circonferenza *c*.

L'area del cerchio è:

$S = c^2 * 7/88$ da cui:

$c^2 = 88/7 * S = 88/7 * \sqrt{50} = \sqrt{[(88^2 * 50)/7^2]} = \sqrt{(387200/49)} = \sqrt{(7902 + 2/49)}$ e

$c = \sqrt{[\sqrt{(7902 + 2/49)}]}$.

<u>Diametro di un cerchio</u>

Un cerchio ha stessa area del cerchio del precedente problema: $S = \sqrt{50}$.

Il nuovo problema domanda la lunghezza del diametro *d*.

Ecco la soluzione:

$S = 11/14 * d^2$

$\sqrt{50} = 11/14 * d^2$

$d^2 = 14/11 * \sqrt{50}$

$d = \sqrt{(14/11 * \sqrt{50})} = \sqrt{\sqrt{(196 * 50/121)}} = \sqrt{\sqrt{(9800/121)}} = \sqrt{\sqrt{(80 + 120/121)}}$.

<u>Circonferenza di un cerchio</u>

Un cerchio ha area *S* uguale a 60.

Il problema chiede la lunghezza della circonferenza.

L'area è data da:

$S = c^2 * 7/88$ da cui

$60 = c^2 * 7/88$

$c^2 = 60 * 88/7$ e

$c = \sqrt{(60 * 88/7)} = \sqrt{(5280/7)} = \sqrt{(754 + 2/7)}$.

<u>Diametro di un cerchio</u>

Un cerchio ha area uguale a quella del precedente problema:

$S = 60$.

È domandata la lunghezza del diametro.

Usiamo la formula che segue:

$S = 11/14 * d^2$

$60 = 11/14 * d^2$

$d^2 = 14/11 * 60 = 840/11 = (76 + 4/11)$ e

$d = \sqrt{(76 + 4/11)}$.

<u>Circonferenza di un cerchio</u>

La circonferenza di un cerchio è lunga:

$c = \sqrt{200}$.

Deve essere calcolata la lunghezza del diametro *d*.

Usiamo la semplice formula che segue:

$c = \pi * d = 22/7 * d$

$\sqrt{200} = 22/7 * d$

$d = \sqrt{200} * 7/22 = \sqrt{(200 * 49/484)} = \sqrt{(9800/484)} = \sqrt{(20 + 30/121)}$.

Area di un cerchio

Un cerchio ha circonferenza *c* lunga √200.

Il problema chiede la sua area.

La formula da impiegare è:

$S = c^2 * 7/88$, quindi:

$S = (\sqrt{200})^2 * 7/88$

$S = 200 * 7/88$

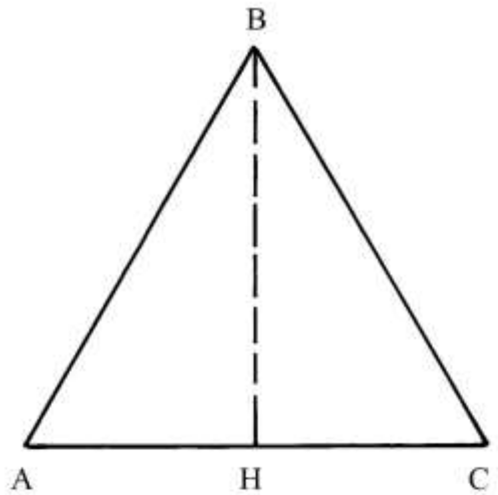
$S = 1400/88$

$S = (15 + 10/11)$.

PROBLEMI SUI TRIANGOLI

Calcolo dell'altezza di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12. Il problema chiede la lunghezza del "*cateto*" e cioè di un'altezza (BH in figura).



La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* moltiplicare per ¾: 144 * ¾ = 108;
* estrarre la radice quadrata: √108, lunghezza dell'altezza BH.

BH divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e BCH.

La lunghezza di BH è:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = ¾ * AB^2 = ¾ * 12^2 = ¾ * 144 = 108$ e $BH = \sqrt{108}$.

Altezza di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha un'altezza lunga 10 e lo sono pure le altre due.

Il problema domanda la lunghezza delle *ipotenuse*" (e cioè dei lati inclinati) e della base, che peraltro sono uguali.

Il quesito è chiaramente l'opposto del precedente.

La procedura impiegata da Chuquet è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza dell'altezza per sé stessa: 10 * 10 = 100;

* moltiplicare per 4/3: $100 * 4/3 = (133 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(133 + 1/3)}$, lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

La soluzione è così spiegata:

$BH^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = ¾ * AB^2$ da cui

$AB^2 = 4/3 * BH^2 = 4/3 * 10^2 = 4/3 * 100 = (133 + 1/3)$ e

$AB = \sqrt{(133 + 1/3)}$.

Lati di un triangolo equilatero data l'area

Un triangolo equilatero ha area uguale a 30.

Il problema chiede la lunghezza dei lati, ℓ.

Chuquet propone due metodi. Con il primo assegna alla lunghezza incognita il valore convenzionale "1", qui sostituito con "x".

L'altezza del triangolo equilatero è indicata con "h".

L'area S è data da:

$S = \ell * h/2$.

L'altezza è lunga:

$h = \ell * (\sqrt{3})/2$.

Quindi l'area è:

$S = \ell * [\ell * (\sqrt{3})/2] = \ell^2 * (\sqrt{3})/4$.

Ma S = 30, quindi si ha:

$30 = \ell^2 * (\sqrt{3})/4$

$120 = \ell^2 * \sqrt{3}$

$\ell = \sqrt{(120/\sqrt{3})} = \sqrt{[(120 * \sqrt{3})/3]} = \sqrt{(40 * \sqrt{3})}$.

Infine, l'altezza *h* è lunga:

$h = \ell * (\sqrt{3})/2 = \sqrt{(40 * \sqrt{3})} *(\sqrt{3})/2 = \sqrt{[(40 * 3 * \sqrt{3})/4]} = \sqrt{(30 * \sqrt{3})}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo richiede l'applicazione in forma inversa della formula di Erone per il calcolo dell'area.

Il problema è simile a uno contenuto nel citato "*Trattato di geometria pratica*" di "Anonimo Fiorentino" (codice L.IV.18 della Biblioteca Comunale di Siena): in quel caso l'area del triangolo è uguale a 80 braccia^2.

La soluzione proposta da Chuquet non usa un'incognita come la "x" per indicare la lunghezza di un lato (come viene fatto qui), ma impiega il generico simbolo "1".

La procedura è riassunta con i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei tre lati: $x + x + x = 3 * x$ [perimetro];
* dividere per 2: $3 * x/2$ [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza di un lato dal semiperimetro: $3 * x/2 – x = x/2$;
* moltiplicare "x/2" per sé stesso e poi di nuovo per "x/2": $x/2 * x/2 * x/2 = x^3/8$;
* moltiplicare per il semiperimetro: $(x^3/8) * (3 * x/2) = x^4 * 3/16$;
* uguagliare al quadrato dell'area:

$30^2 = x^4 * 3/16$

$x^4 = 16 * 30^2/3$

$x^4 = 4800$

$x^2 = \sqrt{4800}$

$x = \sqrt{(\sqrt{4800})} = \sqrt{(40 * \sqrt{3})}$, lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

Area di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi $\sqrt{48}$.

Il problema chiede l'area del triangolo.

La soluzione contiene alcuni passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $\sqrt{48} * \sqrt{48} = 48$;
* calcolare i ¾ di 48: $48 * ¾ = 36$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$, lunghezza di un'altezza;
* dividere la lunghezza di un lato per 2: $(\sqrt{48})/2 = \sqrt{(48/4)} = \sqrt{12}$, lunghezza della metà di un lato;
* moltiplicare l'altezza per la lunghezza di un semilato: $6 * \sqrt{12} = \sqrt{(36 * 12)} = \sqrt{432}$, area del triangolo.

Lunghezza dei lati di un triangolo equilatero

Il problema è l'inverso del precedente.

Il triangolo equilatero ha area uguale a $\sqrt{432}$.

È chiesta la lunghezza dei lati del triangolo.

Chuquet applica la formula di Erone che qui viene semplificata assegnando alla lunghezza dei lati il valore dell'incognita "x".

Il perimetro *2 * p* è lungo: $2 * p = 3 * x$ e il semiperimetro è:

$p = 3 * x/2$.

L'area S del triangolo è data da:

$$S = \sqrt{[p * (p - x) * (p - x) * (p - x)]} = \sqrt{[3 * x/2 * (3 * x/2 - x)^3]} =$$
$$= \sqrt{[3 * x/2 * (x/2)^3]} = \sqrt{(3/2 * x * 1/8 * x^3)} = \sqrt{(3/16 * x^4)} = x^2 * \sqrt{(3/16)}.$$

L'ultima espressione è uguale all'area:

$x^2 * \sqrt{(3/16)} = \sqrt{432}$

$x^4 = (432 * 16)/3$

$x^4 = 2304$

$x^2 = \sqrt{2304} = 48$ e

$x = \sqrt{48}$, lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

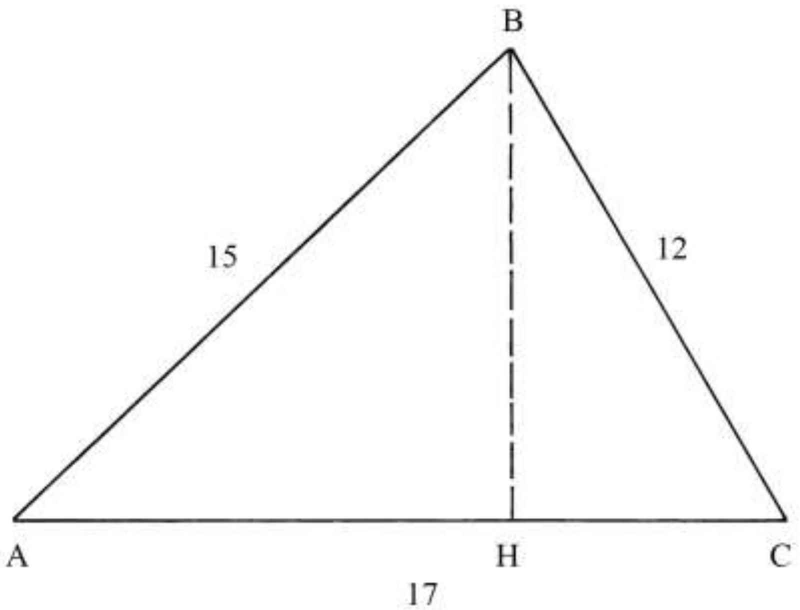
Altezza di un triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ha i lati obliqui lunghi 15 e 12 e la base lunga 17.

Il problema chiede l'altezza relativa alla base.

BH divide ABC in due triangoli rettangoli, ABH e BHC, che hanno in comune il cateto BH che è l'altezza della quale deve essere calcolata la lunghezza.

Chuquet attribuisce alla lunghezza del segmento AH il valore incognito che di seguito è indicato con "x".



AH = x e HC = AC – AH = 17 – x.

La lunghezza di BH è ricavabile con le due seguenti espressioni:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 15^2 – x^2$

$BH^2 = BC^2 – HC^2 = 12^2 – (17 – x)^2$.

Le due espressioni si equivalgono:

$15^2 – x^2 = 12^2 – (17 – x)^2$

$225 – x^2 = 144 – 289 + 34 * x – x^2$

$225 – 144 + 289 = 34 * x$

$370 = 34 * x$

$x = 370/34 = 185/17 = (10 + 15/17) = AH$.

La lunghezza di HC è:

$HC = 17 – (10 + 15/17) = (6 + 2/17)$.

La lunghezza di BH è data da:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 15^2 – (10 + 15/17)^2 = (106 + 166/289)$ e

$BH = \sqrt{(106 + 166/289)}$.

Area di un triangolo scaleno

Il triangolo considerato è lo stesso del precedente problema.

Deve essere calcolata l'area S di ABC.

Chuquet propone due metodi: il primo consiste nel moltiplicare la lunghezza di BH per metà di quella di AC:

$S_{ABC} = BH * (AC/2) = [\sqrt{(106 + 166/289)}] * 17/2 = \sqrt{7700} = 10 * \sqrt{77}$.

Il secondo metodo richiede l'applicazione della formula di Erone:

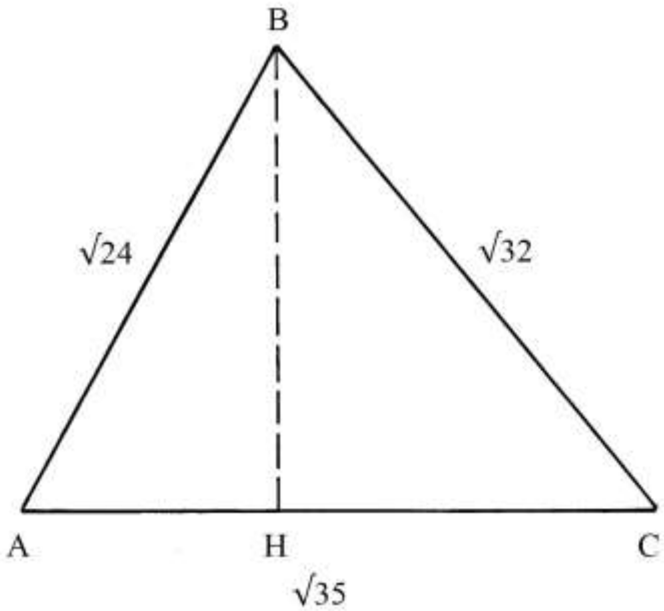
* sommare le lunghezze dei tre lati: 15 + 12 + 17 = 44 [perimetro];
* dividere per 2: 44/2 = 22 [semiperimetro];
* sottrarre le lunghezze dei tre lati dal semiperimetro:
  22 – 15 = 7
  22 – 12 = 10
  22 – 17 = 5;
* moltiplicare 7 per 10 per 5: 7 * 10 * 5 = 350;
* moltiplicare per il semiperimetro: 350 * 22 = 7700, quadrato dell'area;

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{7700} = 10 * \sqrt{77}$, area di ABC.

Altro triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ha i lati obliqui lunghi $\sqrt{24}$ e $\sqrt{32}$ e la base è $\sqrt{35}$.

Il problema chiede la lunghezza di un'altezza (ovviamente quella riferita alla base) e l'area.



Le lunghezze dei tre lati sono espresse da numeri irrazionali: il problema è poco "didattico" perché contiene dati poco maneggevoli. Chuquet voleva solo mostrare la sua abilità a manipolare le radici?

Riproduciamo la procedura contenuta nel testo adattandola ai segmenti e alle lettere contenute nella figura qui sopra:

* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: $\sqrt{32} * \sqrt{32} = 32$;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: $\sqrt{24} * \sqrt{24} = 24$;
* sottrarre 24 da 32: $32 - 24 = 8$;
* moltiplicare la lunghezza della base per sé stessa: $\sqrt{35} * \sqrt{35} = 35$;
* sommare con 8: $35 + 8 = 43$;
* dividere per il doppio della lunghezza della base: $43/(2 * \sqrt{35}) = 43/\sqrt{140}$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(43/\sqrt{140})} = \sqrt{(13 + 29/140)}$;
* moltiplicare per sé stesso: $\sqrt{(13 + 29/140)} * \sqrt{(13 + 29/140)} = (13 + 29/140)$;
* sottrarre dal quadrato della lunghezza di BC: $32 - (13 + 29/140) = (18 + 111/140)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(18 + 111/140)}$, lunghezza di BH;
* calcolare la metà della lunghezza della base AC: $(\sqrt{35})/2 = \sqrt{(35/4)} = \sqrt{(8 + ¾)}$;
* moltiplicare per l'altezza BH: $\sqrt{(8 + ¾)} * \sqrt{(18 + 111/140)} = \sqrt{(157 + ½)}$, area del triangolo.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura può essere semplificata.

Fissiamo i seguenti simboli per le diverse lunghezze:

* AB = a;
* BC = b;
* AC = c;
* BH = h;

*	AH = p;
*	HC = q;
*	AH + HC = p + q = AC = c.

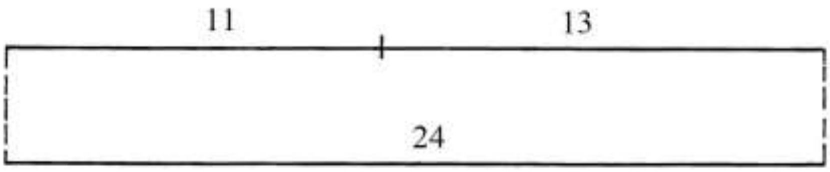
$q = (BC^2 – AB^2 + AC^2)/(2 * AC) = (b^2 – a^2 + c^2)/(2 * c)$.
La formula si deve a Erone di Alessandria.

Il problema presentato da Chuquet è un altro esempio del suo “virtuosismo” fine solo a sé stesso.

- -

Triangolo degenere

Un triangolo ha lati lunghi 11, 13 e 24.
Il triangolo è chiamato *degenere* perché è impossibile da costruire.



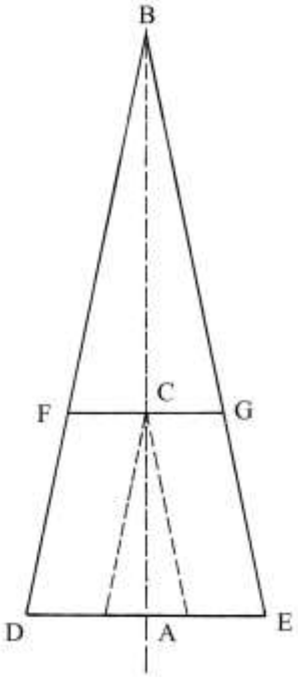
Infatti, la lunghezza del lato maggiore, 24, è uguale alla somma delle lunghezze degli altri due: in un qualsiasi triangolo, la somma delle lunghezze dei due lati più corti deve essere maggiore della lunghezza del lato più lungo.

La soluzione data da Chuquet è basata sull’applicazione della formula di Erone per il calcolo dell’area di un triangolo. Ecco la procedura:

*	sommare le lunghezze dei tre lati: 11 + 13 + 24 = 48 [perimetro]:
*	dividere per 2: 48/2 = 24 [semiperimetro];
*	sottrarre dal semiperimetro le lunghezze dei tre lati:
	24 – 11 = 13,
	24 – 13 = 11,
	24 – 24 = 0.
	Moltiplicando i tre risultati parziali si ha:
		13 * 11 * 0 = 0: il triangolo non può essere costruito.

Triangolo isoscele

Un triangolo ha i lati obliqui di uguale lunghezza: è isoscele.
La corda FCG è parallela alla base DAE.
DAE è lunga 20 e FCG è 13. Il segmento AC è lungo 17.
Il problema chiede la lunghezza dell’altezza BA.
La soluzione muove dalla costatazione che i triangoli DBE e FBG sono simili.



Calcolare la differenza fra le lunghezze di DE e di FG:

DE – FG = 20 – 13 = 7.

Esiste la proporzione:

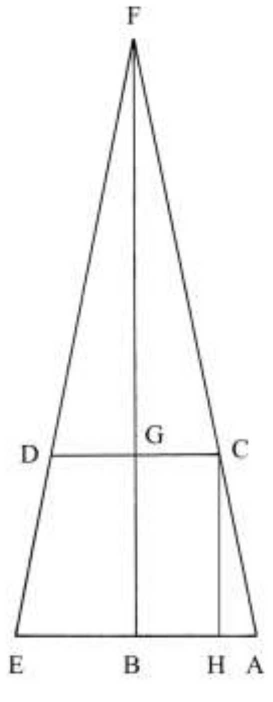
(DE – FG) : AC = DE : BA

7 : 17 = 20 : BA

BA = (17 * 20)/7 = (48 + 4/7).

<u>Un altro triangolo isoscele</u>

Il triangolo isoscele EFA ha la base EA lunga 10, la corda DC è 8 e il segmento AC è lungo 14.



Lo schema qui sopra è fuori scala.

Il problema chiede l'altezza FB.

Il segmento HA, un cateto del triangolo rettangolo CHA, è lungo:

$HA = BA - BH = EA/2 - GC = EA/2 - DC/2 = 10/2 - 8/2 = 5 - 4 = 1.$

La soluzione offerta da Chuquet è la seguente:

$CH^2 = CA^2 - HA^2 = 14^2 - 1^2 = 196 - 1 = 195$ e

$CH = \sqrt{195}.$

CHA e FBA sono due triangoli rettangoli simili e vale la proporzione:

$CH : FB = HA : BA$ e

$FB = (CH * BA)/HA = (\sqrt{195}) * 5/1 = \sqrt{(195 * 25)} = \sqrt{4875}.$

Esiste un'altra soluzione che coinvolge una diversa proporzione:

$HA : AC = BA : FA$, da cui:

$FA = (AC * BA)/HA = [14 * (10/2)]/1 = 14 * 5 = 70.$

L'altezza FB è data da:

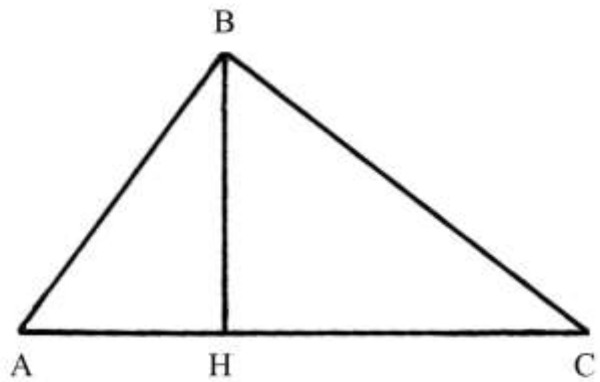
$FB^2 = FA^2 - BA^2 = 70^2 - 5^2 = 4900 - 25 = 4875$ e

$FB = \sqrt{4875}.$

Questa seconda soluzione è assai più semplice di quella di Chuquet e porta allo stesso risultato.

Triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ha area uguale a 20 e le lunghezze dei suoi lati sono in proporzione alla terna 3-4-5.



Il problema domanda le lunghezze e dei lati e quella di un'altezza.

La soluzione che segue è basata su quella di Chuquet con una differenza: l'uso dell'incognita "x" per indicare la lunghezza del lato più corto, quella che è proporzionale a 3 (e che è AB).

$AB = x$

$BC = 4/3 * x$

$BC = 5/3 * x.$

Il perimetro *2 * p* è:

$2 * p = x + 4/3 * x + 5/3 * x = x + 3 * x = 4 * x$

$p = 2 * x$, semiperimetro.

Calcoliamo l'area S con la formula di Erone:

$S = \sqrt{[p * (p - x) * (p - 4/3 * x) * (p - 5/3 * x)]} =$

$= \sqrt{[2 * x * (2 * x - x) * (2 * x - 4/3 * x) * (2 * x - 5/3 * x)]} =$

$= \sqrt{(2 * x * x * 2/3 * x * 1/3 * x)} = \sqrt{(2 * 2/3 * 1/3 * x^4)} = \sqrt{(4/9 * x^4)}$

L'ultima espressione deve essere uguagliata all'area:

$\sqrt{(4/9 * x^4)} = 20$

$4/9 * x^4 = 20^2$

$x^4 = 3600/4$

$x^4 = 900$

$x = \sqrt{\sqrt{900}} = \sqrt{30} = AB$.

AB è lungo $\sqrt{30}$ e gli altri due lati sono lunghi:

$BC = 4/3 * AB = 4/3 * \sqrt{30} = \sqrt{(16/9 * 30)} = \sqrt{(160/3)} = \sqrt{(53 + 1/3)}$;

$AC = 5/3 * AB = 5/3 * \sqrt{30} = \sqrt{(25/9 * 30)} = \sqrt{(250/3)} = \sqrt{(83 + 1/3)}$.

BH è l'altezza relativa alla base AC.

L'area di ABC è data da:

$S_{ABC} = BH * (AC/2) = 20$.

Da questa formula ricaviamo la lunghezza di BH:

$BH = 2 * S_{ABC}/AC = 2 * 20/\sqrt{(83 + 1/3)} = \sqrt{(19 + 1/5)}$.

- APPROFONDIMENTO -

Un triangolo che ha lati lunghi in proporzione alla terna primitiva 3-4-5 è rettangolo.

Verifichiamo se lo è anche ABC.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(\sqrt{250/3})^2 = (\sqrt{30})^2 + (\sqrt{160/3})^2$

$250/3 = 30 + 160/3$

$250/3 = 90/3 + 160/3$

$250/3 = 250/3$.

Anche il triangolo ABC è rettangolo: l'angolo retto è nel vertice B.

Verifichiamo le proporzioni esistenti fra le lunghezze dei lati di ABC:

$AB : 3 = BC : 4 = AC : 5$

$\sqrt{30} : 3 = \sqrt{160/3} : 4 = \sqrt{250/3} : 5$

$\sqrt{3} * \sqrt{10} : 3 = \sqrt{10} * 4/\sqrt{3} : 4 = 5 * \sqrt{10}/\sqrt{3} : 5$

$\sqrt{3} : 3 = 4/\sqrt{3} : 4 = 5/\sqrt{3} : 5$

Moltiplicando tutti i termini antecedenti per $\sqrt{3}$, si ha:

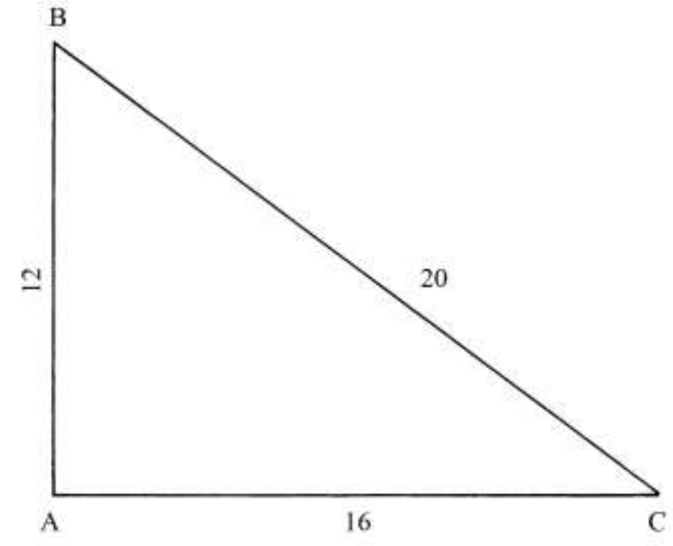
$3 : 3 = 4 : 4 = 5 : 5$.

- -

Triangolo 12-16-20

Un triangolo ha lati lunghi 12, 16 e 20.

Il problema chiede di verificare se il triangolo è *retto*.



La soluzione proposta da Chuquet è:

* moltiplicare per sé stesse le lunghezze dei tre lati:
  $AB^2 = 12 * 12 = 144$,
  $AC^2 = 16 * 16 = 256$,
  $BC^2 = 20 * 20 = 400$;
* sommare i quadrati delle lunghezze dei due lati più corti, AB e AC: $144 + 256 = 400$;
* dato che questa somma è uguale al quadrato della lunghezza di BC, il triangolo è *rettangolo*.

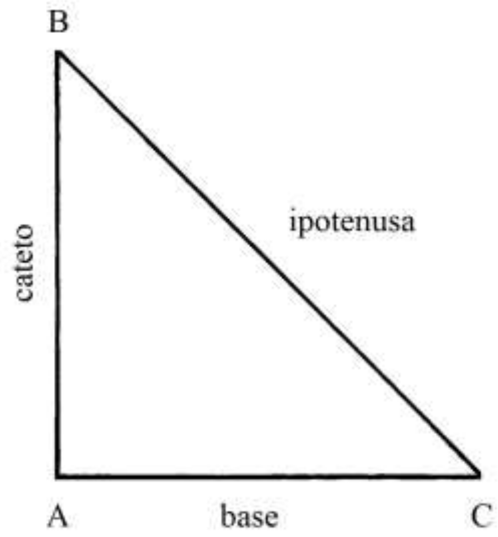
L'angolo retto è quello definito dall'incontro dei due lati consecutivi più corti, i cateti AB e AC: nella figura è retto l'angolo nel vertice A.

Le lunghezze dei lati di ABC formano la terna derivata 12-16-20 che proviene dalla terna primitiva 3-4-5 le cui lunghezze sono moltiplicate per 4.

Triangolo rettangolo isoscele

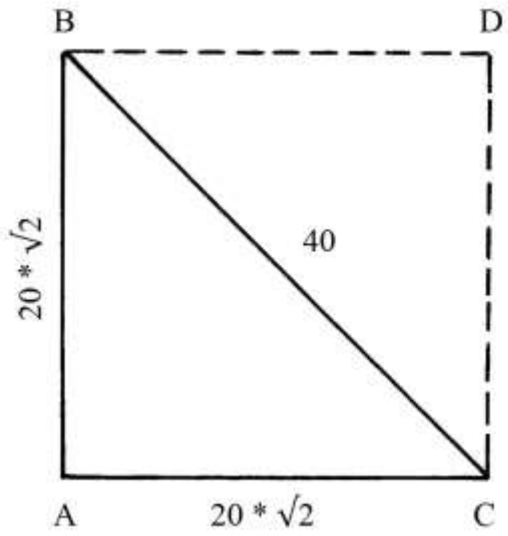
Questo problema è il primo di una serie di quattro, tutti caratterizzati dall'avere l'ipotenusa lunga 40.

Il primo problema presenta un triangolo che è anche isoscele perché i suoi cateti hanno uguale lunghezza. I successivi tre problemi descrivono triangoli rettangoli scaleni.



Chuquet chiama *cateto* solo quello verticale, AB, e *base* quello orizzontale, AC. BC è l'ipotenusa.

Il triangolo oggetto di questo problema è metà di un quadrato di lati AB e BC: esso proviene dal quadrato ABDC dal quale è asportata metà che è tagliata lungo la diagonale BC.



La soluzione del problema data da Chuquet è:

* moltiplicare la lunghezza dell'ipotenusa BC per sé stessa: $40 * 40 = 1600$;
* dividere per 2: $1600/2 = 800$ [è l'area del quadrato ABDC];
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{800}$, lunghezza dei lati del quadrato ABDC e dei due cateti AB e AC.

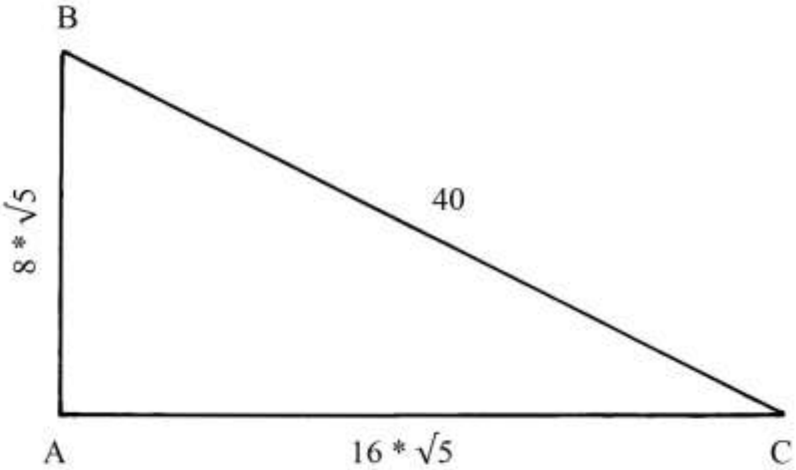
È opportuno notare che, come fa spesso, Chuquet non semplifica i risultati dei calcoli. Infatti $\sqrt{800}$ può essere resa più comprensibile:

$$\sqrt{800} = \sqrt{(400 * 2)} = 20 * \sqrt{2}.$$

<u>Triangolo rettangolo scaleno</u>

Un triangolo rettangolo ha ipotenusa lunga 40.

Il cateto orizzontale, la *base*, è lungo il doppio del cateto verticale.
Il problema chiede le lunghezze dei due cateti.



La soluzione richiede l'algebra elementare: la lunghezza di AB è "x":

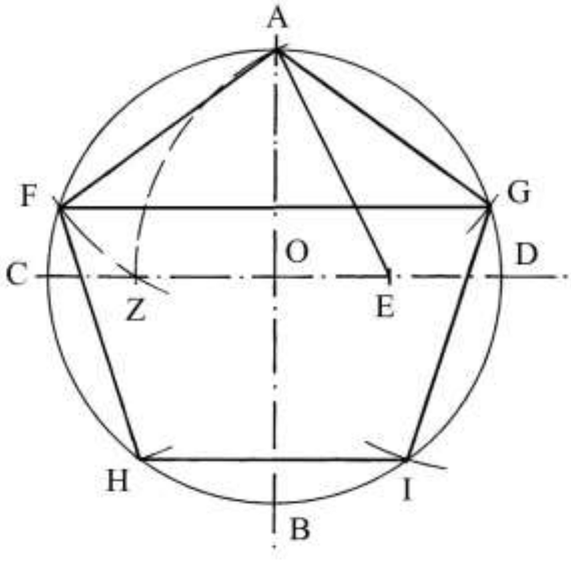
$AB = x$
$AC = 2 * AB = 2 * x.$
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = x^2 + (2 * x)^2$
$40^2 = 5 * x^2$
$x^2 = 1600/5$
$x^2 = 320$
$x = \sqrt{320} = 8 * \sqrt{5} = AB.$

AC è lungo:

$AC = 2 * AB = 2 * 8 * \sqrt{5} = 16 * \sqrt{5}.$

- APPROFONDIMENTO -

Il precedente triangolo è coinvolto nella costruzione del pentagono regolare inscritto in un cerchio.



Il poligono è inscritto nel cerchio di centro O e diametri AB e CD e raggio *r*; AOE è un triangolo rettangolo che ha lati lunghi secondo le seguenti proporzioni:

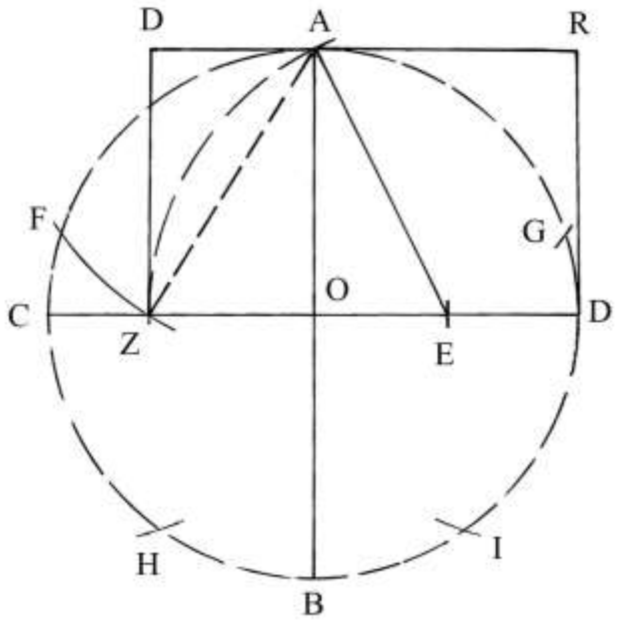
* OA = r;
* OE = r/2;
* AE = $\sqrt{}(OA^2 + OE^2) = \sqrt{}[r^2 + (r/2)^2] = \sqrt{}(r^2 + r^2/4) = r * (\sqrt{}5/4) = r * (\sqrt{}5)/2$.

Il triangolo AOE è pure coinvolto nella costruzione della *sezione aurea*.

In un pentagono regolare il rapporto fra la lunghezza di una diagonale e quella di un lato è uguale a Φ:

FG/AH ≈ 1,618 = Φ, che è la *sezione aurea*.

Lo schema che segue riproduce in parte la precedente costruzione del pentagono regolare inscritto:



AODR è un quadrato costruito sul raggio OD = r. E è il punto medio di OD:

OE = ED = r/2.

AE è lungo: AE = r/2 * √5.

Il segmento ZE è lungo quanto AE.

Su ZD è costruito il rettangolo ZSRD.

La lunghezza di ZD è:

ZD = ZE + ED = AE + ED = r/2 * √5 + r/2 = r * (√5 + 1)/2 = r * Φ.

Infatti: (√5 + 1)/2 ≈ 1,618… = Φ.

Il rettangolo ZSRD ha lati lunghi:

* ZD = r * (√5 + 1)/2;
* ZS = r.

Il rapporto fra le lunghezze di questi lati è:

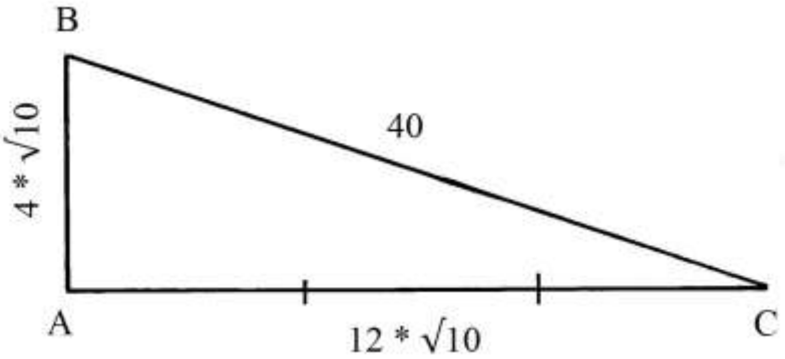
ZD/ZS = [r * (√5 + 1)/2]/r = (√5 + 1)/2 = Φ.

ZSRD è un *rettangolo aureo*.

- -

Un altro triangolo rettangolo scaleno

Un triangolo rettangolo scaleno ha l'ipotenusa con la solita lunghezza di 40.
La base è lunga *tre* volte il cateto verticale.



Sono domandate le lunghezze dei due cateti.
La soluzione è: indichiamo con "x" la lunghezza di AB.
AC è lungo 3 volte AB:

$AC = 3 * x.$

Quindi si ha:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$40^2 = x^2 + (3 * x)^2$
$1600 = x^2 + 9 * x^2$
$x^2 = 1600/10 = 160$
$x = \sqrt{160} = 4 * \sqrt{10}.$

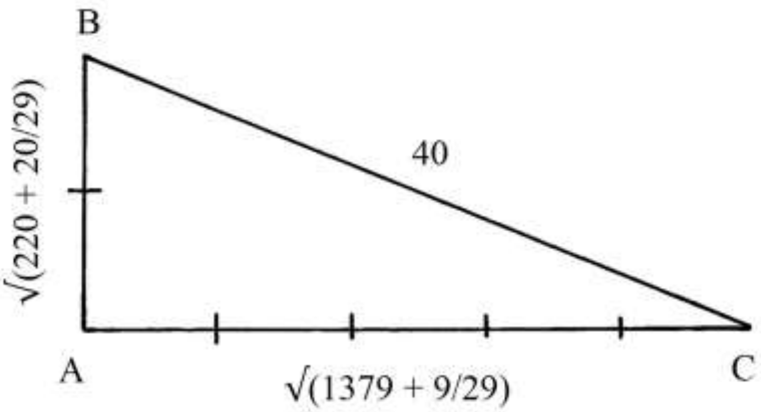
Ne consegue:

$AC = 3 * AB = 3 * 4 * \sqrt{10} = 12 * \sqrt{10}.$

Un altro triangolo rettangolo con ipotenusa lunga 40

Il quarto triangolo (isoscele o scaleno) con ipotenusa lunga 40, ha le lunghezze dei cateti in proporzione:

$AB : 2 = AC : 5.$



Come al solito, il problema chiede le lunghezze dei due cateti.
AB ha lunghezza incognita "x":

$AB = x.$

La lunghezza di AC è:

$AC = 5/2 * AB = 5/2 * x.$

La lunghezza dell'ipotenusa è data da:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$40^2 = x^2 + (5/2 * x)^2$

$1600 = x^2 + 25/4 * x^2$

$1600 = 29/4 * x^2$ da cui

$x = \sqrt{(1600 * 4/29)} = \sqrt{(6400/29)} = \sqrt{(220 + 20/29)}$.

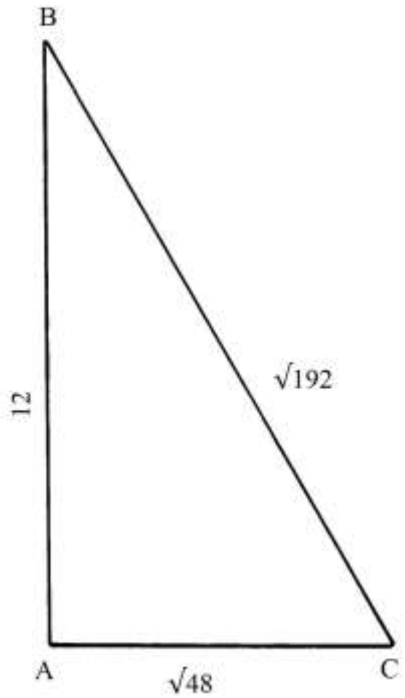
La lunghezza di AC è:

$AC = 5/2 * AB = 5/2 * \sqrt{(220 + 20/29)} = \sqrt{(25 * 6400/4 * 29)} = \sqrt{(25 * 1600/29)} =$
$= \sqrt{(1379 + 9/29)}$.

Riteniamo opportuno segnalare l'inutile complicazione che questi dati numerici comportano.

<u>Altro triangolo rettangolo scaleno</u>

Un triangolo rettangolo ha il cateto verticale lungo 12 e l'ipotenusa è lunga il doppio della base.



Attribuendo alla base AC il valore "x" si ha:

$BC = 2 * AC = 2 * x$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$(2 * x)^2 = 12^2 + x^2$

$4 * x^2 – x^2 = 144$

$3 * x^2 = 144$

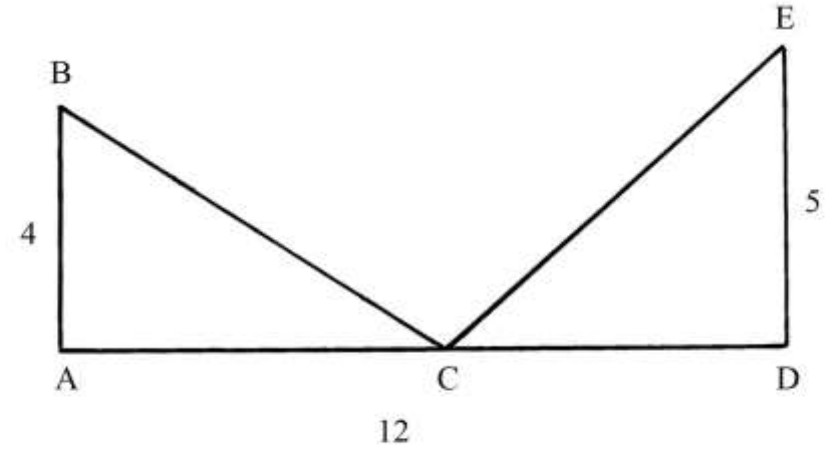
$x^2 = 144/3 = 48$ e

$x = \sqrt{48}$.

BC è lunga: $BC = 2 * AC = 2 * \sqrt{48} = \sqrt{(4 * 48)} = \sqrt{192}$.

Due triangoli rettangoli

Due triangoli rettangoli hanno le basi giacenti sulla stessa retta e un vertice, C, su di essa è in comune.



I cateti verticali sono lunghi:

* AB = 4;
* DE = 5.

Le due ipotenuse hanno lunghezze uguali: BC = CE,

Infine, la somma delle lunghezze dei cateti orizzontali è 12:

AC + CD = AD = 12.

La soluzione può essere ottenuta facendo ricorso all'algebra elementare e assegnando alla lunghezza del cateto AC il valore dell'incognita "x":

$AC = x$

$CD = AD – AC = 12 – x$.

Le lunghezze delle ipotenuse sono:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 4^2 + x^2$

$CE^2 = DE^2 + CD^2$

$CE^2 = 5^2 + (12 – x)^2$

Dato BC e CE hanno uguali lunghezze lo sono anche i loro quadrati:

$BC^2 = CE^2$

$4^2 + x^2 = 5^2 + (12 – x)^2$

$16 + x^2 = 25 + 144 – 24 * x + x^2$

$24 * x = 153$

$x = 153/24 = (6 + 3/8) = AC$.

CD è lungo:

$CD = CD = AD – AC = 12 – (6 + 3/8) = (5 + 5/8)$.

L'ipotenusa BC è lunga:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 4^2 + (6 + 3/8)^2$

$BC^2 = 16 + (6 + 3/8)^2$

$BC^2 = (56 + 41/64)$

$BC = \sqrt{(56 + 41/64)} = CE$.

- APPROFONDIMENTO -

Problemi simili a questo sono presenti in numerosi trattati d'abaco, cronologicamente anteriori al testo di Chuquet. I problemi spesso presentano il caso di due colombi posati su due torri distinte (qui rappresentate da BA e da ED) che volano verso una fonte collocata nel piano in C: essi la raggiungono contemporaneamente così da stabilire l'uguaglianza delle lunghezze dei percorsi che essi compiono:

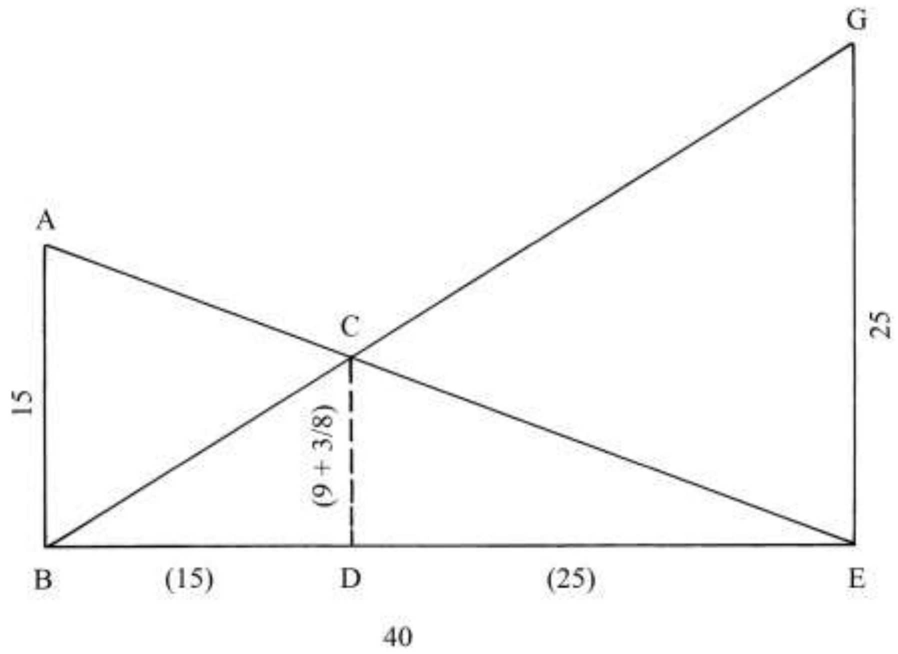
DC = CE.

In quei trattati le lunghezze sono quasi sempre espresse con numeri interi o razionali e non irrazionali come fa Chuquet.

- -

<u>Due triangoli rettangoli che si intersecano</u>

Due triangoli rettangoli hanno il cateto orizzontale in comune.
Le lunghezze dei cateti sono scritte sullo schema.
Il problema chiede la lunghezza del segmento CD.



La soluzione è qui ottenuta assegnando alla lunghezza di BD il valore dell'incognita "x". DE è lungo:

DE = BE – BD = 40 – x.

I triangoli BGE e BCD sono simili per cui si ha:

CD : BD = EG : BE   da cui

CD = (BD * EG)/BE = x * 25/40.

A loro volta, i triangoli ABE e CDE sono simili e vale la seguente proporzione:

CD : DE = AB : BE   da cui:

CD = (DE * AB)/BE = (40 – x) * 15/40.

Le due espressioni di CD devono essere uguagliate:

x * 25/40 = (40 – x) * 15/40

25 * x = (40 – x) * 15

25 * x = 400 – 15 * x

40 * x = 600
x = 600/40 = 15 = BD
DE = BE – BD = 40 – 15 = 25.

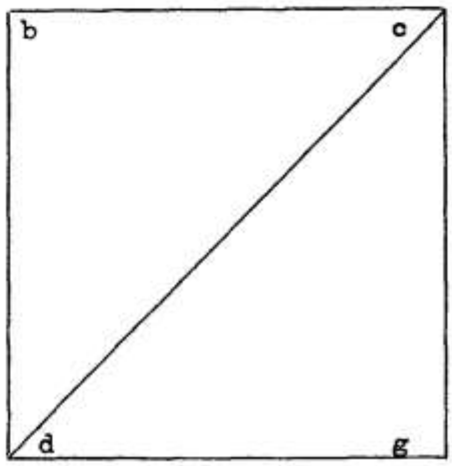
Riprendiamo la prima proporzione:
CD : BD = EG : BE   da cui
CD = (BD * EG)/BE = (15 *25)/40 = (9 + 3/8).

PROBLEMI SUI QUADRILATERI

Diagonale di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 6.
Il problema chiede la lunghezza della diagonale DC (il “diametro” secondo Chuquet).
Lo schema qui sotto è riprodotto da p. 245 dell’edizione a stampa.
Le caratteristiche della figura sono:

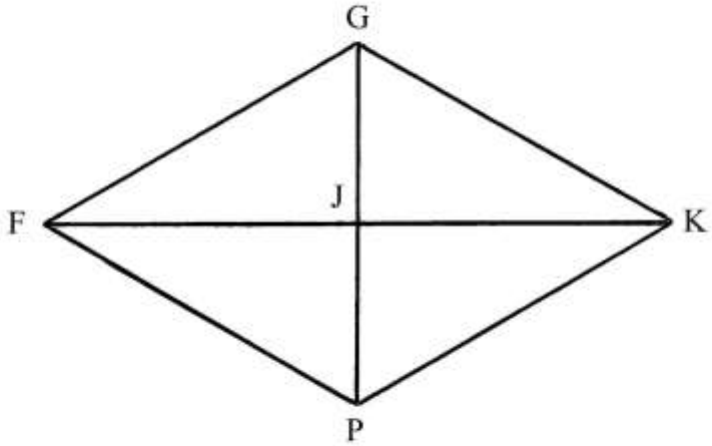
* le lettere sono minuscole;
* sono scritte all’interno del quadrato;
* le letture usate – b, c, g e d – non sembrano seguire alcun ordine.



La lunghezza della diagonale DC è data da:
DC = $\sqrt{(DG^2 + GC^2)} = \sqrt{(6^2 + 6^2)} = \sqrt{(36 + 72)} = \sqrt{72}$ [= 6 * $\sqrt{2}$].

Un rombo

Un rombo ha lati lunghi 6 e la diagonale minore GP è anch’essa lunga 6.



Il problema chiede la lunghezza della diagonale maggiore FK.

Ovvie considerazioni portano a concludere che il rombo è formato da due triangoli equilateri, FGP e GPK, uniti lungo il comune lato GP che funge da diagonale minore del rombo.

Le altezze FJ e JK sono entrambe lunghe metà della diagonale maggiore FK.

FJ è lunga:

$FJ^2 = FG^2 – GJ^2 = 6^2 – (6/2)^2 = 36 – 9 = 27$ e

$FJ = \sqrt{27}$.

La diagonale FK è lunga il doppio di FJ:

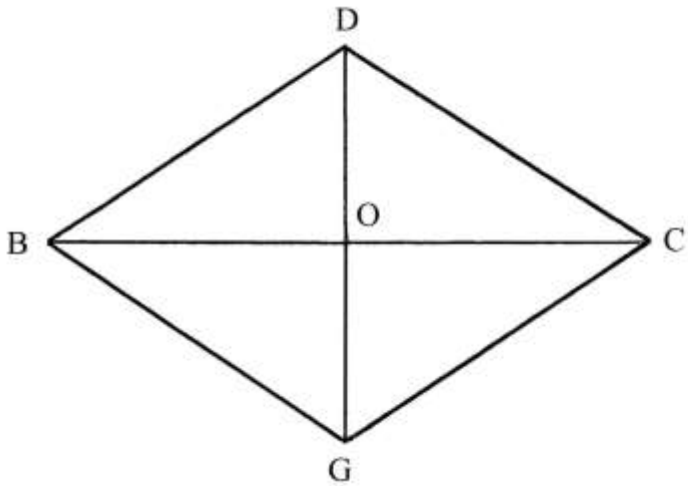
$FK = 2 * FJ = 2 * \sqrt{27} = \sqrt{(4 * 27)} = \sqrt{108}$.

L'area del rombo è correttamente calcolata da Chuquet:

$S_{ROMBO} = (FK * GP)/2 = (\sqrt{108} * 6)/2 = (\sqrt{108}) * 3 = \sqrt{(108 * 9)} = \sqrt{972}$.

Un altro rombo

Un rombo ha i lati lunghi 6 e la diagonale maggiore BC è 10.



Il problema domanda la lunghezza della diagonale minore, DG, e l'area del quadrilatero.

La lunghezza della semidiagonale DO è:

$DO^2 = BD^2 – BO^2 = BD^2 – (BC/2)^2 = 6^2 – (10/2)^2 = 36 – 25 = 11$ e

$DO = \sqrt{11}$.

La diagonale DG è lunga il doppio di DO:

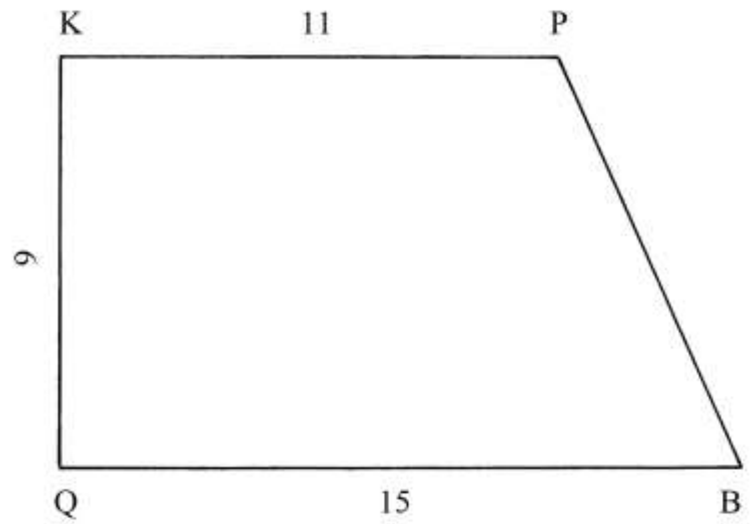
$DG = 2 * \sqrt{11} = \sqrt{(4 * 11)} = \sqrt{44}$.

L'area del rombo è:

$S_{ROMBO} = (BC * DG)/2 = (10 * \sqrt{44})/2 = 5 * \sqrt{44} = \sqrt{(25 * 44)} = \sqrt{1100}$.

Un trapezio rettangolo

Un trapezio rettangolo ha basi lunghe 11 e 15 e altezza uguale a 9.

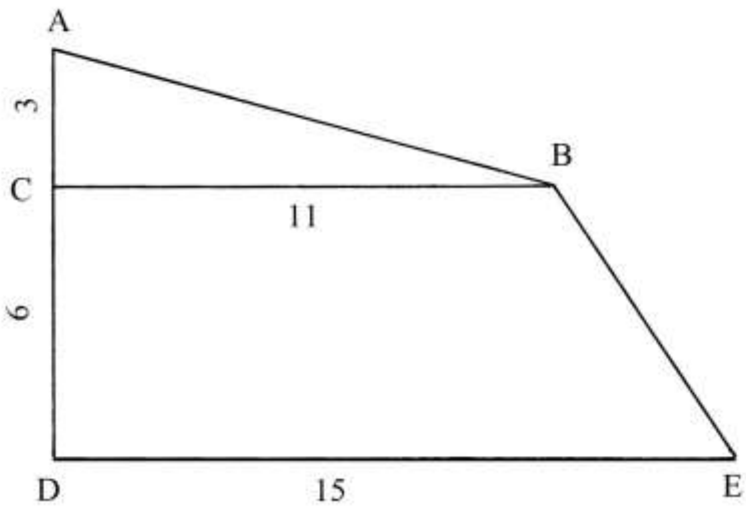


È chiesta la sua area.
L'area è data dal prodotto della semisomma delle basi per l'altezza:

$S = [(KP + QB)/2] * KQ = [(11 + 15)/2] * 9 = 13 * 9 = 117$.

Area di un quadrilatero

ABED è un quadrilatero di cui deve essere calcolata l'area. Esso possiede un angolo retto in D.



Il poligono viene scomposto in due figure:

* il triangolo rettangolo ABC;
* il trapezio rettangolo CBED.

La scomposizione è necessaria per poter ricavare l'area.
La superficie di ABC è:

S_{ABC} = (AC * CB)/2 = 3 * 11)/2 = 33/2 = 16,5.

L'area di CBED è:

S_{CBED} = [(CB + DE)/2] * CD = [(11 + 15)/2] * 6 = (26/2) * 6 = 78.

L'area totale è:

$S_{ABED} = S_{ABC} + S_{CBED}$ = 16,5 + 78 = 94,5.

Area di un trapezio

ABPC è un trapezio isoscele. Le basi sono lunghe 10 e 6 e i due lati obliqui sono lunghi 14.
Deve essere calcolata la sua area.
Occorre determinare la lunghezza di AD, che è l'altezza del quadrilatero.
CD è lungo:

CD = (CP – AB)/2 = (10 – 6)/2 = 2.

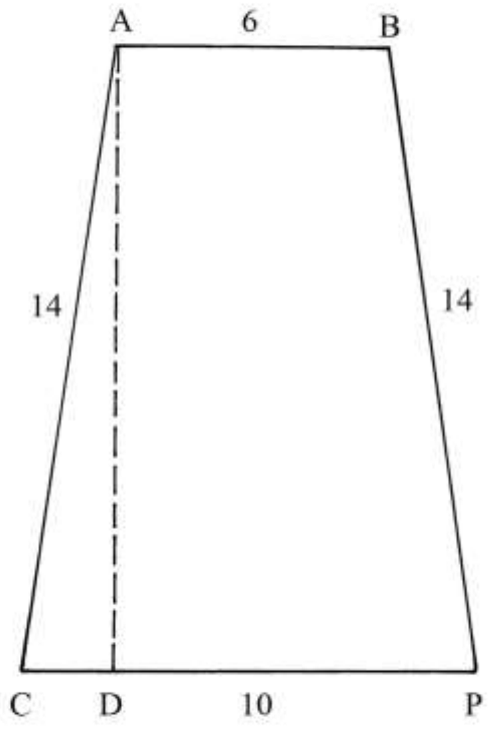
CAD è un triangolo rettangolo e la lunghezza del cateto AD è:

$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 14^2 - 2^2 = 196 - 4 = 192$ e

$AD = \sqrt{192}$ [$= 8 * \sqrt{3}$].

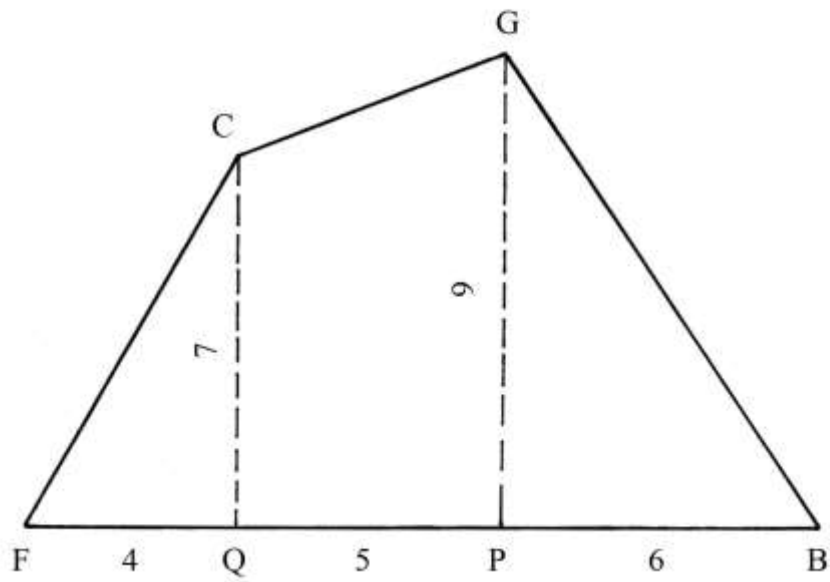
L'area del trapezio è data da:

S_{ABPC} = [(AB + CP)/2 * AD = [(6 + 10)/2] * 8 * $\sqrt{3}$ = 64 * $\sqrt{3}$.



Quadrilatero irregolare

Un quadrilatero è privo di angoli retti.



Per misurare la sua area esso viene scomposto in tre poligoni, tracciando due segmenti perpendicolari alla base FB, CQ e GP:

* il triangolo rettangolo FCQ;
* il trapezio rettangolo QCGP;
* il triangolo rettangolo PGB.

Le lunghezze dei lati dei tre poligoni sono riportate sullo schema.

Le aree delle tre figure sono:

$S_{FCQ} = (FQ * QC)/2 = (4 * 7)/2 = 14;$

$S_{QCGP} = [(QC + PG)/2] * QP = [(7 + 9)/2] * 5 = 40;$

$S_{PGB} = (PB * GP)/2 = (6 * 9)/2 = 27.$

L'area di FCGB è uguale alla somma delle aree dei tre poligoni:

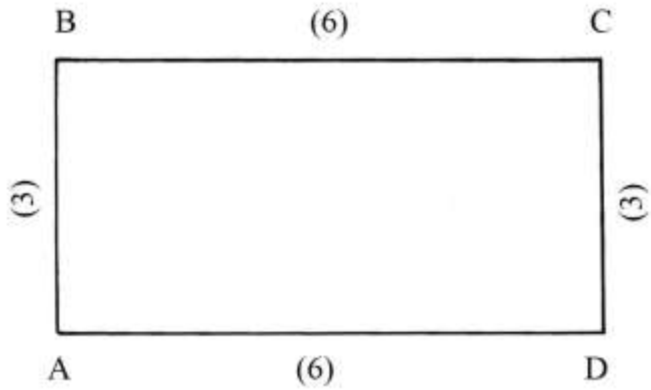
$S_{FCGB} = S_{FCQ} + S_{GCGP} + S_{PGB} = 14 + 40 + 27 = 81.$

<u>Rettangolo data l'area</u>

Un rettangolo ha area uguale a 18.

La lunghezza è il doppio della larghezza:

AD = 2 * AB.



Se AB è la lunghezza incognita "x" , la lunghezza di AD è:

AD = 2 * x.

L’area di ABCD è data da:

$S_{ABCD} = AB * AD = x * (2 * x) = 2 * x^2$.

L’area è 18, quindi si ha:

$18 = 2 * x^2$

$9 = x^2$

$x = \sqrt{9} = 3 = AB$.

La lunghezza di AD è:

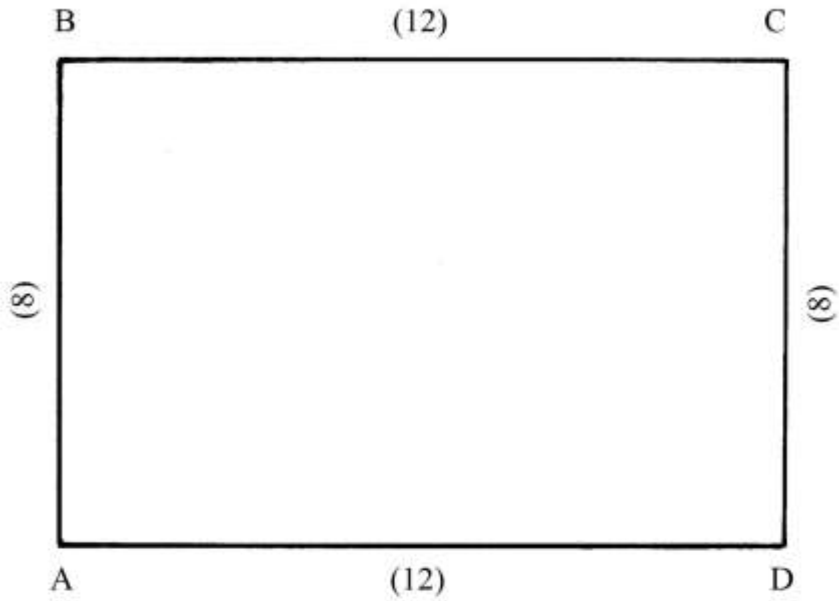
$AD = 2 * AB = 2 * 3 = 6$.

<u>Rettangolo data l’area</u>

Un rettangolo ha area uguale a 96.

Le lunghezze dei lati sono in proporzione *sesquialtera* e cioè:

lunghezza : larghezza = 3 : 2.



Fissiamo per la lunghezza di AB il valore incognito: AB = x, quindi si ha:

$AD = 3/2 * x$.

L’area è data da:

$S_{ABCD} = AB * AD = x * 3/2 * x = 3/2 * x^2$.

Ma l’area è 96 e uguagliando si ottiene:

$3/2 * x^2 = 96$

$x^2 = 2/3 * 96$

$x^2 = 64$ e

$x = 8 = AB = CD$.

AD è lungo:

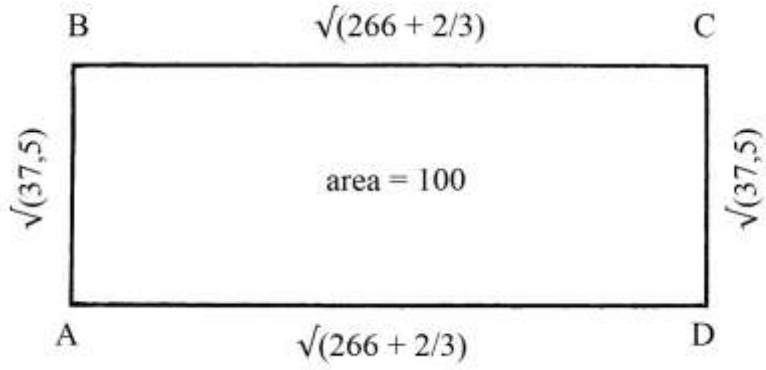
$AD = 3/2 * 8 = 12$.

Verifichiamo:

$S_{ABCD} = 8 * 12 = 96$.

Un rettangolo con lati in proporzione “3 : 8”

Un rettangolo ha area uguale a 100 e le lunghezze dei suoi lati stanno in proporzione 3 a 8.



AB ha lunghezza incognita: $AB = x$.

AD è lungo 8/3 di AB: $AD = 8/3 * x$.

L’area del rettangolo è:

$S_{ABCD} = AB * AD = x * (8/3 * x) = 8/3 * x^2$.

Uguagliamo con il valore dell’area:

$8/3 * x^2 = 100$

$x^2 = 100 * 3/8 = 300/8 = 37{,}5$

$x = \sqrt{(300/8)} = \sqrt{(37{,}5)} = AB = CD$.

La lunghezza di AD (e di BC) è:

$AD = x * 8/3 = \sqrt{(37{,}5)} * 8/3 = \sqrt{(300/8 * 64/9)} = \sqrt{(800/3)} = \sqrt{(266 + 2/3)}$.

Verifichiamo i risultati:

$S_{ABCD} = 8/3 * x^2 = 8/3 * (\sqrt{300/8})^2 = 8/3 * 300/8 = 100$.

I risultati sono corretti.

- APPROFONDIMENTO -

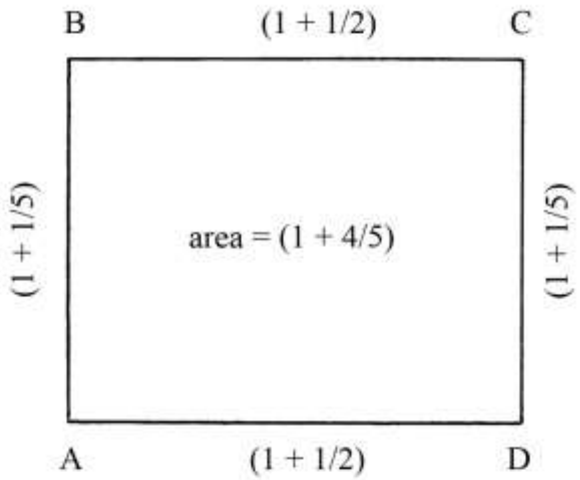
La procedura usata da Chuquet è così interpretata:

* larghezza [AB] proporzionale a 3;
* lunghezza [AD] proporzionale a 8;
* moltiplicare 3 per 8: $3 * 8 = 24$;
* dividere l’area per 24: $100/24 = (4 + 1/6)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(4 + 1/6)}$;
* moltiplicare per 3: $\sqrt{(4 + 1/6)} * 3 = \sqrt{(37{,}5)}$ [lunghezza di AB];
* moltiplicare $\sqrt{(4 + 1/6)}$ per 8: $\sqrt{(4 + 1/6)} * 8 = \sqrt{[(4 + 1/6) * 64]} = \sqrt{(266 + 2/3)}$ [lunghezza di AD].

- -

Rettangolo con lati e area in proporzione

Un rettangolo ha larghezza, lunghezza e area rispettivamente in proporzione a 4, 5 e 6.



AB : 4 = AD : 5 = S_{ABCD} : 6.

Il problema chiede le lunghezze dei lati e l'area.

Diversamente da Chuquet, risolviamo il problema con semplici regole algebriche. Fissiamo per AB il valore incognito AB = 4 * x.

Ne consegue: AD = 5 * x e

S_{ABCD} = AB * AD = (4 * x) * (5 * x) = 20 * x^2.

Ma l'area è anche uguale a "6 * x":

20 * x^2 = 6 * x

20 * x = 6

x = 6/20 = 3/10.

Ne risulta:

* AB = 4 * 3/10 = = 12/10 = 6/5 = (1 + 1/5);
* AD = 5 * 3/10 = 15/10 = 3/2 = (1 + ½);
* S_{ABCD} = 6 * 3/10 = 18/10 = (1 + 4/5).

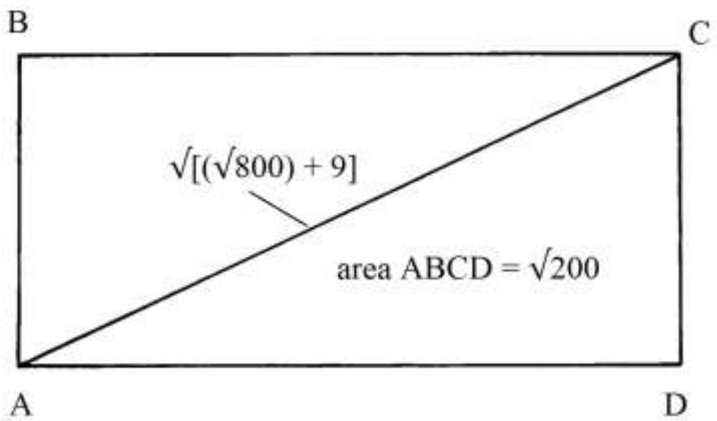
Verifichiamo il risultato:

S_{ABCD} = AB * AD = (1 + 1/5) * (1 + ½) = 18/10 = (1 + 4/5).

<u>Diagonale di un rettangolo</u>

Un rettangolo ha area uguale a √200. La lunghezza eccede la larghezza di 3:

AD = AB + 3.



Il problema chiede la lunghezza della diagonale AC.

La soluzione può essere ottenuta per via algebrica:

$AB = x$ e $AD = AB + 3 = x + 3$.

L'area del rettangolo è:

$S_{ABCD} = AB * AD = x * (x + 3) = x^2 + 3 * x$.

Essa è uguale a:

$S_{ABCD} = \sqrt{200} = (x^2 + 3 * x)$.

Con una serie di complessi calcoli che coinvolgono radici quarte, qui non riprodotti, Chuquet offre la soluzione:

$AC = \sqrt{[(\sqrt{800}) + 9]}$.

Nota: lo schema qui sopra rispetta le proporzioni esistenti fra le lunghezze dei lati e quella della diagonale AC.

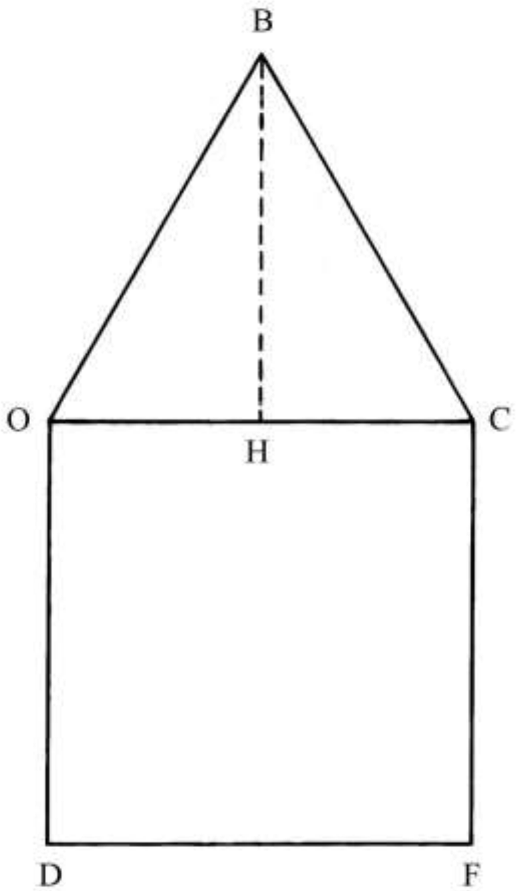
PROBLEMI SUI POLIGONI

Un pentagono equilatero non regolare

Il pentagono BCFDO è *equilatero*, perché ha tutti i lati di uguale lunghezza (che è 8), ma non è *equiangolo* perché i suoi angoli hanno differenti ampiezze: non è regolare.

Nei vertici D e F gli angoli sono retti.

Il problema chiede l'area del poligono.



La corda OC lo divide in due poligoni regolari:

* il triangolo equilatero OBC;
* il quadrato DOCF.

L'area del triangolo equilatero può essere calcolata con la formula di Erone:

* perimetro $2 * p = 3 * 8 = 24$;
* semiperimetro $p = 12$;

$S_{OBC} = \sqrt{[12 * (12 – 8) * (12 – 8) * (12 – 8)]} = \sqrt{(12 * 4^3)} = \sqrt{(12 * 64)} = \sqrt{768} =$
$= \sqrt{(3 * 2^2 * 8^2)} = 16 * \sqrt{3}$.

L'area del quadrato DOCF è:

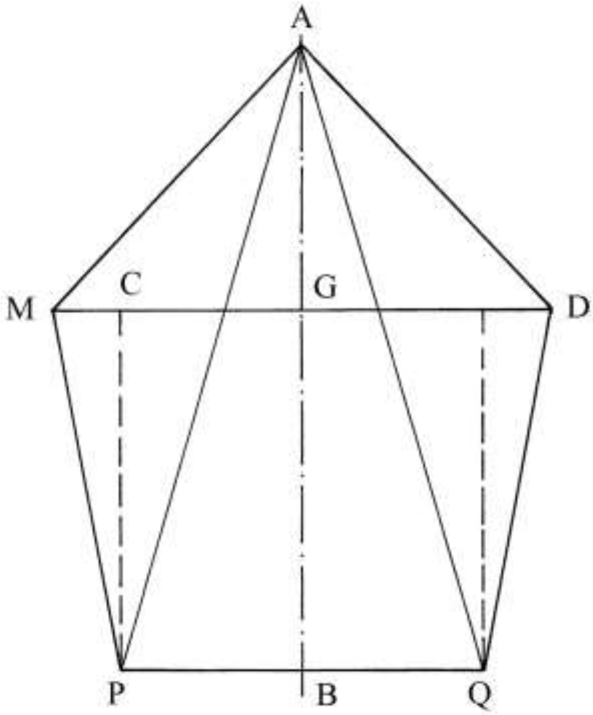
$S_{DOCF} = 8^2 = 64$.

L'area del pentagono è data dalla somma delle aree dei due poligoni:

$S_{BCFDO} = S_{OBC} + S_{DOCF} = (16 * \sqrt{3} + 64)$.

Un altro pentagono equilatero

Un pentagono è equilatero ma non equiangolo: i suoi lati sono lunghi 8 e una diagonale, MD, è lunga 11.



La diagonale MD scompone il pentagono in due poligoni:

* il triangolo isoscele MAD;
* il trapezio isoscele MDQP.

AG è un'altezza del triangolo MAD:

$AG^2 = AM2 – MG^2 = AM^2 – (MD/2)^2 = 8^2 – (11/2)^2 = 64 – (30 + ¼) =$
$= (33 + ¾)$ e
$AG = \sqrt{(33 + ¾)}$.

L'area di MAD è:

$S_{MAD} = MD * AG/2 = 11 * \sqrt{(33 + ¾)}/2 = \sqrt{[(33 + ¾) * 5,5^2]} = \sqrt{(1020 + 15/16)}$.

Per calcolare l'area di MDQP occorre ricavare la lunghezza di CP che è uguale a quella di GB.

MC è lungo:

$MC = MG – CG = 11/2 – 8/2 = 5,5 – 4 = 1,5$.
$CP^2 = MP^2 – MC^2 = 8^2 – 1,5^2 = 64 – 2,25 = 61,75$ e
$CP = \sqrt{61,75}$.

AB è lungo:

$AB = AG + GB = \sqrt{(33 + 3/4)} + \sqrt{61,75}$.

L'area di MDQP è:

$S_{MDQP} = [(MD + PQ)/2] * CP = [(11 + 8)/2] * \sqrt{61,75} = 9,5 * \sqrt{61,75} =$
$= \sqrt{(5572 + 15/16)}$.

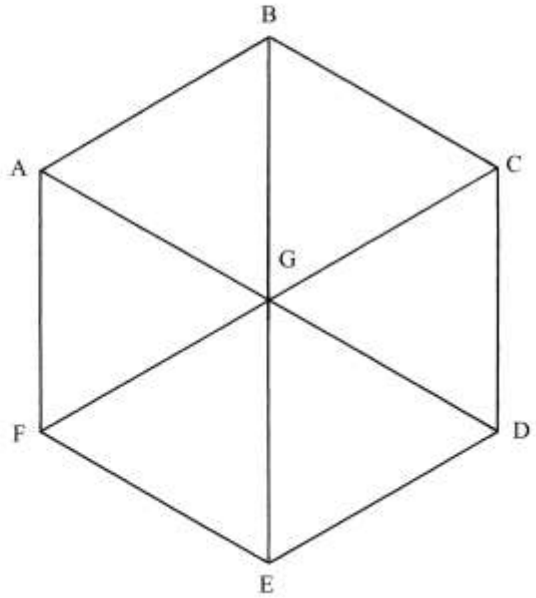
L'area dell'intero poligono è:

$S_{MDPQ} = S_{MAD} + S_{MDQP} = \sqrt{(1020 + 15/16)} + \sqrt{(5572 + 15/16)}$.

Esagono regolare

ABCDEF è un esagono regolare che ha lati lunghi 8. Esso è scomposto in *sei* triangoli equilateri identici.

Il problema chiede la sua area: Chuquet fornisce l'area di un triangolo equilatero: √768.



Vediamo di ricostruire l'origine del dato dell'area: con buona probabilità, Chuquet ha utilizzato la formula di Erone. Il perimetro *2 * p* di un triangolo equilatero è:

$2 * p = 8 * 3 = 24$ e il semiperimetro *p* è 12.

L'area è data da:

$S_{TRIANGOLO} = \sqrt{[12 * (12 – 8) * (12 – 8) * (12 – 8)]} = \sqrt{[12 * (12 – 8)^3]} =$
$= \sqrt{(12 * 4^3)} = \sqrt{768}$ [$= 16 * \sqrt{3}$].

L'area dell'intero esagono è:

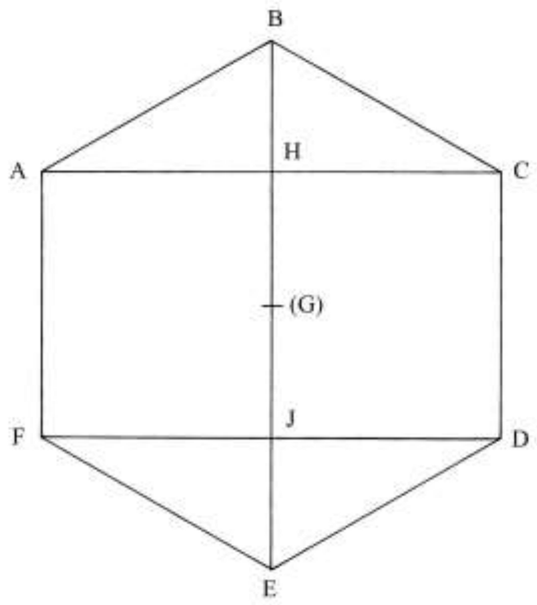
$S_{ESAGONO} = 6 * S_{TRIANGOLO} = 6 * 16 * \sqrt{3} = 96 * \sqrt{3}$.

Chuquet non semplifica i dati e fornisce i dati che seguono (peraltro corretti):

$S_{TRIANGOLO} = \sqrt{768}$ e
$S_{ESAGONO} = \sqrt{27648}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet offre una seconda soluzione per il calcolo dell'area di questo esagono:



Sono disegnate due diagonali parallele: AC e FD.
BE è lungo il doppio di un lato: BE = 16.
Occorre determinare la lunghezza dei segmenti BH e JE (che sono uguali):

$BH + JE = BE - HJ = BE - AF = 16 - 8 = 8$ e

$BH = JE = 8/2 = 4$.

La lunghezza di AH è:

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$ e

$AH = \sqrt{48}$ [$= 4 * \sqrt{3}$].

AC è lungo il doppio di AH:

$AC = 2 * AH = 2 * (4 * \sqrt{3}) = 8 * \sqrt{3}$.

L'area del triangolo ABC è:

$S_{ABC} = AH * BH = (4 * \sqrt{3}) * 4 = 16 * \sqrt{3}$.

L'area di FED è uguale a quella di ABC.
L'area del rettangolo ACDF è:

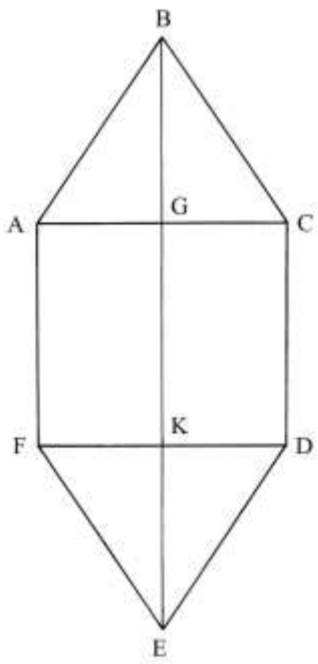
$S_{ADCF} = AC * AF = (8 * \sqrt{3}) * 8 = 64 * \sqrt{3}$.

L'area dell'esagono è:

$S_{ESAGONO} = S_{ABC} + S_{FED} + S_{ACDF} = 16 * \sqrt{3} + 16 * \sqrt{3} + 64 * \sqrt{3}. = 96 * \sqrt{3}$.

<u>Esagono equilatero non equiangolo</u>

Un esagono non regolare ha lati lunghi 8: esso è diviso da due diagonali fra loro parallele, AC e FD, lunghe 9.



Il problema chiede la lunghezza della diagonale BE e l'area.
La lunghezza di BE è data da:

$$BE = BG + GK + KE = 2 * BG + GK.$$

GK è lungo quanto AF e CD e cioè 8.
La lunghezza di BG è:

$$BG^2 = AB^2 – AG^2 = AB^2 – (AC/2)^2 = 8^2 – (9/2)^2 = 64 – 20{,}25 = (43 + ¾)$$ e

$$BG = \sqrt{(43 + ¾)}.$$

Ne consegue:

$$BE = 2 * \sqrt{(43 + ¾)} + 8 = \sqrt{175} + 8 = (5 * \sqrt{7} + 8).$$

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = BG * AG = \sqrt{(43 + ¾)} * (9/2) = \sqrt{(43 + ¾)} * (4 + ½).$$

L'area del rettangolo ACDF è:

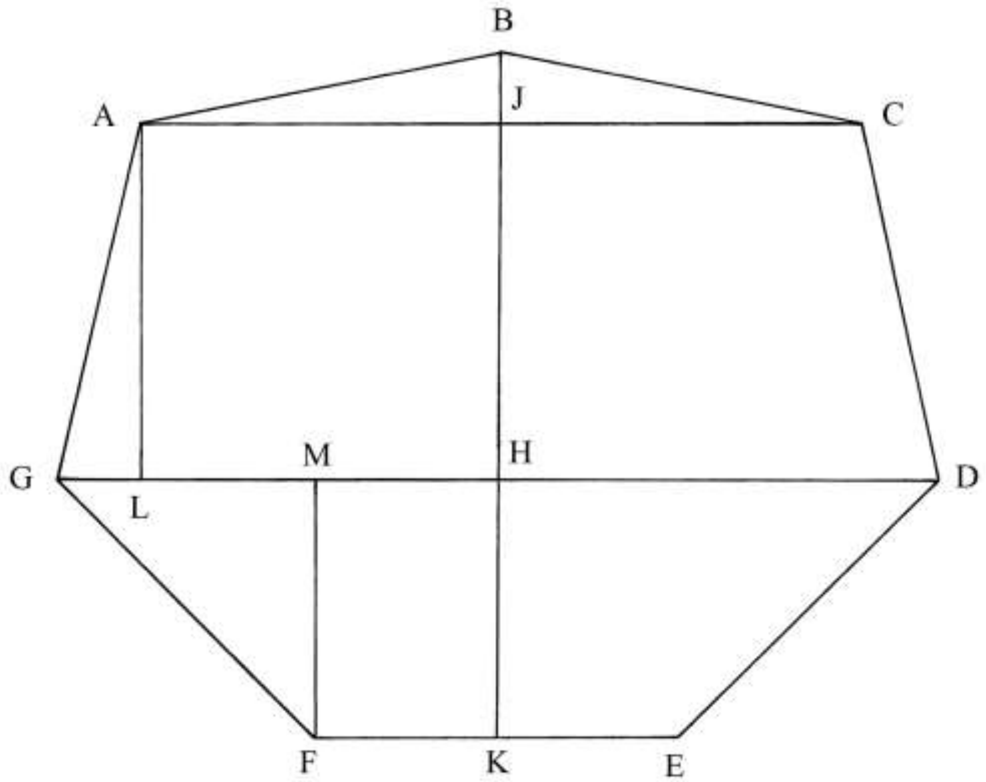
$$S_{ACDF} = AC * AF = 9 * 8 = 72.$$

L'area di ABCDEF è:

$$S_{ABCDEF} = S_{ACDF} + 2 * S_{ABC} = 72 + 2 * \sqrt{(43 + ¾)} * (4 + ½) =$$
$$= 72 + \sqrt{(43 + ¾)} * 9 = 72 + \sqrt{(3543 + ¾)}.$$

<u>Ettagono equilatero</u>

L'ettagono ABCDEFG ha lati di uguale lunghezza, ma non è equiangolo.
Il problema chiede l'area del poligono.



I lati sono lunghi 10.

Nel poligono sono tracciate due diagonali:

* AC che è lunga (19 + ¾);
* GD, lunga (24 + ¼).

Esse dividono l'ettagono in tre poligoni:

* il triangolo isoscele ABC;
* il trapezio isoscele ACDG;
* il trapezio isoscele GDFE.

BJ è un'altezza di ABC ed è lungo:

$BJ^2 = AB^2 – AJ^2 = AB^2 – (AC/2)^2 = 10^2 – [(19 + ¾)/2]^2 = 100 – (9 + 7/8)^2 =$
$= 100 – (97 +33/64) = (2 + 31/64)$ e
$BJ = √(2 + 31/64)$.

L'area di ABC è:

$S_{ABC} = AJ * BJ = [(19 + ¾)/2] * √(2 + 31/64) = √(242 + 1327/4096)$.

JH è lungo quanto AL.

$AL^2 = AG^2 – GL^2$.

A sua volta GL è:

$GL = (GD – AC)/2 = [(24 + ¼) – (19 + ¾)]/2 = (2 + ¼)$.
$AL^2 = 10^2 – (2 + ¼)^2 = (94 + 15/16)$ e
$AL = √(94 + 15/16)$.

L'area del trapezio isoscele ACDG è:

$S_{ACDG} = [(AC + GD)/2] * AL = [(19 + ¾) + (24 + ¼)]/2 * √(94 + 15/16) =$
$= √(45949 + ¾)$.

La lunghezza di FM è uguale a quella di KH ed è data da:

$FM^2 = GF^2 – GM^2$.

GM è:

GM = (GD – FE)/2 = [(24 + ¼) – 10]/2 = (7 + 1/8).

Quindi:

$FM^2 = 10^2 – (7 + 1/8)^2$ = 100 – (50 + 49/64) = (49 + 15/64) e

FM = √(49 + 15/64).

L'area del trapezio isoscele GDEF è:

S_{GDEF} = [(GD + FE)/2 * FM] = [(24 + ¼) + 10]/2 * √(49 + 15/64) =

= √(14484 + 2345/4096).

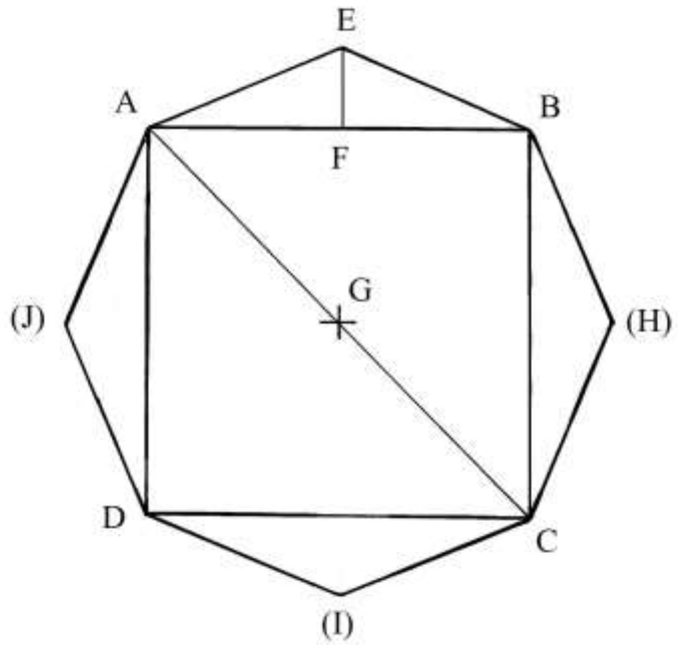
L'area dell'intero ettagono è:

$S_{ABCDEFG} = S_{ABC} + S_{ACDG} + S_{GDEF}$.

Ottagono regolare

Un ottagono regolare ha "*diametro*" (*diagonale maggiore*) AC lunga 20.

Il problema domanda l'area del poligono.



Chuquet propone tre diverse soluzioni: la *prima* è la seguente.

Nell'ottagono è inscritto il quadrato ABCD: AC è una delle sue due diagonali.

Il lato AB è lungo:

AB = √(AC*/2) = $√(20^2/2)$ = √200 [= 10 * √2].

Il segmento AF è lungo la metà di AB:

AF = AB/2 = (√200)/2 = √(200/4) = √50.

EG è lungo la metà della diagonale e cioè 10.

L'altezza EF è:

EF = EG – AD/2 = EC/2 – AD/2 = EC/2 – AB/2 = EC/2 – AF = 10 – √50.

Moltiplicare AB per EF:

AB * EF = √200 * (10 – √50) = 10 * √200 – √10000 = (√20000 – √10000).

L'ultima espressione è il *doppio* dell'area di AEB.

Nella figura sono presenti *quattro* triangoli che hanno dimensioni uguali a quelle di AEB e la loro area totale è il doppio di quella indicata dall'ultima espressione:

$S_{TRIANGOLI}$ = 2 * (√20000 – √10000) = √(4 * 20000) – √((4 * 10000) =

= √80000 – 200.

L’area del quadrato ABCD è:

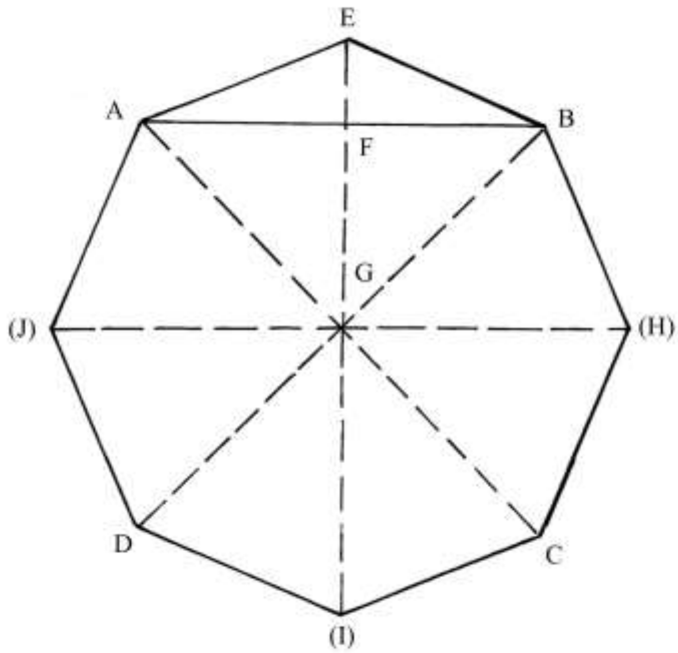
$S_{ABCD} = AB^2 = (\sqrt{200})^2 = 200$.

L’area dell’intero ottagono è:

$S_{OTTAGONO} = (\sqrt{80000} - 200) + 200 = \sqrt{80000}$ [= $200 * \sqrt{2}$].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una *seconda soluzione* prevede la divisione dell’ottagono in otto triangoli isosceli di uguali dimensioni e con un vertice comune in G:



Il triangolo AGE ha i due lati AG e GE lunghi metà della diagonale AC e cioè 10.

Nel triangolo AGE, AF è l’altezza relativa alla base GE. La sua area è:

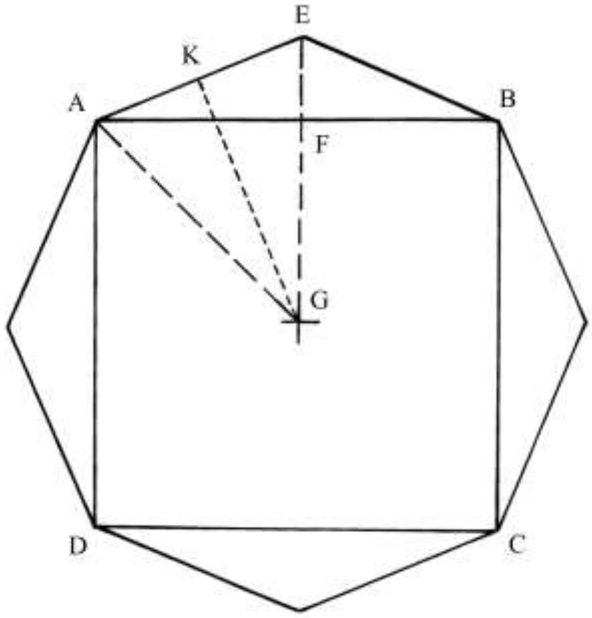
$S_{AGE} = GE * AF/2 = (10 * \sqrt{50})/2 = 5 * \sqrt{50} = \sqrt{1250}$.

L’area dell’intero ottagono è *otto* volte quella di AGE:

$S_{OTTAGONO} = 8 * \sqrt{1250} = \sqrt{(64 * 1250)} = \sqrt{80000} = 200 * \sqrt{2}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La *terza soluzione* calcola l’area di un triangolo isoscele, AEG nell’esempio, utilizzando un metodo differente rispetto a quello impiegato nella seconda soluzione.



GK è l'altezza relativa al lato AE.
GK divide AEG in due triangoli rettangoli: AKG e KGE.
AEF è un triangolo rettangolo di cui AE è l'ipotenusa: la sua lunghezza è data da:

$AE^2 = AF^2 + EF^2 = (\sqrt{50})^2 + (10 + \sqrt{50})^2 = 50 + 100 - 20 * \sqrt{50} + 50 =$
$= (200 - 20 * \sqrt{50})$ e
$AE = \sqrt{(200 - 20 * \sqrt{50})}$.

AK è lungo la metà di AE:

$AK = AE/2 = \sqrt{[(200 - 20 * \sqrt{50})/4]} = \sqrt{(50 - 5 * \sqrt{50})}$.

L'altezza GK è:

$GK^2 = AG^2 - AK^2 = 10^2 - [\sqrt{(50 - 5 * \sqrt{50})}]^2 = 100 - 50 + 5 * \sqrt{50} = (50 + 5 * \sqrt{50})$
e $GK = \sqrt{(50 + 5 * \sqrt{50})}$.

L'area di AEG è data da:

$S_{AEG} = GK * AK = \sqrt{(50 + 5 * \sqrt{50})} * \sqrt{(50 - 5 * \sqrt{50})} =$
$= \sqrt{(2500 - 250 * \sqrt{50} + 250 * \sqrt{50} - 25 * 50)} = \sqrt{(2500 - 1250)} = \sqrt{1250}$.

L'area dell'intero ottagono è:

$S_{OTTAGONO} = 8 * S_{AEG} = 8 * \sqrt{1250} = \sqrt{(64 * 1250)} = \sqrt{80000}$ [$= 200 * \sqrt{2}$).

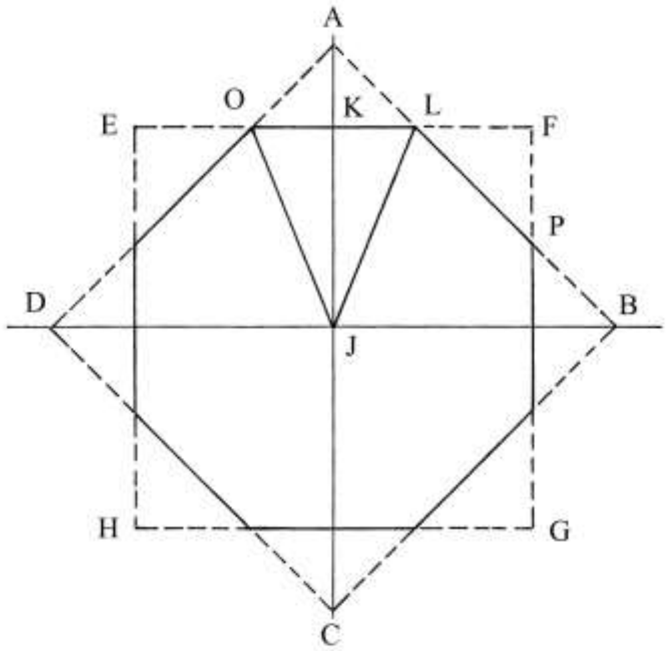
Costruzione di un ottagono regolare

Chuquet propone un metodo per costruire un ottagono regolare: egli non sembra aver avuto molta familiarità con il compasso, il cui impiego avrebbe semplificata la procedura.

Tracciare due linee fra loro perpendicolari che si intersecano in J. Su questi due assi fissare quattro punti equidistanti da J: sono A, B, C e D. Collegare questi quattro punti per ottenere il quadrato ABCD.

Fissare quattro punti – E, F, G e H – equidistanti dai vertici A, B, C e D e dal centro J.

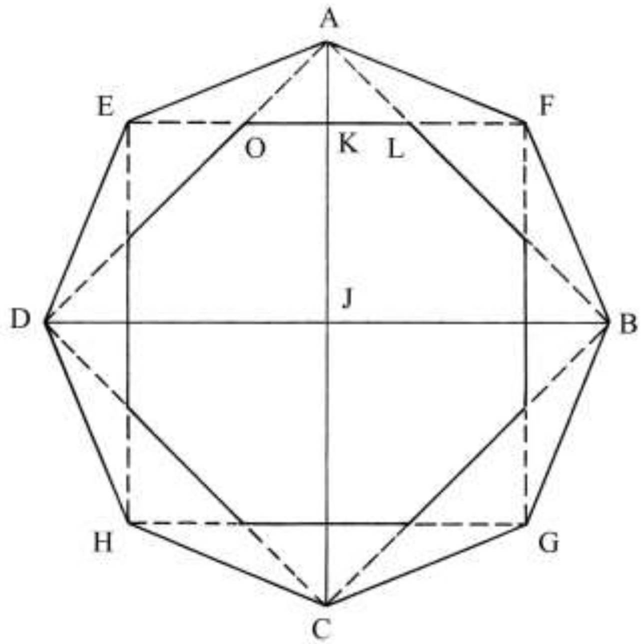
Disegnare il quadrato EFGH.



I due quadrati hanno uguali dimensioni e sono ruotati di 45° l'uno rispetto all'altro. Le loro intersezioni sono i vertici di un ottagono regolare.

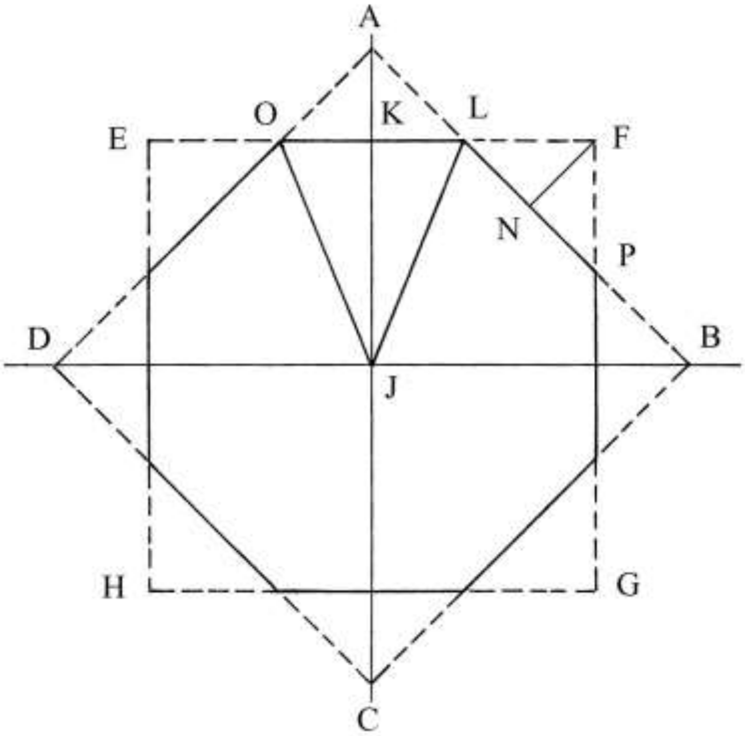
Qui interessano i punti O, L e K: OLJ è uno degli otto triangoli isosceli nei quali è scomponibile l'ottagono regolare.

Chuquet accenna alla possibilità di disegnare un secondo ottagono esterno e più grande del primo, ma non lo costruisce: esso è AFBGCHDE ed è ruotato di 45° rispetto al primo.



Torniamo all'ottagono interno e al triangolo OLJ: per Chuquet i lati dell'ottagono interno, come OL, sono lunghi 6.

L'Autore traccia l'altezza FN:



KL è lungo la metà di OL: KL = 3.

OAL è un triangolo rettangolo isoscele, come lo è LFP: entrambi sono metà di un quadrato. I segmenti AK e FN hanno la stessa lunghezza di KL.

LF è lungo quanto OA (e AL):

$LF^2 = LN^2 + FN^2 = LN^2 + LN^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ e

$LF = \sqrt{18} = AL$.

A sua volta, KF è lungo:

$KF = KL + LF = (3 + \sqrt{18})$.

L'altezza KJ è lunga quanto KF:

$KJ = KF = (3 + \sqrt{18})$.

L'area del triangolo OLJ è:

$S_{OLJ} = KJ * KL = (3 + \sqrt{18}) * 3 = (9 + 3 * \sqrt{18}) = (9 + \sqrt{162})$.

L'area dell'ottagono interno, che ha lati lunghi quanto OL e LP, è data da:

$S_{OTTAGONO} = 8 * S_{OLJ} = 8 * (9 + \sqrt{162}) = (72 + \sqrt{10368})$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet riassume la procedura per il calcolo dell'area dell'ottagono che ha lati lunghi quanto OL e LP con alcuni passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato dell'ottagono per il suo doppio: $6 * (6 * 2) = 72$;
* moltiplicare per 2: $72 * 2 = 144$;
* moltiplicare per 72: $144 * 72 = 10368$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{10368}$;
* sommare con 72: $(72 + \sqrt{10368})$, area dell'ottagono regolare.

La procedura può essere riassunta in una formula, con ℓ lato dell'ottagono:

$S_{OTTAGONO} = \sqrt{(\ell * 2 * \ell * 2) * (\ell * 2 * \ell)} + 2 * \ell^2 = \sqrt{(8 * \ell^4)} + 2 * \ell^2 =$

$= 2 * \ell^2 * \sqrt{2} + 2 * \ell^2 = 2 * \ell^2 * (\sqrt{2} + 1)$.

Infine, l'espressione $(72 + \sqrt{10368})$ può essere semplificata:

$(72 + \sqrt{10368}) = (72 + \sqrt{(2^3 * 6^4)}) = (72 + 2 * 36 * \sqrt{2}) = (72 + 72 * \sqrt{2}) =$

$= 72 * (1 + \sqrt{2})$.

La formula oggi usata è:

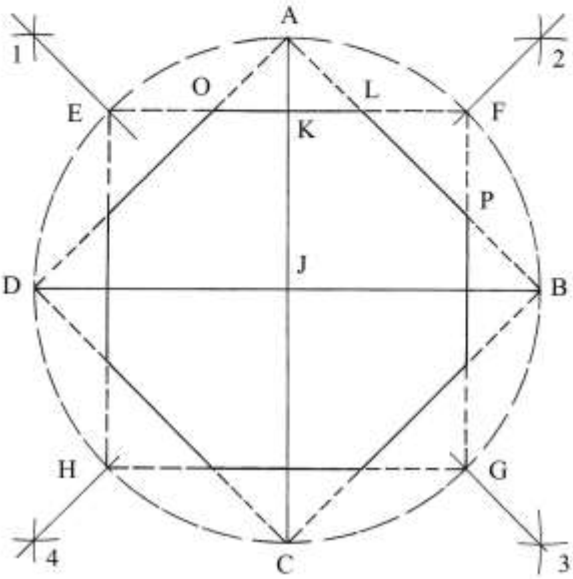
$S_{\text{OTTAGONO}} = 2 * (1 + \sqrt{2}) * \text{lato}^2$.

Essa è equivalente alla formula che riassume la procedura impiegata da Chuquet.

- APPROFONDIMENTO -

L'ottagono regolare è facilmente costruibile inscrivendolo in un cerchio di centro J e raggio JA.

Tracciare due diametri perpendicolari: sono AC e DB.



Fare centro nei punti A, D, C e B con raggio a piacere più grande di quello JA e disegnare otto archi che si intersecano nei punti 1, 2, 3 e 4.

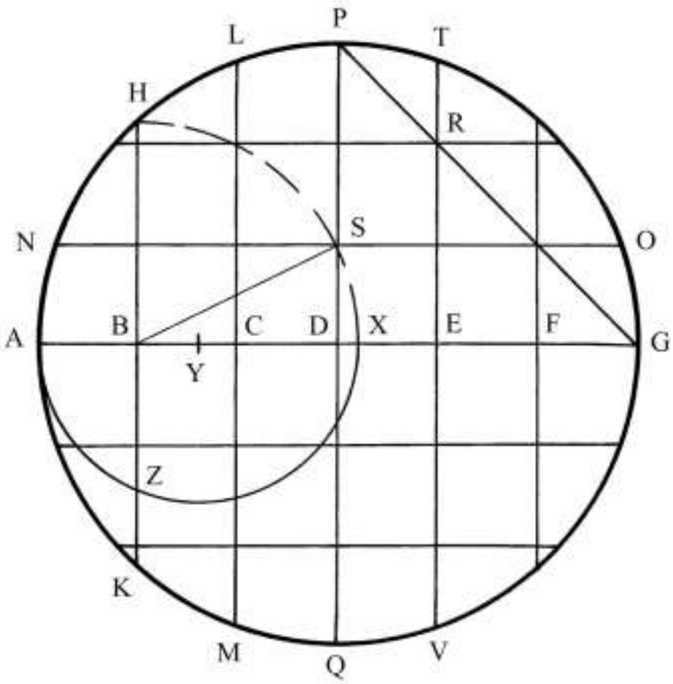
Per questi punti tracciare linee passanti per le coppie 1-3 e 2-4: le linee tagliano la circonferenza in E, F, G e H.

La costruzione si conclude con la tracciatura dei lati dell'ottagono regolare.

- -

Applicazione del teorema delle corde

Un cerchio di centro D ha diametri AG e PQ divisi in sei parti uguali: per i punti divisori sono tracciate linee che formano una griglia.



Chuquet utilizza, peraltro senza citarlo, il *teorema delle corde*: se due corde interne a un cerchio si intersecano, il prodotto dei due segmenti generati su di una corda è uguale al prodotto dei segmenti creati nella seconda corda.

Nell'esempio di figura sono considerate le corde AG e HK:

HB = BK
AB : BH = BK : BG
AB : BH = BH : BG.

Se AB è lungo 1, BG è lungo 5 per cui si ha:

$BH^2 = AB * BG = 1 * 5 = 5$ e
$BH = \sqrt{5}$.

Per spiegare meglio la successiva descrizione fornita da Chuquet, fare centro in B e con raggio BH (= √5) tracciare un arco da H fino al punto X sul diametro AG. BS è un raggio di questo arco:

$BS^2 = BD^2 + DS^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ e
$BS = \sqrt{5}$.

Determinare il punto medio di AX: è Y. Fare centro in Y e con raggio AY = YX disegnare una semicirconferenza da A X: il raggio YX è lungo:

$YX = AX/2 = (AB + BX)/2 = (AB + BS)/2 = (AB + BH)/2 = (1 + \sqrt{5})/2$.

Z è l'intersezione fra l'ultima semicirconferenza e la corda HK.

Per il teorema delle corde si ha:

AB : BZ = BZ : BH da cui:
$BZ^2 = AB * BH = 1 * \sqrt{5} = \sqrt{5}$ e

$$BZ = \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$

La corda HK è lunga il doppio di BH:

$HK = 2 * BH = 2 * \sqrt{5} = \sqrt{20}$.

Applicando il teorema delle corde alla coppia di segmenti LM e AG si ha:

AC : LC = CM : CG.

Ma LC = CM e AC = 2 e CG = 4, per cui si ottiene:

$LC^2 = AC * CG = 2 * 4 = 8$ e

$LC = \sqrt{8} = 2 * \sqrt{2}$.

Chuquet considera la corda PRG: PR è lungo $\sqrt{2}$ perché è la diagonale di un quadrato con lati convenzionalmente lunghi "1".

RG è la diagonale di un quadrato che ha lati lunghi 2: RG = $\sqrt{8}$. RG è lungo quanto LC, CM, TE e EV.

\- APPROFONDIMENTO -

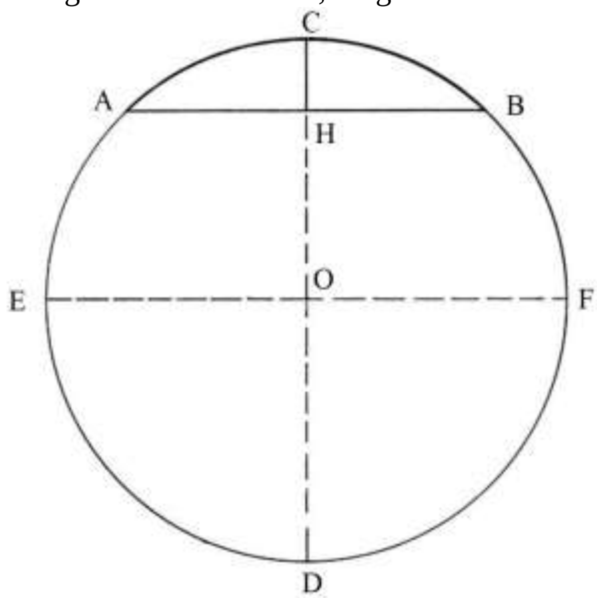
<u>Il "teorema delle corde"</u>

La proposizione 35 del III libro degli "*Elementi*" di Euclide afferma che "… se in un cerchio due linee si intersecano ad angolo retto, il *rettangolo* delimitato dai segmenti di una è uguale al *rettangolo* delimitato dai segmenti dell'altra linea... ".

La proposizione è conosciuta come "*teorema delle corde*".

In realtà uno dei *rettangoli* è un *quadrato*.

Nello schema che segue AB è una corda, lunga meno di un diametro: HC è chiamata *freccia*.



Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nello stesso cerchio e si intersecano ad angolo retto nel punto H, tagliando in due parti uguali la corda AB: AH = HB.

I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) sono i *medi* e i due segmenti dell'altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:

medi

$$CH : AH = HB : HD$$

estremi

La proporzione può essere scritta come segue:

CH : AH = AH : HD.

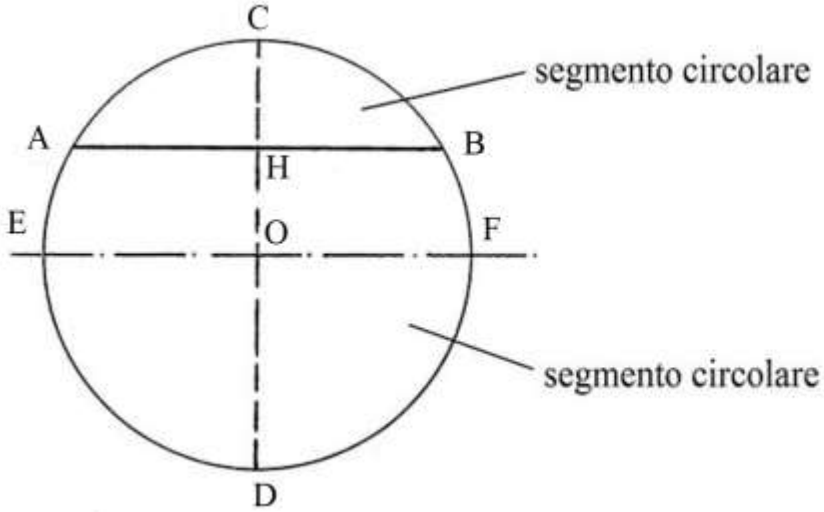
Ne consegue: HD = (AH * HB)/CH = AH^2/CH.

$(AH)^2$ è rappresentabile come un quadrato con lati lunghi AH = HB.

Aggiungendo la lunghezza della freccia CH a quella del segmento HD si ottiene la lunghezza del diametro CD:

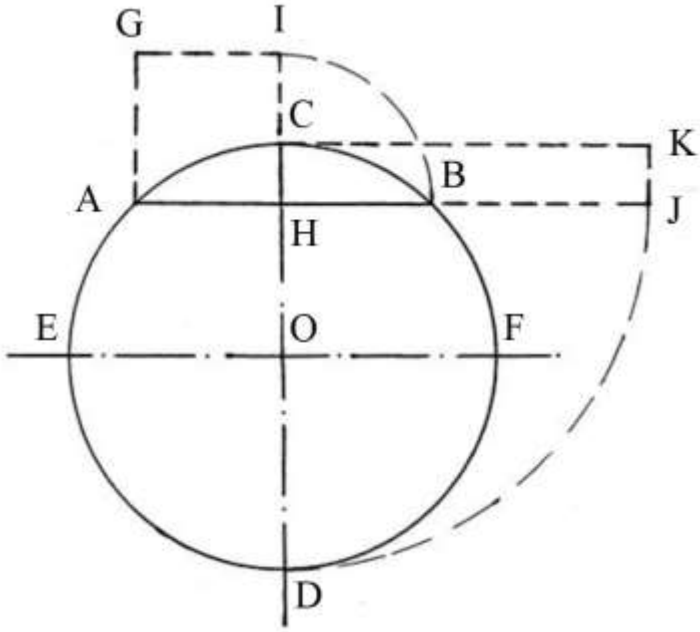
CD = CH + HD.

Nota: una corda divide un cerchio in *due* segmenti circolari:



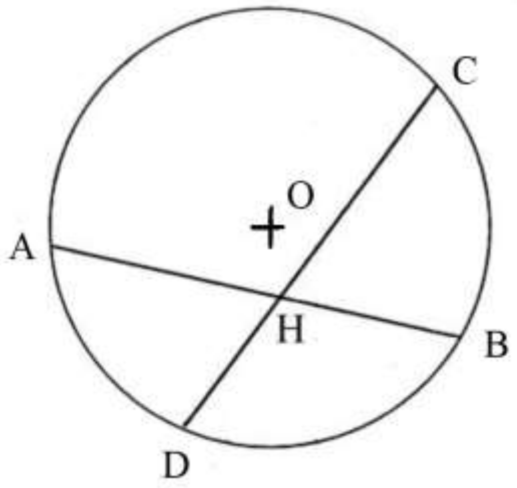
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Costruire i due rettangoli basati sulle lunghezze dei quattro segmenti che formano le due corde (AB e CD):



* il rettangolo [ma in questo caso è un quadrato perché AH = HB] AGIH ha dimensioni AH * HB = AH^2 = AB^2;
* il rettangolo HCKJ che ha dimensioni CH * HD.
  I due quadrilateri hanno *uguale superficie*.

In generale, il teorema vale per qualunque coppia di corde che si incrociano all'interno di un cerchio, senza formare angoli particolari e senza che almeno una delle due sia un diametro, come è il caso della figura che segue:

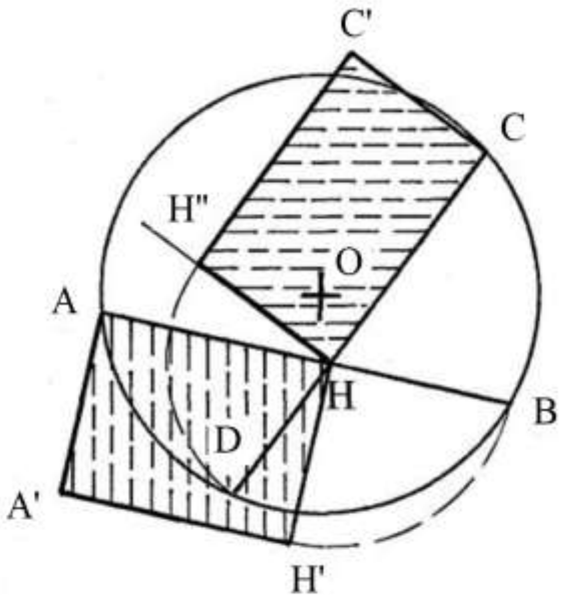


Anche in questo caso vale la relazione

AH : DH = HC : HB da cui

AH * HB = DH * HC .

Lo schema che segue mostra i due rettangoli di area uguale con lati lunghi quanto i segmenti generati sulle corde dalla loro intersezione:

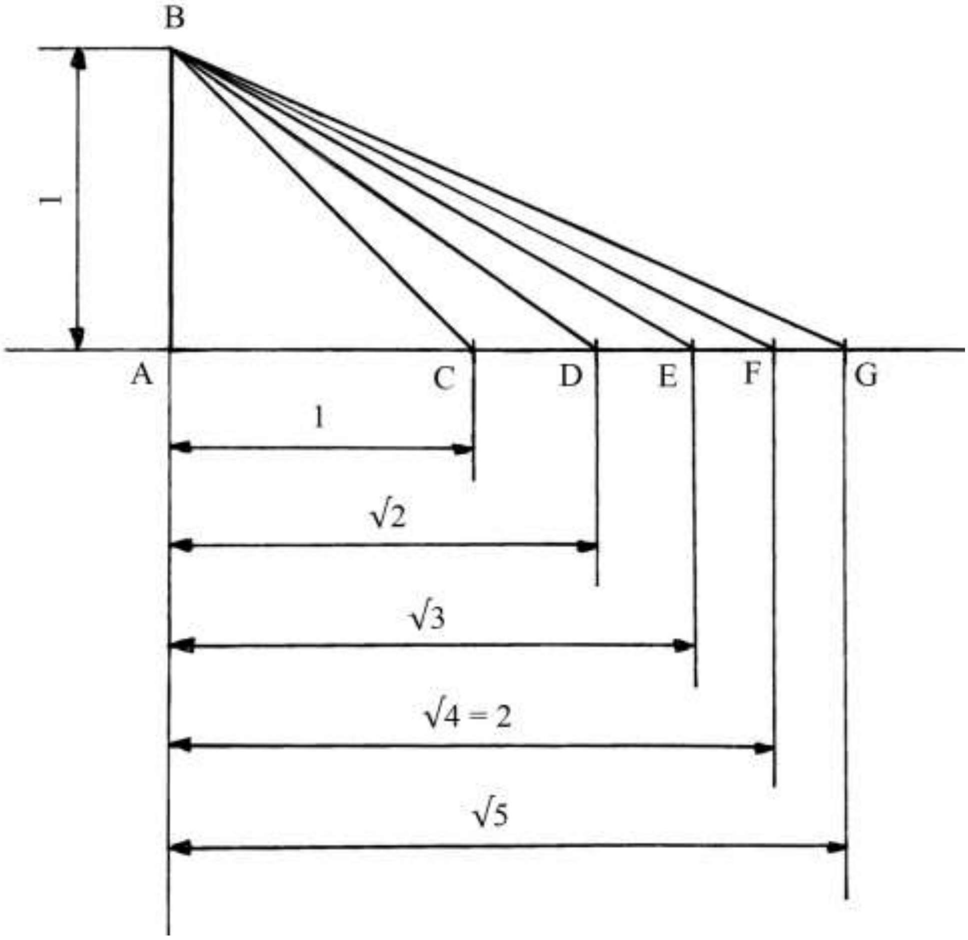


I rettangoli AHH'A' e HH''C'C hanno uguale superficie.

- -

<u>Costruzione delle radici quadrate</u>

La radice quadrata di un numero può essere ricavata per via geometrica.



Disegnare un angolo retto con vertice in A: da A verso l'alto e verso destra riportare la stessa lunghezza convenzionale "1":

$AB = AC = 1.$

Disegnare il segmento BC: è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ABC e la sua lunghezza è:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ e

$BC = \sqrt{2}.$

Con il compasso misurare la lunghezza di BC e riportarla sulla linea orizzontale da A fino a D: $AD = BC = \sqrt{2}.$

Collegare B con D: l'ipotenusa BD è lunga:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$ e

$BD = \sqrt{3}.$

Dal vertice A riportare la lunghezza di BD:

$AE = BD = \sqrt{3}.$

Tracciare BE. L'ipotenusa BE è lunga:

$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$ e

$BE = \sqrt{4} = 2.$

Misurare la lunghezza di BE e riportarla da A in F: $BE = AF = \sqrt{4} = 2.$

Collegare F con B: l'ipotenusa BF è lunga:

$BF^2 = AB^2 + AF^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ e

$BF = \sqrt{5}$.

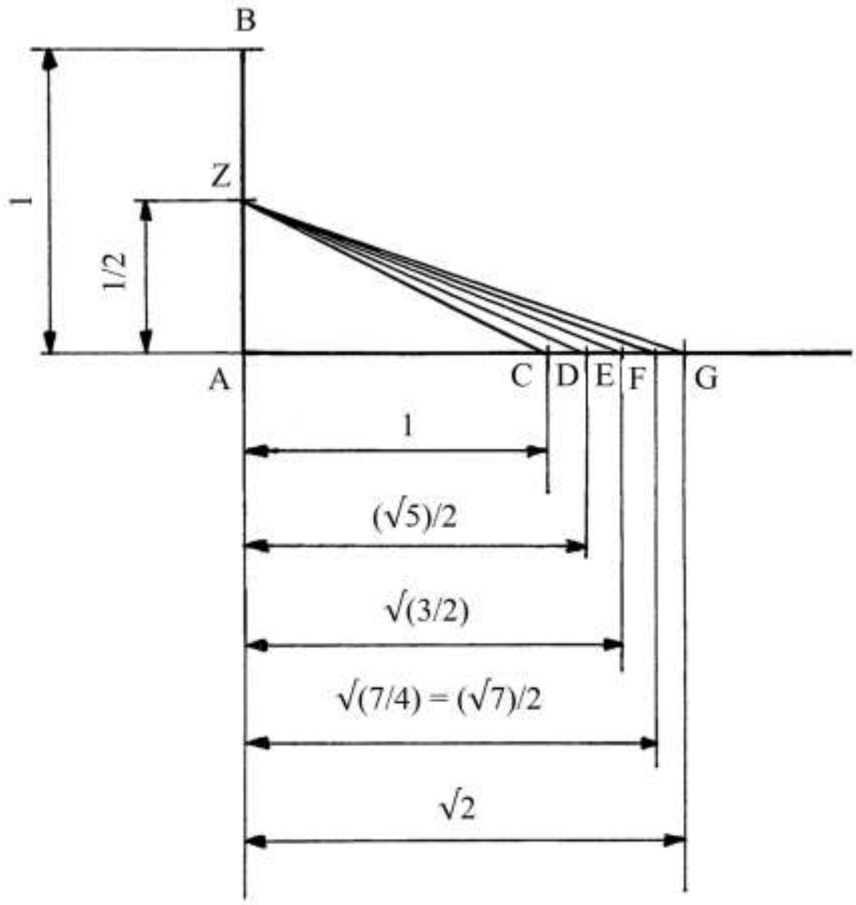
Infine, con il compasso misurare la lunghezza di BF e riportarla sulla linea orizzontale a partire da A:

$AG = BF = \sqrt{5}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda costruzione muove dall'uso del punto intermedio fra A e B: è Z e

$AZ = ZB = ½$.



Il punto C è a distanza convenzionale "1" da A.

Collegare Z con C: ZC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AZC ed è lunga:

$ZC^2 = AZ^2 + AC^2 = (1/2)^2 + 1^2 = 5/4$ e

$ZC = \sqrt{(5/4)} = (\sqrt{5})/2$.

Con il compasso misurare la lunghezza di ZC e riportarla sulla linea orizzontale a partire da A: $AD = ZC$.

ZD è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AZD ed è lunga:

$ZD^2 = AZ^2 + AD^2 = (1/2)^2 + [\sqrt{(5/4)}]^2 = ¼ + 5/4 = 6/4 = 3/2$ e

$ZD = \sqrt{(3/2)}$.

Riportare la lunghezza di ZD da A in E:

$AE = ZD$.

ZE è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AZE ed è lunga:

$ZE^2 = AZ^2 + AE^2 = (1/2)^2 + [\sqrt{(3/2)}]^2 = ¼ + 3/2 = 7/4$ e

$ZE = \sqrt{(7/4)}$.

Riportare la lunghezza di ZE da A in F:

$AF = ZE$.

Infine, tracciare ZF: la sua lunghezza è data da:

$ZF^2 = AZ^2 + AF^2 = (1/2)^2 + [\sqrt{(7/4)}]2 = ¼ + 7/4 = 8/4 = 2$ e

$ZF = \sqrt{2}$.

Riportare la lunghezza di ZF da A in G:

$AG = ZF = \sqrt{2}$.

L'esempio qui descritto ha lo scopo di ricavare per via geometrica la radice quadrata di un numero qualsiasi.

<u>Costruzione per via geometrica della radice quadrata di un numero</u>

La radice quadrata di un numero primo è un numero *irrazionale*.

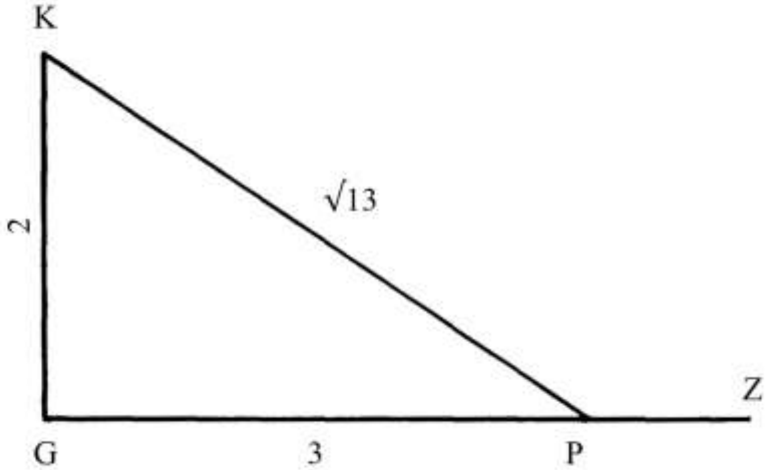
Chuquet considera il caso di 13.

La radice quadrata di 13 può essere ottenuta per via geometrica; infatti:

$13 = 2^2 + 3^2$

$13 = 4 + 9$ e

$\sqrt{(4 + 9)} = \sqrt{13}$.



KPG è un triangolo rettangolo con l'angolo retto nel vertice G.

Il cateto GK è lungo 2 e quello GP è 3.

L'ipotenusa KP è lunga:

$KP^2 = GK^2 + GP^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ e

$KP = \sqrt{13}$.

- APPROFONDIMENTO -

Nel caso di √13, Chuquet *sembra* in un certo modo avere anticipato la scoperta del *teorema sulle somme di due quadrati*, dovuta al matematico francese Pierre de Fermat (1601-1665): è però dubbio che Chuquet ne avesse consapevolezza.

Un numero primo può essere scritto come somma di due quadrati perfetti se la differenza fra lo stesso numero primo e 1 è divisibile per 4: esempi sono i numeri primi 5, 13, 17 e 29.

Verifichiamo il caso di 13:

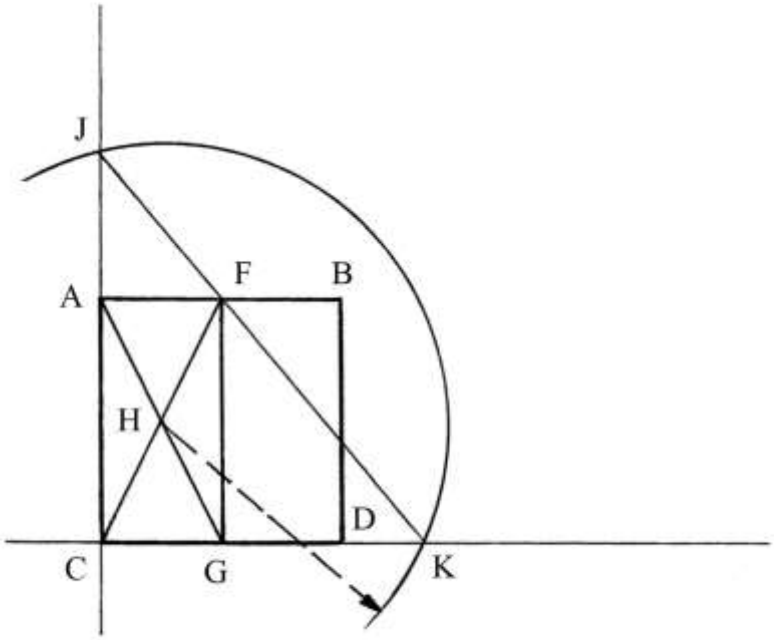
$(13 – 1) = 12 = 3 * 4$.

- -

<u>Rappresentazione geometrica delle radici cubiche</u>

La descrizione del metodo di Chuquet, presentata di seguito, è basata sulla trascrizione fattane da Hervé L'Huillier: questo ultimo Autore ritiene che Chuquet abbia in qualche modo attinto alla soluzione proposta da Erone di Alessandria, Autore al quale è dedicato un successivo *APPROFONDIMENTO*.

L'Huillier ha descritto la soluzione utilizzando due schemi che qui sono stati ridisegnati apponendo ai vertici lettere maiuscole.



ABCD è un quadrato diviso, dalla mediana FG, in due rettangoli di uguali dimensioni: AFGC e FBDG.

I lati CA e CD sono prolungati verso l'alto e verso destra.

Nel rettangolo AFGC sono tracciate le diagonali AG e HC che si incrociano nel punto H.

Facendo centro in H, per tentativi, deve essere disegnato un arco – JK – la cui corda JK deve passare per il punto F.

Se il quadrato ABCD è la faccia di un cubo, esso ha spigoli lunghi quanto AB = *n*.

Seguiamo L'Huillier:

$$AB = \sqrt[3]{n^3} = n$$

Chuquet e L'Huillier fissano poi le seguenti relazioni:

$$GK = \sqrt[3]{(n^3/2)}$$

$$AJ = \sqrt[3]{(n^3/4)}$$

e

$$FB = \sqrt[3]{(n^3/8)}\ .$$

I triangoli rettangoli JAF e FGK sono simili e si ha:

AJ : AF = FG : GK.

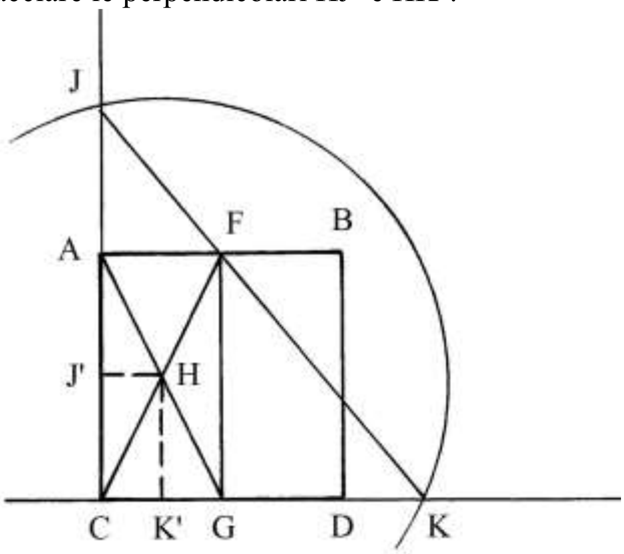
Ma AF = AB/2 = n/2 e FG = AB = n.

La proporzione diviene:

AJ : n/2 = n : GK e

$AJ = n^2/(2 * GK)$.

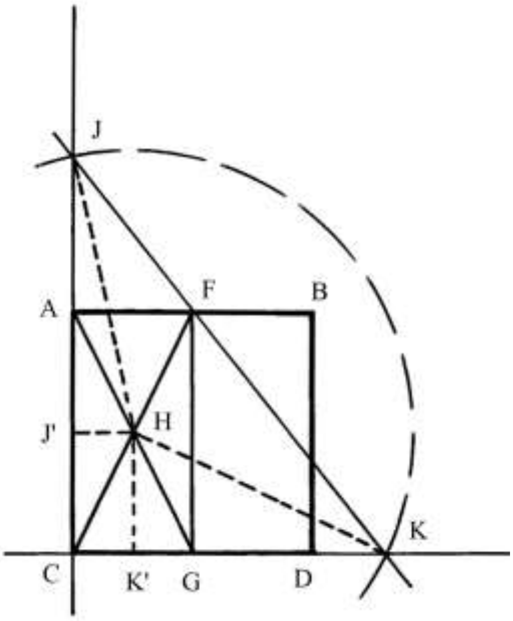
Dal punto H tracciare le perpendicolari HJ’ e HK’:



Il triangolo HJ’J è rettangolo e la sua ipotenusa HJ è lunga:

$HJ^2 = HJ'^2 + J'J^2 = (n/4)^2 + (J'A + AJ)^2 = n^2/16 + (n/2 + AJ)^2 =$

$= n^2/16 + n^2/4 + n * AJ + AJ^2$.



Anche il triangolo HK’K è rettangolo e la sua ipotenusa HK è lunga:

$HK^2 = HK'^2 + K'K^2 = (n/2)^2 + (K'G + GK)^2 = n^2/4 + (n/4 + GK)^2 =$

$= n^2/4 + n^2/16 + (n/2) * GK + GK^2$.

Dato che per costruzione, HJ e HK hanno uguale lunghezza, anche i loro quadrati devono essere uguali:

$HJ = HK$ e $HJ^2 = HK^2$.

Ne consegue:

$n^2/16 + n^2/4 + n * AJ + AJ^2 = n^2/4 + n^2/16 + (n/2) * GK + GK^2$

$n * AJ + AJ^2 = (n/2) * GK + GK^2$.

Ma $AJ = n^2/(2 * GK)$, per cui si ha:

$n * n^2/(2 * GK) + ([n^2/(2 * GK)]^2 = (n/2) * GK + GK^2$.

Moltiplicando entrambi i membri per GK^2 si ha:

$n^3/2 * GK + n^4/4 = (n/2) * GK^3 + GK^4$

$GK^4 – n^3/2 * GK + n/2 * GK^3 – n^4/4 = 0$

$GK * (GK^3 – n^3/2) + n/2 * (GK^3 – n^3/2) = 0$

$(GK + n/2) * (GK^3 – n^3/2) = 0$

$GK^3 = n^3/2$.

Esistono le seguenti relazioni:

$AJ = n^2/(2 * GK)$ e

$AJ^3 = n^6/(8 * GK^3) = n^6/(8 * n^3/2) = n^3/4$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, Chuquet propone un esempio numerico: il lato CD è lungo n = 4.
Ne consegue:

$GK^3 = CD^3/2 = 4^3/2 = 64/2 = 32$ e

$GK = \sqrt[3]{32}$

;

$AJ^3 = n^3/4 = 4^3/4 = 64/4 = 16$ e

$AJ = \sqrt[3]{16}$

.

$FB^3 = (AB/2)^3 = (4/2)^3 = 2^3 = 8$.

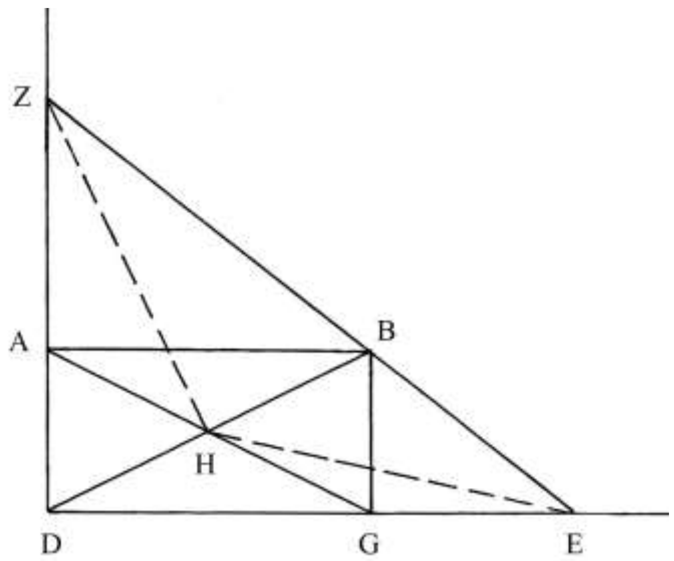
Fra le lunghezze coinvolte in questa costruzione si ha una progressione geometrica di ragione 2:

$FB^3 : AJ^3 : GK^3 : CD^3 = 8 : 16 : 32 : 64 = 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6$.

- APPROFONDIMENTO -

Il metodo di Erone di Alessandria

ABGD è un rettangolo, non necessariamente formato da un doppio quadrato:

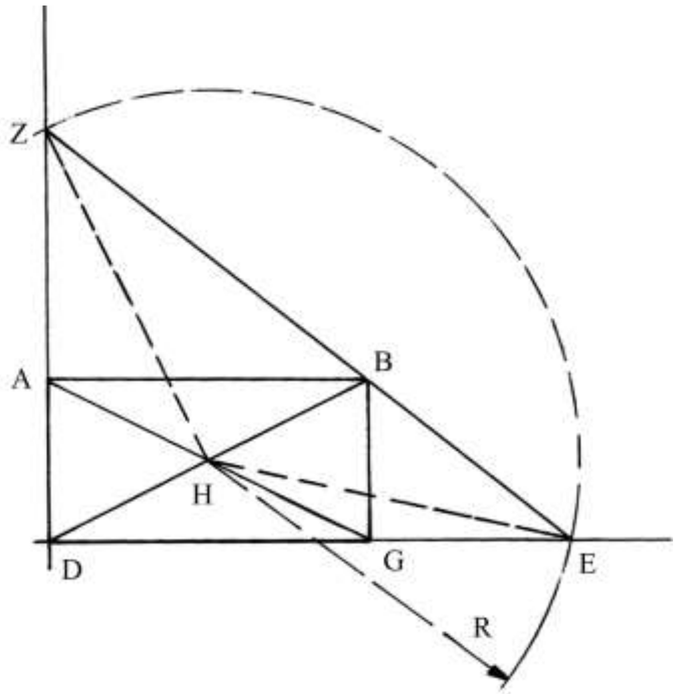


Prolungare verso destra il lato DG e verso l'alto quello DA. Tracciare le diagonali del rettangolo: esse si incontrano nel punto H.

Erone propose di usare una riga ruotante intorno al punto B: per tentativi disegnò una linea che tagliava i prolungamenti nei punti E e Z a condizione che i segmenti HE e HZ avessero la stessa lunghezza:

HE = HZ.

Tracciare un arco con centro in H e raggio HE = HZ = *R*:

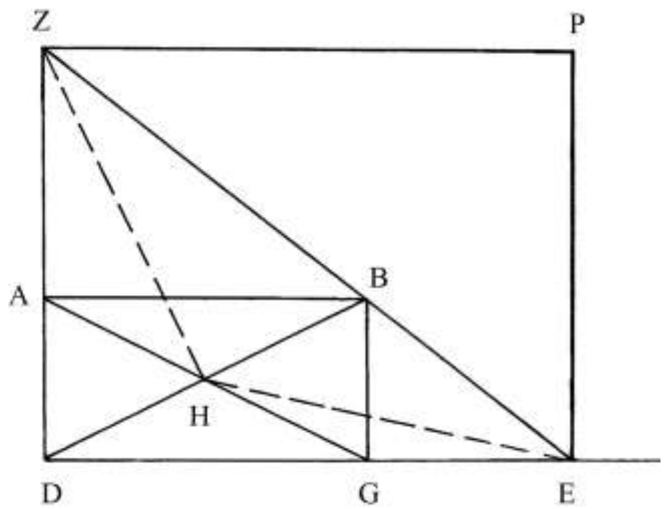


I segmenti AZ e GE sono le *medie proporzionali* cercate:

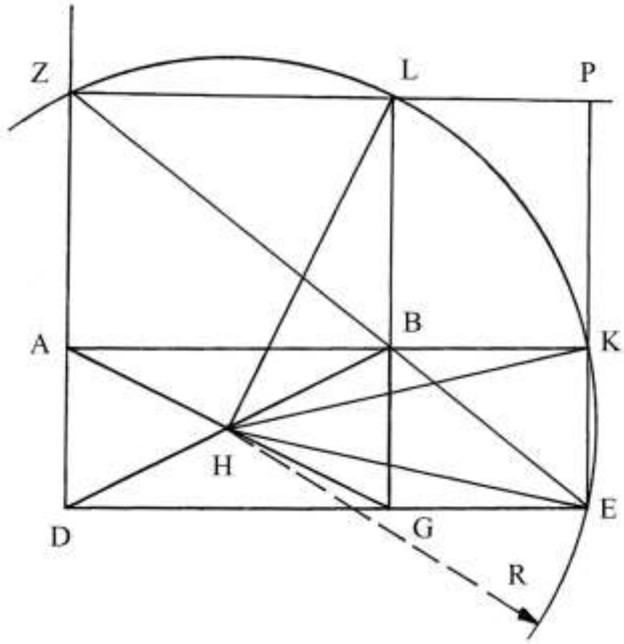
AB : AZ = AZ : GE = GE : GB

Nella figura sono evidenziati *tre triangoli simili*: DZE, AZB e GBE.

La costruzione di Erone è inscrivibile in un rettangolo di dimensioni DZ * DE:



Apportiamo alcune modifiche alla precedente figura:

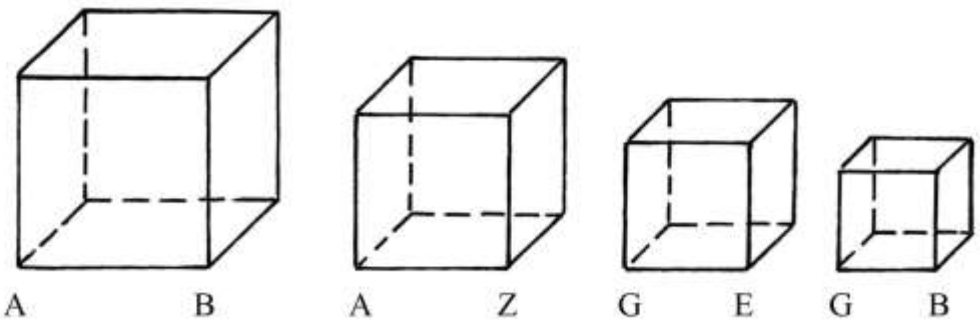


Prolungare i lati AB e GB fino a stabilire i punti K e L.

Fare centro nel punto H e, con raggio HE = HZ = *R*, tracciare un ampio arco di circonferenza che passa per i punti K e L.

Nella figura sono presenti due triangoli isosceli: HZL e HKE.

Lo schema che segue, disegnato in assonometria cavaliera, mette a confronto i quattro cubi costruiti sui segmenti AB, AZ, GE e GB:



Ulteriori informazioni sui metodi proposti da altri geometri per la duplicazione del cubo e la costruzione della radici cubica sono contenuti nell’articolo citato alla voce 3) della Bibliografia.

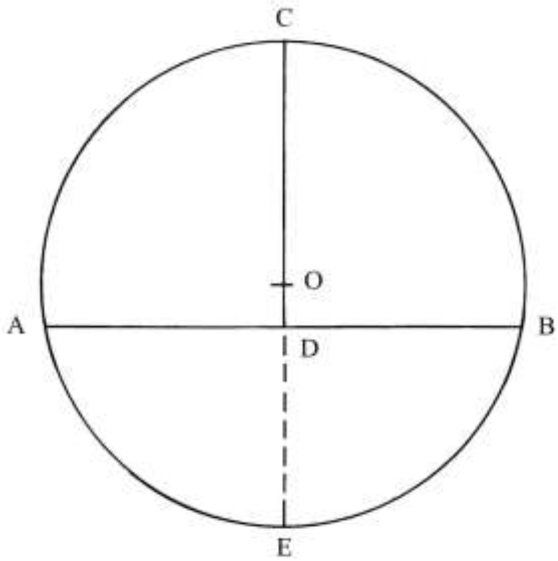
- -

ALTRI PROBLEMI SUL CERCHIO

Corde in un cerchio

In un cerchio di raggio ignoto è tracciata la corda AB che è lunga 10.
La freccia CD è lunga 6.
La corda e la freccia sono fra loro perpendicolari: la prima è divisa in due parti uguali:

AD = DB = 5.



Il problema chiede la lunghezza del diametro CE.
Chuquet risolve applicando il teorema delle corde, peraltro senza citarlo:

AD : CD = DE : DB   da cui:

DE = (AD * DB)/CD = (5 * 5)/6 = (4 + 1/6).

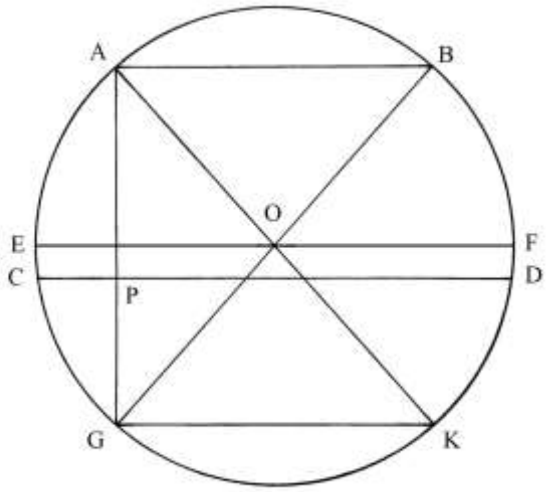
Il diametro CE è lungo:

CE = CD + DE = 6 + (4 + 1/6) = (10 + 1/6).

Un cerchio con due corde parallele

In un cerchio sono disegnate due corde parallele, AB e CD, lunghe rispettivamente:

* AB = 8;
* CD = 12.



Le corde sono distanti 5: AP = 5.

Il problema chiede la lunghezza del diametro del cerchio.

Da A tracciare la perpendicolare a CD, che taglia in P, fino a incontrare la circonferenza nel punto G.

CP è lungo: CP = (CD – AB)/2 = (12 – 8)/2 = 4/2 = 2.

A sua volta, PD è: PD = CD – CP =12 – 2 = 10.

Per il teorema delle corde vale la proporzione:

CP : AP = PG : PD da cui

PG = (CP * PD)/AP = (2 * 10)/5 = 4.

Da G disegnare un segmento parallelo a AB e a CD, lungo quanto AB: è GK.

Tracciare AK e BG: essi sono due diametri del cerchio che si intersecano nel centro O.

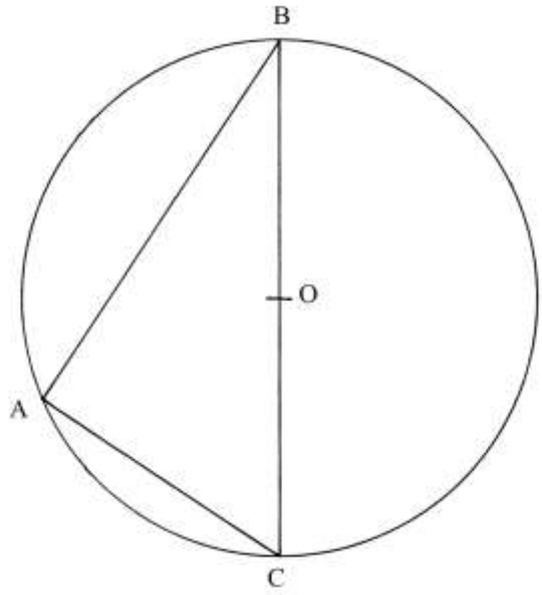
ABG è un triangolo rettangolo: BG è la sua ipotenusa la cui lunghezza è data da:

$BG^2 = AG^2 + AB^2 = (AP + PG)^2 + AB^2 = (5 + 4)^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145$ e

$BG = \sqrt{145}$, diametro del cerchio di centro O.

Triangolo rettangolo inscritto in un cerchio

Un triangolo è inscritto in un cerchio: la sua ipotenusa coincide con un diametro e quindi è *retto*.

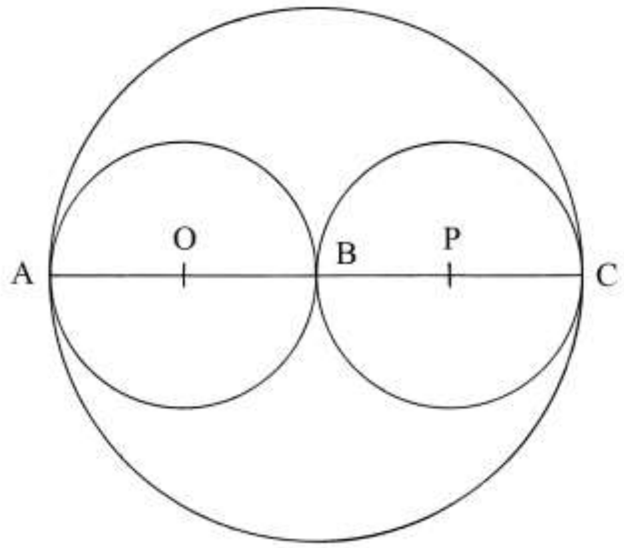


AB è lungo 12 e AC è 8.
L'ipotenusa BC è lunga:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 8^2 = 144 + 64 = 208$ e
$BC = \sqrt{208}$.

Cerchi inscritti

Due cerchi di uguali dimensioni sono tangenti e inscritti in un terzo cerchio di diametro doppio.



I diametri *d* AB e BC sono lunghi 7.
Il diametro AC è lungo 14.
La circonferenza *c* di ciascuno dei cerchi interni è:

$c_{\text{INTERNA}} = 22/7 * d = 22/7 * 7 = 22.$

L'area di ciascuno dei due cerchi interni è:

$S_{\text{INTERNO}} = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * (7/2)^2 = (38 + ½).$

La circonferenza del cerchio esterno è:

$c_{ESTERNA} = 22/7 * AC = 22/7 * 14 = 44$.

L'area del cerchio esterno è:

$S_{ESTERNO} = 22/7 * (AC/2)^2 = 22/7 * (14/2)^2 = 154$.

Chuquet conclude con alcune semplici regole: se il diametro raddoppia, raddoppia pure la lunghezza della circonferenza mentre l'area quadruplica. Nel caso che il diametro sia lungo il triplo, pure la circonferenza è lunga il triplo e l'area è *nove* volte più grande.

Tre cerchi inscritti

Un cerchio ha diametro lungo 12 e al suo interno sono inscritti tre cerchi di uguali dimensioni.

Il problema chiede il diametro dei tre cerchi inscritti.

I centri dei tre cerchi formano sono i vertici del triangolo equilatero CPD.

E è il centro del cerchio esterno.

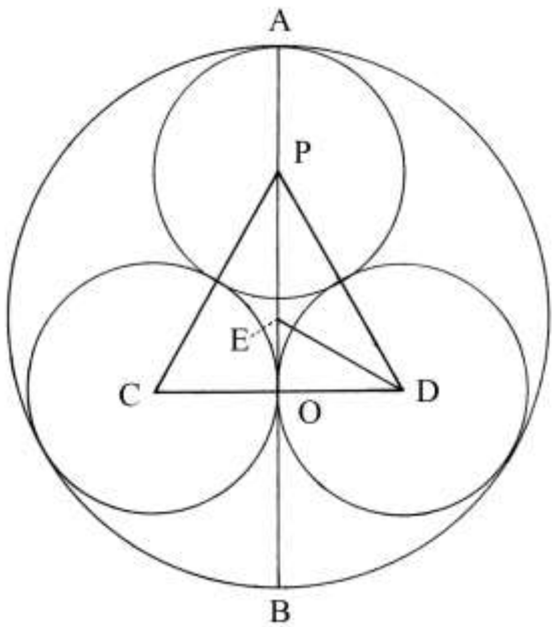
ED è lungo quanto EC e EP.

PO è un'altezza del triangolo CPD.

EO è lungo:

$EO = PO/3$.

OD è lungo la metà del lato CD ed è anche il raggio del cerchio di centro D.



Chuquet ricorda la relazione esistente fra l'altezza e la metà del lato di un triangolo equilatero:

$PO^2 = 3 * OD^2$.

Attribuendo a OD il valore dell'incognita si ha:

$OD = x$

$PO^2 = 3 * x^2$

$PO = \sqrt{(3 * x^2)} = x * \sqrt{3}$.

Ne consegue:

$EO = PO/3 = (x * \sqrt{3})/3 = x/\sqrt{3}$.

La lunghezza di ED è:

$ED^2 = EO^2 + OD^2 = (x/\sqrt{3})^2 + x^2 = x^2/3 + x^2 = 4/3 * x^2$ e

$ED = \sqrt{(4/3 * x^2)}$.

Vale la relazione:

$ED + OD = EP + PA = AE$.

Ma AE = 12/2 = 6, quindi si ha:

$ED + OD = AE$

$\sqrt{(4/3 * x^2)} + x = 6$

$\sqrt{(4/3 * x^2)} = 6 - x$

Elevando entrambi i membri al quadrato si ha:

$4/3 * x^2 = 36 - 12 * x + x^2$

$x^2/3 + 12 * x - 36 = 0$

$x^2 + 36 * x - 108 = 0$

La radice positiva dell'equazione è:

$x = - 18 + \sqrt{432} = \sqrt{432} - 18 = 12 * \sqrt{3} - 18 = OD$.

Il diametro dei tre cerchi interni è lungo il doppio di OD:

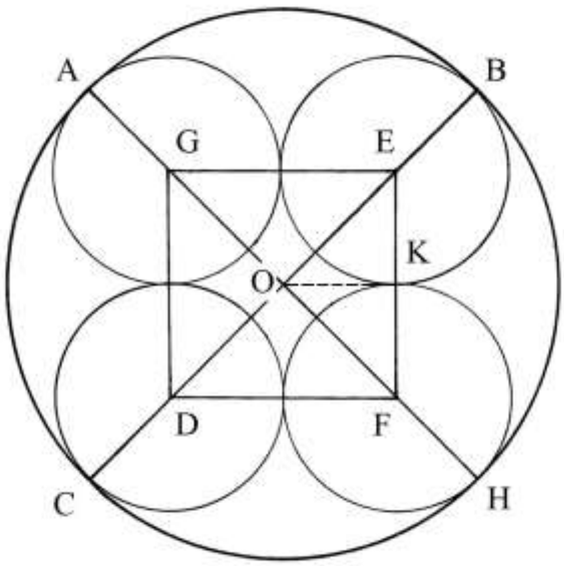
$CD = 2 * OD = 2 * (12 * \sqrt{3} - 18) = (24 * \sqrt{3} - 36)$.

Quattro cerchi inscritti in un cerchio

Quattro cerchi tangenti e di uguali diametri sono inscritti in un cerchio di centro O e diametro lungo 12.

Il problema domanda il diametro dei quattro cerchi inscritti.

I centri dei quattro cerchi sono i vertici del quadrato GEFD:



La soluzione del problema qui utilizzata è quella, algebrica, descritta da L'Huillier.

EF è lungo quanto il diametro dei quattro cerchi inscritti ed è l'incognita:

$EF = x$.

Nel diametro BC si ha:

$BC = CD + DE + EB = DE + (CD + EB) = DE + EF = DE + x$.

Ma BC vale 12 per cui si ha:

$12 = DE + x$

$DE = 12 - x$.

La semidiagonale OE è lunga:

$OE^2 = OK^2 + KE^2 = (EF/2)^2 + (EF/2)^2 = EF^2/4 + EF^2/4 = EF^2/2 = x^2/2$ e

$OE = x/\sqrt{2}$.

DE è lungo il doppio di OE:

$DE = 2 * OE = 2 * x/\sqrt{2} = x * \sqrt{2}$.

Sostituendo nella precedente uguaglianza relativa a DE si ha:

$x * \sqrt{2} = 12 - x$.

Elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$(x * \sqrt{2})^2 = (12 - x)^2$

$2 * x^2 = 144 - 24 * x + x^2$

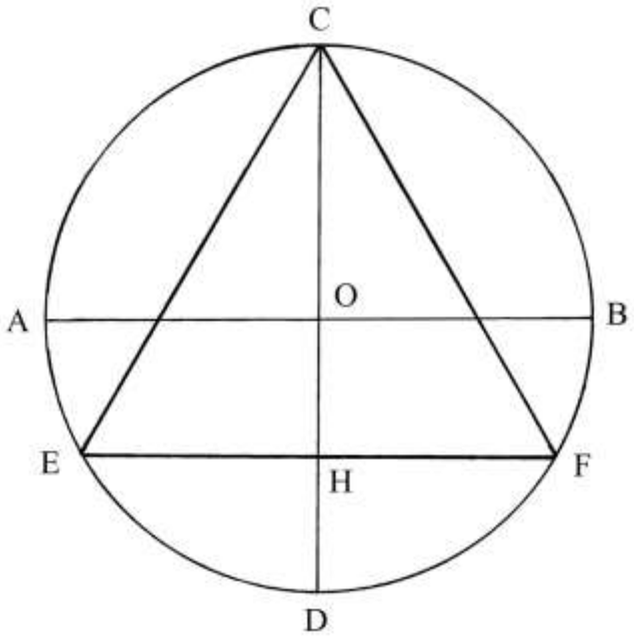
$x^2 + 24 * x - 144 = 0$.

La radice positiva è:

$x = (\sqrt{288} - 12) = (12 * \sqrt{2} - 12) = 12 * \sqrt{2} - 1)$.

Triangolo equilatero inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 12 e vi è inscritto un triangolo equilatero: è domandata la lunghezza dei suoi lati.



L'altezza CH è lunga i ¾ del diametro CD:

$CH = ¾ * CD = ¾ * 12 = 9$.

La freccia HD è lunga:

$HD = CD - CH = 12 - 9 = 3$.

EF è un lato del triangolo equilatero: il diametro CD lo divide in due parti uguali:

$EH = HF$.

Per ricavare la lunghezza di EH, Chuquet applica il teorema delle corde:

$CH : EH = EH : HD$ da cui:

$EH^2 = CH * HD = 9 * 3 = 27$ e

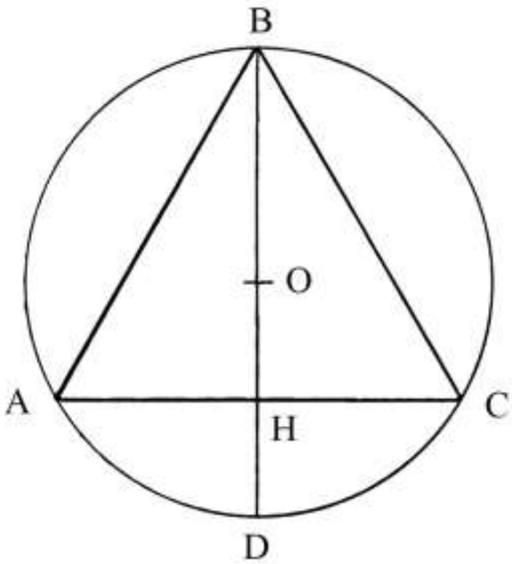
$EH = \sqrt{27}$.

Il lato EF è lungo il doppio di EH:

$EF = 2 * EH = 2 * \sqrt{27} = \sqrt{(4 * 27)} = \sqrt{108}$.

Altro triangolo equilatero inscritto in un cerchio

Il problema è l'opposto del precedente. Un triangolo equilatero ha lati lunghi 8 ed è inscritto in un cerchio: è domandato il suo diametro.



Il punto H divide in due parti uguali il lato AC:

AH = HC

OH = HD.

HD è lungo: HD = BD/4.

La lunghezza di HD è l'incognita "x".

La soluzione del problema richiede l'applicazione del teorema delle corde:

AH : HD = BH : HC.

Ma BH = 3 * HD = 3 * x, per cui la proporzione diviene:

8/2 : x = 3 * x : 8/2

$3 * x^2 = 4^2$ e

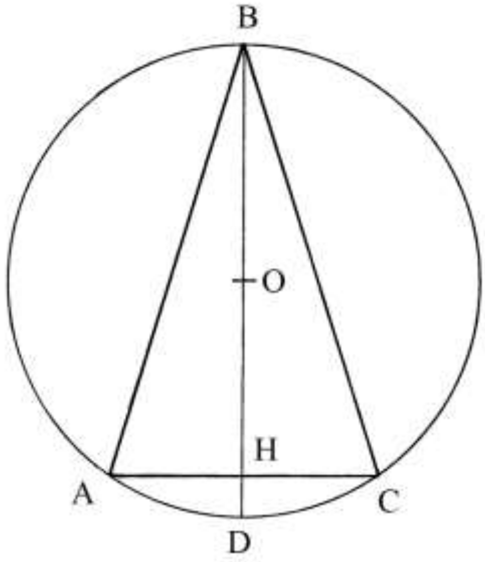
x = √(16/3).

Il diametro BD è lungo *quattro* volte HD:

BD = 4 * HD = 4 * √(16/3) = √(256/3) = √(85 + 1/3).

Triangolo isoscele inscritto in un cerchio

Un triangolo isoscele ha i due lati obliqui lunghi 10 e l'altezza BH è 91.



La lunghezza di AH è data da:

$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 10^2 – (\sqrt{91})^2 = 100 – 91 = 9$ e

$AH = \sqrt{9} = 3$.

La soluzione richiama il teorema delle corde:

BH : AH = HC : HD da cui

$HD = (AH * HC)/BH = ((3 * 3)/\sqrt{91} = \sqrt{(81/91)}$.

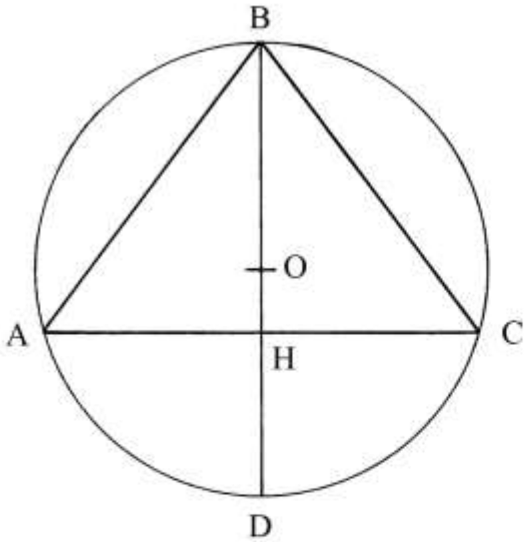
Il diametro BD è lungo:

$BD = BH + HD = \sqrt{91} + \sqrt{(81/91)}$.

<u>Altro triangolo isoscele inscritto</u>

Il triangolo isoscele ABC ha i lati obliqui lunghi 8 ed è inscritto in un cerchio che ha diametro BD lungo 10.

Il problema chiede la lunghezza del lato di base, AC.



L'altezza del triangolo isoscele, BH, è l'incognita "x".

AH e HC hanno uguale lunghezza che è data da:

$AH^2 = AB^2 – BH^2 = (8^2 – x^2)$.

Per il teorema delle corde si ha:

$AH : BH = HD : HC$
$AH : BH = HD : AH$
$AH^2 = BH * HD$
$(8^2 – x^2) = x * (10 – x)$
$64 – x^2 = 10 * x – x^2$
$64 = 10 * x$
$x = 64/10 = (6 + 2/5) = 6{,}4 = GH$.

Ne consegue:

$AH^2 = 8^2 – (6 + 2/5)^2 = 64 – (40 + 24/25) = (23 + 1/25)$ e
$AH = \sqrt{(23 + 1/25)}$.

AC è lungo il doppio di AH:

$AC = 2 * AH = 2 * \sqrt{(23 + 1/25)} = \sqrt{(92 + 4/25)}$.

Triangolo 13-14-15 inscritto

Un triangolo scaleno ha lati lunghi 13, 14 e 15 ed è inscritto in un cerchio. Deve essere calcolata la lunghezza del suo diametro.

Le lunghezze sono:

* AB = 13;
* AC = 15;
* BC = 14.

AG è un'altezza del triangolo. MN è un diametro del cerchio, parallelo a AG.

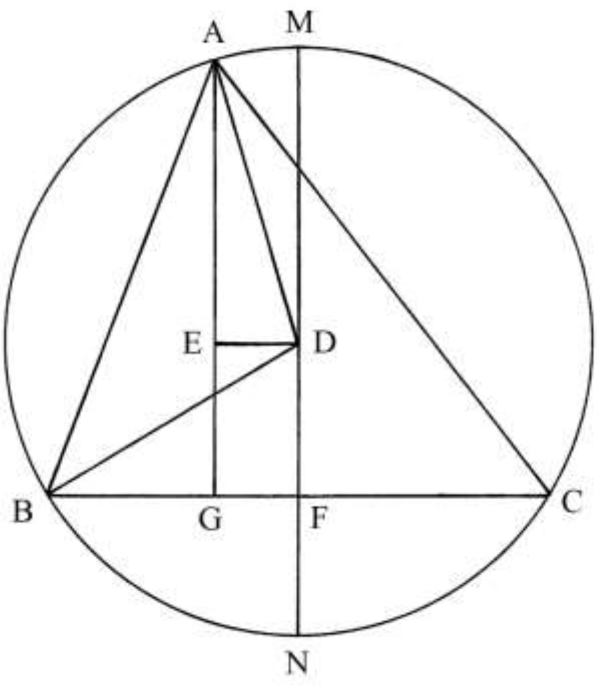
MN divide BC in due segmenti di uguale lunghezza:

BF = FC = 14/2 = 7.

D è il centro del cerchio e punto medio di MN.

Da D condurre la perpendicolare DE all'altezza AG.

Tracciare il raggio DB.



La soluzione del problema che qui è proposta è basata su quella di L'Huillier.

Prima di procedere è opportuno ricordare che l'altezza AG è lunga 12: è noto che l'area del triangolo 13-14-15 è 84 e la base BC è lunga 14, per cui l'altezza AG è data da:

$AG = 2 * S_{ABC}/BC = 2 * 84/14 = 12.$

Consideriamo il triangolo rettangolo BDF: la lunghezza di DF è l'incognita "x": DF = x.

La lunghezza del raggio BD, che è anche l'ipotenusa di BDF, è:

$BD^2 = BF^2 + DF^2 = (BC/2)^2 + x^2 = (14/2)^2 + x^2 = 49 + x^2.$

Anche il triangolo AED è rettangolo e l'ipotenusa AD, che è un raggio del cerchio, ha lunghezza che è data da:

$AD^2 = AE^2 + ED^2.$

AE è lungo:

$AE = AG – EG = AG – DF = 12 – x.$

Occorre calcolare la lunghezza di GF che è uguale a quella di ED.

BG è lungo:

$BG^2 = AB^2 – AG^2 = 13^2 – 12^2 = 169 – 144 = 25$ e

$BG = \sqrt{25} = 5.$

GF è:

$GF = BF – BG = (14/2) – 5 = 7 – 5 = 2 = ED.$

Sostituendo si ha:

$AD^2 = (12 – x)^2 + 2^2 = 144 – 24 * x + x^2 + 4.$

Le lunghezze di BD e di AD sono uguali e lo sono pure i loro quadrati per cui uguagliando le due espressioni si ottiene:

$49 + x^2 = 144 – 24 * x + x^2 + 4$

$24 * x = 99$

$x = 99/24 = 33/8 = (4 + 1/8) = DF = EG.$

Sostituiamo il valore di x nell'espressione di BD^2:

$BD^2 = 49 + x^2 = 49 + (4 + 1/8)^2 = 49 + (17 + 1/64) = (66 + 1/64)$ e

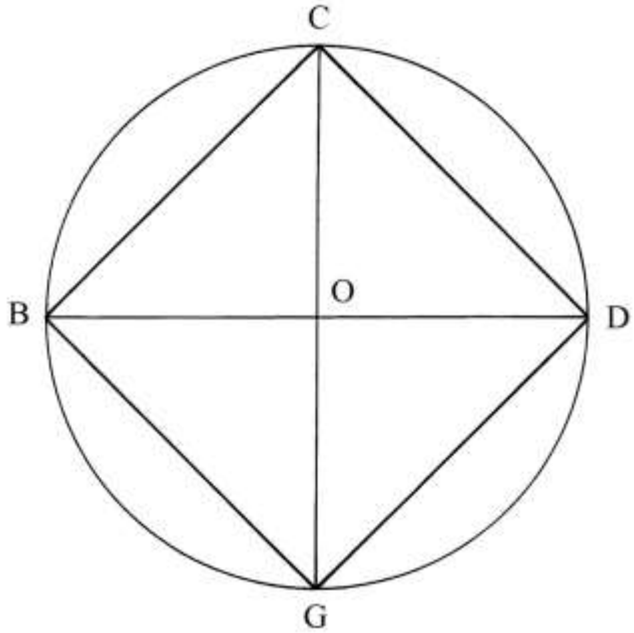
$BD = \sqrt{(66 + 1/64)} = (8 + 1/8).$

Il diametro MN è lungo il doppio del raggio BD:

$MN = 2 * BD = 2 * (8 + 1/8) = (16 + ¼).$

Quadrato inscritto in un cerchio

Un quadrato è inscritto in un cerchio di diametro 12: il problema desidera la lunghezza dei suoi lati.

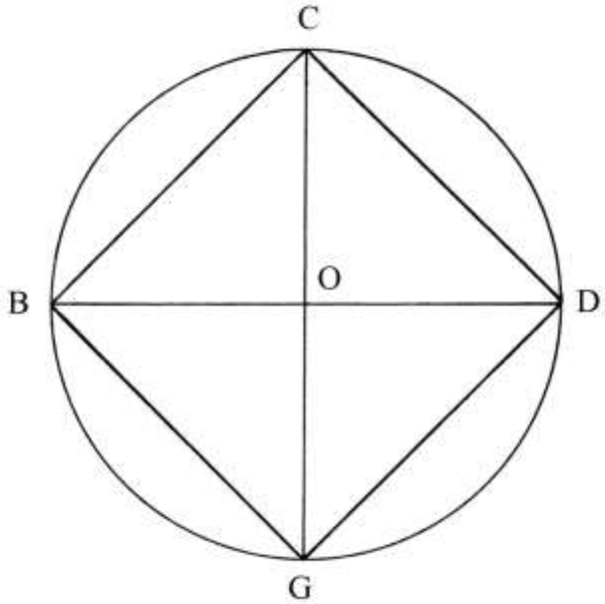


I diametri BD e CG sono le due diagonali del quadrato.
Il lato BC è lungo:

$BC^2 = BO^2 + CO^2 = (12/2)^2 + (12/2)^2 = 36 + 36 = 72$ e
$BC = \sqrt{72}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo problema ha natura inversa a quella del precedente: un quadrato con lati lunghi 8 è inscritto in un cerchio. È chiesto il suo diametro.



Il lato BC è lungo:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = 2 * OB^2$ da cui:
$OB^2 = BC^2/2 = 8^2/2 = 32$ e
$OB = \sqrt{32}$.

Il diametro BD è lungo il doppio del raggio OB:

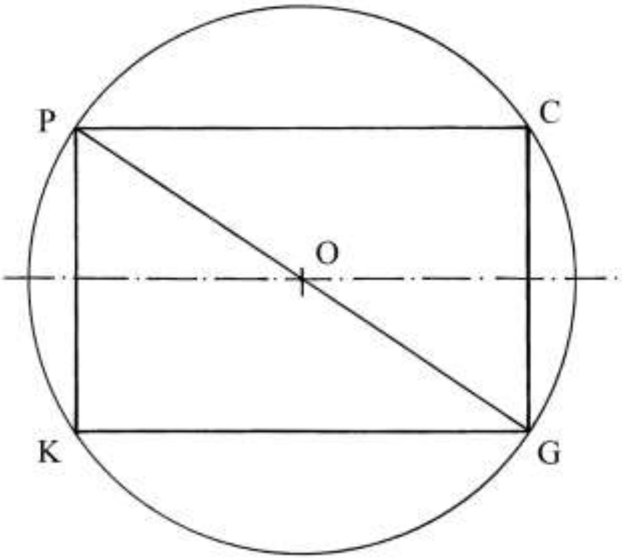
$BD = 2 * OB = 2 * \sqrt{32} = \sqrt{(4 * 32)} = \sqrt{128}$.

<u>Rettangolo inscritto in un cerchio</u>

Un rettangolo è inscritto in un cerchio che ha diametro lungo 12.

Il rapporto fra la lunghezza e la larghezza del rettangolo è *sesquialtera*:

$KG = 3/2 * PK$.



La lunghezza di PK è l'incognita "x": $PK = x$.

Ne consegue:

$KG = 3/2 * x$.

Il diametro PG è anche una delle due diagonali del rettangolo:

$PG^2 = PK^2 + KG^2 = x^2 + (3/2 * x)^2 = x^2 + 9/4 * x^2 = 13/4 * x^2$.

Ma PG è lungo 12, quindi si ha:

$13/4 * x^2 = 12^2$

$13/4 * x^2 = 144$

$x^2 = 4 * 144/13$

$x^2 = 576/13 = (44 + 4/13)$ e

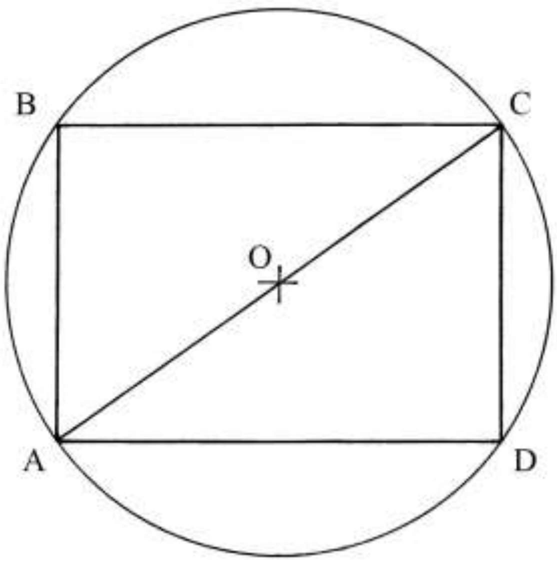
$x = \sqrt{(44 + 4/13)} = PK = CG$.

La lunghezza di KG è:

$KG = 3/2 * PK = 3/2 * \sqrt{(44 + 4/13)} = \sqrt{(99 + 9/13)}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet considera un secondo caso: un rettangolo è inscritto in un cerchio e ha larghezza AG uguale a 5 e lunghezza AD pari a 7.



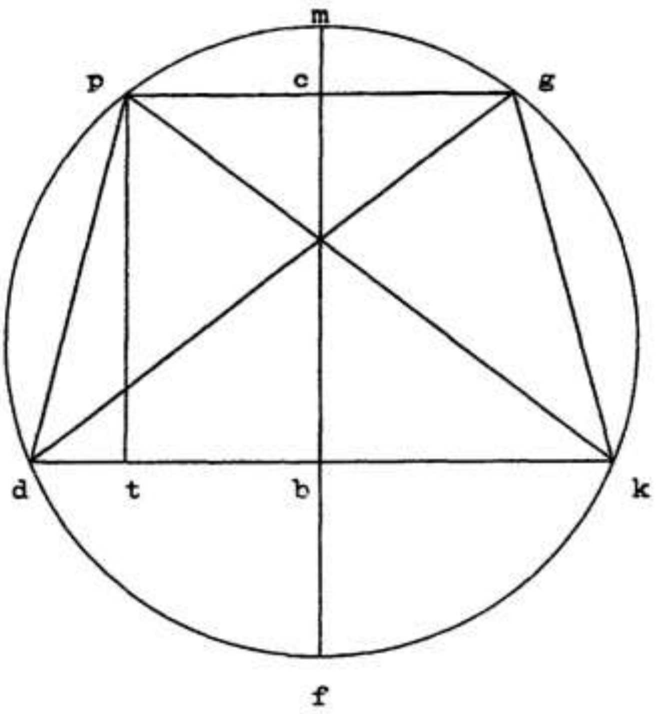
È chiesto il diametro del cerchio, AC, che è una diagonale del rettangolo.
La lunghezza di AC è:

$AC^2 = AB^2 + AD^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$ e

$AC = \sqrt{74}$.

<u>Trapezio isoscele inscritto in un cerchio</u>

DPGK è un trapezio isoscele inscritto in un cerchio, come mostra lo schema che segue riprodotto dall'originale.



La base maggiore DK è lunga 12 e quella minore PG è 8. Secondo il testo originale, i due lati obliqui DP e GK sono lunghi 6.

Il problema chiede la lunghezza della diagonale PK (che è lunga quanto la seconda diagonale GD).

Chuquet e L'Huiller calcolano la lunghezza di PK come segue.

PT è un'altezza del trapezio e la sua lunghezza è data da:

$PT^2 = DP^2 – DT^2$.

DT è lungo:

DT = (DK – PG)/2 = (12 – 8)/2 = 2.

Quindi si ha:

$PT^2 = 6^2 – 2^2 = 36 – 4 = 32$ e

$PT = \sqrt{32}$.

TK è lungo:

TK = DK – DT = 12 – 2 = 10.

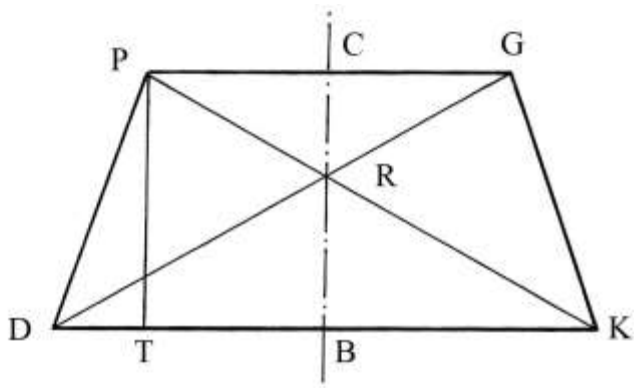
PKT è un triangolo rettangolo e PK è la sua ipotenusa la cui lunghezza è:

$PK^2 = PT^2 + TK^2 = 32 + 10^2 = 32 + 100 = 132$ e

$PK = \sqrt{132}$.

Il problema contiene un dato *errato*: i lati obliqui PD e GK non sono lunghi 6 ma più di 6.

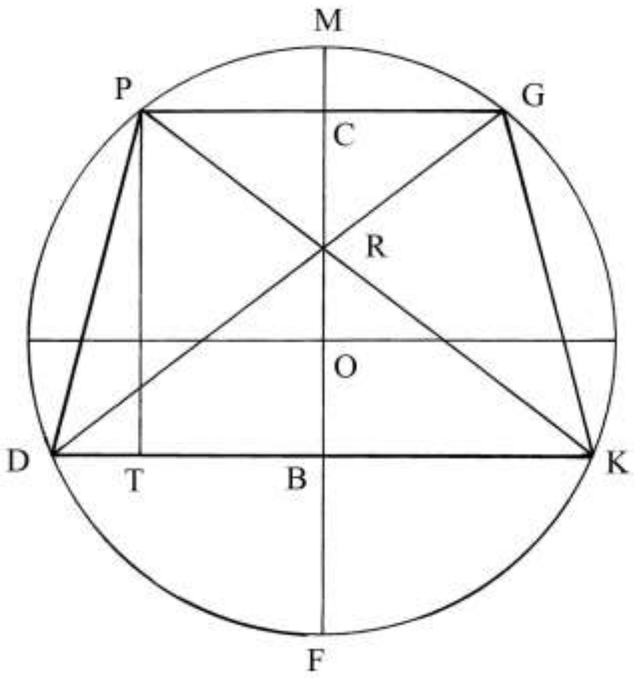
Lo schema che segue mostra l'esatta forma del trapezio isoscele con le dimensioni contenute nel trattato di Chuquet:



PG = 8
DK = 12
PD = GK = 6

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura qui sotto corregge lo schema originale, attribuendo ai lati obliqui PD e GK la lunghezza di *quasi* 8: per comodità nei successivi calcoli usiamo questo valore.



$PG = 8$
$DK = 12$
$PD = GK \approx 8$

L'altezza PT è data da:

$PT^2 = PD^2 - DT^2 = 8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60$ e
$PT = \sqrt{60}$.

TK è lungo:

$TK = DK - DT = 12 - 2 = 10$.

La lunghezza della diagonale PK è:

$PK^2 = PT^2 + TK^2 = (\sqrt{60})^2 + 10^2 = 60 + 100 = 160$ e
$PK = \sqrt{160} = 4 * \sqrt{10}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda soluzione è data dall'applicazione del *teorema di Tolomeo* (Claudio Tolomeo, circa 100-175 d.C.). Esso si riferisce ai *quadrilateri ciclici*, che sono quelli inscritti in un cerchio:

"*la somma dei prodotti delle lunghezze delle coppie di lati opposti è uguale al prodotto delle lunghezze delle diagonali*".

Nel caso concreto si ha:

$PG * DK + PD * GK = PK * DG$.

Ma PK = DG, per cui si ha:

$PG * DK + PD * GK = PK^2$
$8 * 12 + 8 * 8 = PK^2$
$PK^2 = 96 + 64$
$PK^2 = 160$ e
$PK = \sqrt{160}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ulteriore passo è il calcolo della lunghezza del diametro MF.

La lunghezza della freccia FB è l'incognita: FB = x.

Per il teorema delle corde si ha:

$DB : FB = BM : BK$

$6 : x = BM : 6$ da cui

$BM = 36/x$.

La lunghezza di CB è uguale a quella di PT:

$CB = PT = \sqrt{60}$.

La freccia MC è lunga:

$MC = BM – CB = (36/x – \sqrt{60})$.

Per il teorema delle corde si ha:

$MC : PC = CG : CF$.

CF è lungo:

$CF = CB + BF = PT + BF = (\sqrt{60} + x)$.

La proporzione diviene:

$(36/x – \sqrt{60}) : 4 = 4 : (\sqrt{60} + x)$

$(36/x – \sqrt{60}) * (\sqrt{60} + x) = 16$

$(36/x) * \sqrt{60} + 36 – 60 – x * \sqrt{60} – 16 =$

$x * \sqrt{60} – (36/x) * \sqrt{60} + 40 = 0$

$x^2 * \sqrt{60} + 40 * x – 36 * \sqrt{60} = 0$

La radice positiva di questa equazione è:

$x = (– 40 + \sqrt{10240})/(2 * \sqrt{60}) \approx 4$.

La lunghezza di BM è:

$BM = 36/FB = 36/4 = 9$.

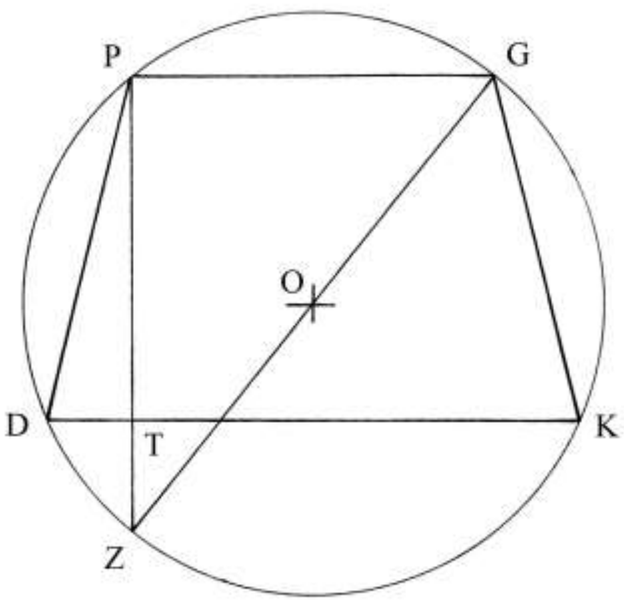
Il diametro MF è lungo:

$MF = FB + BM = 4 + 9 = 13$.

Essendo basato sull'erronea lunghezza di PD e di GK (uguali a 6), il risultato che Chuquet e L'Huillier ottengono è errato per difetto: $MF = \sqrt{(148 + ½)} \approx 12,19$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro metodo per il calcolo della lunghezza del diametro del cerchio è assistito dallo schema che segue:



-

L'altezza PT è prolungata fino a incontrare la circonferenza in Z. GZ è un diametro del cerchio.

Per il teorema delle corde si ha:

$DT : PT = TZ : TK$

$TZ = (DT * TK)/PT = (2 * 10)/\sqrt{60} = 20/\sqrt{60}$.

PGZ è un triangolo rettangolo di cui GZ è l'ipotenusa e un diametro del cerchio:

$GZ^2 = PZ^2 + PG^2$.

PZ è lungo:

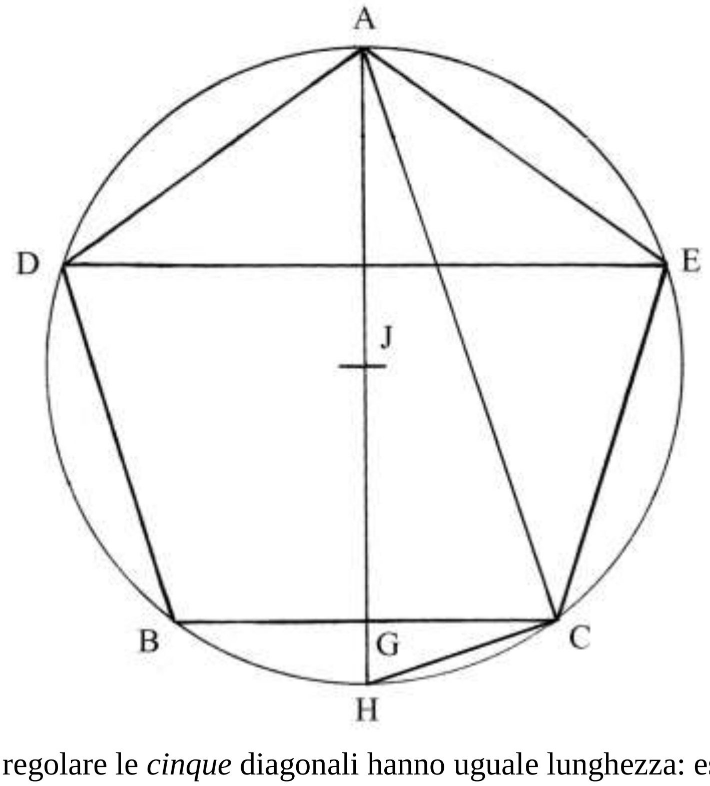
$PZ = PT + TZ = (\sqrt{60} + 20/\sqrt{60})$.

Quindi si ha:

$GZ^2 = PZ^2 + PG^2 = (\sqrt{60} + 20/\sqrt{60})^2 + 8 = (60 + 20 + 400/60 + 20) + 64 =$
$= 100 + 400/60 + 64 = (164 + 400/60) = (164 + 20/3$ e
$GZ = \sqrt{(164 + 20/3)} \approx 13$.

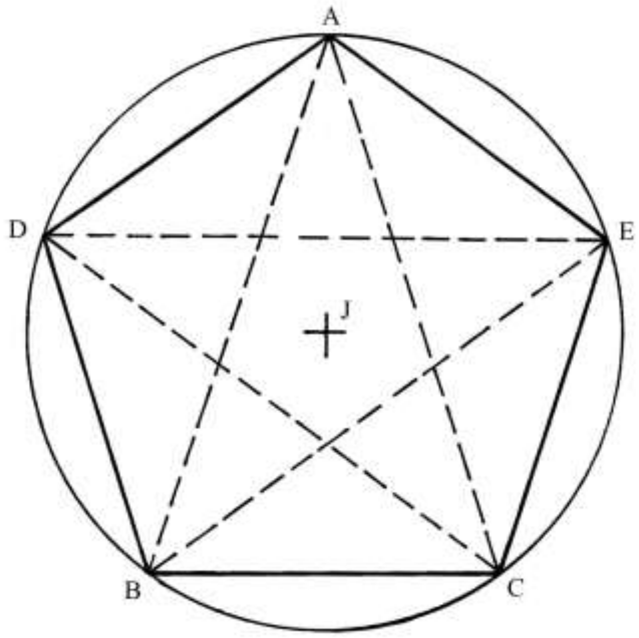
<u>Pentagono inscritto</u>

Il pentagono regolare AECBD è inscritto in un cerchio di centro J e raggio JA.
I suoi lati sono lunghi 4.
È chiesto il diametro del cerchio.



Nel pentagono regolare le *cinque* diagonali hanno uguale lunghezza: esse escono o entrano due a due da ciascun vertice:

$AB = AC = BE = CD = DE$.



Alla soluzione del problema è applicato il *teorema di Tolomeo* al trapezio isoscele inscritto BDEC, teorema già utilizzato nel caso del precedente caso del trapezio isoscele:

$DE * BC + DB * CE = DC * BE.$

DC e BE sono due diagonali del pentagono con lunghezza uguale a quella di DE.

Attribuiamo alla lunghezza di DE il valore dell'incognita: $DE = x$.

La precedente uguaglianza diviene:

$DE * BC + DB * CE = DE^2$

$x * 4 + 4 * 4 = x^2$

$x^2 – 4 * x – 16 = 0.$

La radice positiva della precedente equazione è:

$x = (2 + \sqrt{20})$

AGC è un triangolo rettangolo e il cateto AG è lungo:

$AG^2 = AC^2 – GC^2 = (2 + \sqrt{20})^2 – (4/2)^2 = 4 + 4 * \sqrt{20} – 4 = (20 + \sqrt{320})$ e

$AG = \sqrt{(20 + \sqrt{320})}.$

Per il teorema delle corde si ha:

$GH : BG = GC : AG$ da cui

$GH = (BG * GC)/AG = BG^2/AG = 2^2/\sqrt{(20 + \sqrt{320})} = 4/\sqrt{(20 + \sqrt{320})} =$

$= \sqrt{[4 – \sqrt{(12 + 4/5)}]}.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

CH è un lato del *decagono regolare* inscritto nello stesso cerchio. La sua lunghezza è data da:

$CH^2 = GH^2 + GC^2 = 2^2 + \sqrt{[4 – \sqrt{(12 + 4/5)}]}^2$ e

$CH = \sqrt{[8 – \sqrt{(12 + 4/5)}]}.$

ACH è un triangolo rettangolo inscritto nel cerchio: AH è la sua ipotenusa, oltre ad essere un diametro del cerchio, e la sua lunghezza è data da:

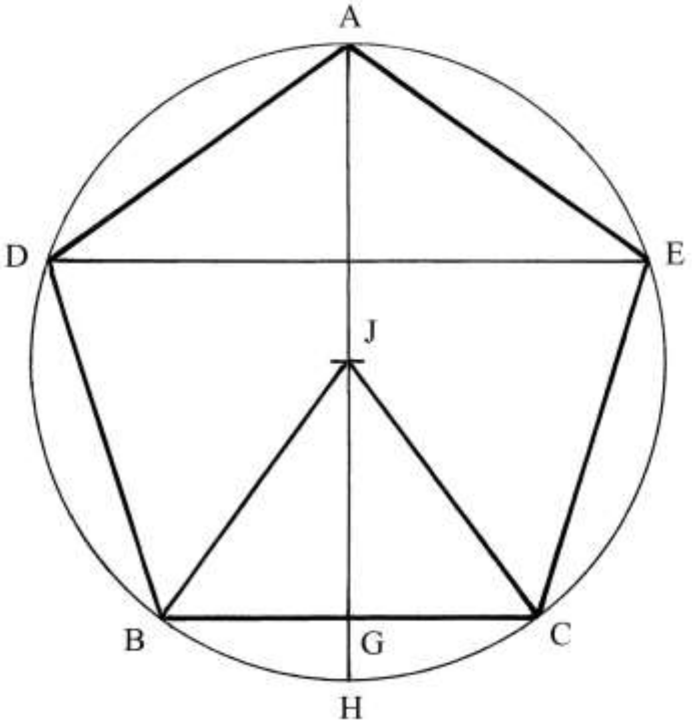
$AH^2 = AC^2 + CH^2.$

Al termina dei passaggi contenuti nel trattato di Chuquet, che qui non sono riprodotti, è fornita la lunghezza di AH:

$AH = \sqrt{[32 + \sqrt{(204 + 4/5)}]}.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore calcola poi l'area del pentagono: il poligono è scomponibile in *cinque* triangoli isosceli uguali a quello BJC.



Occorre calcolare l'altezza JG:

$JG^2 = JC^2 – CG^2 = (AH/2)^2 – CG^2 = \{\sqrt{[32 + \sqrt{(204 + 4/5)}]/2}\}^2 – 2^2 =$
$= [8 + \sqrt{(12 + 4/5)}] – 4 = [4 + \sqrt{(12 + 4/5)}]$ e
$JG = \sqrt{[4 + \sqrt{(12 + 4/5)}]}$.

L'area del pentagono è:

$S_{PENTAGONO} = 5 * S_{BJG} = 5 * (JG * GC) = 5 * \{\sqrt{[4 + \sqrt{(12 + 4/5)}]}\} * 2 =$
$= \sqrt{(400 + \sqrt{128000})}$.

L'area del decagono inscritto nello stesso cerchio è:

$S_{DECAGONO} = 10 * S_{JHC}$.

L'area di JHC è: $(JH * GC)/2$.

Quindi, l'area del decagono è:

$S_{DECAGONO} = 10 * (JH * GC)/2 = 5 * (JH * GC) = \sqrt{(800 + \sqrt{128000})}$.

- APPROFONDIMENTO -

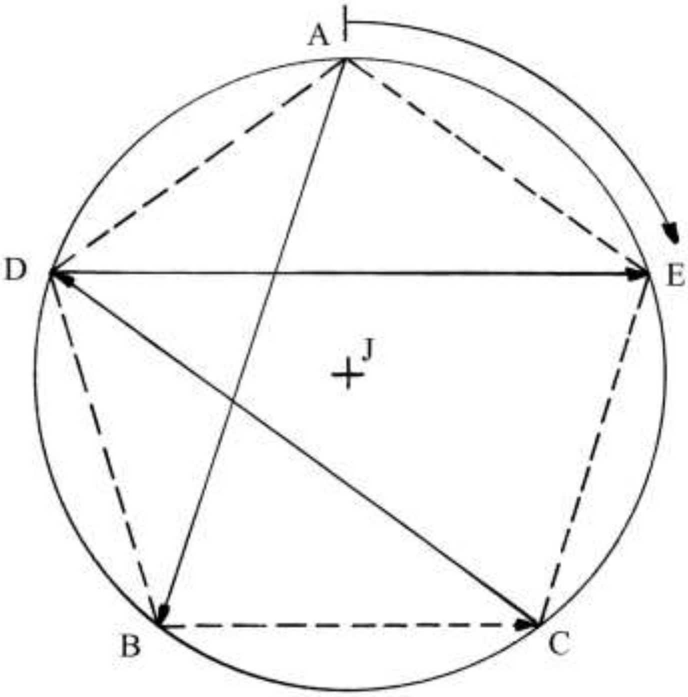
Come accade per altri poligoni, Chuquet indica il pentagono con la sigla:

.a.e.c.b.d.

Le lettere non rispettano l'ordine alfabetico.

Oggi sono usate le lettere maiuscole e non sono scritti i punti separatori fra di esse: AECBD.

Chuquet ha designato il poligono partendo dal vertice .a. = A e muovendo in senso orario:



La successione alfabetica delle lettere apposte ai vertici è rappresentata dai vettori che sono tracciati nella figura:

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$.

AB, CD e DE sono tre diagonali del pentagono e solo BC è un lato.

- -

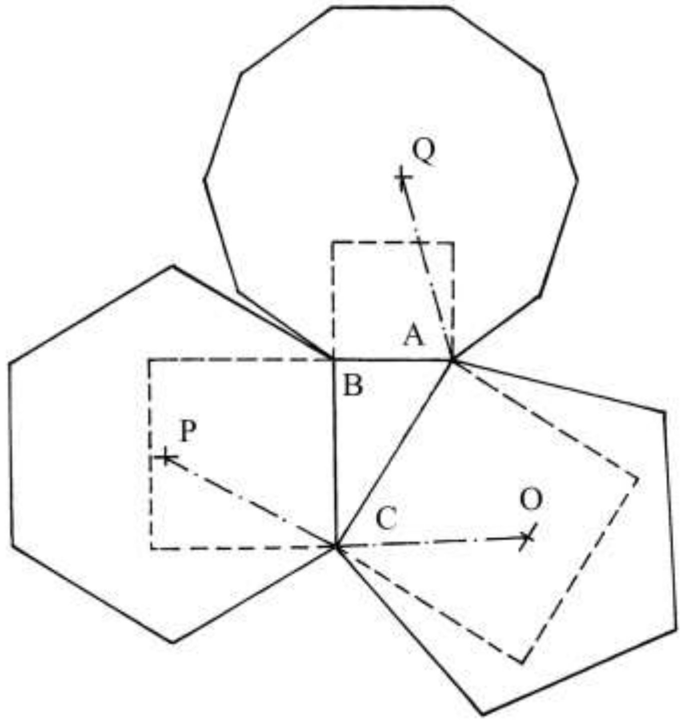
Chuquet conclude l'argomento con un richiamo alla proposizione 10 del XIII libro degli *Elementi* di Euclide: tre poligoni regolari sono inscritti in un cerchio: sono un pentagono, un esagono e un decagono.

La costruzione che segue semplifica la proposizione: i tre poligoni sono inscritti in altrettanti cerchi – non disegnati – con raggi uguali: CO = CP = AQ.

I lati dei tre poligoni formano il triangolo rettangolo ABC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Il succo della proposizione è: il quadrato costruito sul lato del pentagono (ipotenusa AC) è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati dell'esagono (cateto BC) e del decagono (cateto AB).



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, Chuquet fornisce una formula per calcolare l'area del pentagono inscritto:

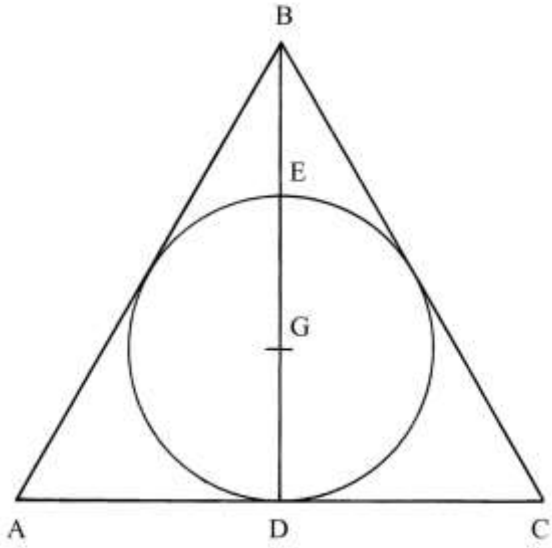
$S_{\text{PENTAGONO}} = (5/6 * DE) * (3/4 * AH) = 15/24 * (DE * AH) = 5/8 * (DE * AH)$.

DE è la lunghezza di una diagonale e AH è il diametro del cerchio in cui è inscritto il pentagono.

FIGURE INSCRITTE IN UN TRIANGOLO

Cerchio inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12. Vi è inscritto un cerchio: il problema chiede la lunghezza del diametro.



G è il centro del cerchio: esso è l'*incentro*, punto di intersezione delle bisettrici dei tre angoli interni.

Il punto G divide l'altezza BD in due parti:

BG : 2 = GD : 1.

Occorre calcolare la lunghezza di BD:

$BD^2 = AB^2 – AD^2 = 12^2 – (12/2)^2 = 144 – 36 = 108$ e

BD = √108 [= 6 * √3].

GD è lungo un terzo di BD:

GD = (√108)/3 = √(108/9) = √12 [= 2 * √3].

Il diametro ED è lungo:

ED = 2 * GD = 2 * √12 = √48 [= 4 * √3].

Triangoli equilateri concentrici

Due triangoli equilateri sono concentrici: quello esterno ha lati lunghi 12 e quello interno ha lati distanti 2 da quelli del primo.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del triangolo interno.

L'altezza GC è lunga √108, come sappiamo dalla soluzione del precedente problema.

AC è il raggio del cerchio inscritto nel triangolo esterno ed è lungo *un terzo* di GC:

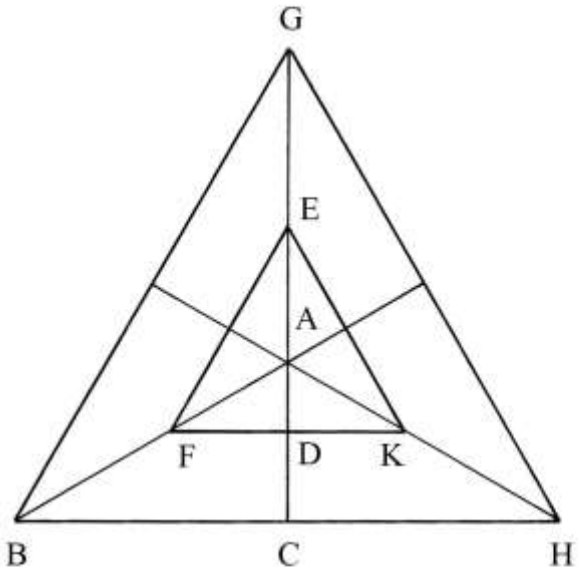
AC = GC/3 = (√108)/3 = √(108/9) = √12.

AD è lungo:

AD = AC – 2 = √12 – 2.

ED è un'altezza del triangolo interno:

ED = 3 * AD = 3 * (√12 – 2) = (√108 – 6).



La lunghezza di ED è legata a quella dei lati del triangolo interno:

$ED = (\sqrt{3})/2 * FK$ da cui:

$FK = 2/(\sqrt{3}) * ED = 2/(\sqrt{3}) * (\sqrt{108} - 6) = (2 * \sqrt{3})/3 * (\sqrt{108} - 6) =$
$= 2/3 * \sqrt{324} - (12 * \sqrt{3})/3 = (12 - \sqrt{48})$.

%%%

Il problema chiede poi l'area S della figura delimitata dai due triangoli.

Chuquet propone due metodi: il primo somma i perimetri dei due triangoli e moltiplica il risultato per la lunghezza di DC per poi dividere per 2:

$S = [(GH + HB + BG) + (EK + KF + FE)] * DC/2 = [3 * 12 + 3 * (12 - \sqrt{48})] * 2/2 =$
$= 36 + 36 - 3 * \sqrt{48} = 72 - \sqrt{432}$.

Una seconda soluzione consiste nel sottrarre l'area del triangolo interno da quella del triangolo esterno:

$S = S_{GHB} - S_{EKF}$.

Le due aree sono calcolate con la formula di Erone.

Il semiperimetro del triangolo GHB è 18 e l'area è:

$S_{GHB} = \sqrt{(18 * 6^3)} = \sqrt{(3 * 6^4)} = 36 * \sqrt{3}$.

Il semiperimetro del triangolo interno EKF è:

$3 * (12 - \sqrt{48})/2 = 18 - \sqrt{(9/4 * 48)} = (18 - \sqrt{108})$.

L'area di EKF è:

$S_{EKF} = \sqrt{\{(18 - \sqrt{108}) * [(18 - \sqrt{108}) - (12 - \sqrt{48})]^3\}}$.

L'area S è:

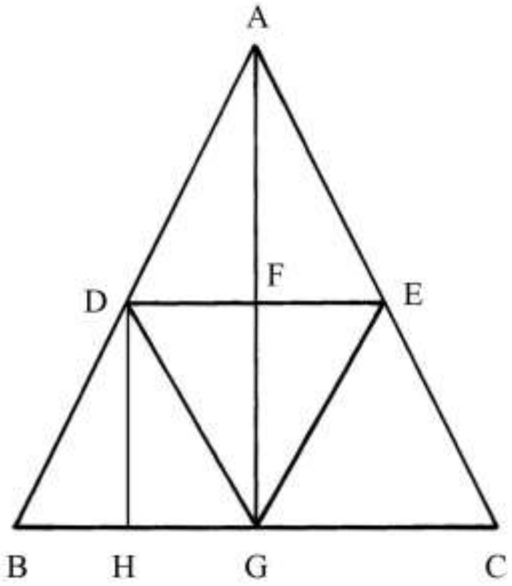
$S = S_{GHB} - S_{EKF} = (72 - \sqrt{432}) = 72 - 12 * \sqrt{3} = 12 * (6 - \sqrt{3})$.

Triangolo equilatero inscritto in un triangolo isoscele

ABC è un triangolo isoscele che ha la base e l'altezza entrambe lunghe 8.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del più grande triangolo equilatero inscritto.

Stando agli schemi contenuti nel volume a stampa, il triangolo equilatero DEG è disegnato capovolto e il suo vertice G coincide con il punto medio della base BC.



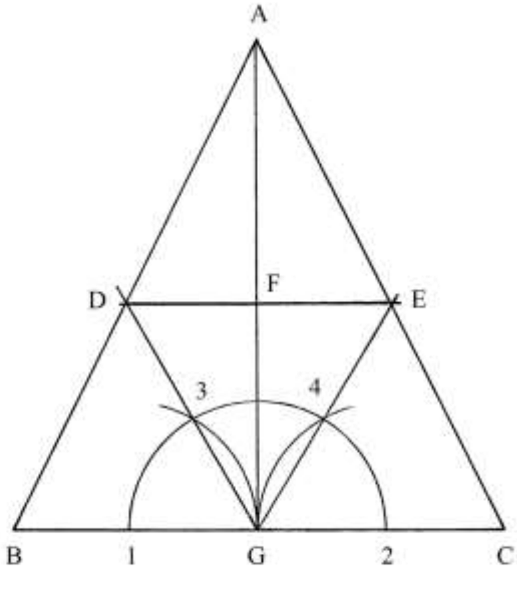
Il lato DE è parallelo alla base BC.

I lati obliqui del triangolo ABC, AB e AC, sono lunghi:

$AB^2 = AG^2 + BG^2 = AG^2 + (BC/2)^2 = 8^2 + (8/2)^2 = 64 + 16 = 80$ e

$AB = AC = \sqrt{80}$ [= 4 * $\sqrt{5}$].

Le soluzioni offerte da Chuquet sono algebriche. Per via geometrica è facile inscrivere un triangolo equilatero nel triangolo isoscele ABC con il metodo presentato nello schema che segue (che peraltro non è previsto nel *Trattato* del matematico francese):



Fare centro in G e con raggio a piacere disegnare la semicirconferenza da 1 a 2 e, con la stessa apertura, fare centro in 1 e in 2 e tracciare altri due archi che tagliano la semicirconferenza in 3 e in 4. Da G condurre due segmenti passanti per 3 e per 4: sono GD e GE.

GDE è il triangolo equilatero inscritto.

Si pone ora il problema di calcolare la lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

Chuquet propone *tre* diverse soluzioni. Qui di seguito è considerata la prima.

I triangoli ABC e ADE sono simili e entrambi isosceli; vale la seguente proporzione:

$BC : AG = DE : AF$

$8 : 8 = DE : AF.$

Ne consegue: $DE = AF.$

Chuquet attribuisce alla lunghezza di $AF = DE$ il valore dell'incognita:

$DE = x.$

DF è lungo: $DF = DE/2 = x/2.$

L'altezza AG è lunga:

$AG = AF + FG.$

FG è un'altezza del triangolo equilatero GDE:

$FG = (\sqrt{3})/2 * DE = (\sqrt{3})/2 * x.$

Quindi:

$AG = x + (\sqrt{3})/2 * x.$

Ma AG = 8, per cui si ha:

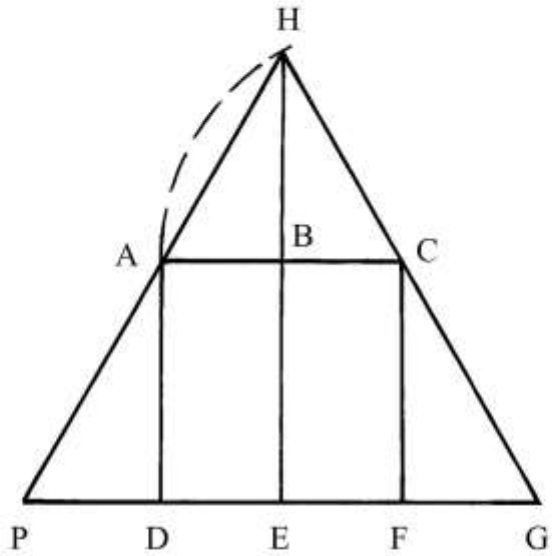
$x + (\sqrt{3})/2 * x = 8$

$x * [1 + (\sqrt{3})/2] = 8$

$x = 8/[1 + (\sqrt{3})/2] = 8 * [1 – (\sqrt{3})/2] * (1 – ¾) = 32 – \sqrt{768}$ $[= 32 – 16 * \sqrt{3}] = DE$, lunghezza dei lati del più grande triangolo equilatero inscritto.

Quadrato inscritto in un triangolo equilatero

ACFD è un quadrato che ha lati lunghi 4. Esso è inscritto in un triangolo equilatero di cui deve essere calcolata la lunghezza dei lati.



I quattro vertici del quadrato devono giacere sui lati del triangolo equilatero che viene, per così dire, costruito intorno al triangolo stesso.

BE è una mediana del quadrato, prolungata verso l'alto.

Prolungare verso destra e verso sinistra il lato DF.

Con raggio CA fare centro in C e tracciare l'arco che sale da A fino a incontrare in H il prolungamento di BE.

Dal punto H disegnare le linee passanti per A e per C fino a fissare i punti P e G.

PHG è il triangolo equilatero circoscritto al quadrato ACFD.

I triangoli AHC e PHG sono simili ed entrambi equilateri.

L'0altezza HE è: $HE = HB + BE.$

La lunghezza di HB è data da:

$HB^2 = AH^2 – AB^2 = AC^2 – AB^2 = 4^2 – (4/2)^2 = 16 – 4 = 12$ e

HB = √12.

Ne consegue: HE = (√12 + 4).

Dato che HE è un'altezza del triangolo equilatero PHG, la lunghezza dei lati di questo ultimo è legata a quella della prima:

HE = (√3)/2 * HP e

HP = (2/√3) *b HE = (2/√3) * (√12 + 4) = [4 + (√3) * 8/3].

Per la lunghezza di HG (e quindi per quella identica di HP) Chuquet fornisce un risultato espresso in forma più complessa:

HG (= HP) = √[(37 + 1/3) + √(1365 + 1/3)].

Semplificando questa espressione è dimostrabile che essa equivalga a [4 + (√3) * 8/3].

L'area del triangolo equilatero PHG è:

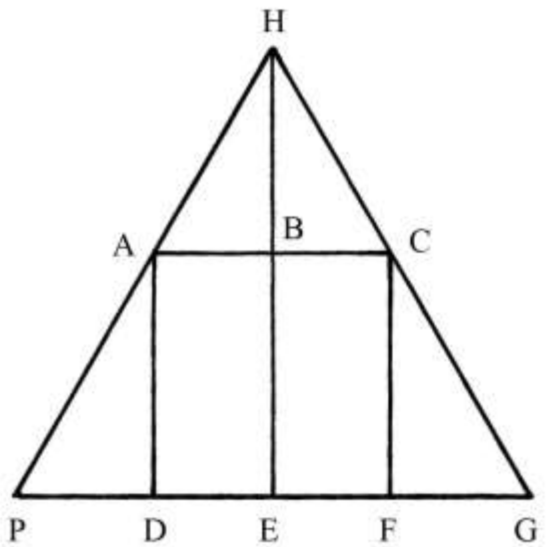
S_{PHG} = HE * GP2/ = HE * HP/2 = (√12 + 4) * [4 + (√3) * 8/3]/2 = (16 + 28/3 * √3).

Chuquet fornisce un risultato identico, ma espresso in forma più complessa:

S_{PHG} =16 + √(261 + 1/3).

<u>Altro quadrato inscritto in un triangolo equilatero</u>

Il problema è di segno opposto al precedente. È dato il triangolo equilatero PHG con lati lunghi 8. Vi è inscritto il quadrato più grande possibile, ACFD.



Il problema chiede la lunghezza dei lati del quadrato.

AD è la lunghezza incognita: AD = x.

I triangoli PHG e AHC sono simili ed entrambi equilateri.

I lati di AHC sono lunghi quanto quelli del quadrato ACFD.

L'altezza HE è:

$HE^2 = HP^2 – PE^2$ = 82 – 42 = 64 – 16 = 48 e

HE = √48.

Ma HE è anche:

HE = HB + BE.

HB è un'altezza di AHC e la sua lunghezza è:

$HB^2 = AH^2 – AB^2 = x^2 – (x/2)^2 = ¾ * x^2$ e

HB = √3 * x/2.

Quindi: $HE = \sqrt{3} * x/2 + x = x * (\sqrt{3} + 2)/2$.

Ma HE è lungo $\sqrt{48}$:

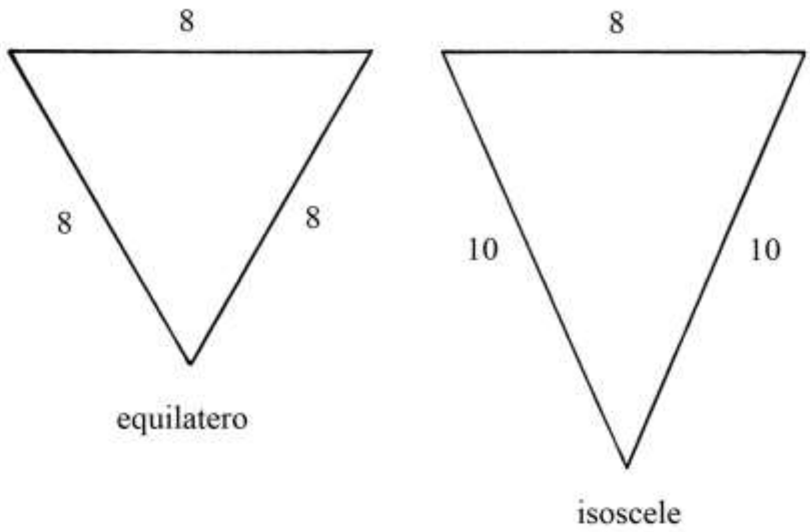
$x * (\sqrt{3} + 2)/2 = \sqrt{48}$

$x = (\sqrt{48}) * 2/(\sqrt{3} + 2) = 16 * \sqrt{3} - 24 = 8 * (2 * \sqrt{3} - 3)$.

- APPROFONDIMENTO -

Nei trattati d'abaco italiani anteriori o contemporanei al testo geometrico di Chuquet sono presenti numerosi problemi sui triangoli, isosceli e equilateri.

I triangoli vi sono spesso chiamati "scudo" o "scudi" e sono comunemente disegnati capovolti, come mostrano i due esempi:

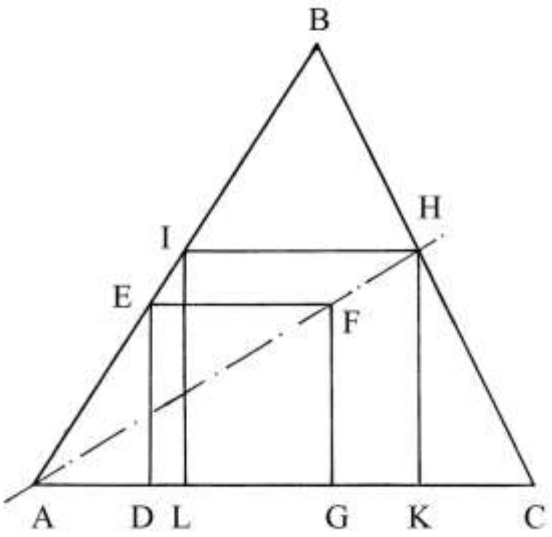


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un quadrato può essere inscritto in un triangolo equilatero, isoscele o scaleno con la costruzione che è qui di seguito presentata.

L'esempio si riferisce a un generico triangolo scaleno.

Il quadrato inscritto è il più grande possibile. Esso deve avere un lato poggiato sulla base AC.



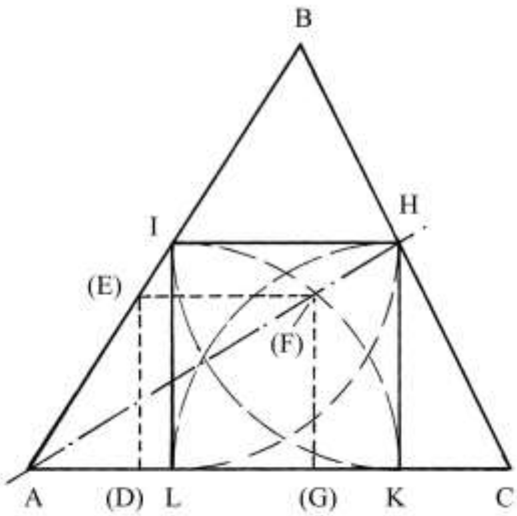
Costruire un quadrato con lati lunghi a piacere, come DEFG, a condizione che tre suoi vertici giacciano su due lati del triangolo: sono D, E e G.

Tracciare una retta passante per i punti A e F: essa incontra BC nel punto H.

Da H condurre la parallela HI alla base AC e la perpendicolare HK a questa ultima.

Da I abbassare la perpendicolare IL alla base AC.

Verificare che i segmenti HI e HK abbiano uguale lunghezza.



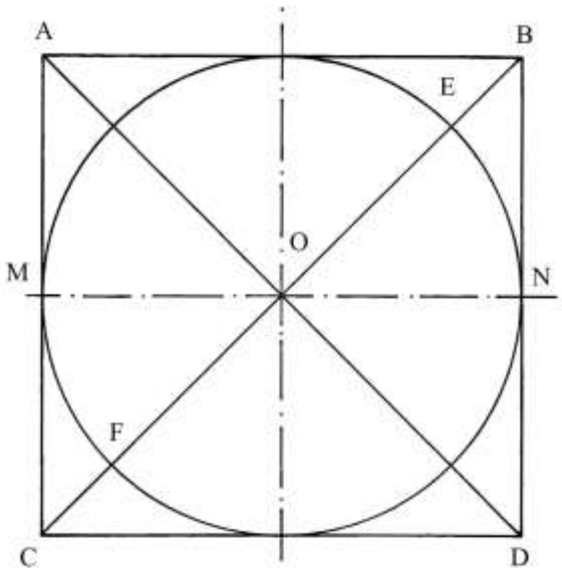
HKLI è il quadrato inscritto cercato ed è il più grande possibile.

- -

<u>Quadrato circoscritto a un cerchio</u>

Un cerchio è inscritto in un quadrato che ha lati lunghi 10.

Il problema chiede la differenza fra la lunghezza di una diagonale del quadrato e quella di un diametro del cerchio.



La diagonale BC è lunga:

$BC^2 = CD^2 + BD^2 = 10^2 + 10^2 = 200$ e

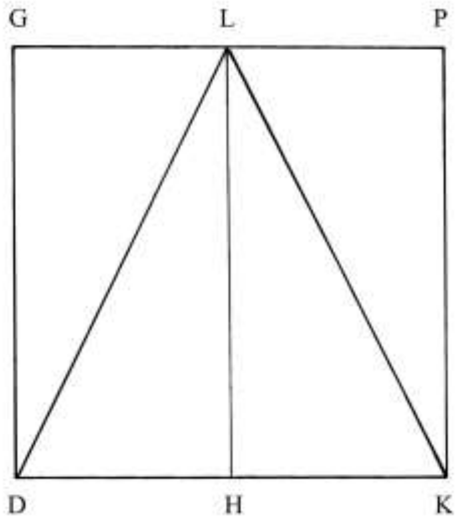
$BC = \sqrt{200} = 10 * \sqrt{2}$.

EF è un diametro del cerchio che è sovrapposto alla diagonale BC. La differenza fra le loro lunghezze è:

$BC – EF = BC – CD = 10 * \sqrt{2} – 10 = 10 * (\sqrt{2} – 1)$.

<u>Triangolo isoscele inscritto in un quadrato</u>

DGPK è un quadrato che ha lati lunghi 12.



Al suo interno è inscritto il triangolo isoscele DLK che ha la base coincidente con il lato DK del quadrato e altezza sovrapposta alla mediana verticale LH.

È chiesta la lunghezza dei lati obliqui del triangolo.

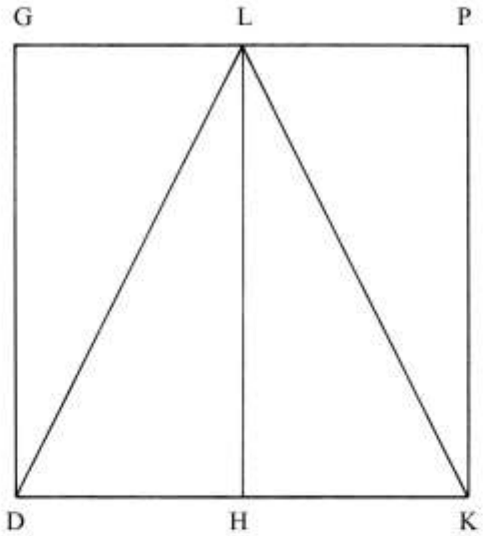
La lunghezza di DL è data da:

$DL^2 = DG^2 + GL^2 = 12^2 + (12/2)^2 = 144 + 26 = 180$ e

$DL = \sqrt{180} = 6 * \sqrt{5}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet propone poi un problema che è l'inverso del precedente:



Il solito triangolo isoscele DLK è inscritto nel quadrato DGPK: è nota solo la lunghezza dei lati obliqui del triangolo:

DL = KL = 14.

Deve essere calcolata la lunghezza dei lati del quadrato DGPK.

GD è la lunghezza incognita: GD = x.

DL è lungo:

$DL^2 = DG^2 + GL^2 = DG^2 + (DG/2)^2 = x^2 + (x/2)^2 = 5/4 * x^2$.

Uguagliando, si ha:

$14^2 = 5/4 * x^2$

$196 = 5/4 * x^2$

$x^2 = 4/5 * 196$

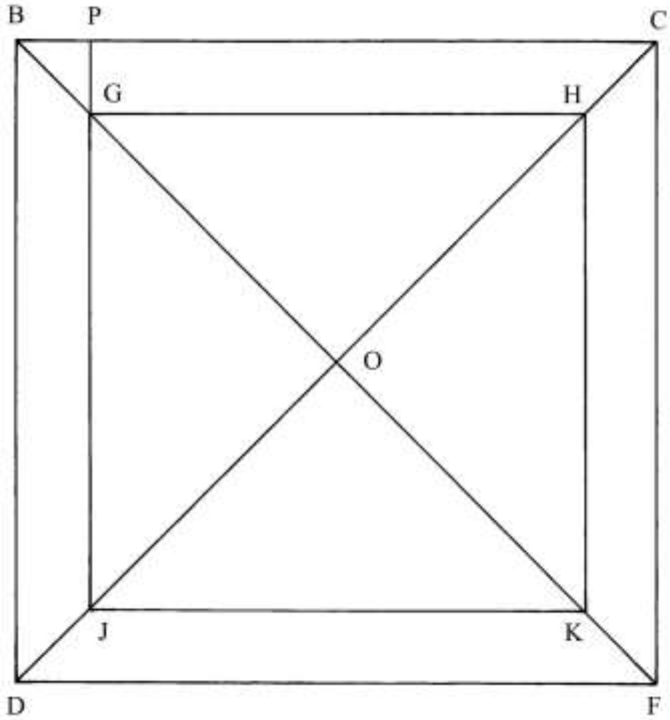
$x^2 = (156 + 4/5)$ e

$x = \sqrt{(156 + 4/5)}$.

<u>Due quadrati concentrici</u>

Due quadrati concentrici hanno aree:

* quello esterno 20;
* quello interno 12.



Il problema chiede la distanza esistente fra i perimetri dei due quadrati, PG in figura.
La lunghezza di PG è data da:

$PG = (BD – GJ)/2 = (\sqrt{20} - \sqrt{12})/2 = (\sqrt{5} - \sqrt{3})$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un'altra soluzione, assai più complessa, è suggerita da Chuquet. Egli utilizza le diagonali:

$BF^2 = 2 * S_{BCFD} = 2 * 20 = 40$, dove "$S_{BCFD}$" è l'area del quadrato esterno.

$GK^2 = 2 * S_{GHKJ} = 2 * 12 = 24$ [S_{GHKJ} è l'area del quadrato interno].

Ne consegue:

$BF = \sqrt{40}$ e $GK = \sqrt{24}$.

$BG = (BF – GK)/2 = (\sqrt{40} – \sqrt{24})/2 = (\sqrt{10} – \sqrt{6})$.

Dato che BG^2 è: $BG^2 = 2 * PG^2$, risulta:

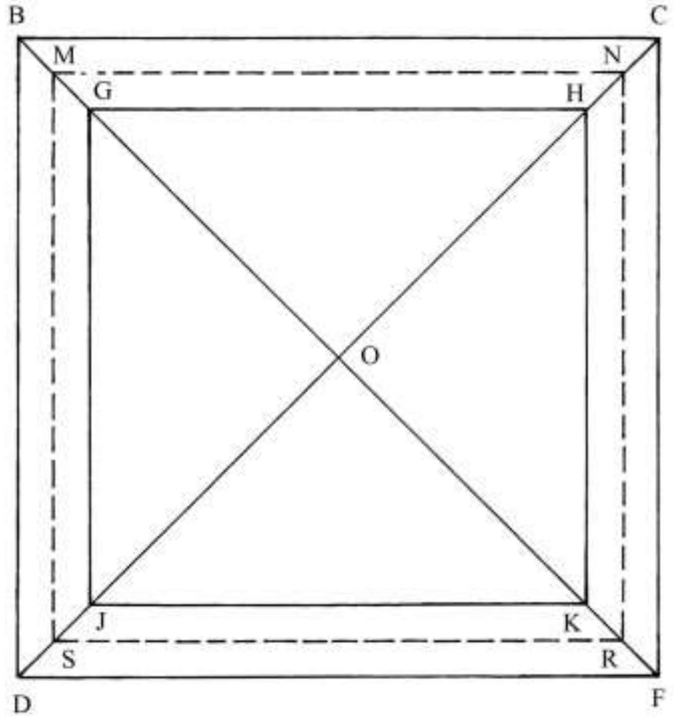
$PG = BG/\sqrt{2} = (\sqrt{10} – \sqrt{6})/\sqrt{2} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet procede a ricavare l'area della superficie compresa fra i due quadrati.

$S_{DIFFERENZA} = S_{BCFD} – S_{GHKJ} = 20 – 12 = 8$.

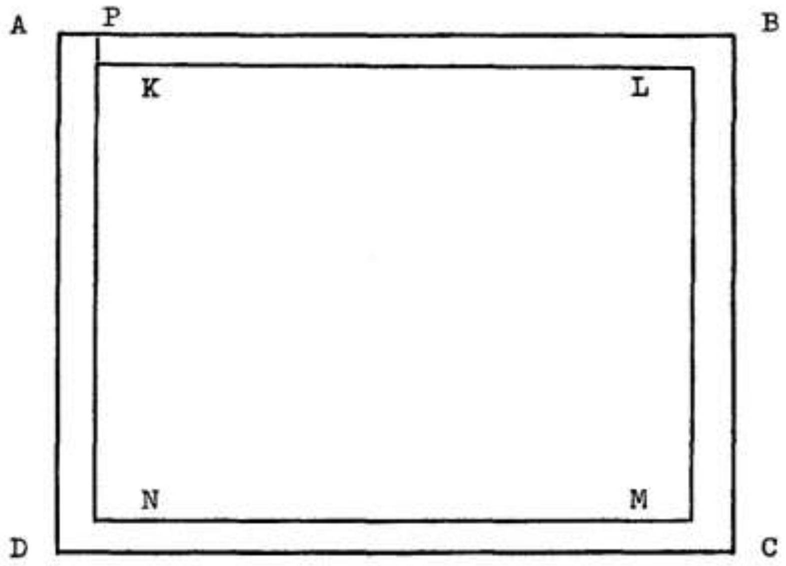
L'Autore propone pure un'altra soluzione, assai più complicata, della quale sono di seguito presentati i vari passi:



* calcolare la cosiddetta "circonferenza" (il *perimetro*) del quadrato esterno: $4 * BC = 4 * \sqrt{20}$;
* calcolare il perimetro del quadrato interno: $4 * GH = 4 * \sqrt{12}$;
* sommare i due perimetri: $4 * \sqrt{20} + 4 * \sqrt{12} = 4 * (\sqrt{20} + \sqrt{12})$;
* dividere per 2: $4 * (\sqrt{20} + \sqrt{12})/2 = 2 * (\sqrt{20} + \sqrt{12})$, perimetro del quadrato intermedio, MNRS;
* moltiplicare per la lunghezza di PG: $2 * (\sqrt{20} + \sqrt{12}) * (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{80} + \sqrt{48}) * (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{400} - \sqrt{240} + \sqrt{240} - \sqrt{144} = \sqrt{400} - \sqrt{144} = 20 - 12 = 8$.

Due rettangoli concentrici

Un rettangolo, ABCD in figura, ha i lati AB e CD lunghi 9 e quelli AD e BC lunghi 7.
Lo schema che segue è riprodotto da pagina 360 del volume di L'Huillier.



All'interno di ABCD è inscritto un secondo rettangolo, KLMN, che ha area uguale a 60.
Il problema chiede la lunghezza di PK e cioè la distanza fra i lati dei due rettangoli.
Il perimetro di ABCD è lungo:

perimetro ABCD = AB + BC + CD + DA = 9 + 7 + 9 + 7 = 32.

La lunghezza di PK è l'incognita: PK = x.
KL è lungo: KL = AB – 2 * x = 9 – 2 * x.
KN è: KN = AD – 2 * x = 7 – 2 * x.
Il perimetro di KLMN è:

perimetro KLMN = KL + LM + MN + NK = 2 * KL + 2 * KN =
= 2 * (9 – 2 * x) + 2 * (7 – 2 * x) = (32 – 8 * x).

La distanza fra i lati dei due rettangoli è costante e uguale a PK.
Un rettangolo intermedio fra ABCD e KLMN e da loro equidistante ha perimetro che è dato dalla semisomma dei due perimetri:

perimetro rettangolo intermedio = (perimetro ABCD + perimetro KLMN)/2 =
= [32 + (32 – 8 * x)]/2 = (32 – 4 * x).

Moltiplicando il perimetro del rettangolo intermedio per la lunghezza di PK si ha la sua area che è uguale alla differenza fra le aree di ABCD e di KLMN:

$(32 - 4 * x) * x = S_{ABCD} - S_{KLMN}$
(32 – 4 * x) * x = (9 * 7) – 60
(32 – 4 * x) * x = 3
$32 * x - 4 * x^2 - 3 = 0$
$4 * x^2 - 32 * x + 3 = 0$

La radice risolutiva di questa equazione è:

x = [4 – √(15 + ¼)] = KP.

Le lunghezze di KL e di KN sono:

KL = AB – 2 * KP = 9 – 2 * [4 – √(15 + ¼)] = 9 – 8 + 2 * √(15 + ¼) =
= 1 + √[4 * (15 + ¼)] = 1 + √61 = √61 + 1.
KN = AD – 2 * KP = 7 – 2 * [4 – √(15 + ¼)] = 7 – 8 + 2 * √(15 + ¼) =
= – 1 + √[4 * (15 + ¼)] = – 1 + √61 = √61 – 1.

Il perimetro di KLMN è:

perimetro KLMN = 2 * KL + 2 * KN = 2 * (√61 + 1) + 2 * (√61 – 1) =
= 4 * √61 = √976.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ulteriore metodo è qui descritto.

La differenza fra le lunghezze di AB e di AD è:

$AB – AD = 9 – 7 = 2.$

Viene ipotizzato che anche la differenza fra le lunghezze di KL e KN sia uguale a 2:

$KL – KN = 2$ e $KL = KN + 2.$

L'area di KLMN è:

$S_{KLMN} = KL * KN = (KN + 2) * KN = 60.$

Assegnando a KN il valore dell'incognita "y" si ha:

$(y + 2) * y = 60$

$y^2 + 2 * y – 60 = 0$

$y = [-2 \pm \sqrt{(4 + 240)}]/2 = (\sqrt{244})/2 – 2/2 = (\sqrt{61} – 1) = KN.$

Per "y" è stata scelta la radice positiva dell'equazione.

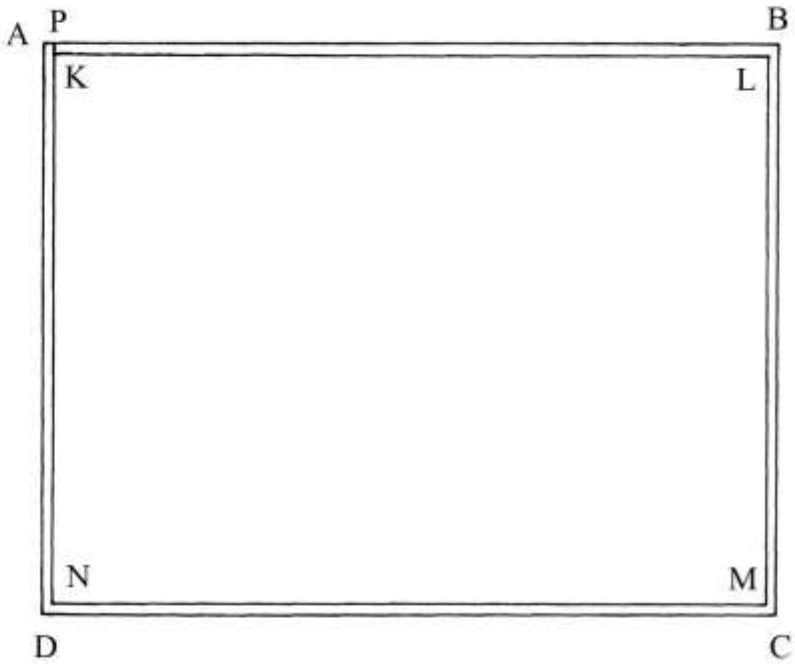
La lunghezza di KL è:

$KL = KN + 2 = (\sqrt{61} – 1) + 2 = \sqrt{61} + 1.$

Verifichiamo il valore dell'area di KLMN:

$S_{KLMN} = KL * KN = (\sqrt{61} + 1) * (\sqrt{61} – 1) = 61 – \sqrt{61} + \sqrt{61} – 1 = 60$, che è l'area del rettangolo interno fornita come dato iniziale del problema.

Lo schema che segue riproduce *in scala* i due rettangoli oggetto di questo problema:

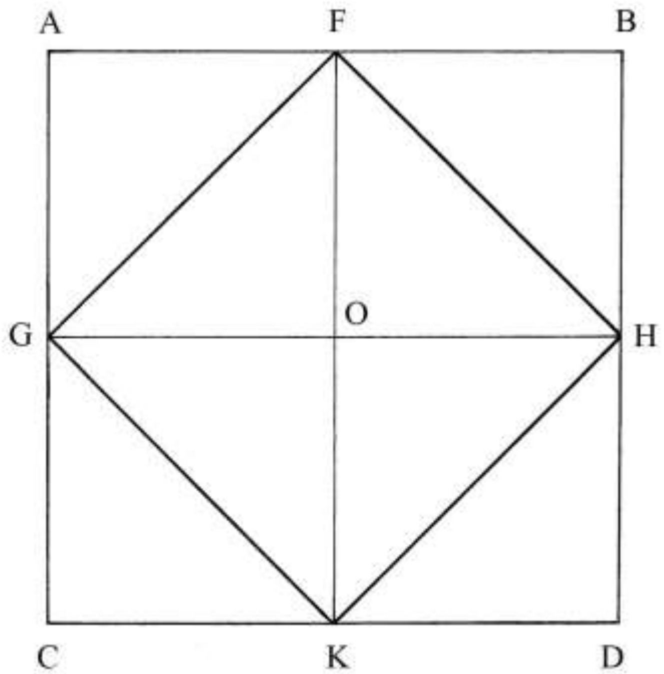


Quadrato inscritto in un altro

ABCD è un quadrato che ha area uguale a 40.

Al suo interno è inscritto un secondo quadrato, GFHK, che ha i vertici posizionati sui punti medi del primo quadrato.

È chiesta la lunghezza dei lati del quadrato inscritto.



La lunghezza dei lati del quadrato esterno è:

$AB = \sqrt{40} = 2 * \sqrt{10}$.

AF e AG sono lunghi la metà di AB (e di AC):

$AF = AG = AB/2 = \sqrt{10}$.

La lunghezza di GF è:

$GF^2 = AF^2 + AG^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 20$ e

$GF = \sqrt{20} = 2 * \sqrt{5}$.

L'area del quadrato interno è:

$S_{GFHK} = GF^2 = (\sqrt{20})^2 = 20$.

Le lunghezze dei lati dei due quadrati sono in proporzione:

$AB : GF = \sqrt{40} : \sqrt{20} = \sqrt{2} : 1$.

Le aree dei due quadrati rispettano anche esse una proporzione.

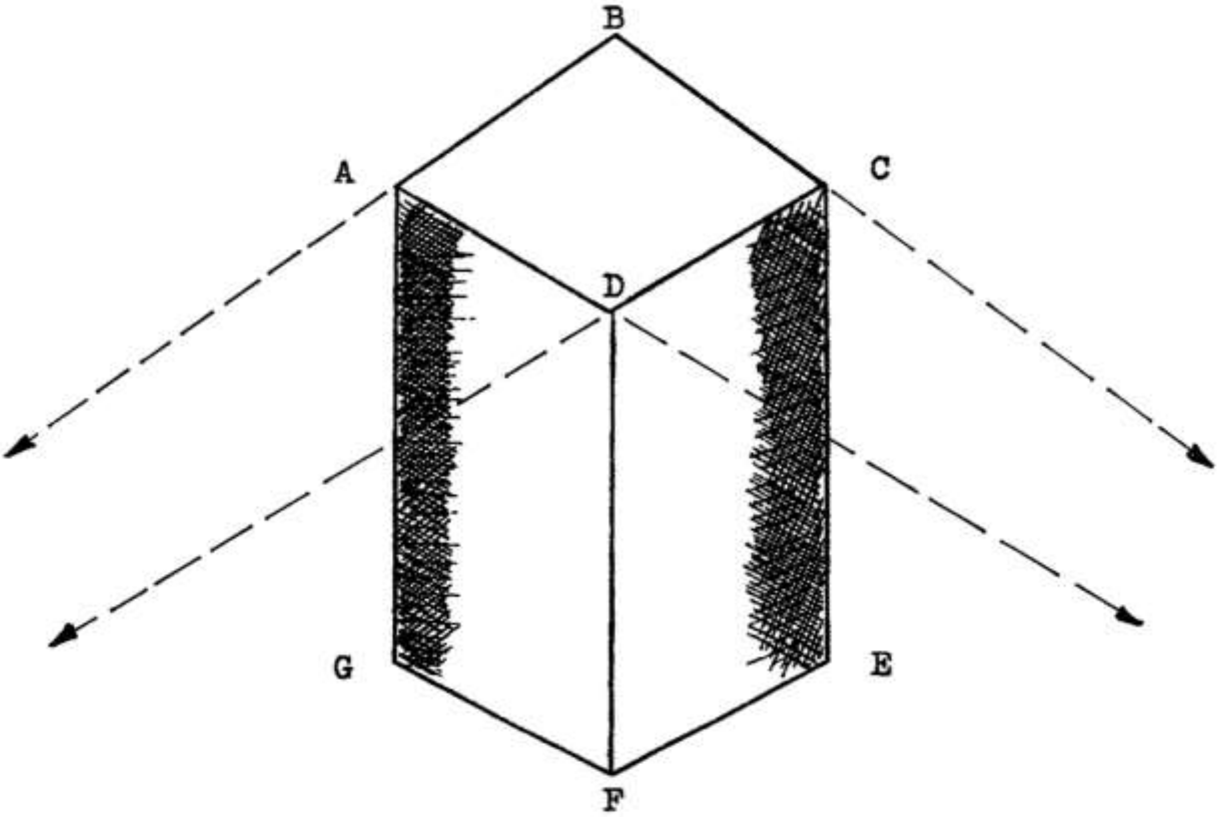
$S_{ABCD} : S_{GFHK} = 40 : 20 = 2 : 1$.

PROBLEMI SUL CUBO

Volume di un cubo

Un cubo ha spigoli lunghi 8.

Il solido è rappresentato in prospettiva a *due* punti di fuga, uno a destra e l'altro a sinistra, come mostra lo schema qui riprodotto da pagina 368 del testo di L'Huillier:



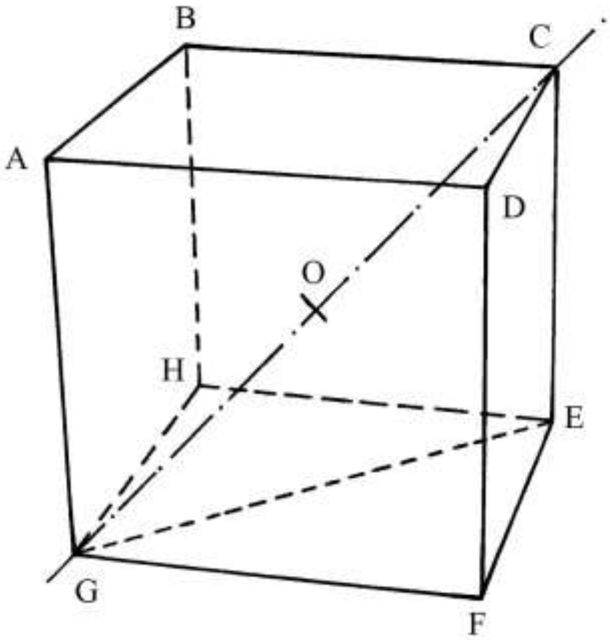
I punti di fuga interessano solo gli spigoli delle due facce orizzontali, ABCD e GFE(H).
Nello schema originale sono visibili due accenni di ombre sulle facce verticali visibili.

Gli spigoli verticali AG, DF e CE, sono paralleli: se essi convergono in un punto di fuga, questo è situato all'*infinito*.

Il problema domanda per prima cosa il volume del solido:

$V_{CUBO} = AB^3 = 8^3 = 512$.

Poi domanda la lunghezza della diagonale del cubo che passa per il suo centro O: è GC.



GCE è un triangolo rettangolo: l'ipotenusa GC è una diagonale del cubo, GE è una diagonale del quadrato di base GFEH e CE è uno spigolo del cubo.

GE è lunga:

$GE^2 = GF^2 + FE^2 = 8^2 + 8^2 = 128$ e

$GE = \sqrt{128}$.

La lunghezza di GC è data da:

$GC^2 = GE^2 + CE^2 = 128 + 8^2 = 192$ e

$GC = \sqrt{192}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

È poi proposto un problema inverso: è dato il volume del cubo, che è uguale a 100.

È chiesta la lunghezza della diagonale maggiore, GC.

Uno spigolo del cubo è lungo:

$$GF = \sqrt[3]{100} .$$

Nella faccia di base, EFGH, GE è una delle due diagonali del quadrato ed è lunga:

$$GE^2 = GF^2 + FE^2 = 2 * GF^2 = 2 * (\sqrt[3]{100})^2 = \sqrt[3]{80000} .$$

GCE è un triangolo rettangolo di cui GC è l'ipotenusa:

$$GC^2 = GE^2 + CE^2 = 2 * (\sqrt[3]{100})^2 + (\sqrt[3]{100})^2 = 3 * (\sqrt[3]{100})^2 .$$

La lunghezza di GC è indicata come la *radice sesta* di 270000:

$$GC = \sqrt{(\sqrt[3]{270000})}.$$

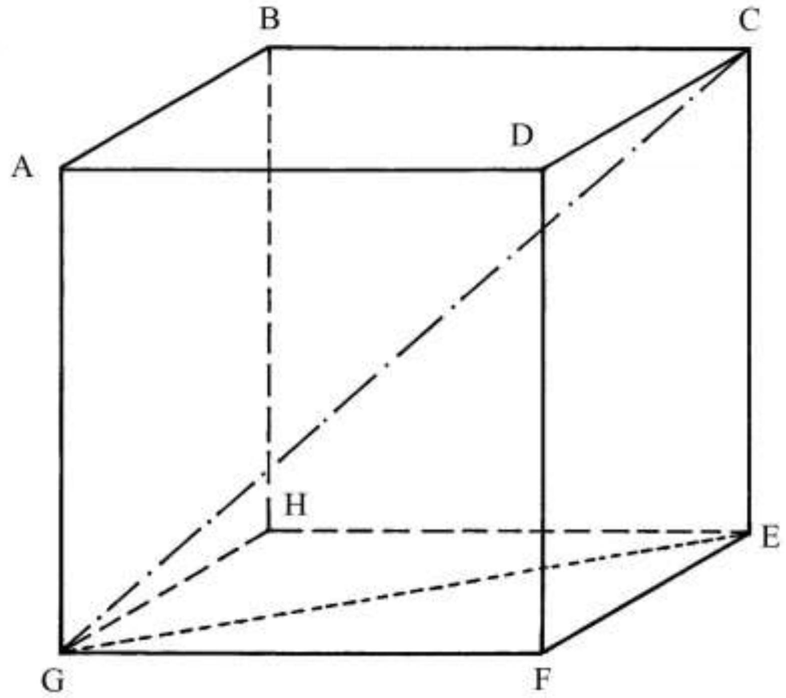
Le lunghezze *approssimate* dei tre segmenti interessati sono:

* GF ≈ 4,64;
* GE ≈ 6,56;
* GC ≈ 8,039.

Fra le tre lunghezze intercorrono i seguenti rapporti:

$GE = \sqrt{2} * GF$;

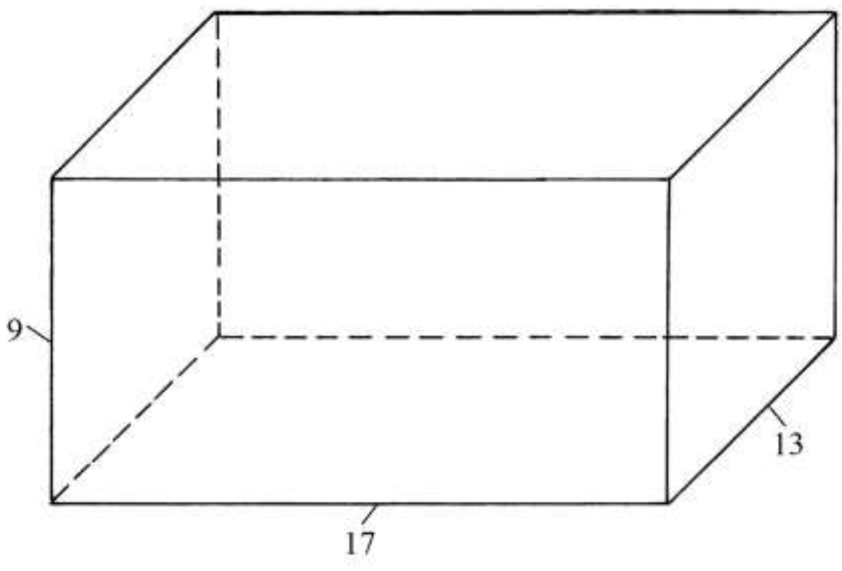
$GC = \sqrt{3} * GF$.



PROBLEMI SUI PARALLELEPIPEDI

Primo parallelepipedo

Un solido ha la forma di un parallelepipedo: la base misura 17 per 13 ed è alto 9.
È chiesto il volume del solido.



Il volume del solido è dato dal prodotto delle sue tre lunghezze:

$$V = 17 * 13 * 9 = 1989.$$

Un secondo parallelepipedo

Un parallelepipedo ha volume uguale a 40: è da notare che inizia una serie di problemi sui solidi ai quali Chuquet attribuisce il volume 40.

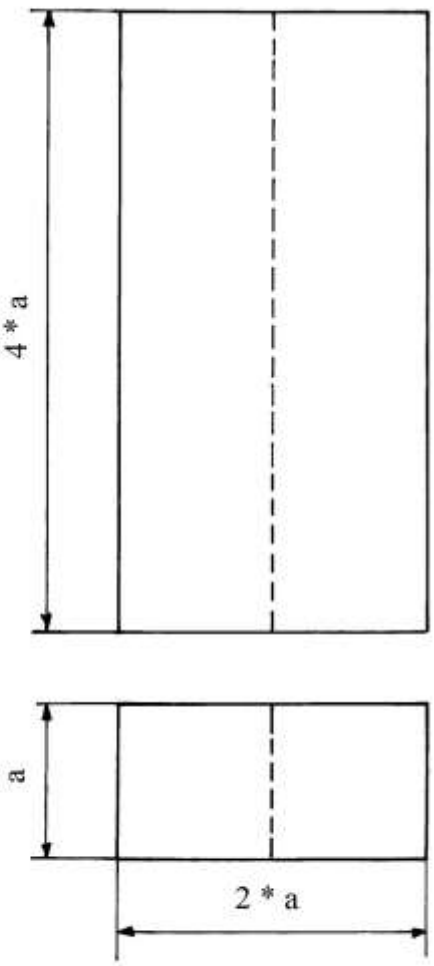
Le tre dimensioni del solido che è l'oggetto di questo problema sono in progressione geometrica di ragione 2:

* larghezza della base = a;
* lunghezza della base = 2 * a;
* altezza = 2 * lunghezza della base = 2 * (2 * a) = 4 * a.

Il volume è:

$$V = a * (2 * a) * (4 * a) = 8 * a^3.$$

Il problema chiede le lunghezze delle tre dimensioni.



Il volume del solido è 40, per cui si ha:

$$8 * a^3 = 40$$

$$a^3 = 40/5 = 8$$ e

$a = \sqrt[3]{5}$.

$2 * a = 2 * \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$.

$4 * a = 4 * \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{320}$.

La base di questo solido è un *doppio quadrato*.

Un altro parallelepipedo

Un parallelepipedo ha volume uguale a 40.
Le lunghezze dei suoi lati sono in proporzione *quadrupla superbiparziente*: 9, 42 e 196.
I rapporti fra questi tre numeri sono:

42/9 = 14/3 = (4 + 2/3)
196/42 = 14/3 = (4 + 2/3).

Le lunghezze delle tre dimensioni del solido sono così ricavate:

* moltiplicare i tre coefficienti: 9 * 42 * 196 = 74088;
* eguagliare al volume: 74088 = 40;
* dividere 40 per 74088: 40/74088 = 5/9261;
* estrarre la radice cubica: $\sqrt[3]{(5/9261)}$;
* moltiplicare per 9 (lunghezza dello spigolo più corto):

$$9 * \sqrt[3]{(5/9261)} = \sqrt[3]{(135/343)};$$

* moltiplicare la prima radice cubica per 42 (lunghezza dello spigolo intermedio);

$$42 * \sqrt[3]{(5/9261)} = \sqrt[3]{(40)};$$

* moltiplicare la prima radice per 196 (lunghezza dello spigolo più lungo):

$$196 * \sqrt[3]{(5/9261)} = \sqrt[3]{(4065 + 5/27)}.$$

I tre numeri appena calcolati sono approssimati come segue:

$$\sqrt[3]{(135/343)} \approx 0,73;$$

$$\sqrt[3]{(40)} \approx 3,42;$$

$$\sqrt[3]{(4065 + 5/27)} \approx 15,96.$$

L'ipotetico solido corrisponde a un sottile parallelepipedo.
Nel trattato di Chuquet non è presente alcuno schema.

- APPROFONDIMENTO -

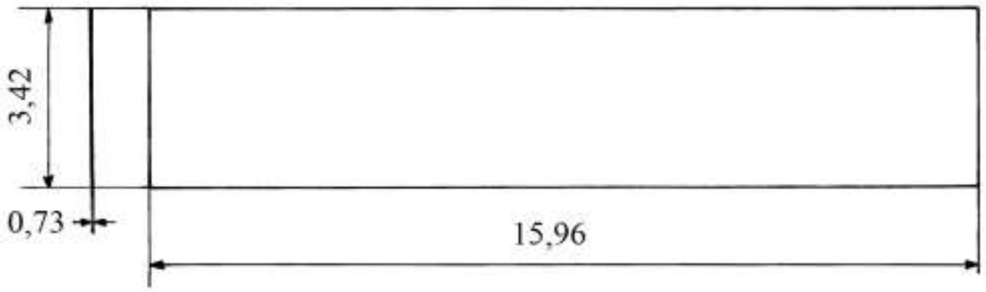
Assegnando allo spigolo più corto la lunghezza convenzionale “1”, i lati del parallelepipedo sono lunghi:

spigolo corto : 0,73 = spigolo medio : 3,42 = spigolo lungo : 15,96 = 1 : 4,68 : 21,86.

Infatti:

* 3,42/0,73 = 4,68 e
* 15,96/0,73 = 21,86.

Lo schema che segue riproduce in scala il parallelepipedo:



- -

<u>Un altro parallelepipedo</u>

Un parallelepipedo ha volume uguale a 40.

Le lunghezze dei suoi spigoli sono proporzionali a 2, 5 e 9.

Sono chieste le tre lunghezze.

La soluzione precede i seguenti passi: moltiplicare 2 per 5 per 9: 2 * 5 * 9 = 90;

* dividere il volume per 90: 40/90 = 4/9;
* estrarre la radice cubica:

$$\sqrt[3]{(4/9)};$$

* moltiplicare per 2:

$$2 * \sqrt[3]{(4/9)} = \sqrt[3]{(32/9)},$$

lunghezza dello spigolo più corto;

* moltiplicare la radice cubica per 5:

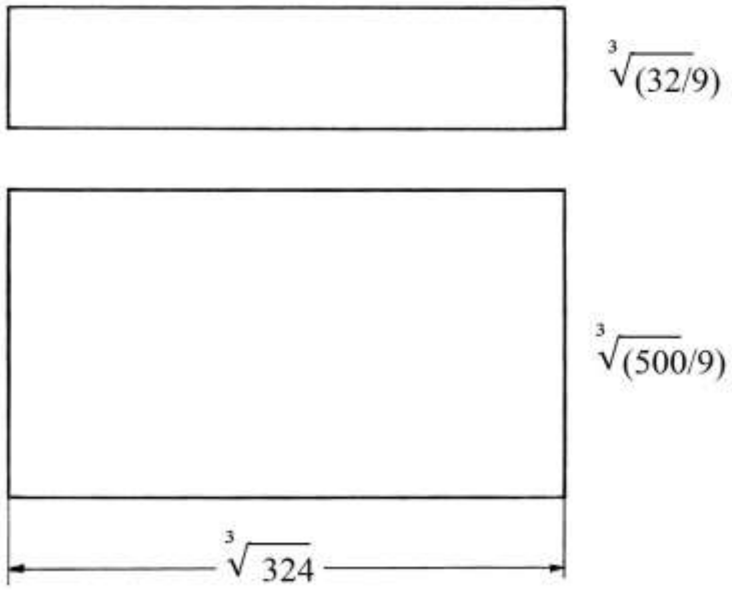
$$5 * \sqrt[3]{(4/9)} = \sqrt[3]{(500/9)},$$

lunghezza del secondo spigolo;

* moltiplicare la radice cubica per 9:

$$9 * \sqrt[3]{(4/9)} = \sqrt[3]{(4 * 81)} = \sqrt[3]{324},$$

lunghezza del terzo spigolo.



Lo schema qui sopra è una doppia proiezione ortogonale, *in scala*: in alto è la vista frontale e sotto la vista dall'alto.

<u>Un altro solido</u>

Un solido ha volume di 40. Uno spigolo ha lunghezza 5 e gli altri due sono in uguale proporzione e cioè hanno uguali lunghezze.

Il problema chiede la lunghezza dei due lati.

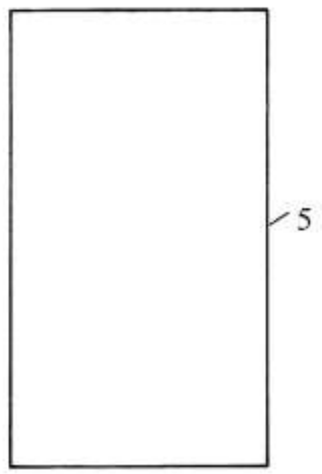
Dividere il volume per la lunghezza del primo lato:

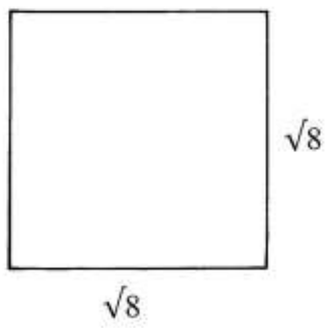
40/5 = 8, prodotto delle lunghezze degli altri due lati *uguali*.

Gli altri due lati sono lunghi entrambi:

√8 [= 2 * √2].

Il solido è un prisma a base quadrata.





Il prisma è alto 5 e ha base quadrata con lati lunghi √8.

Un altro parallelepipedo

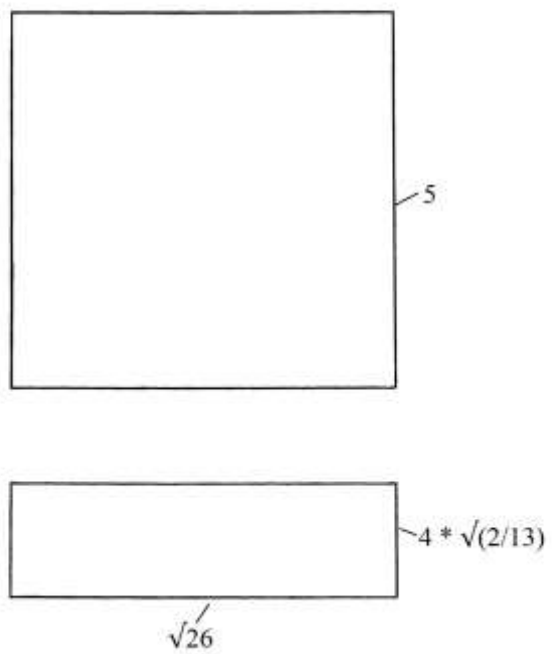
Un solido ha volume uguale a 40: una delle sue tre dimensioni è lunga 5. Le altre due sono in proporzione *tripla sesquiquarta* e cioè stanno come 4 a 13.

Sono chieste le due lunghezze ignote.

La procedura contiene i seguenti passi:

* dividere il volume per la lunghezza del primo spigolo: 40/5 = 8;
* moltiplicare 4 per 13: 4 * 13 = 52;
* dividere 8 per 52: 8/52 = 2/13;
* estrarre la radice quadrata: √(2/13);
* moltiplicare per 4: 4 * √(2/13) = √(32/13), larghezza della base;
* moltiplicare la prima radice per 13: 13 * √(2/13) = √(169 * 2/13) = √26, lunghezza della base.

Lo schema che segue è una doppia proiezione ortogonale: in alto è la vista di fronte e in basso quella dall'alto.



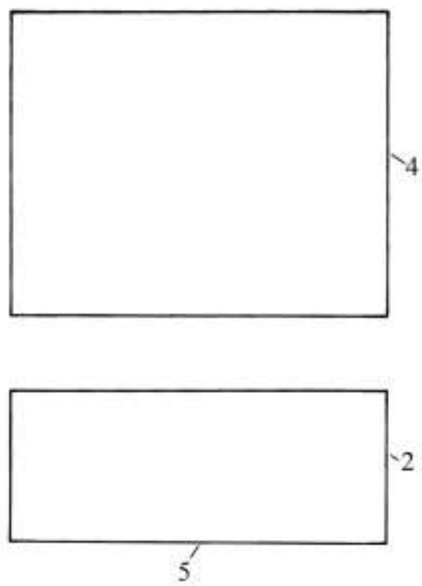
<u>Un altro parallelepipedo</u>

Un solido ha volume uguale a 40.
Esso è alto 4 e la base è lunga 5: è chiesta la larghezza della base.
Moltiplicare 4 per 5:

$4 * 5 = 20.$

Dividere per il volume:

40/20 = 2, larghezza della base.



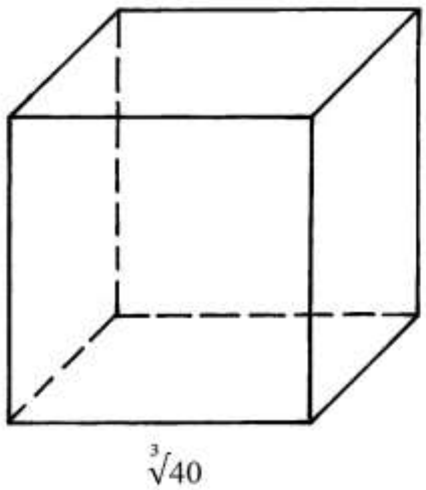
Un cubo

Un solido ha, come al solito, volume uguale a 20.

La lunghezza di uno spigolo è uguale a metà della somma delle altre due dimensioni: al di là del giro di parole, le tre dimensioni sono uguali e il solido è un *cubo*.

I suoi spigoli sono lunghi:

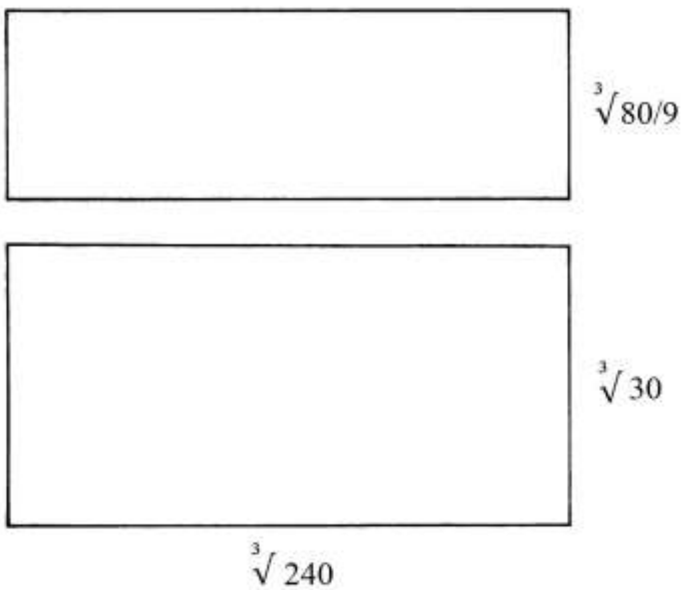
$$\sqrt[3]{40}\ [\approx 3{,}42].$$



Un altro parallelepipedo

U altro solido ha volume 40 unità cubiche. La lunghezza e la larghezza [della base] sono in proporzione 2 : 1.

Inoltre, la larghezza [della base] è il triplo dell'altezza che Chuquet chiama *profondità*.



Chuquet fissa i seguenti rapporti:

* lunghezza = 3 * x;
* larghezza = 6 * x;
* altezza = 2 * x.

Ovviamente, per l'incognita Chuquet non usa la "x".

*	Moltiplicare i tre coefficienti:	$3 * 6 * 2 = 36$;
*	dividere 40 per 36;	$40/36 = 10/9$;
*	estrarre la radice cubica:	

$$\sqrt[3]{(10/9)}.$$

Le lunghezze dei tre spigoli sono:

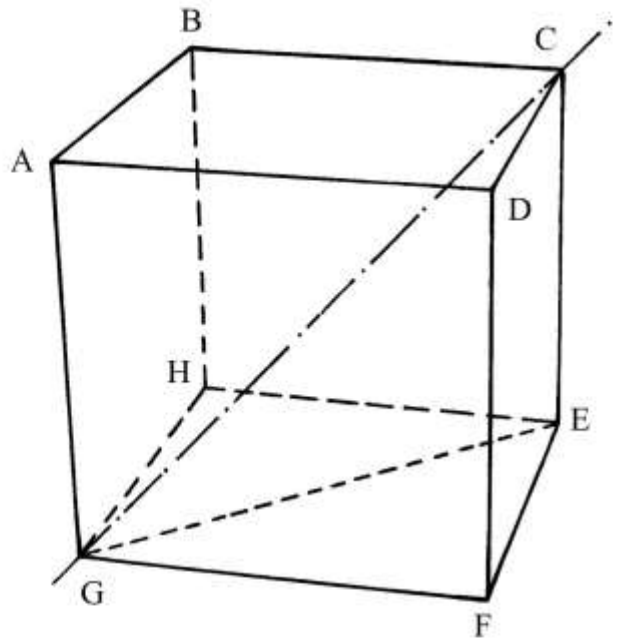
* larghezza $= 3 * \sqrt[3]{(10/9)} = \sqrt[3]{(27 * 10/9)} = \sqrt[3]{30}$;
* lunghezza $= 6 * \sqrt[3]{(10/9)} = \sqrt[3]{(216 * 10/9)} = \sqrt[3]{240}$;
* altezza $= 2 * \sqrt[3]{(10/9)} = \sqrt[3]{(8 * 10/9)} = \sqrt[3]{(8 + 8/9)}$.

<u>Diagonale di un solido</u>

Un solido ha la diagonale lunga 7: Chuquet la chiama *diametro*.

Il solido è un cubo.

Utilizziamo di nuovo la lo schema in prospettiva usato nella soluzione del precedente problema del cubo:



La lunghezza degli spigoli del cubo è l'incognita *x*:

$GF = x$.

GCE è un triangolo rettangolo di cui GC è l'ipotenusa ed è la diagonale del cubo della quale è nota la lunghezza, che è 7.

GE è una diagonale del quadrato di base e la sua lunghezza è:

$GE^2 = GF^2 + FE^2 = 2 * GF^2 = 2 * x^2$ e

$GE = x * \sqrt{2}$.

La lunghezza di GC è data da:

$GC^2 = GE^2 + EC^2 = 2 * x^2 + x^2 = 3 * x^2$ e

$GC = x * \sqrt{3}$.

Ma GC è lunga 7, per cui si ha:

$x * \sqrt{3} = 7$

$x = 7/\sqrt{3} = \sqrt{3} * 7/3$.

Chuquet usa una più complessa procedura e per la lunghezza degli spigoli del cubo fornisce il valore:

$x = \sqrt{(16 + 1/3)}$ che è perfettamente equivalente a "$\sqrt{3} * 7/3$".

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema chiede poi il volume del solido:

$V_{CUBO} = GF^3 = (7/\sqrt{3})^3 = 7^3/\sqrt{27} = 343/\sqrt{27}$.

Chuquet dà un risultato equivalente:

$V_{CUBO} = \sqrt{(4357 + 10/27)}$.

Un altro cubo

Un solido ha diagonale lunga $\sqrt{192}$: esso è un *cubo*.

Il problema chiede la lunghezza degli spigoli.

La procedura usata da Chuquet contiene i seguenti passi:

* moltiplicare $\sqrt{192}$ per sé stessa: $(\sqrt{192})^2 = 192$;
* dividere per 3: $192/3 = 64$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{64} = 8$, lunghezza degli spigoli del cubo.

La soluzione è corretta: la descrizione dell'ultimo problema ha dimostrato che la lunghezza della diagonale *d* di un cubo è legata a quella degli spigoli, *ℓ*, da una precisa relazione:

$d = \sqrt{3} * \ell$, per cui si ha:

$d^2 = 3 * \ell^2$

$\ell^2 = d^2/3$

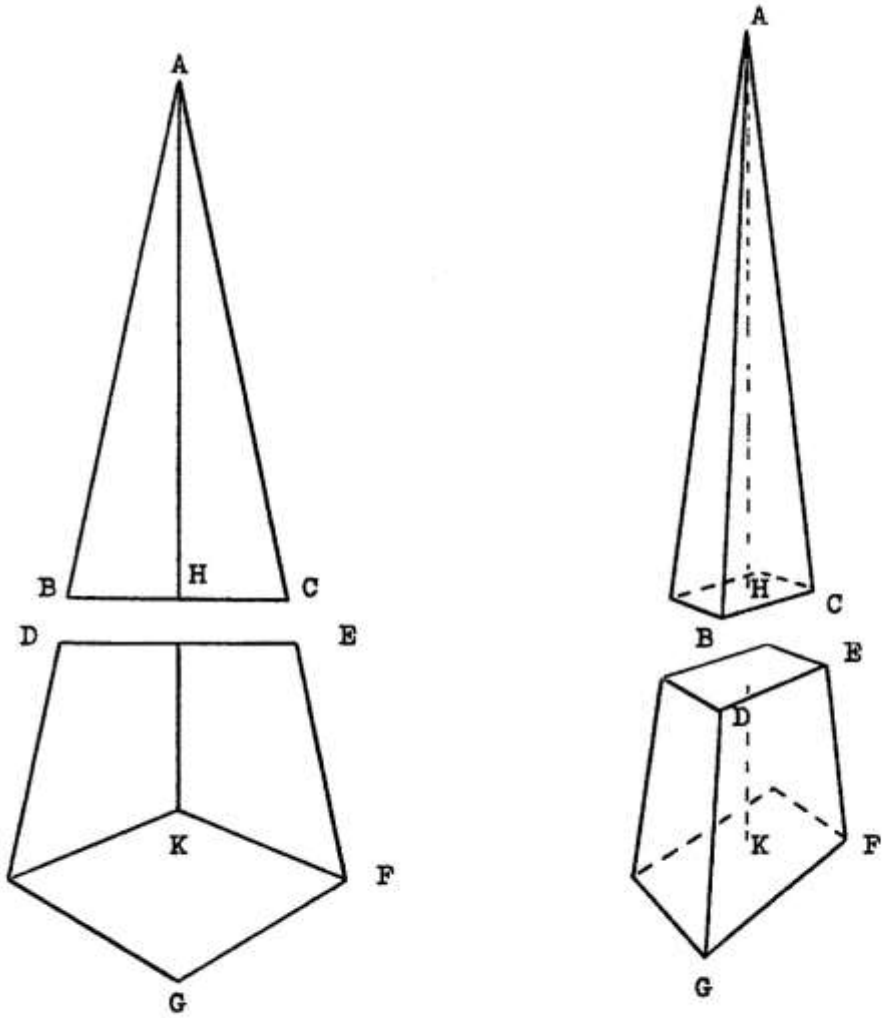
$\ell = \sqrt{(d^2/3)} = \sqrt{\{[(\sqrt{192})^2]/3)\}} = \sqrt{64} = 8$.

Volume di una piramide

Una piramide ha base quadrata con lati lunghi 7. Essa è alta 12: Chuquet chiama *diametro* l'altezza.

Il problema chiede il volume del solido.

I due schemi che seguono sono riprodotti da p. 378 del testo di L'Huillier: lo schema a sinistra mostra la piramide integra e quello di destra descrive la piramide tagliata che è oggetto del successivo problema.



L'area della base è:

$A_{BASE} = 7^2 = 49$.

Il volume della piramide è:

$V = A_{BASE} * (altezza/3) = 49 * (12/3) = 49 * 4 = 196$ piedi^3.

Nel testo del problema, Chuquet cita espressamente l'unità di misura del volume, *piedi cubici*.

Volume di un tronco di piramide

La piramide del precedente problema è sezionata con un piano parallelo alla base: il tronco di piramide residuo è alto 4 piedi: rivedere il precedente schema a destra nella figura.

Il problema chiede il volume del tronco di piramide.

La soluzione consiste nel sottrarre il volume della parte tagliata da quello dell'intera piramide, che è di 196 piedi^3.

La parte tagliata ha altezza 8.

La soluzione prevede i seguenti passi:

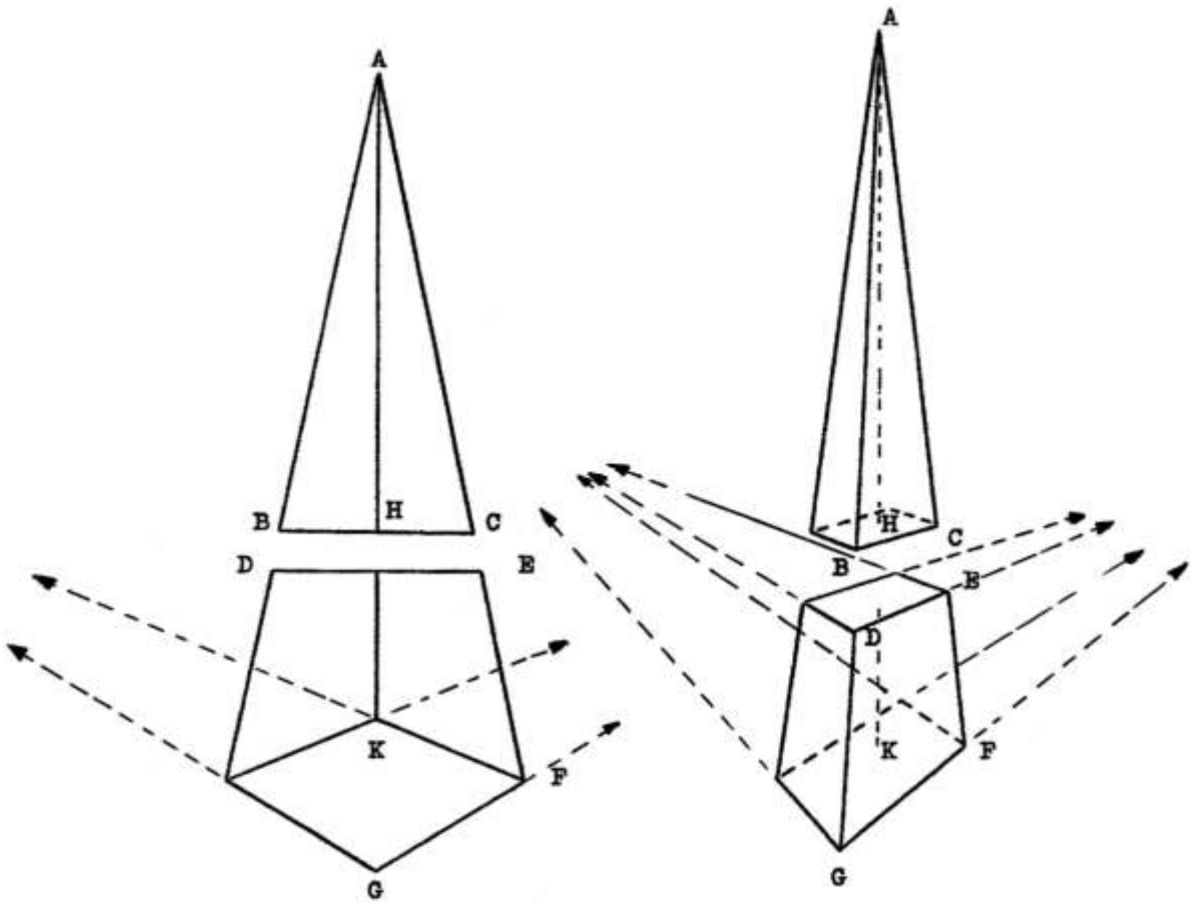
* calcolare il rapporto fra le altezze della piramide asportata e della piramide intera:

$8/12 = 2/3$;

*	elevare al cubo il rapporto:	$(2/3)^3 = 8/27$;
*	sottrarre dal volume dell’intera piramide, 196, gli 8/27:
$196 * (1 – 8/27) = 196 * 19/27 = (137 + 25/27)$ piedi^3, volume del tronco di piramide.

\- APPROFONDIMENTO -

I due disegni sopra riprodotti dal testo di L’Huillier sono disegnati sia con il metodo delle proiezioni ortogonali (vista frontale della piramide nello schema di sinistra) che in assonometria (la piramide dello schema di destra).



I due tronchi di piramide, sia a sinistra sia a destra, sono entrambi rappresentati in prospettiva con almeno due punti di fuga.

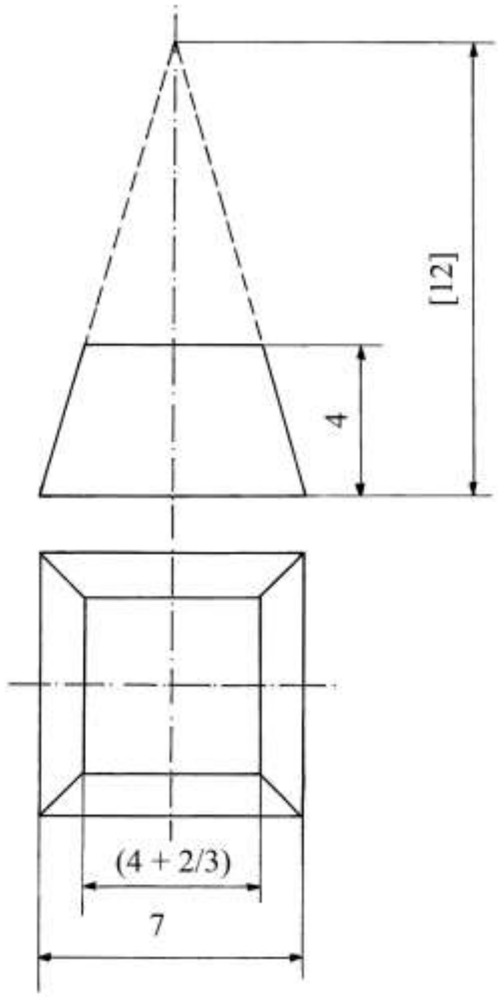
\- -

<u>Tronco di piramide</u>

Un tronco di piramide ha basi quadrate: la base inferiore ha lati lunghi 7 e quella superiore li ha lunghi (4 + 2/3).

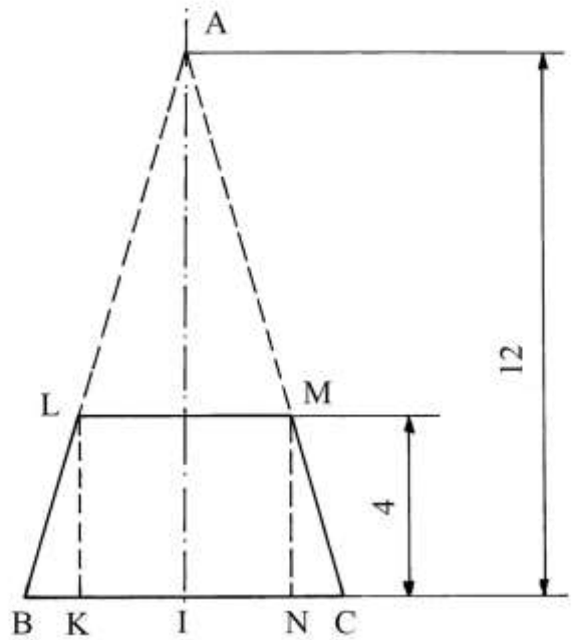
Il solido è alto 4.

Il problema chiede l’altezza della piramide dalla quale il tronco è stato ricavato.



Chuquet propone due diverse soluzioni.

Semplificando, possiamo ricorrere alle regole sui triangoli simili: MNC e AIC sono due triangoli rettangoli simili.



NC è lungo:

NC = (BC – KN)/2 = (BC – LM)/2 = [7 – (4 + 2/3)]/2 = (2 + 1/3)/2 = 7/6.

AI è l’altezza incognita:

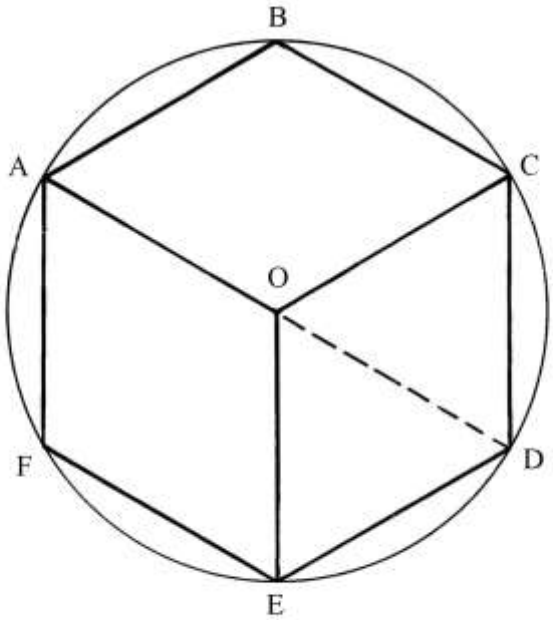
AI : MN = IC : NC

AI = (MN * IC)/NC = (4 * 7/2) * (7/6) = 14 * 6/7 = 12.

Da una sfera a un cubo

Una sfera ha diametro di 7 e pesa 1000 libbre. Essa viene riquadrata per ridurla a un cubo che ha la diagonale lunga 7: quindi, questo secondo solido è inscritto nella sfera.

Il problema chiede il peso del cubo.



A, B, C, D, E e F sono i vertici del cubo che giacciono sulla superficie esterna della sfera. O è il centro comune ai due solidi.

AD è un diametro della sfera e una diagonale del cubo.

Fra la lunghezza di una diagonale del cubo e quella di un suo spigolo intercorre una precisa relazione (che abbiamo già conosciuta):

diagonale = √3 * spigolo e

AD = √3 * AB.

AB è lungo:

AB = AD/√3 = 7/√3 = √3 * 7/3.

Chuquet fornisce per la lunghezza di AB il valore equivalente:

AB = √(16 + 1/3).

Il volume del cubo è:

$V_{CUBO} = AB^3 = (7/\sqrt{3})^3 = 343/\sqrt{27} = (343 * \sqrt{27})/27 = \sqrt{(4357 + 10/27)}$.

Il volume della sfera è:

$V_{SFERA} = 11/21 * \text{diametro}^3 = 11/21 * AD^3 = 11/21 * 7^3 = 11/21 * 343 =$

$= (179 + 2/3)$ piedi^3.

Dato che si presume che la sfera e il cubo siano fatti dello stesso materiale, possiamo ricavare il peso del cubo, che è proporzionale al suo volume:

V_{SFERA} : Peso $_{SFERA}$ = V_{CUBO} : Peso $_{CUBO}$ da cui

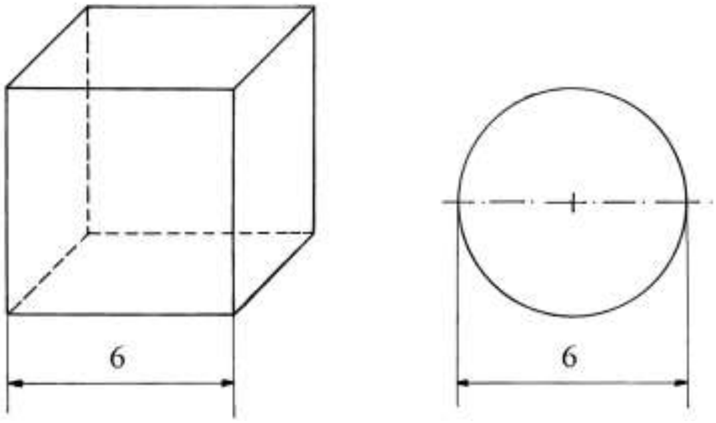
$P_{CUBO} = (\text{Peso}_{SFERA} * V_{CUBO})/V_{SFERA} = 1000 * \sqrt{(4357 + 10/27)}/(179 + 2/3) =$

$= (367 + 2/5)$ libbre.

<u>Da un cubo a una sfera</u>

Un cubo ha spigoli lunghi 6 e pesa 1000 libbre.

Una sfera ha diametro 6:



Il problema chiede il suo peso. Ovviamente deve intendersi che il materiale usato nei due solidi sia lo stesso.

Problemi simili a questo sono contenuti, ad esempio, nel già citato Trattato di Anonimo Fiorentino (Siena L. IV. 18): dato un cubo di materiale plasmabile come la cera e di cui erano note dimensioni e peso, trasformarlo in una sfera contenente la stessa quantità di materiale: il problema chiedeva le dimensioni del nuovo solido.

Il cubo oggetto di questo problema ha volume uguale a:

$V_{\text{CUBO}} = 6^3 = 216$.

La sfera ha volume che è dato da:

$V_{\text{SFERA}} = 11/21 * \text{diametro}^3 = 11/21 * 6^3 = (113 + 1/7)$.

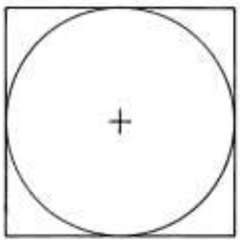
Il peso della sfera, P_{SFERA}, è proporzionale al suo volume:

$P_{\text{SFERA}} : V_{\text{SFERA}} = P_{\text{CUBO}} : V_{\text{CUBO}}$ da cui:

$P_{\text{SFERA}} = (V_{\text{SFERA}} * P_{\text{CUBO}})/V_{\text{CUBO}} = (113 + 1/7) * 1000/216 =$

$= (523 + 17/21)$ libbre.

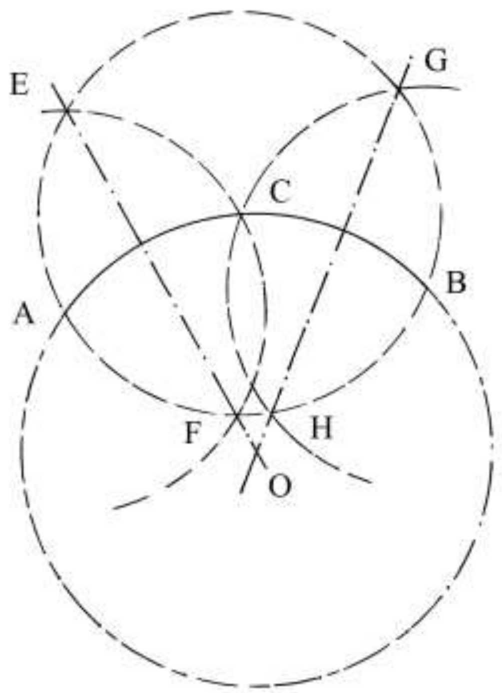
I due solidi sono rappresentati come nello schema che segue: la sfera è inscritta nel cubo:



COSTRUZIONI GEOMETRICHE
========================

<u>Centro sconosciuto di un arco di circonferenza</u>

AB è un arco di circonferenza: deve essere determinato il suo centro.



C è un punto intermedio dell'arco: nell'esempio è il suo punto medio, ma può essere scelto qualsiasi punto compreso fra gli estremi A e B.

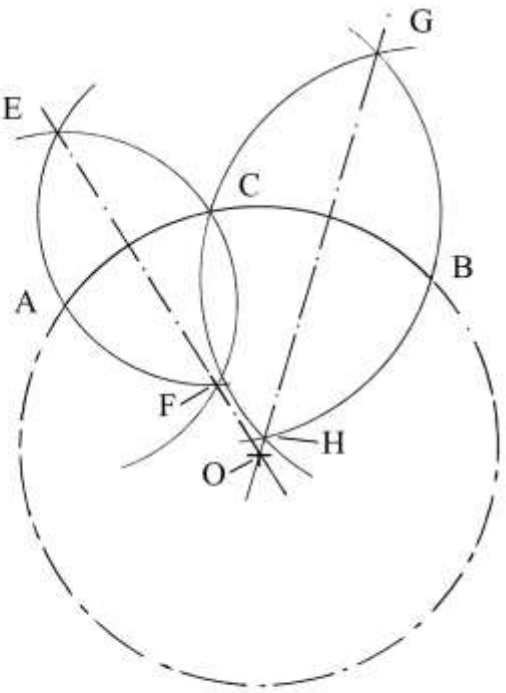
Fare centro in A e in B e con raggio AC = BC tracciare due archi. Con la stessa apertura fare centro in C e disegnare una circonferenza che taglia in (E e F) e in (G e H) i due precedenti archi.

Per le coppie di punti E-F e G-H tracciare due assi di simmetria che si incontrano nel punto O, centro dell'arco di circonferenza ACB.

Un problema affine era affrontato nel Medioevo quando occorreva determinare il diametro e il centro della circonferenza di una colonna circolare verticale e parzialmente murata. Un cenno all'argomento è contenuto nel "*Taccuino*" di Villard de Honnecourt, architetto piccardo del XIII secolo.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue presenta l'esempio dell'arco AB con la costruzione utilizzante il punto C che non è più il medio dell'arco di circonferenza.

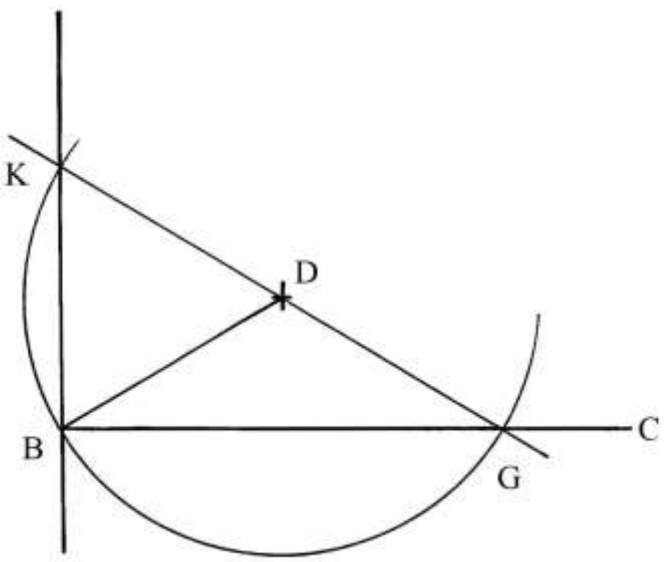


Fare centro in A e in C con raggio AC e tracciare due archi che si incontrano in E e in F.
Poi fare centro in B e in C con raggio CB e disegnare i due archi che intersecano in G e in H.
Per le coppie di punti E-F e G-H passano i due assi che si incontrano in O, centro della circonferenza di cui l'arco ACB è parte.

- -

<u>Perpendicolare all'estremo di un segmento</u>

BC è un segmento: dal suo estremo B deve essere costruita la perpendicolare.



Fissare un punto esterno a BC: è D.

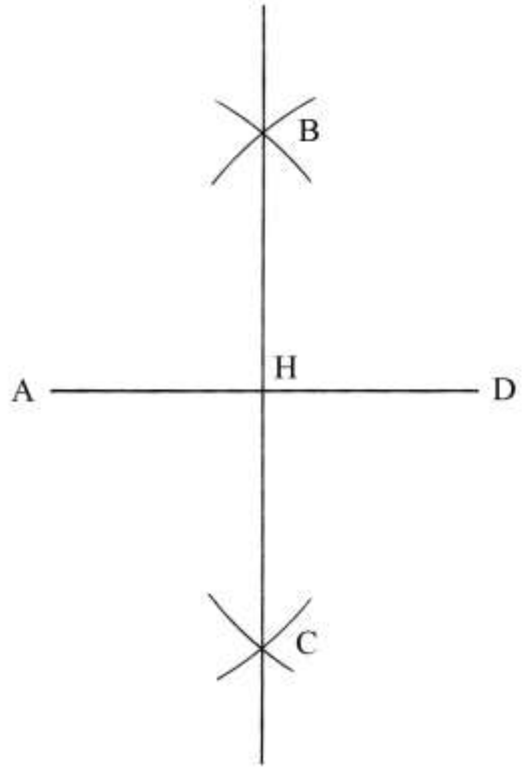
Collegare D con B. Fare centro in D e con raggio DB tracciare un ampio arco di circonferenza che taglia BC nel punto G.

Disegnare una retta passante per G e per D: essa incontra l'arco di circonferenza nel punto K.

Per B e per K passa la perpendicolare al segmento BC.

Asse di un segmento

AD è un segmento: nel suo punto medio deve essere fatta passare una perpendicolare che generi *quattro* angoli retti nel punto stesso.



Con apertura a piacere, ma più grande della metà della lunghezza di AD, fare centro in A e in D e tracciare quattro archi che si incrociano nei punti B e C.

Per questi ultimi passa la perpendicolare a AD che lo divide in due parti uguali:

AH = HD.

Nel punto H sono così creati *quattro* angoli retti.

La retta passante per B e per C è nota come *asse del segmento AD.*

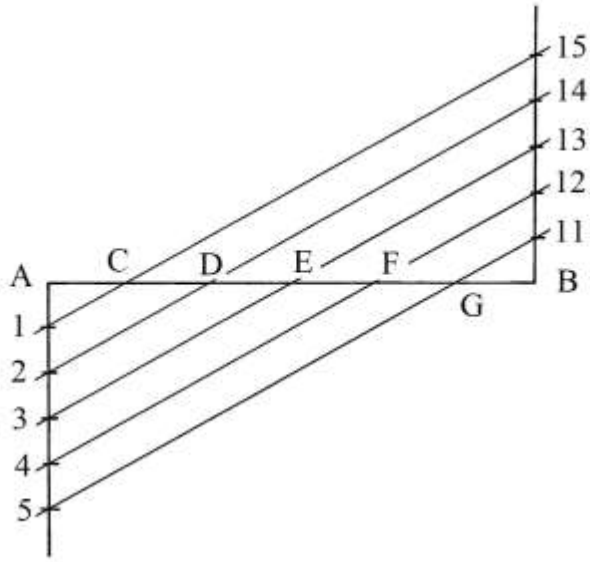
Divisione di un segmento in parti uguali

AB è un segmento che deve essere diviso in *6* parti uguali.

Per via aritmetica non è sempre possibile ottenere un risultato preciso.

La costruzione presentata nella figura risolve il problema per via geometrica.

Dagli estremi A e B tracciare due perpendicolari a AB, orientate in direzioni opposte.



Sulle due linee riportare, da A e da B, per *cinque* volte la stessa lunghezza A1 che è scelta a piacere:

A-1 = B-11.

Disegnare cinque rette:

* 1-15;
* 2-14;
* 3-13;
* 4-12;
* 5-11.

Esse tagliano AB in cinque punti equidistanti: C, D, E, F e G.

AB è diviso in *6* parti di uguale lunghezza:

AC = CD = DE = EF = FG = GB =AB/6.

- APPROFONDIMENTO -

Il metodo usato da Chuquet fu descritto dal matematico musulmano *al-Nayrizi* (conosciuto in Europa con il nome latinizzato di *Anaritius*): egli nacque intorno all'865 a Nayriz (nell'attuale Iran) e morì verso il 922 a Baghdad (Iraq). Studiò in maniera approfondita gli *Elementi* di Euclide.

Il metodo fu poi impiegato dal matematico e geometra Abu'l – Wafa (940-998), anche lui attivo a Baghdad.

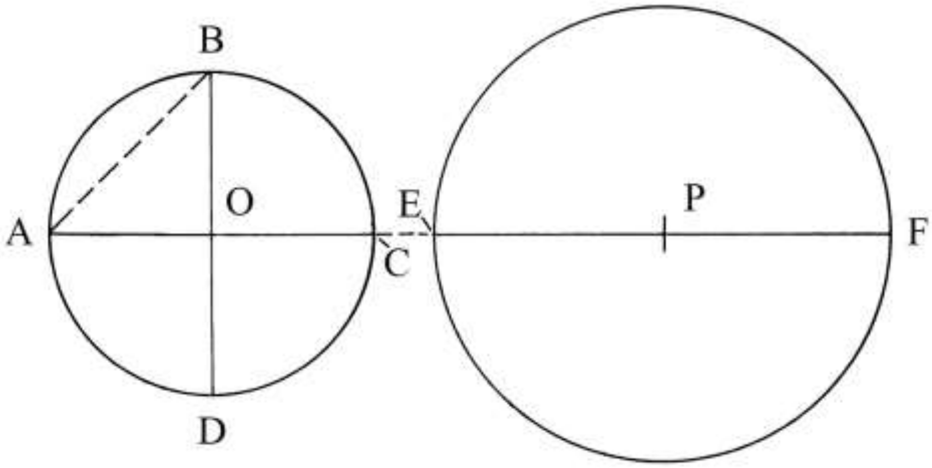
Esso è molto pratico ed ha applicazione generale.

La regola generale che descrive il metodo è la seguente: per dividere in *N* parti uguali un segmento dato, è sufficiente dividere in *(N – 1)* parti uguali due segmenti perpendicolari disegnati in direzioni opposte agli estremi del segmento da suddividere e collegare i punti come in figura, con l'ausilio di *(N – 1)* rette.

- -

Cerchio di area doppia di un altro

È dato un cerchio di centro O e raggio OA. Deve essere costruito un secondo cerchio con centro in P e superficie doppia del primo.



Tracciare i diametri fa loro perpendicolari AC e BD.

AB è una corda la cui lunghezza è:

$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 2 * AO^2$ e

$AB = AO * \sqrt{2}$.

La cosa è evidente: AB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ABO.

L'area del cerchio di centro O è:

$S_{\text{CERCHIO1}} = 22/7 * OA^2$.

Sul prolungamento del diametro AC fissare il punto P. Fare centro in P e con raggio *AB* disegnare una seconda circonferenza che ha diametro EF = 2 * PE = 2 * AB.

Il secondo cerchio ha area data da:

$S_{\text{CERCHIO2}} = 22/7 * PE^2 = 22/7 * AB^2 = 22/7 * (2 * OA^2) = 44/7 * OA^2$.

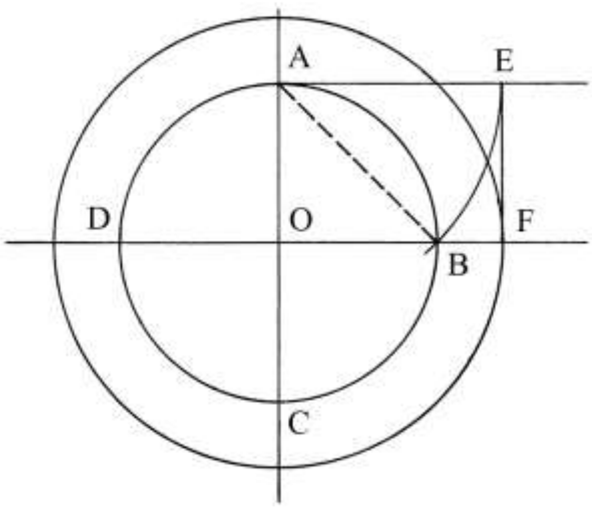
Il rapporto fra le aree dei due cerchi è:

$S_{\text{CERCHIO2}} : S_{\text{CERCHIO1}} = 44/7 * OA^2 : 22/7 * OA^2 = 2 : 1$.

Il centro di centro P ha area doppia di quella di centro O.

- APPROFONDIMENTO -

Un'altra costruzione del cerchio di area doppia di uno dato è presentata nella figura che segue:



OA è il raggio del primo cerchio: AC e BD sono i due diametri perpendicolari.

AB è la corda lunga

$AB = AO * \sqrt{2}$.

Dal punto A condurre una semiretta parallela a DB.

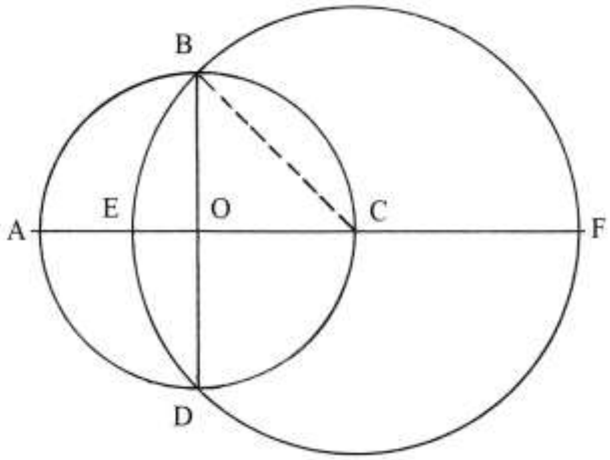
Fare centro in A e, con raggio AB, tracciare un arco da B fino a fissare il punto E.

Da E abbassare la perpendicolare a DB: è EF.

OF è il raggio del cerchio di centro O e area uguale al doppio di quella di raggio OA.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della costruzione è mostrata nello schema che segue:



O è il centro di un cerchio di raggio OA. AC e BD sono due suoi diametri fra loro perpendicolari.

BC è una corda che è lunga:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = 2 * OB^2$ e

$BC = OB * \sqrt{2}$.

Fare centro in C e con raggio CB = CD tracciare una circonferenza che taglia il diametro AC e il suo prolungamento nei punti E e F.

I cerchi di raggi OA e CB hanno aree proporzionali ai quadrati delle lunghezze dei loro raggi:

$S_{ABCD} : S_{EBFD} = OB^2 : BC^2 = 1^2 : (\sqrt{2})^2 = 1 : 2$.

- -

<u>Cerchi multipli</u>

Devono essere costruiti dei cerchi concentrici che abbiano aree multiple rispetto a quella di un cerchio iniziale.

O è il centro comune.

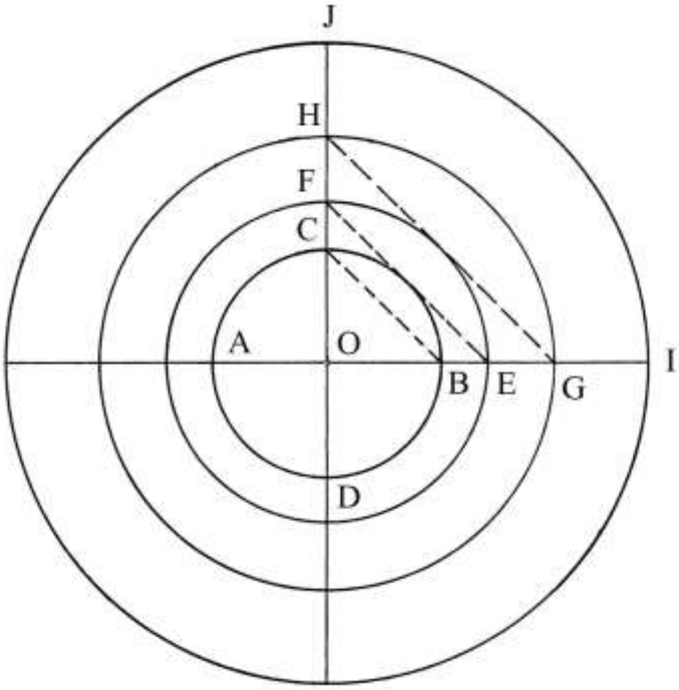
La costruzione che è qui descritta è una rielaborazione di quella di Chuquet che è basata sulla determinazione per via geometrica della lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele.

AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari nel cerchio di raggio OA.

Prolungare i due diametri verso l'esterno del cerchio.

Disegnare la corda CB.

Con raggio CB fare centro in O e tracciare la circonferenza che taglia i diametri in E e in F: il relativo cerchio di raggio OE ha area doppia di quella di raggio OA.



EF è una seconda corda. Con raggio EF fare centro in O e disegnare la circonferenza che incontra i diametri in G e in H: il cerchio di raggio OG ha area quadrupla del primo.

GH è una corda della terza circonferenza. Con raggio GH fare centro in O e disegnare la quarta circonferenza concentrica che fissa i punti I e J.

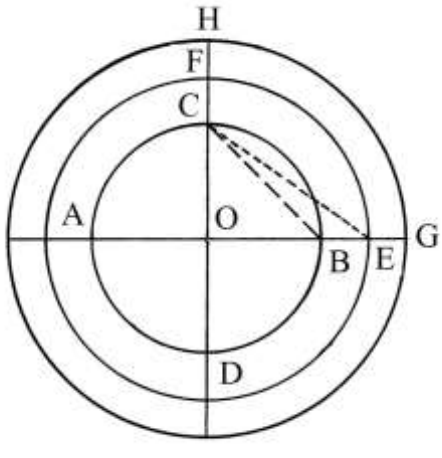
Il cerchio di raggio OI ha area uguale al doppio di quello precedente (di raggio OG) e otto volte più grande di quella del primo cerchio.

Il metodo appena impiegato genera cerchi di area uguale a 2, 4, 8, … volte quella del cerchio iniziale: le aree crescono in progressione geometrica di ragione 2.

Non era questo lo scopo della costruzione originale di Chuquet che desiderava ricavare cerchi di area uguale a 2, 3, 4, … volte quella di un cerchio dato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per ricavare un cerchio di area *tripla* di quella di un cerchio dato occorre modificare il metodo.



Disegnare il cerchio di centro O e raggio OA = R e i suoi diametri perpendicolari AB e CD che sono prolungati verso l'esterno.

BC è la corda contenuta nel cerchio iniziale e la sua lunghezza è:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = R^2 + R^2 = 2 * R^2$ e

$BC = R * \sqrt{2}$.

Il cerchio passante per E e per F ha raggio OF lungo quanto la corda BC.

Collegare C con E: OCE è un triangolo rettangolo che ha cateti lunghi come segue:

* $OC = R$;
* $OC = BC = r * \sqrt{2}$.

L'ipotenusa CE è lunga:

$CE^2 = OC^2 + OE^2 = R^2 + (R * \sqrt{2})^2 = 3 * R^2$ e

$CE = R * \sqrt{3}$.

Fare centro in O e con raggio CE disegnare la circonferenza che fissa i punti G e H.

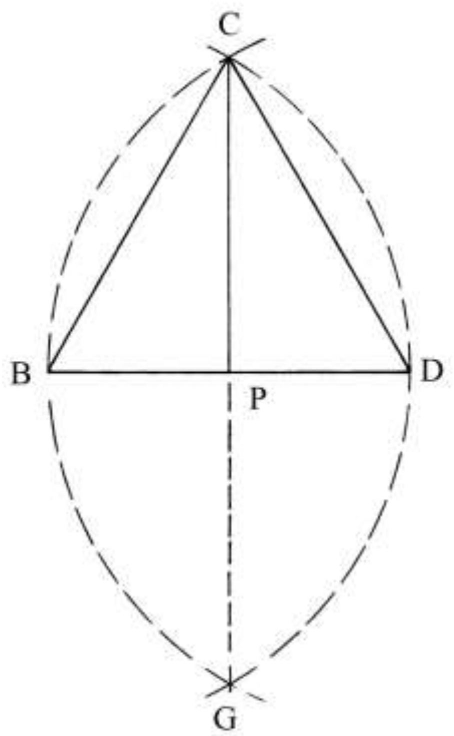
L'area di un cerchio è direttamente proporzionale al quadrato della lunghezza del suo raggio. Valgono le seguenti proporzioni:

$S_{\text{CERCHIO OA}} : S_{\text{CERCHIO OE}} : S_{\text{CERCHIO OG}} = OA^2 : OE^2 : OG^2 = OA^2 : BC^2 : CE^2 =$
$= R^2 : 2 * R^2 : 3 * R^2 = 1 : 2 : 3$.

Il cerchio di centro O e raggio OG = OH ha area uguale a *tre* volte quella del cerchio di raggio OA.

Costruzione di un triangolo equilatero

BD è il lato orizzontale sul quale deve essere costruito un triangolo equilatero.



Con apertura BD fare centro in B e in D e tracciare due archi che si intersecano in C e in G.

Dal punto C condurre la perpendicolare CG che taglia BD nel punto medio P: CP è un'altezza del triangolo equilatero BCD.

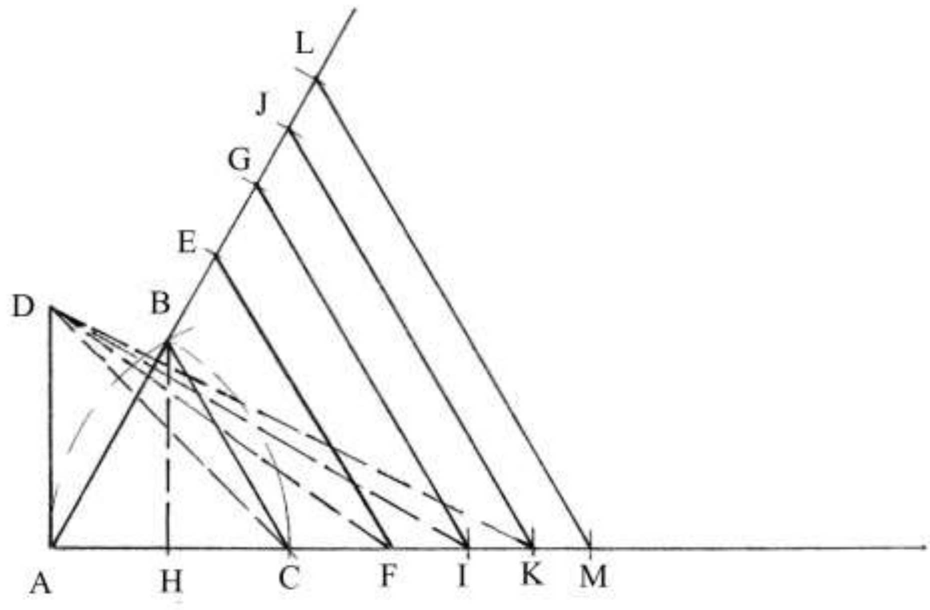
Triangoli equilateri multipli

Il problema propone la costruzione di triangoli equilateri multipli di uno dato e tutti con un vertice e un angolo interno in comune.

Il testo che segue amplia la soluzione presentata da Chuquet.

\- APPROFONDIMENTO -

Il problema propone la costruzione di triangoli equilateri multipli di uno dato e tutti con un vertice e in angolo in comune, come è il caso di A nello schema che segue:



Disegnare il segmento AD, *perpendicolare* a AC e di lunghezza uguale a AB.

Il segmento BH è l'altezza del triangolo equilatero ABC rispetto al lato AC.

L'area del triangolo ABC è:

$S_{ABC} = AC * BH/2$.

Ma: $BH^2 = BC^2 – HC^2 = AC^2 – (AC/2)^2 = ¾ * AC^2$ e

$BH = (\sqrt{3})/2 * AC$.

Quindi, l'area di ABC diviene:

$S_{ABC} = [AC * (\sqrt{3})/2 * AC]/2 = (\sqrt{3})/4 * AC^2 = (\sqrt{3})/4 * \text{lato}^2$.

In seguito useremo questa ultima formula per calcolare l'area di un triangolo equilatero qualsiasi.

Con il compasso misurare la lunghezza di DC e facendo centro in A tracciare due archi che determinano i punti E e F:

$DC = AE = AF$.

DC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ADC ed è lunga:

$DC^2 = AD^2 + AC^2 = 2 * AC^2$ e

$DC = AC * \sqrt{2}$.

L'area del triangolo equilatero AEF è:

$S_{AEF} = (\sqrt{3})/4 * AF^2 = (\sqrt{3})/4 * (\sqrt{2} * AC)^2 = (\sqrt{3})/2 * AC^2$.

L'area di AEF è *doppia* di quella di ABC.

Con il compasso misurare la lunghezza di DF e riportarla facendo centro in A: sono fissati i punti G e I:

$DF = AG = AI.$

Il segmento DF è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADF. DF è lunga:

$DF^2 = AD^2 + AF^2 = AC^2 + (AC * \sqrt{2})^2 = 3 * AC^2$ e

$DF = \sqrt{3} * AC = AG = AI.$

L'area del triangolo equilatero AGI è:

$S_{AGI} = (\sqrt{3})/4 * AI^2 = (\sqrt{3})/4 * (\sqrt{3} * AC)^2 = 3 * (\sqrt{3})/4 * AC^2.$

L'area di AGI è il *triplo* di quella di ABC.

Misurare la lunghezza di DI e riportarla con il compasso facendo centro in A: sono stabiliti i punti J e K.

Il segmento DI è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADI:

$DI^2 = AD^2 + AI^2 = AC^2 + 3 * AC^2 = 4 * AC^2$ e

$DI = 2 * AC = AJ = AK.$

L'area di AJK è:

$S_{AJK} = (\sqrt{3})/4 * AK^2 = (\sqrt{3})/4 * (2 * AC)^2 = \sqrt{3} * AC^2.$

L'area di AJK è *quattro* volte quella di ABC.

Infine, misurare la lunghezza del segmento DK e con questa apertura fare centro in A per fissare i punti L e M:

$DK = AL = AM$

Il segmento DK è l'ipotenusa del triangolo rettangolo DAK:

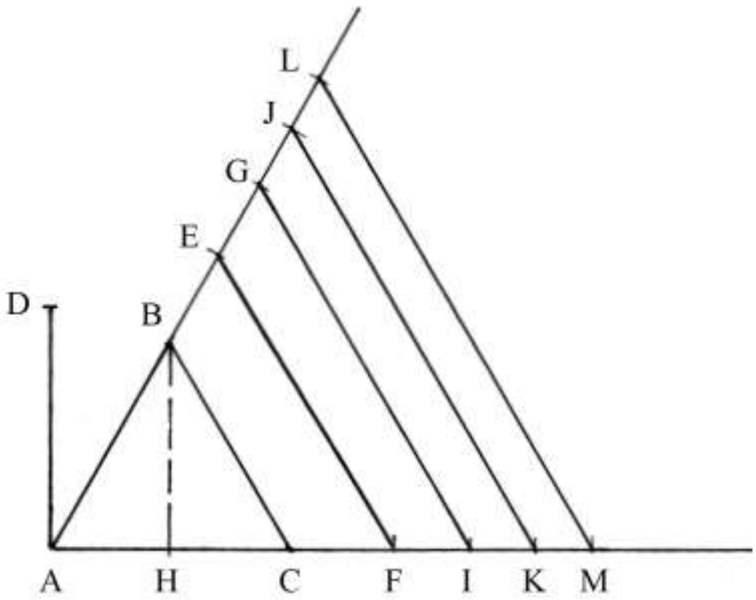
$DK^2 = AD^2 + AK^2 = AC^2 + (2 * AC)^2 = 5 * AC^2$ e

$DK = \sqrt{5} * AC = AL = AM.$

L'area del triangolo equilatero ALM è:

$S_{ALM} = (\sqrt{3})/4 * AM^2 = (\sqrt{3})/4 * (\sqrt{5} * AC)^2 = (5 * \sqrt{3})/4 * AC^2.$

L'area di ALM è *cinque* volte quella di ABC.



La tabella che segue mette a confronto le aree dei cinque triangoli equilateri:

Triangoli equilateri	Aree	Rapporti con area ABC
ABC	$(\sqrt{3})/4 * AC^2$	1
AEF	$(\sqrt{3})/2 * AC^2$	2
AGI	$3 * (\sqrt{3})/4 * AC^2$	3
AJK	$\sqrt{3} * AC^2$	4
ALM	$(5 * \sqrt{3})/4 * AC^2$	5

Chuquet offre alcune considerazioni sui rapporti intercorrenti fra le aree di alcuni triangoli equilateri:

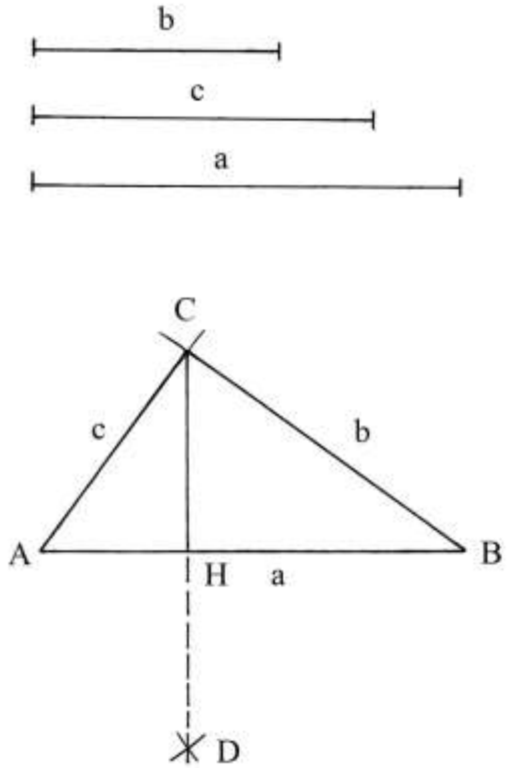
$S_{AGI} : S_{AEF} = 3 * (\sqrt{3})/4 * AC^2 : (\sqrt{3})/2 * AC^2 = 3 * (\sqrt{3})/4 : (\sqrt{3})/2 = 3 : 2$ e il rapporto è *sesquialtero*.

$S_{AJK} : S_{AGI} = \sqrt{3} * AC^2 : 3 * (\sqrt{3})/4 * AC^2 = 1 : ¾ = 4 : 3$ e il rapporto è *sesquiterzo*.

- -

Triangolo scaleno

Sono dati *tre* segmenti di diversa lunghezza: *a*, *b* e *c*.
Deve essere costruito un triangolo che abbia lati lunghi quanto i tre segmenti dati.



Su di una retta orizzontale riportare la lunghezza di *a*: è il lato AB.

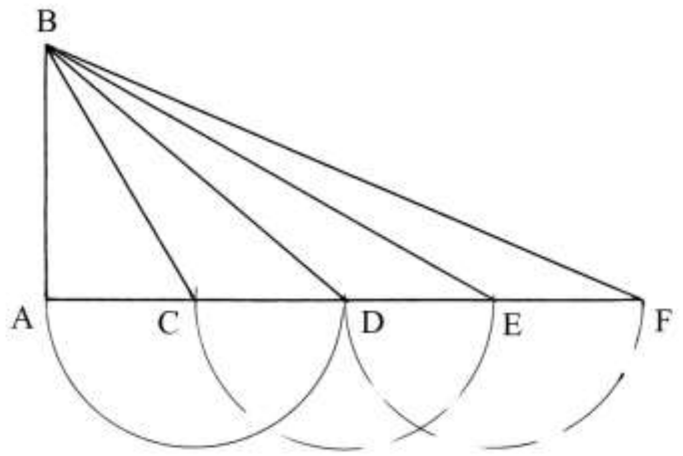
Con il compasso, fare centro in A con apertura uguale a *c* e tracciare due archi, uno sopra e l'altro sotto AB.

Sempre con il compasso misurare la lunghezza di *b* e fare centro in B: disegnare due archi, uno sopra e l'altro sotto AB.

Sono così fissati i punti C e D: per essi disegnare una linea che taglia AB nel punto H. CH è un'altezza del triangolo scaleno ABC.

<u>Triangoli con aree uguali</u>

ABC è un triangolo rettangolo. Devono essere costruiti altri triangoli di area uguale a quella di ABC, ma con angoli di differente ampiezza: essi non devono necessariamente essere rettangoli.



Prolungare verso destra il cateto AC. Fare centro nel punto C e con raggio CA tracciare una semicirconferenza fino a fissare il punto D. Proseguire con lo stesso metodo facendo centro in successione nei punti D e E.

Collegare D, E e F con il vertice B.

I triangoli BCD, BDE e BEF hanno area uguale a quella di ABC perché hanno lati di base di uguale lunghezza (AC = CD = DE = EF, per costruzione) e altezza AB comune a tutti e quattro i triangoli.

Le aree sono:

* S_{ABC} = AC * AB/2;
* S_{BCD} = CD * AB/2;
* S_{BDE} = DE * AB/2;
* S_{BEF} = EF * AB/2.

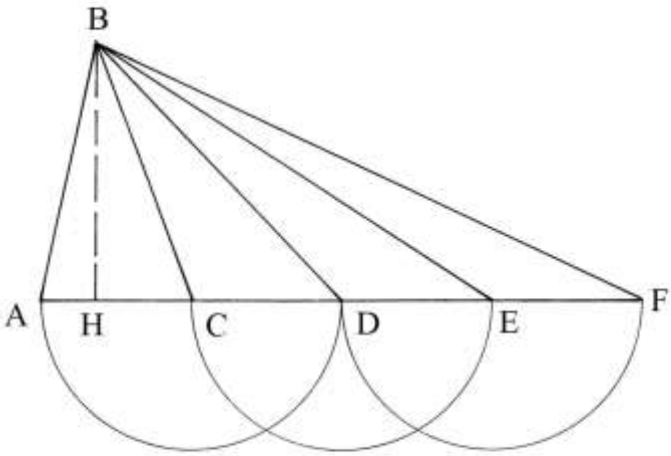
- APPROFONDIMENTO -

Il metodo appena descritto può essere applicato a un triangolo generico, non soltanto rettangolo.

ABC è un triangolo scaleno, con BH che è la sua altezza rispetto al lato di base AC.

Prolungare verso destra AC e, con il metodo utilizzato in precedenza, determinare i punti D, E e F.

I triangoli ABC, CBD, DBE e EBF hanno aree uguali perché le loro basi possiedono identica lunghezza e l'altezza BH è comune a tutti e quattro i triangoli.

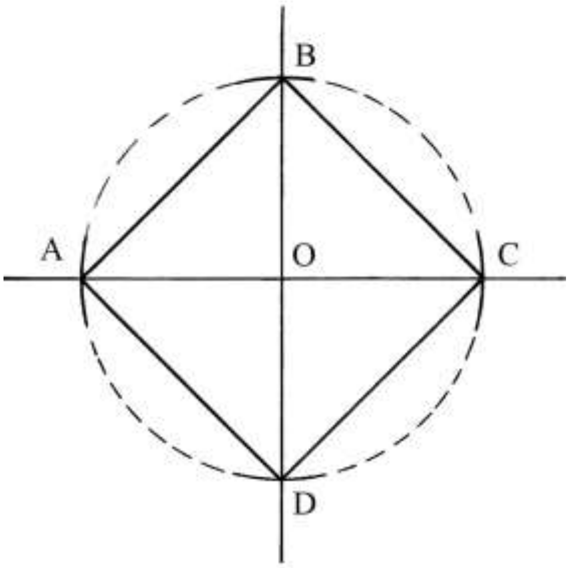


- -

Costruzione di un quadrato

Chuquet propone due distinti metodi grafici per la costruzione di un quadrato.

Di fatto, il primo metodo porta a ricavare un quadrato inscritto in un cerchio.



Tracciare due linee fra loro perpendicolari che si incontrano nel punto O. Con apertura a piacere fare centro in O e disegnare una circonferenza che taglia le perpendicolari in A, B, C e D.

ABCD è il quadrato cercato.

La lunghezza del raggio del cerchio è legata a quella del lato del quadrato inscritto:

$AB = OA * \sqrt{2}$.

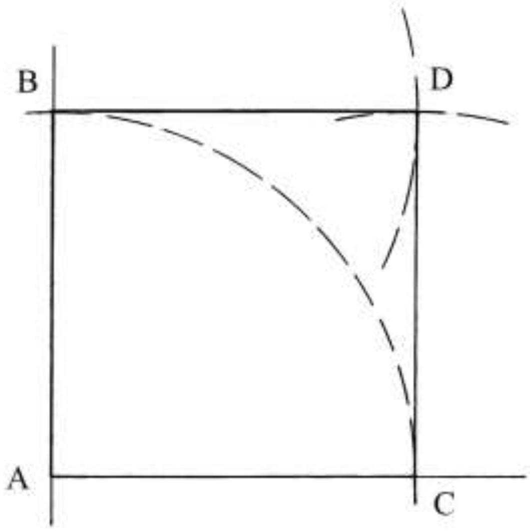
Se desideriamo inscrivere nel cerchio un quadrato di lato dato, ℓ, occorre disegnare una circonferenza di raggio *r*:

$r = \ell/\sqrt{2}$ e

$OA = AB/\sqrt{2}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo muove dalla tracciatura di un angolo retto in un vertice fissato, quale è A.



Con apertura uguale alla lunghezza dei lati del quadrato da costruire, AB, fare centro in A e disegnare un arco che fissa i punti B e C.

Fare centro in B e in C con la stessa apertura uguale a AB e tracciare due archi che si intersecano in D.

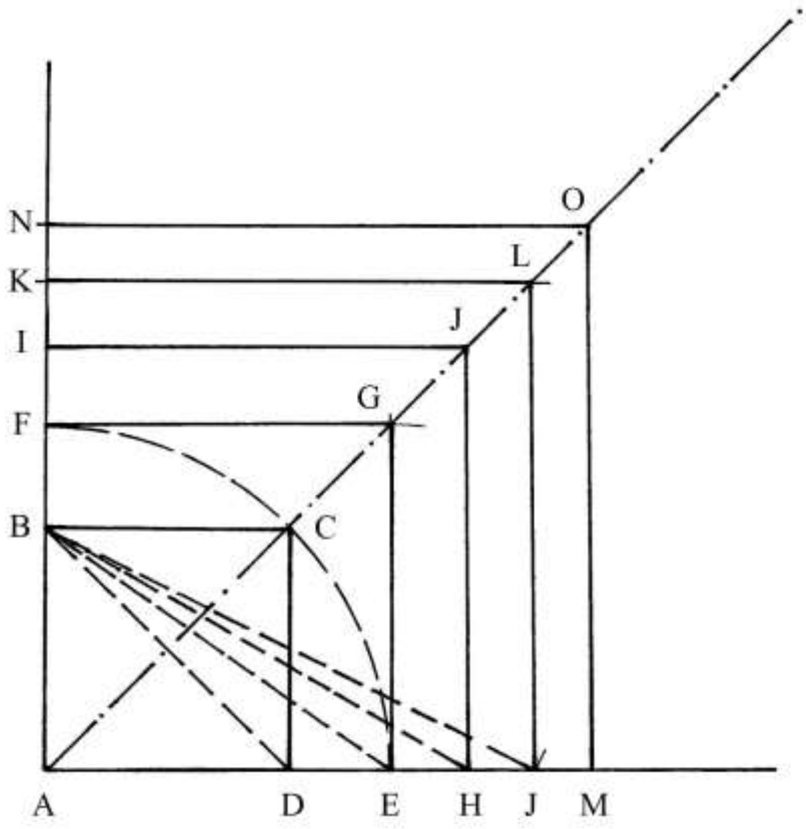
ABCD è il quadrato desiderato.

Questo metodo offre un risultato assai più preciso rispetto al precedente in cui compare il numero irrazionale rappresentato da $\sqrt{2}$.

Quadrati in proporzione

Devono essere costruiti una serie di quadrati con aree proporzionali a quella di un quadrato dato: i rapporti sono 1, 2, 3, 4, 5, ecc.

La costruzione che segue è basata su quella di Chuquet e la completa.



ABCD è un quadrato e AC e BD è sono le sue diagonali; la sua area è:

$S_{ABCD} = AD^2$.

Prolungare il lato AB e la diagonale AC verso l'alto.

Le diagonali AC e BD sono lunghe:

$AC = BD = AD * \sqrt{2}$.

Fare centro in A e con raggio AC tracciare un arco che stabilisce i punti E e F.

Disegnare il quadrato AFGE: esso ha i lati lunghi

$AF = AC = AD * \sqrt{2}$ e la sua area è:

$A_{AFGE} = AF^2 = (AD * \sqrt{2})^2 = 2 * AD^2$.

Collegare B con E; BE è lungo:

$BE^2 = AD^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 = AD^2 + (AD * \sqrt{2})^2 = AD^2 + 2 * AD^2 = 3 * AD^2$ e

$BE = AD * \sqrt{3}$.

Con apertura BE, fare centro in A e fissare i punti H e I: AH = AI = BE.

Il quadrato AIJH ha area:

$A_{AIJH} = AH^2 = BE^2 = (AD * \sqrt{3})^2 = 3 * AD^2$.

Tracciare il segmento BH; la sua lunghezza è:

$BH^2 = AB^2 + AH^2 = AD^2 + (AD * \sqrt{3})^2 = 4 * AD^2$ e

$BH = 2 * AD$.

Con apertura BH fare centro in A e determinare i punti J e K: BH = AJ = AK.

Il quadrato AKLJ ha area:

$S_{AKLJ} = AJ^2 = BH^2 = (2 * AD)^2 = 4 * AD^2$.

Infine, tracciare BJ: la sua lunghezza è:

$BJ^2 = AB^2 + AJ^2 = AD^2 + BH^2 = AD^2 + (2 * AD)^2 = 5 * AD^2$ e

$BJ = AD * \sqrt{5}$.

Con apertura BJ fare centro in A e fissare i punti M e N.

Il quadrato ANOM ha area:

$A_{ANOM} = AN^2 = BJ^2 = (AD * \sqrt{5})^2 = 5 * AD^2$.

Le diagonali di tutti e cinque i quadrati sono sovrapposte e i punti A, C, G, I, L e O giacciono sulla stessa semiretta uscente dal vertice A.

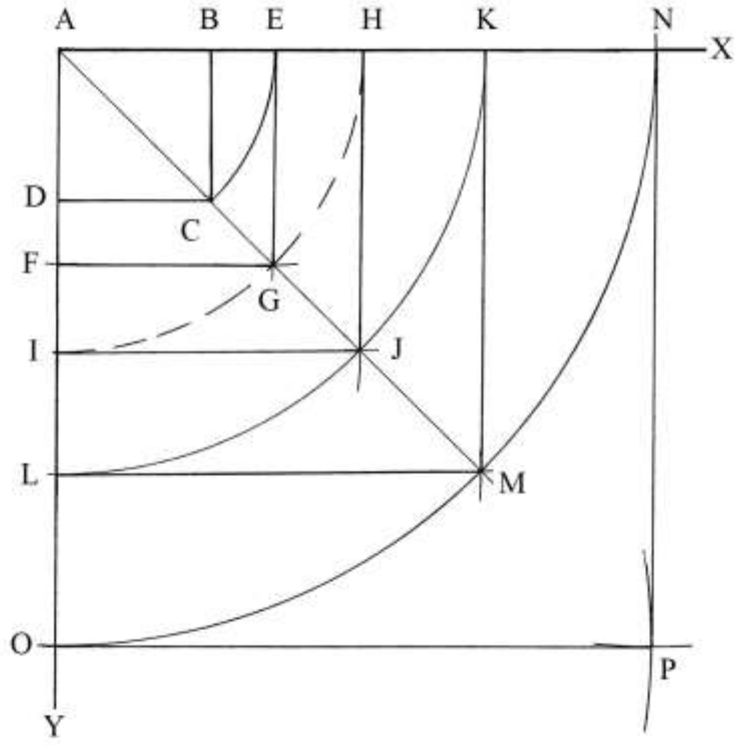
La tabella che segue riassume i dati relativi ai cinque quadrati:

Quadrati	Lunghezza dei lati	Rapporto con area ABCD
ABCD	AD	1
AGHF	AD * √2	2
ALKJ	AD * √3	3
APON	AD * √4 = 2 * AD	4
ATSR	AD * √5	5

- APPROFONDIMENTO -

Una variante della precedente costruzione, non prevista da Chuquet, porta a disegnare quadrati le cui aree crescono in progressione geometrica di ragione 2.

Disegnare un angolo retto in A:



AX e AY sono le due semirette che delimitano l'angolo retto.

Costruire il quadrato ABCD e tracciare la diagonale AC prolungandola verso il basso.

Come nel caso della precedente soluzione, tutte le diagonali dei successivi quadrati si sovrappongono.

Fare centro in A e con raggio AC disegnare due archi che fissano i punti E e F: AEGF è un secondo quadrato e i suoi lati sono lunghi:

AE = AC = AB * √2.

Fare centro in A e con raggio AG tracciare un arco che stabilisce i punti H e I; AHJI è il terzo quadrato e i suoi lati sono lunghi:

AH = AG = (AE * √2) = (AB * √2) * √2 = 2 * AB.

Fare centro in A e con raggio AJ disegnare un arco che determina K e L.

AKML è il quarto quadrato; i suoi lati sono lunghi:

$AK = AJ = (AH * \sqrt{2}) = 2 * \sqrt{2} * AB$.

Infine, fare centro in A e con raggio AM tracciare l'arco NO.

ANPO è il quinto quadrato. I suoi lati sono lunghi:

$AN = AM = (AK) * \sqrt{2} = (2 * \sqrt{2} * AB) * \sqrt{2} = 4 * AB$.

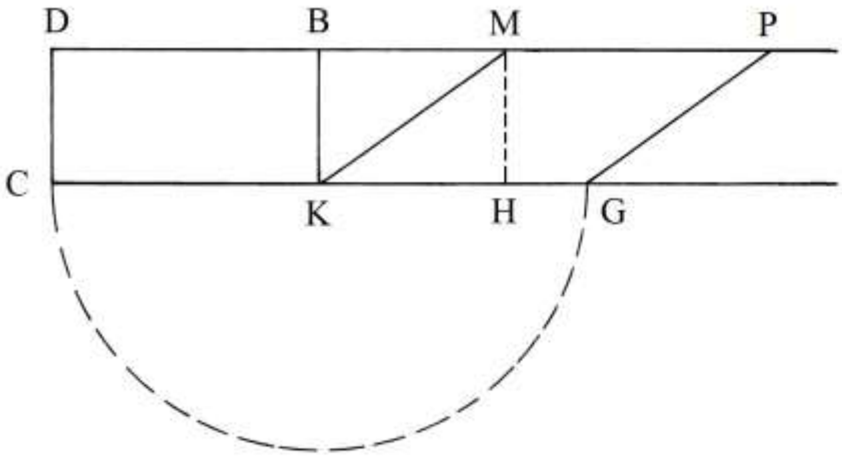
Le aree dei cinque quadrati sono le seguenti:

* $S_{ABCD} = AB^2$;
* $S_{AEGF} = AE^2 = (AB * \sqrt{2})^2 = 2 * AB^2$;
* $S_{AHJI} = AH^2 = (2 * AB)^2 = 4 * AB^2$;
* $S_{AKML} = AK^2 = (2 * \sqrt{2} * AB)^2 = 8 * AB^2$;
* $S_{ANPO} = AM^2 = (4 * AB)^2 = 16 * AB^2$.

- -

Parallelogramma equivalente a un rettangolo

CDBK è un rettangolo. Deve essere costruito un parallelogramma che abbia area uguale a quella del primo quadrilatero.



Prolungare verso destra i lati DB e CK.

Il parallelogramma deve avere due basi, KG e MP, lunghe quanto i lati CK e DB del rettangolo.

Fare centro in K e con raggio KC tracciare una semicirconferenza da C fino a fissare il punto G.

Stabilire il punto M, a distanza da B scelta a piacere: KM è il primo lato del parallelogramma cercato. Con il compasso riportare da M in P la lunghezza di KM, oppure da G tracciare la parallela GP al lato KM.

KMPG è il parallelogramma equivalente al rettangolo CDBK.

MH è un'altezza del parallelogramma, che è lunga quanto CD e BK.

L'area di CDBK è:

$S_{CDBK} = CK * CD$.

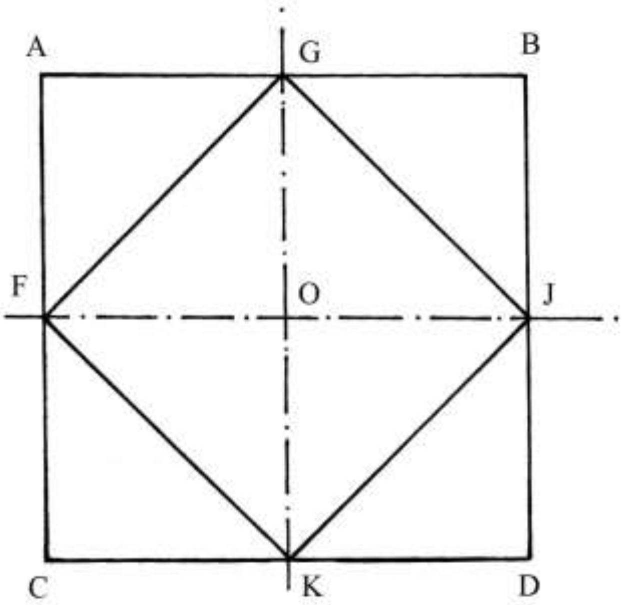
L'area di KMPG è:

$S_{KMPG} = KG * MH = CK * CD$.

I due quadrilateri hanno aree uguali.

Quadrato metà di un altro

ABDC è un quadrato. Al suo interno deve essere inscritto un secondo quadrato che abbia superficie uguale a metà di quella del primo.



Nota: la posizione delle lettere riproduce quella presente nell'originale. La sua successione è qui interpretata in senso orario a partire dalla prima lettera nell'ordine alfabetico:

A → B → D → C.

Oggi più correttamente, le lettere sarebbero scritte come:

A → B → *C* → *D*.

Torniamo alla soluzione del problema. Fissare i punti medi dei quattro lati: sono F, G, J e K. Il quadrato FGJK è inscritto nel primo.

L'area del quadrato esterno è:

$S_{ABDC} = AB^2$.

FG è un lato del quadrato inscritto; la sua lunghezza è data da:

$FG^2 = AG^2 + AF^2 = (AB/2)^2 + (AB/2)^2 = AB^2/4 + AB^2/4 = AB^2/2$ e

$FG = AB/\sqrt{2}$.

L'area di FGJK è:

$S_{FGJK} = FG^2 = (AB/\sqrt{2})^2 = AB^2/2$.

L'area di FGJK è la metà di quella di ABDC.

Unione di due quadrati

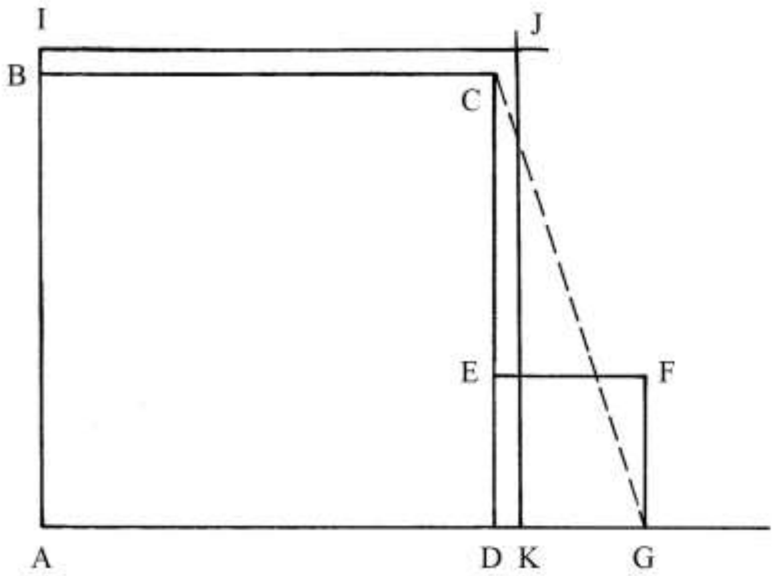
Sono dati due quadrati affiancati: ABCD è il più grande e DEFG il più piccolo.

Essi devono essere fusi in un quadrato più grande, con area uguale alla somma delle aree dei due quadrati originari.

Collegare i vertici C e G: CG è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CDG.

Il quadrato della sua lunghezza è:

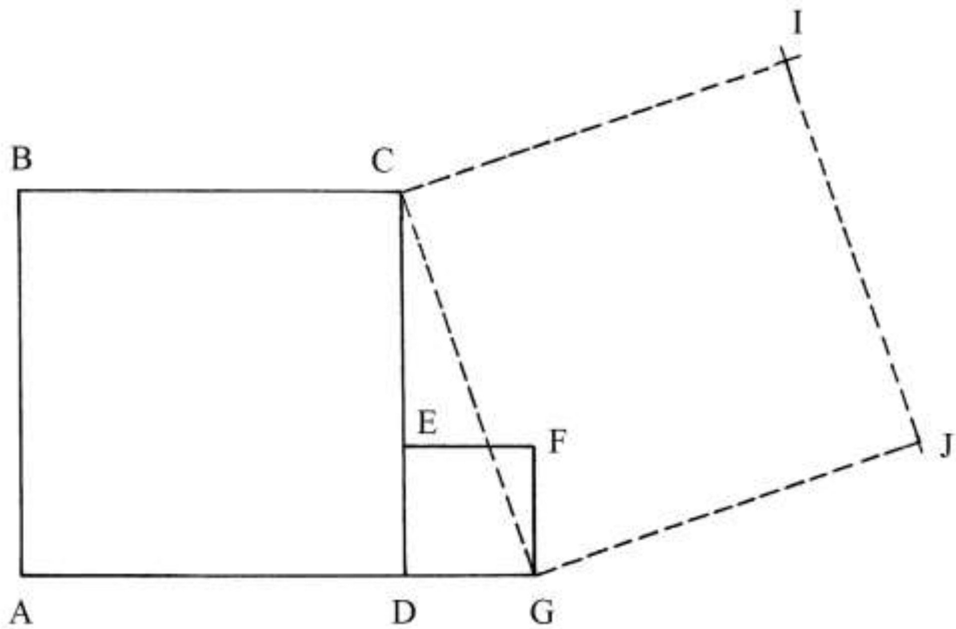
$CG^2 = CD^2 + DG^2$.



Ma CD^2 è l'area del quadrato ABCD e DG^2 quella di DEFG.
La somma delle due aree è uguale all'area del quadrato di lato CG.
AIJK è il quadrato somma con lati lunghi quanto CG.

- APPROFONDIMENTO -

Una variante della precedente costruzione è presentata nello schema che segue: essa è graficamente più comprensibile della precedente.

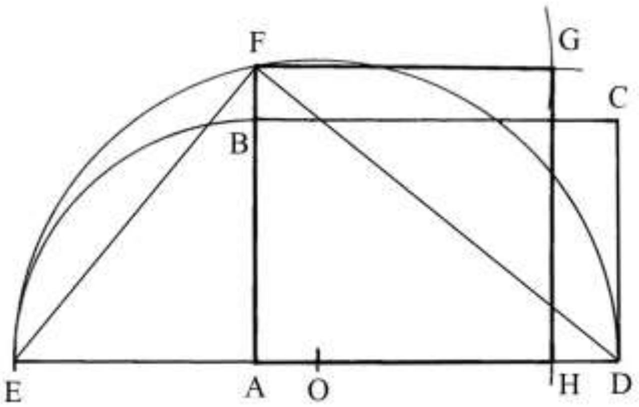


Sull'ipotenusa CG è costruito il quadrato GCIJ che è il poligono regolare che ha area uguale alla somma di quelle dei due quadrati originari, ABCD e DEFG.

- -

Quadrato equivalente a un rettangolo

ABCD è un rettangolo che deve essere trasformato in un quadrato con area uguale.



Senza citarlo, Euclide applica il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli: è ricercata la media geometrica fra le lunghezze dei due lati del rettangolo, AB e AD.

Prolungare verso sinistra il lato AD. Fare centro nel punto A e con raggio AB tracciare un arco da B fino a determinare il punto E.

Stabilire il punto medio di ED: è O.

Fare centro in O e con raggio OE = OD disegnare una semicirconferenza da E a D.

Prolungare verso l'alto il lato AB fino a incontrare la semicirconferenza nel punto F.

Nel semicerchio è disegnato il triangolo rettangolo EFD.

Per il citato teorema di Euclide, l'altezza FA è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei cateti EF e FD sull'ipotenusa ED:

EA : AF = AF : AD.

Ma EA = AB, per cui la precedente proporzione diviene:

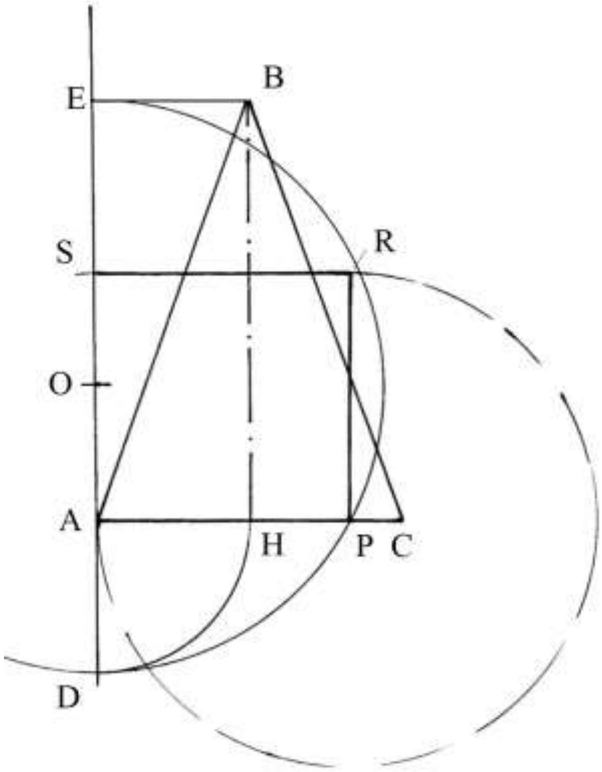
AB : AF = AF : AD   e

$AF^2 = AB * AD$.

Il quadrato AFGH ha lati lunghi AF e ha area uguale a quella del rettangolo ABCD.

Quadratura di un triangolo

ABC è un triangolo isoscele e l'altezza BH è anche una mediana del triangolo.



Per il punto A tracciare la perpendicolare a AC: essa è parallela all'altezza BH.

Fare centro nel punto A e con raggio AH tracciare l'arco HD.

Dal punto B condurre la parallela a AC fino a incontrare la perpendicolare nel punto E.

Determinare il punto medio di ED: è O.

Fare centro in O e con raggio OD = OE tracciare una semicirconferenza da D a E: essa taglia in P la base AC.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, il segmento AP ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle di EA e di AD:

$$EA : AP = AP : AD$$

$$AP^2 = EA * AD.$$

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = AC * BH/2 = (AC/2) * BH = AH * BH.$$

Ma AH = AD e BH = AE, per cui l'area è:

$$S_{ABC} = AD * AE = AP^2.$$

Costruire il quadrato ASRP che ha area:

$$S_{ASRP} = AP^2 = S_{ABC}.$$

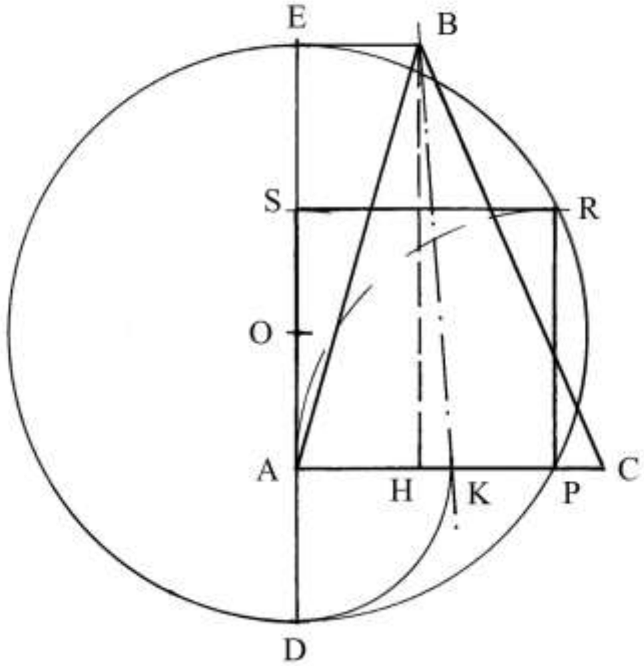
- APPROFONDIMENTO -

Presentiamo di seguito il caso della quadratura di un triangolo scaleno, non contenuta nel trattato di Chuquet.

ABC è un generico triangolo scaleno. BH è l'altezza relativa alla base AC.

Il segmento BK è la *mediana* che divide AC in due parti uguali:

AK = KC.



Per il punto A tracciare la perpendicolare al lato AC.

Fare centro nel punto A e, con raggio AK, disegnare un arco di circonferenza che fissa il punto D.

Dal punto B condurre una parallela al lato AB fino a incrociare la perpendicolare in un punto: è E.

Determinare il punto medio di ED: è O.

Fare centro nel punto O e, con raggio OE = OD, tracciare una circonferenza: essa taglia il lato AC in un punto, P.

Per il citato 2° *teorema di Euclide*, il segmento AP è *medio proporzionale* fra EA e AD:

EA : AP = AP : AD

AP^2 = EA * AD.

L'area del triangolo scaleno ABC è data da:

S_{ABC} = AC * BH/2 = (AC/2) * BH = AK * BH.

Ma AK = AD e BH = EA, per cui l'area di ABC è:

S_{ABC} = AD * EA = AP^2.

Costruire il quadrato APRS: esso ha superficie

S_{APRS} = AP^2 che è uguale all'area del triangolo ABC.

- -

Rettangolo equivalente a un triangolo

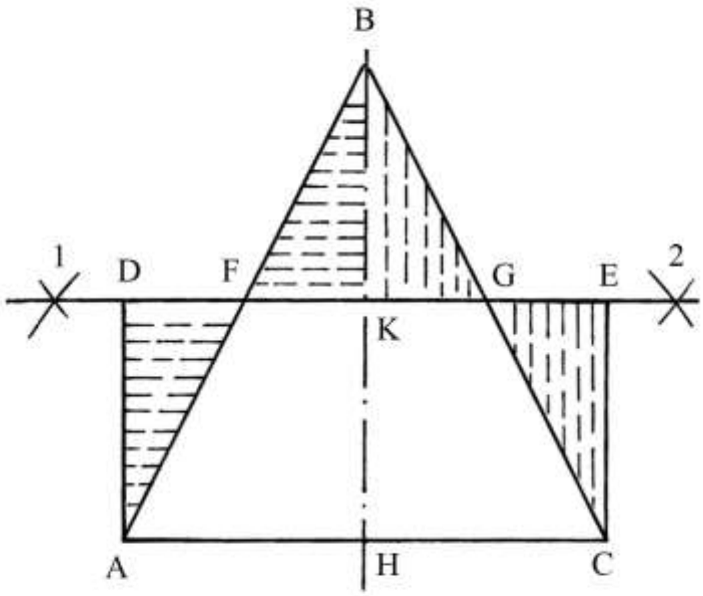
ABC è un generico triangolo: nell'esempio è *isoscele*.

Esso deve essere trasformato in un rettangolo di area uguale.

BH è un'altezza.

Fare centro in B e in H con raggio a piacere e tracciare quattro archi di circonferenza che si intersecano in due punti: 1 e 2.

Per 1 e per 2 passa l'asse che divide BH in due parti uguali: BK = KH.



Da A e da C elevare due perpendicolari a AC: sono AD e CE.
Il rettangolo ADEC ha area uguale a quella di ABC.
Verifichiamo.
L'area di ABC è:

S_{ABC} = AC * BH/2 = AC * (BH/2) = AC * KH.

L'area del rettangolo ADEC è data da:

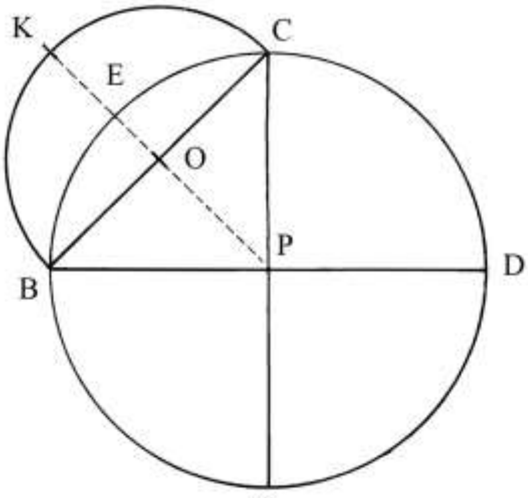
S_{ADEC} = AC * AD = AC * KH.

Le due aree sono uguali.

I triangoli rettangoli FBK e ADF hanno aree uguali. Lo stesso accade alla coppia di triangoli rettangoli KBG e GEC.

<u>Quadratura di una lunula</u>

Disegnare una circonferenza di centro P e raggio PB. Tracciare due diametri perpendicolari: sono BD e CG.



AC è una corda: BCP è un triangolo rettangolo isoscele di cui AC è l'ipotenusa.

Determinare il punto medio di BC: è O; fare centro in O e con raggio OB = OC disegnare una semicirconferenza da B a C.

POK è un segmento perpendicolare a BC che taglia nel suo punto medio O: K è il punto medio dell'arco BC.

La superficie piana delimitata dalla curva BKC e dall'arco BEC è una *lunula*.

Il problema affrontato da Chuquet si propone la quadratura di una lunula.

Il cerchio di centro P ha raggio lungo *R*:

$PB = R$.

L'area del cerchio è:

$S_{CERCHIO} = \pi * R^2 = 22/7 * R^2$.

Il semicerchio di centro O ha raggio OB = OC che è lungo:

$OB = OC = BC/2$.

Ma la corda BC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele BCP ed è lunga:

$BC^2 = PB^2 + PC^2 = R^2 + R^2 = 2 * R^2$ e

$BC = R * \sqrt{2}$.

Il raggio OB è lungo:

$OB = BC/2 = (R * \sqrt{2})/2 = R/\sqrt{2}$.

L'area del semicerchio OBKC è:

$S_{OBKC} = (22/7 * OB^2)/2 = 22/7 * R^2/2 = 11/14 * R^2$.

Fra l'area del cerchio di centro P e quella del semicerchio di centro O intercorre una proporzione:

$S_{CERCHIO} : S_{OBKC} = 22/7 * R^2 : 11/14 * R^2 = 22/7 : 11/14 = 4 : 1$.

L'area di uno dei quattro settori circolari nei quali il cerchio come quello PBEC è scomponibile è uguale a un quarto di quella dell'intero cerchio:

$S_{PBEC} = S_{CERCHIO}/4 = (22/7 * R^2)/4 = 11/14 * R^2$.

L'area di PBEC è uguale a quella del semicerchio OBKC.

L'area del triangolo rettangolo isoscele BCP è:

$S_{BCP} = PB * PC/2 = R * R/2 = R^2/2$.

L'area del segmento circolare BEC, delimitato dalla corda BC e dall'arco BEC, è:

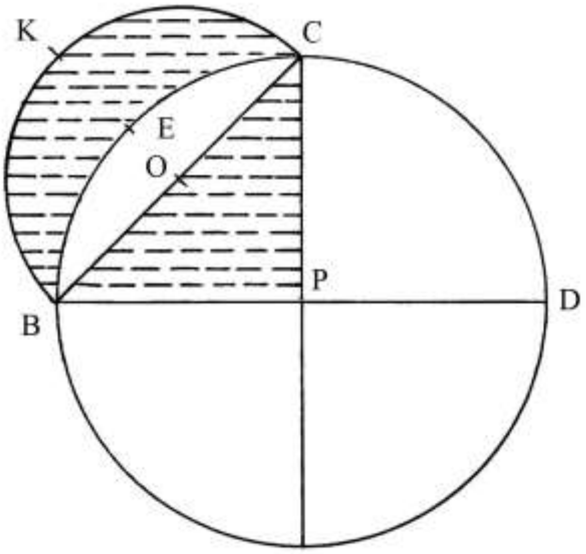
$S_{BECO} = S_{PBEC} – S_{BCP} = 11/14 * R^2 – R^2/2 = 4/14 * R^2 = 2/7 * R^2$.

Infine, l'area della lunula BKCE è data da:

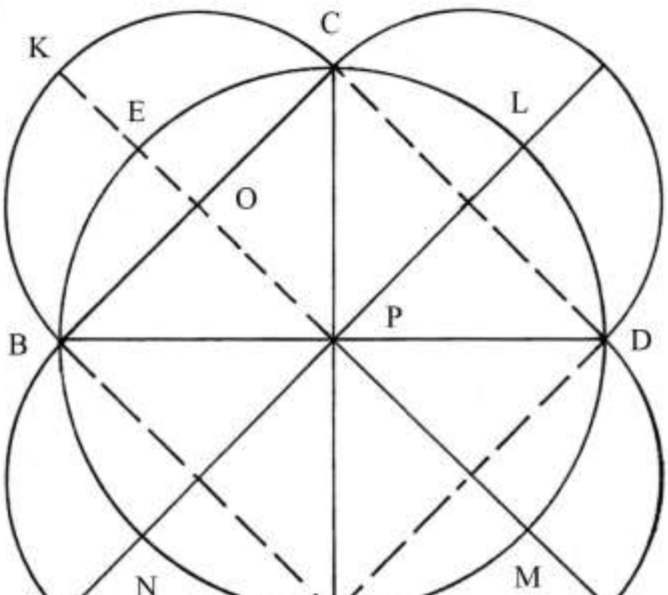
$S_{BKCE} = S_{OBKC} – S_{BECO} = 11/14 * R^2 – 2/7 * R^2 = (11/14 – 4/14) * R^2 =$
$= 7/14 * R^2 = R^2/2$.

La conclusione è importante:

l'area della lunula BKCE è uguale a quella del triangolo rettangolo isoscele BCP.



Lo schema che segue deriva dal precedente e mostra le quattro lunule costruite sui quattro lati del quadrato BCDG:



L’area dell’insieme delle quattro lunule è data da:

$S_{LUNULE} = 4 * S_{BKCE} = 4 * R^2/2 = 2 * R^2$.

L’area del quadrato BCDG è:

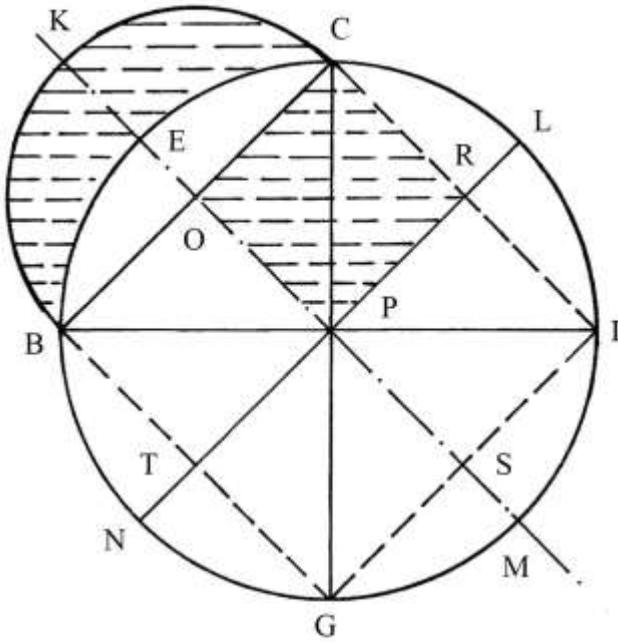
$S_{BCDG} = (BD * CG)/2 = (2 * R * 2 * R)/2 = 2 * R^2$.

L’area del quadrato BCDG è uguale a quella dell’insieme delle quattro lunule.

Nello schema è possibile disegnare un secondo quadrato inscritto nel cerchio: i suoi vertici sono E, L, M e N.

I quadrati BCDG e ELMN hanno le stesse dimensioni: sono lati e diagonali di uguali lunghezze e aree uguali.

BCDG è scomponibile in *quattro* quadrati di uguali dimensioni: OCRP, PRDS, PSGT e PTBO.



L’insieme delle quattro lunule ha superficie uguale a quella del quadrato BCDG: ne consegue che una singola lunula, ad esempio quella BKCE, ha la stessa superficie di uno dei quattro quadrati che formano BCDG, ad esempio quello OCRP.

Il quadrato OCRP ha area uguale a quella del triangolo rettangolo isoscele BCP: i due poligoni hanno in comune il triangolo rettangolo isoscele OCP e i due restanti triangoli rettangoli isosceli, PCR e BOP, hanno uguali dimensioni.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Le lunule</u>

Il matematico greco Ippocrate di Chio (vissuto nel V secolo a.C.) studiò la geometria del cerchio. Scrisse un trattato di geometria – *Elementi* – andato perduto. Fu un precursore di Euclide.

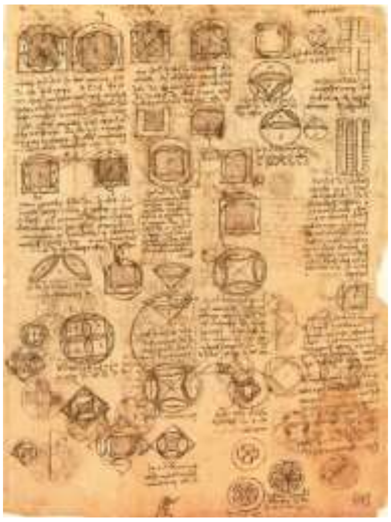
Le ricerche di Ippocrate di Chio sulla (im)possibile quadratura del cerchio lo portarono allo studio di un gruppo particolare di figure piane, le *lunule*, così chiamate perché la loro forma si avvicina a quella delle fasi lunari.

Ippocrate di Chio dimostrò che la superficie della lunula è uguale a quella del triangolo rettangolo ACO.

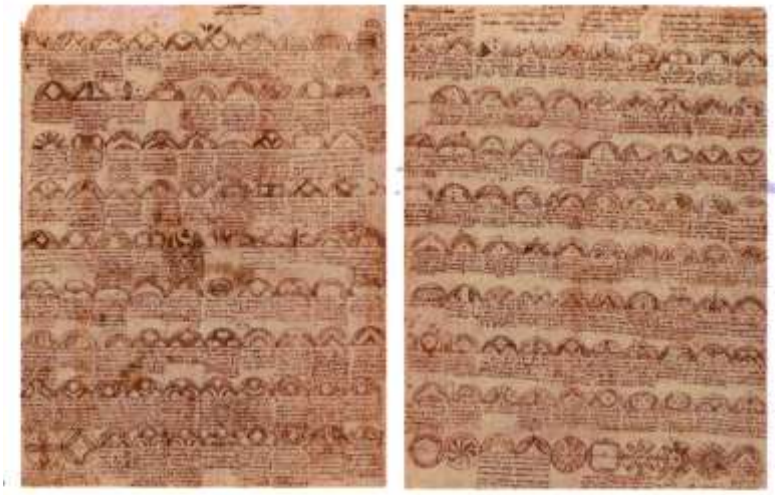
Leon Battista Alberti scrisse un breve saggio – *De lunularum quadratura* – in cui studiò la figura.

Leonardo da Vinci approfondì l’argomento e nel *Codice Atlantico* sono contenute alcune tavole con i suoi studi:

- il foglio 264 *recto* e *verso*, come mostra la figura che segue ricavata dal foglio 264 *recto*:

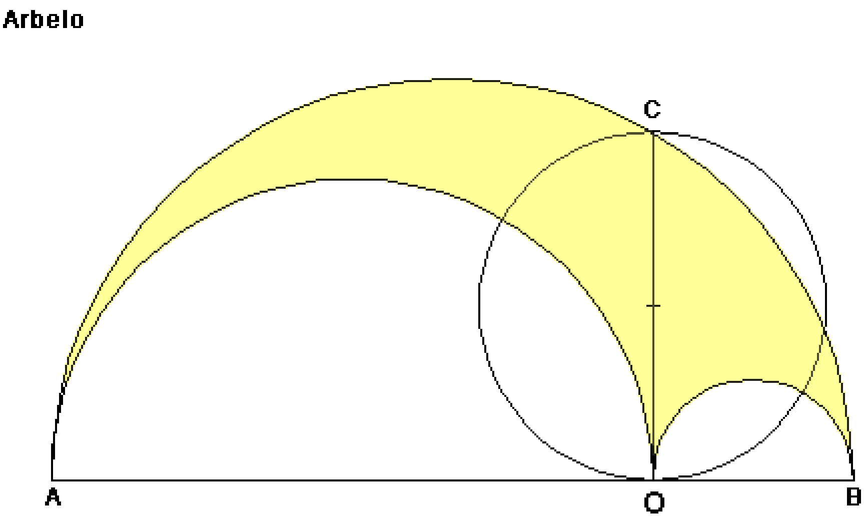


- i fogli 307 *recto* e *verso* e 308 *recto* e *verso* contengono disegni con lunule;
- il foglio 455 che al *recto* contiene 180 figure di lunule:



Questa ultima pagina è veramente notevole.

La lunula è anche chiamata *arbelo*, parola di origine greca che indica il *trincetto da calzolaio*, un coltello che ha il profilo simile a una serie di lunule: la figura che segue è riprodotta da https://it.wikipedia.org:



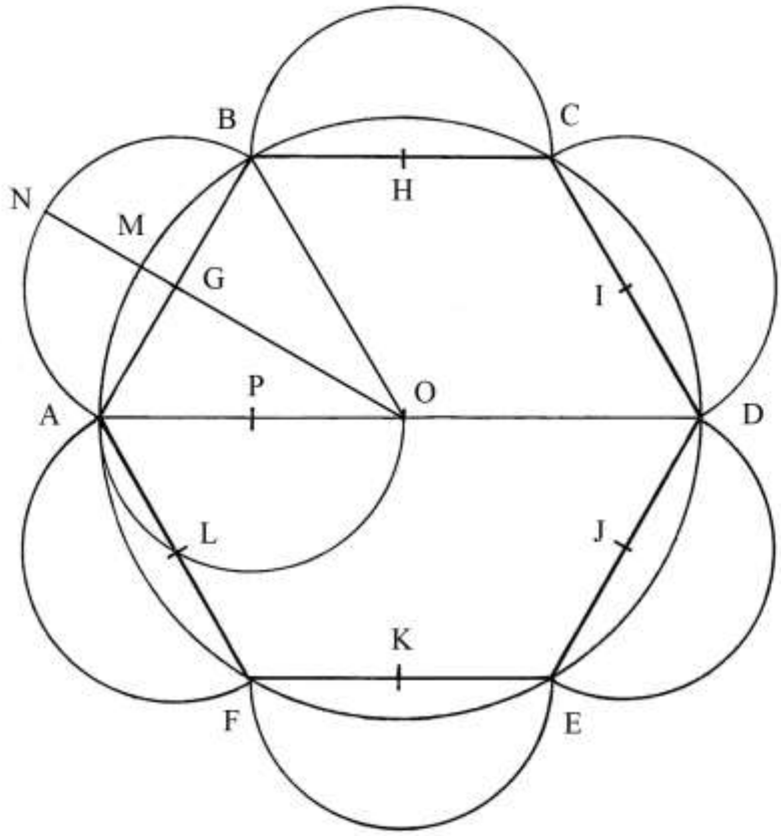
Lunule costruite sui lati di un esagono regolare

La figura che segue è una rielaborazione dello schema contenuto nel trattato di Chuquet. Anche la soluzione che è di seguito proposta amplia quella contenuta nel testo del matematico francese.

È disegnato un esagono regolare inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA: è ABCDEF. AD è un diametro.

Fissare i punti medi dei lati dell'esagono e quello del raggio OA: sono G, H, I, J, K, L e P.

Con apertura uguale a PA, che è metà del raggio del cerchio in cui è inscritto l'esagono (e pure metà della lunghezza dei lati di questo poligono inscritto), fare centro nei punti medi dei lati dell'esagono e in P e tracciare sette semicirconferenze.



Chuquet richiama la soluzione del precedente del precedente problema nella quale era stato dimostrato che l'area di una lunula era uguale a quella di un triangolo rettangolo isoscele.

L'area del cerchio di centro O è:

$S_{\text{CERCHIO}} = 22/7 * OA^2$.

L'area di ciascuno dei sette semicerchi che hanno raggio PA è:

$S_{\text{SEMICERCHIO}} = 22/7 * PA^2/2 = 22/7 * (OA/2)^2/2 = 22/7 * OA^2/(4 * 2) =$
$= 11/28 * OA^2$.

L'area del cerchio di centro O e raggio OA è *otto* volte quella di ciascuno dei sette semicerchi di raggio PA.

OAB è uno dei sei triangoli equilateri nei quali è scomponibile l'esagono regolare.

L'area di OAB è:

$S_{\text{OAB}} = AB * OG/2$.

L'altezza OG è lunga:

$OG = (\sqrt{3})/2 * AB$, quindi l'area del triangolo è:

$S_{\text{OAB}} = AB * [(\sqrt{3})/2) * AB]/2 = (\sqrt{3})/4 * AB^2 = (\sqrt{3})/4 * AB^2$.

L'area dell'intero esagono è *sei* volte quella di OAB:

$S_{ESAGONO} = 6 * S_{OAB} = 6 * (\sqrt{3})/4 * AB^2 = 3 * (\sqrt{3})/2 * AB^2 = 3 * (\sqrt{3})/2 * OA^2$.

L'area del settore circolare OAMB è:

$S_{OAMB} = S_{CERCHIO}/6 = 22/7 * OA^2/6 = 22/42 * OA^2 = 11/21 * OA^2$.

L'area del semicerchio ANBG è:

$S_{ANBG} = (22/7 * GA^2)/2 = 22/7 * (OA/2)^2/2 = 11/28 * OA^2$.

L'area del segmento circolare AMBG è data dalla differenza fra l'area del settore circolare OAMB e quella del triangolo equilatero OAB:

$S_{AMBG} = S_{OAMB} – S_{OAB} = 11/21 * OA^2 – (\sqrt{3})/4 * OA^2 = [11/21 – (\sqrt{3})/4] * OA^2$.

L'area della lunula ANBM è:

$S_{ANBM} = S_{ANBG} – S_{AMBG} = 11/28 * OA^2 – [11/21 – (\sqrt{3})/4] * OA^2 =$
$= 11/28 * OA^2 – 11/21 * OA^2 + (\sqrt{3})/4 * OA^2 = (\sqrt{3})/4 * OA^2 – 11/84 * OA^2 =$
$= OA^2 * [(\sqrt{3})/4 – 11/84]$.

Le sei lunule hanno superficie complessiva uguale a:

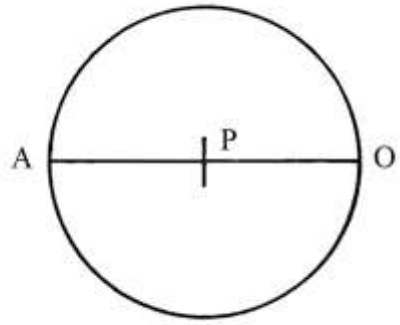
$S_{LUNULE} = 6 * S_{ANBM} = 6 * OA^2 * [(\sqrt{3})/4 – 11/84] = OA^2 * [(\sqrt{3}) * 3/2 – 11/14]$.

Infine, calcoliamo la differenza fra l'area dell'esagono e quella complessiva delle sei lunule:

$S_{DIFFERENZA} = S_{ESAGONO} – S_{LUNULE} = 3 * (\sqrt{3})/2 * OA^2 – OA^2 * [(\sqrt{3}) * 3/2 – 11/14] =$
$= 11/14 * OA^2$.

L'area di un cerchio di raggio PA = OA/2 è:

$S_{PA} = 22/7 * PA^2 = 22/7 * (OA/2)^2 = 22/28 * OA^2 = 11/14 * OA^2$.



La conclusione è:

la differenza fra l'area dell'esagono e quella dell'insieme delle sei lunule è uguale a quella di un cerchio di raggio uguale a metà del raggio del cerchio circoscritto all'esagono e a metà della lunghezza dei lati del poligono regolare.

Ulteriori approfondimenti sull'argomento sono contenuti nell'articolo di Vittoria Fontana Bollini e Giovanna Lepori, citato in bibliografia.

QUADRATURA DEL CERCHIO

Triangolazione di un cerchio

Un cerchio ha raggio OA. Per il suo centro O tracciare una retta perpendicolare a OA: su di essa riportare la lunghezza, *approssimata*, della circonferenza del cerchio:

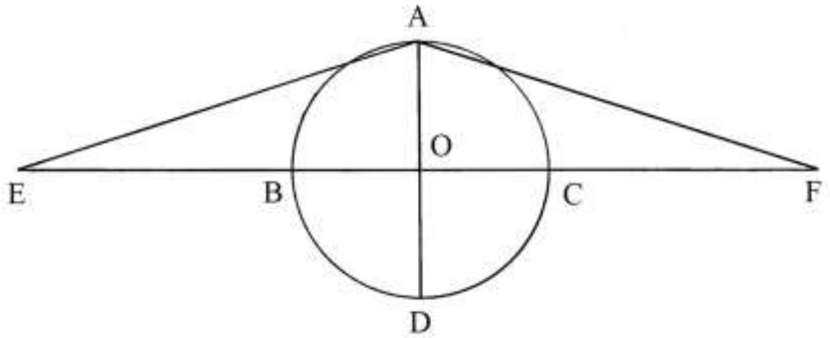
$EF = 2 * \pi * OA \approx 2 * 22/7 * OA = 44/7 * OA$.

OE e OF hanno uguale lunghezza:

$OE = OF = EF/2 = 22/7 * OA$.

L'area del cerchio è:

$S_{CERCHIO} = \pi * OA^2 \approx 22/7 * OA^2$.



L'area del triangolo EAF è:

$S_{EAF} = OA * EF/2 = OA * (44/7 * OA)/2 = 22/7 * OA^2$.

L'area di EAF è uguale a quella approssimata del cerchio.

Quadratura approssimata del cerchio

Chuquet propose un metodo per la quadratura approssimata del cerchio. Per sua ammissione, la sua costruzione riproduce quella proposta dal pensatore catalano Ramon Llull (Raimondo Lullo, 1232-5? – 1316) che la espose nel suo "*Liber de geometria nova et compendiosa*", scritto nel 1299.

Prima di descrivere il metodo, Chuquet fa un cenno al rapporto intercorrente fra la lunghezza del diametro e quella della circonferenza di un cerchio che egli ricorda di essere di 7 a 22, approssimazione del valore di π largamente impiegata fin dall'antichità.

È dato un cerchio di centro O. Esso è inscritto in un quadrato, ABCD, che ha lati lunghi quanto il diametro del cerchio:

$AD = EF$.

Le diagonali AC e BD intersecano la circonferenza nei punti G, H, I e J.

Collegare questi ultimi punti per formare il quadrato GHIJ che risulta inscritto nel cerchio.

Ricalcando la soluzione di Llull, Chuquet afferma che il semiperimetro del quadrato esterno (ABCD) sommato al semiperimetro del quadrato interno (GHIJ) sarebbe uguale alla lunghezza della circonferenza:

$2 * AD + 2 * GJ = 2 * \pi * OE$

$2 * AD + 2 * GJ = \pi * AD$

$2 * AD + 2 * GJ = 22/7 * AD$.

Ma la lunghezza di GJ è legata a quella del diametro EF:

$GJ^2 = GI^2/2 = AD^2/2$ e

$GJ = AD/\sqrt{2}$.

Indichiamo la lunghezza del diametro EF con *d*:

$EF = d = AD$.

La precedente espressione diviene:

$$2 * d + 2 * d/\sqrt{2} = 22/7 * d.$$

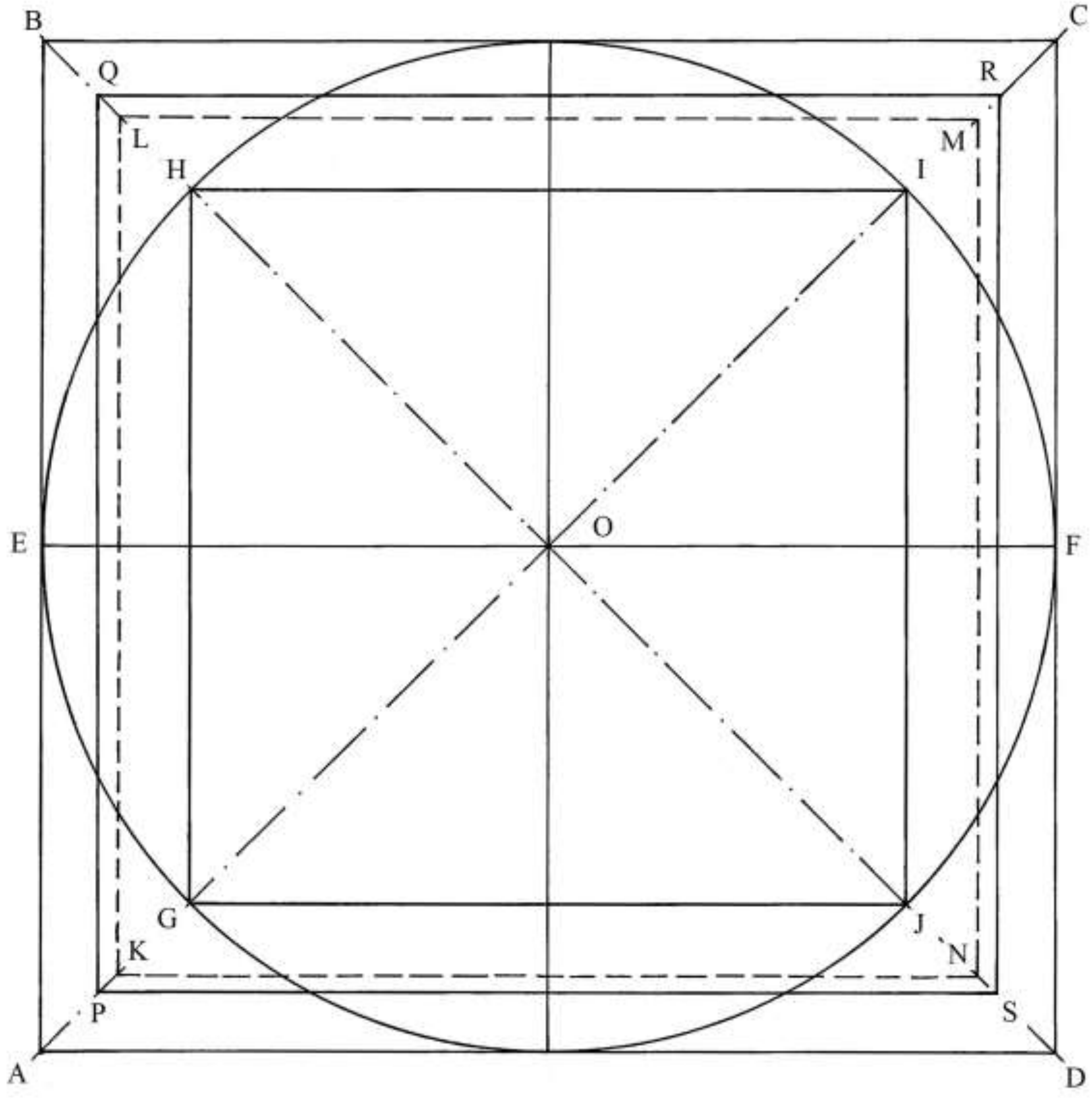
Dividendo entrambi i membri dell'uguaglianza per *d* si ha:

$$2 + 2/\sqrt{2} = 22/7$$

$$2 + \sqrt{2} = 22/7$$

$$3{,}1442 \approx 3{,}1428.$$

I due membri dell'uguaglianza sono pressoché uguali.



Costruire un terzo quadrato, KLMN, con lati lunghi quanto la media aritmetica fra le lunghezze dei lati dei quadrati ABCD e GHIJ:

$$KL = (AD + GJ)/2.$$

La soluzione è equivalente a quella che segue (che richiama la citata lunghezza della circonferenza del cerchio di raggio OE):

$$KL = (2 * AD + 2 * GJ)/2.$$

Il quadrato KLMN ha area *leggermente* più piccola di quella del cerchio.

Il quadrato con area che si avvicina di più a quella del cerchio è PQRS:

$PQ^2 = S_{\text{CERCHIO}}$.

L'area del cerchio è:

$S_{\text{CERCHIO}} = 22/7 * OE^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 11/14 * d^2$.

Ne consegue:

$PQ^2 = 11/14 * d^2$ e

$PG = d * \sqrt{(11/14)}$.

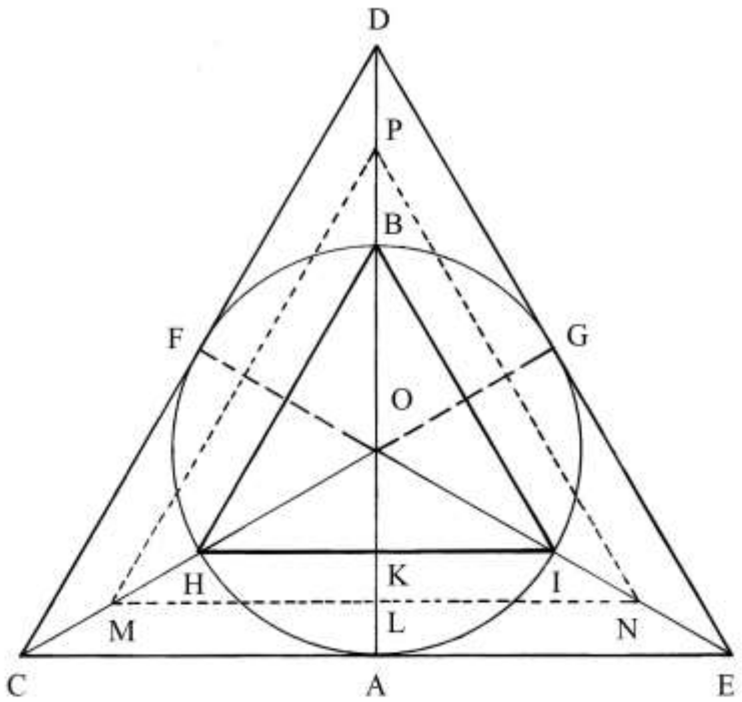
Anche il quadrato PQRS ha area che è un'approssimazione, benché più precisa, della superficie del cerchio.

- APPROFONDIMENTO -

Chuquet accenna a tentativi di quadratura da lui abbozzati, usando tre triangoli equilateri e poi tre esagoni regolari.

Le due ipotesi non sono accompagnate da alcuno schema illustrativo.

Nella figura che segue è proposta una soluzione utilizzante i triangoli equilateri.



Un cerchio ha centro in O e il suo raggio è OA = OB.

Per O, A e B passa un asse verticale.

CDE è un triangolo equilatero circoscritto al cerchio: A, F e G sono i punti di tangenza fra il cerchio e il triangolo e sono anche i punti medi dei lati dello stesso triangolo.

OA, OF e OG sono tre raggi del cerchio.

DA, CG e EF sono le tre altezze del triangolo.

Si tralascia la descrizione del metodo usato per ricavare CDE.

HBI è un secondo triangolo equilatero, inscritto nel cerchio.

I due triangoli equilateri hanno lati due a due paralleli: sono concentrici e equidistanti.

BK è un'altezza del triangolo equilatero inscritto.

Determinare il punto medio di KA: è L. Per L condurre una parallela a CE: essa taglia CG e EF nei punti M e N.

Dai punti M e N tracciare due linee parallele rispettivamente a CD e a ED: sono MP e NP.

MPN è il terzo triangolo equilatero, concentrico rispetto ai primi due.

Secondo Chuquet il perimetro del terzo triangolo [MPN] avrebbe la stessa lunghezza della circonferenza del cerchio di centro O e raggio OA.

Calcoliamo i perimetri delle quattro figure.

Il raggio del cerchio è OA = *R*. La circonferenza è lunga:

circonferenza = 2 * π * R = 2 * 22/7 * R = 44/7 * R.

L'altezza del triangolo esterno, AD, è:

AD = DO + OA.

OA è il raggio R e DO è lungo il doppio di OA, quindi si ha:

AD = R + 2 * R = 3 * R.

Fra le lunghezze dei lati e quelle delle altezze di un triangolo equilatero vi è una precisa relazione:

altezza = (√3)/2 * lato.

Nel caso di CDE si ha:

AD = (√3)/2 * CE e

CE = AD * 2/√3 = 3 * R * 2/√3 = 2 * √3 * R.

Il perimetro di CDE è:

p_{CDE} = 3 * CE = 3 * (2 * √3 * R) = 6 * √3 * R.

Consideriamo il triangolo HBI. La sua altezza BK è lunga:

BK = BO + OK = R + r/2 = 3/2 * R.

Il lato HI è:

HI = (√3)/2 * BK = (√3)/2 * (3/2 * R) = 3 * (√3)/4 * R.

Il perimetro di HBI è:

p_{HBI} = 3 * HI = 3 * [3 * (√3)/4 * R] = 9/4 * √3 * R.

Il terzo triangolo equilatero, MPN, ha PL come un'altezza: la sua lunghezza è data dalla media aritmetica fra quelle delle altezze AD e BK:

PL = (AD + BK)/2 = (3 * R + 3/2 * R)/2 = 9/4 * R.

Il lato MN è lungo:

MN = (√3)/2 * PL = (√3)/2 * (9/4 * R) = 9/8 * √3 * R.

Il perimetro di MPN è:

p_{MPN} = 3 * MN = 3 * (9/8 * √3 * R) = 27/8 * √3 * R.

Confrontiamo la lunghezza della circonferenza di centro O con quella del perimetro di MPN:

circonferenza : p_{MPN} = 44/7 * R : 27/8 * √3 * R = 44/7 : 27/8 * √3 ≈ 6,2857 : 5,8456.

Chiaramente, 44/7 è maggiore di 27/8 * √3.

L'area del cerchio è:

$S_{CERCHIO} = \pi * R^2 = 22/7 * R^2$.

L'area del triangolo MPN è:

S_{MPN} = MN * PL/2 = (9/8 * √3 * R) * (9/4 * R)/2 = 81/64 * √3 * R^2.

Confrontiamo le due aree:

$S_{CERCHIO} : S_{MPN}$ = 22/7 * R^2 : 81/64 * √3 * R^2 = 22/7 : 81/64 * √3 ≈ 3,1428 : 2,192.

L'area del cerchio è maggiore di quella del triangolo MPN.

La quadratura di un cerchio con l'ausilio dei triangoli equilateri non è affidabile.

L'ipotetico triangolo equilatero di area uguale a quella del cerchio dovrebbe avere lati lunghi come segue:

$S_{\text{TRIANGOLO}} = S_{\text{CERCHIO}}$

$lato^2 * (\sqrt{3})/4 = 22/7 * R^2$ da cui

$lato = R * \sqrt{[88/(7 * \sqrt{3})]}$.

Questo ipotetico triangolo avrebbe lati leggermente più lunghi di quelli del triangolo MPN.

Forse, con poligoni regolari con un maggior numero di lati rispetto al triangolo equilatero è possibile avvicinarsi a una soluzione approssimata più precisa della quadratura di un cerchio.

- -

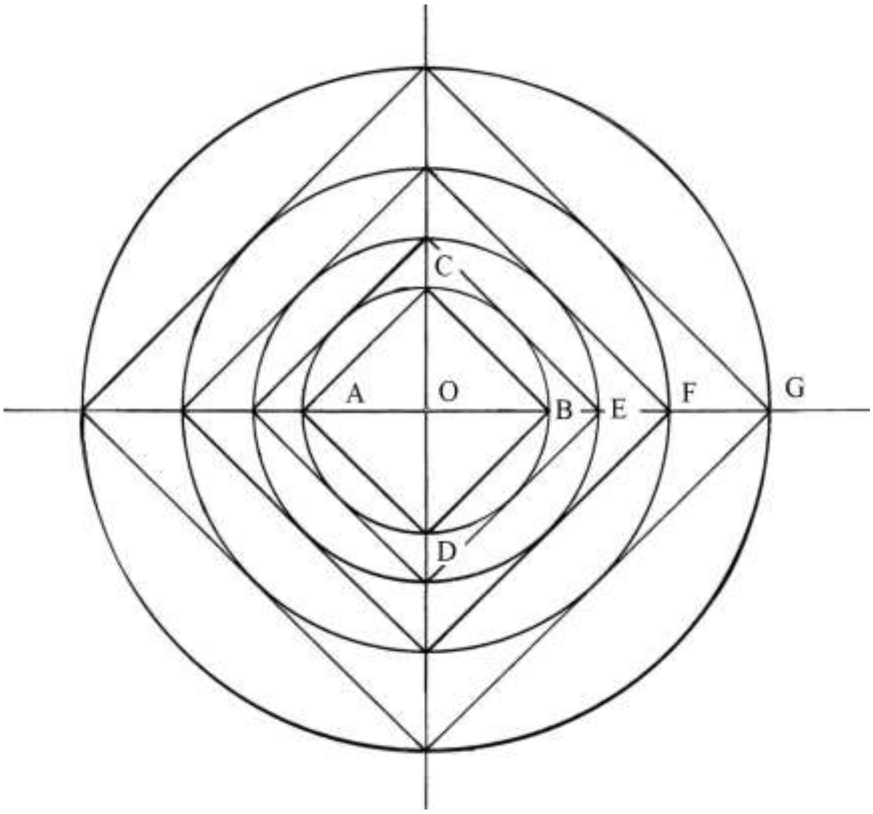
Cerchi e quadrati in proporzione

Il grafico che segue descrive una serie di quadrati e di cerchi inscritti o circoscritti. La soluzione qui presentata muove dall'interno verso l'esterno: Chuquet ha seguito l'andamento *opposto*.

Tracciare due linee fra loro perpendicolari che si intersecano nel punto O, centro dei cerchi e dei quadrati concentrici.

I quadrati sono disposti con le diagonali orizzontali e verticali.

La costruzione serve a tracciare cerchi e quadrati di superficie proporzionale a numeri interi, in proporzione geometrica di ragione 2.



La prima circonferenza ha raggio OA. Il quadrato in essa inscritto, ACBD, ha lati lunghi

$AC = OA * \sqrt{2}$.

Fare centro in O con raggio $AC = OA * \sqrt{2}$ e disegnare una circonferenza che fissa il punto E.

Dal punto E costruire un quadrato inscritto nella circonferenza appena disegnata e con i lati tangenti alla circonferenza più interna.

Con lo stesso metodo, tracciare le circonferenze che determinano i punti F e G e i relativi quadrati.

ACBD è un quadrato con lato lungo AC. La diagonale AB, lunga *d*, è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ACB:

$$d^2 = AC^2 + CB^2 = AC^2 + AC^2 = 2 * AC^2 = 2 * S_{ACBD}.$$

AC^2 è l'area del quadrato ACBD.

L'area del quadrato ACBD è:

$$S_{ACBD} = d^2/2.$$

Chiamiamo *q* la lunghezza del raggio OA che è metà della diagonale *d*:

$$OA = OB = d/2 = q.$$

L'area di ACBD può essere scritta come segue:

$$S_{ACBD} = d^2/2 = (2 * q)^2/2 = (4 * q^2)/2 = 2 * q^2.$$

In generale, l'area di uno qualsiasi dei quadrati contenuti nella figura è data da:

$$S_{QUADRATO} = d^2/2 = 2 * q^2.$$

Le tabelle che seguono contengono i dati relativi alle aree dei quattro cerchi e dei quattro quadrati:

Raggio cerchio	Area	Proporzione con area cerchio raggio OB
OB	$\pi * OB^2$	1
$OE = \sqrt{2} * OB$	$\pi * 2 * OB^2$	2
$OF = \sqrt{2} * OE =$ $= \sqrt{2} * \sqrt{2} * OB = 2 * OB$	$\pi * (2 * OB^2) = \pi * 4 * OB^2$	4
$OG = \sqrt{2} * OF = \sqrt{2} * 2 * OB$	$\pi * 8 * OB^2$	8

Semidiagonale quadrato	Area	Proporzione con area quadrato semidiagonale OB
OB	$2 * OB^2$	1
$OE = \sqrt{2} * OB$	$2 * (\sqrt{2} * OB)^2 = 4 * OB^2$	2
$OF = \sqrt{2} * OE = 2 * OB$	$2 * OF^2 = 8 * OB^2$	4
$OG = \sqrt{2} * OF = 2 * \sqrt{2} * OB$	$2 * OG^2 = 16 * OB^2$	8

Costruzione di un calibro per misurare le botti

Molti abacisti italiani affrontarono il problema della misura della quantità di vino (o di altri liquidi) contenuta in una botte.

Forse occorre distinguere due differenti problemi:

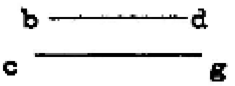
* la misura della capacità di una botte;
* la misura del volume del liquido contenuto.

I problemi relativi alla misura della capacità di una botte erano risolti geometricamente assimilando il recipiente più o meno ricurvo a solidi con forme generalmente circolari: tronchi di cono con parti cilindriche.

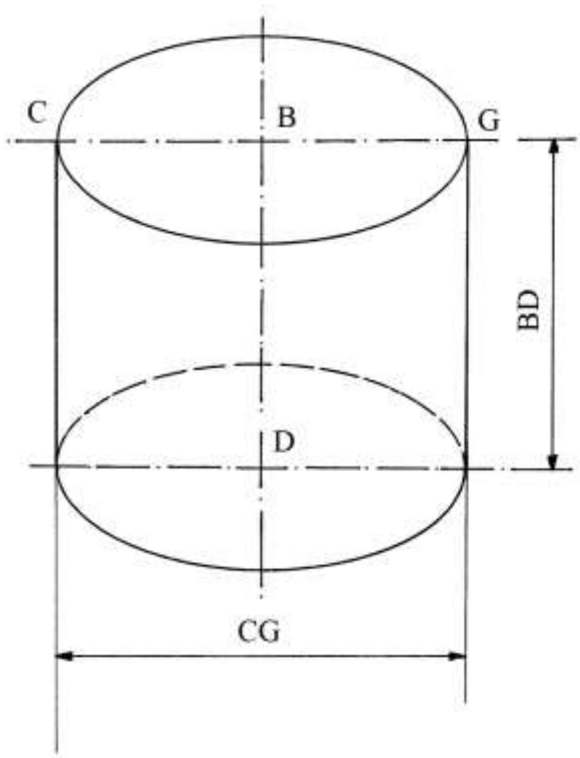
La misura del volume del liquido contenuto in una botte era spesso effettuata introducendo un'asta metallica o di legno opportunamente graduata con scale più o meno empiriche: l'inserimento veniva fatto dal *cocchiume*, il foro praticato in una doga.

Chuquet chiama *dyapason* o *jauge* lo strumento usato per misurare l'altezza del liquido: questo secondo termine può essere tradotto con "indicatore di livello", "asta indicatrice" oppure "calibro".

Chuquet propone la costruzione di un recipiente ideale di forma cilindrica con diametro di 16-20 pollici e con altezza simile (con le relative proporzioni contenute nello schema che segue riprodotto dal testo del Trattato):



"bd" è la profondità o altezza del recipiente e "cg" il suo diametro interno. La forma del vaso è presentata nello schema che segue, disegnato in assonometria:



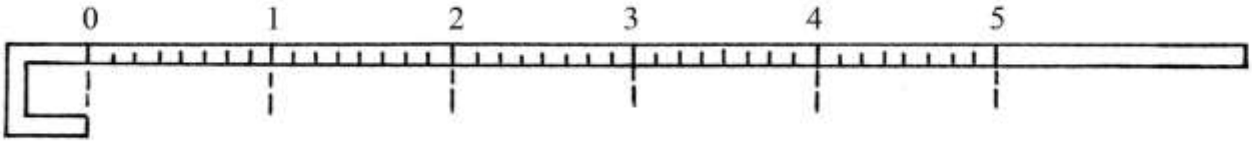
Può darsi che il vaso progettato da Chuquet servisse a tarare il calibro per effettuare le misurazioni all'interno delle botti reali.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per la misura dell'altezza del liquido contenuto in una botte, Chuquet suggerisce l'uso di un'asta quadrata dotata di un uncino o impugnatura a un estremo: essa deve essere lunga almeno mezzo piede.

Su di una faccia sono incise alcune tacche che riproducono la lunghezza della profondità "bd" (o BD) già incontrata in precedenza:

0-1 = 1-2 = 2-3 = 3-4 = 4-5 = BD.



Ciascuno degli intervalli lunghi quanto BD è diviso in 8 o in 12 parti uguali: nello schema sono rappresentate 8 divisioni.

- APPROFONDIMENTO -

È necessario segnalare un'incongruenza. Se l'altezza BD è lunga – con lunghezza *simile* – come il diametro CG, fissiamola in 16 pollici.

Stando al testo l'asta quadrata sarebbe lunga almeno *mezzo piede*: nell'antichità il piede è sempre stato convenzionalmente diviso in 12 pollici, ma nell'Appendice I (che presenta problemi contenuti nella prima stesura del trattato di Chuquet) il piede è diviso in *10 pollici*. Seguiamo questa equivalenza.

La lunghezza esistente sull'asta fra le tacche indicate con 0 e 5 è:

0-5 = 5 * BD = 5 * 16 pollici = 80 pollici = 8 piedi.

Non è possibile contenere in *mezzo piede* e cioè in 5 pollici una lunghezza di 8 piedi.

- -

Una diversa asta poteva essere usata per misurare il diametro "CG" e sulla faccia sarebbero incise più volte le 8 o le 12 divisioni di questo intervallo.

Facciamo un'ipotesi: scopo di Chuquet era inizialmente quello di misurare le dimensioni – diametro e profondità – di un vaso vuoto e a tale scopo prevedeva l'uso di due strumenti (oppure di due distinte scale incise su facce differenti di un'asta a forma di prisma quadrato.

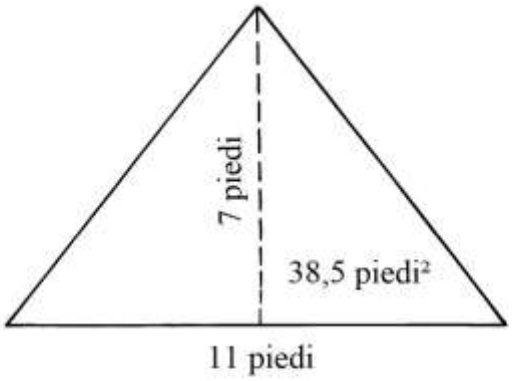
APPENDICE I
===========

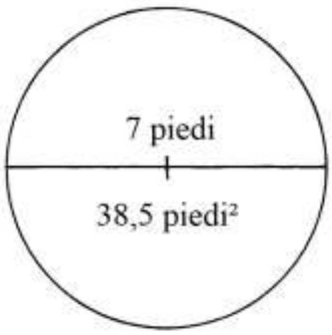
Nelle pagine 433 – 448 Hervé L'Huiller propone alcuni estratti da un altro manoscritto del trattato di Chuquet, non pubblicato: come accennato all'inizio di questo articolo, si tratta del manoscritto n.a.fr. 1052 della Biblioteca nazionale di Parigi. Questa prima versione risalirebbe a circa dieci anni prima della stesura definitiva che è il testo contenuto nel manoscritto Paris fr. 1346.

Ricordiamo che l'edizione curata da Hervé L'Huillier è basata sul secondo e più recente manoscritto.

Conversione di un triangolo in un cerchio

Un triangolo o un'altra figura piana ha area di 38,5 piedi^2. Deve essere disegnato un cerchio che abbia area uguale e di cui si desidera conoscere la lunghezza del diametro *d*.





L'area S di un cerchio è data da:

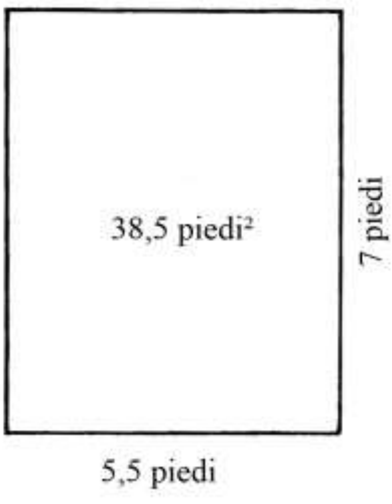
$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2$ da cui:

$d^2 = 14/11 * S_{\text{CERCHIO}}$ e

$d = \sqrt{(14/11 * S_{\text{CERCHIO}})} = \sqrt{(14/11 * 38{,}5)} = \sqrt{49} = 7$ piedi.

Il triangolo originario potrebbe essere isoscele con base lunga 11 e altezza di 7 piedi.

Un'altra figura con area uguale a 38,5 piedi^2 è mostrata nello schema che segue:



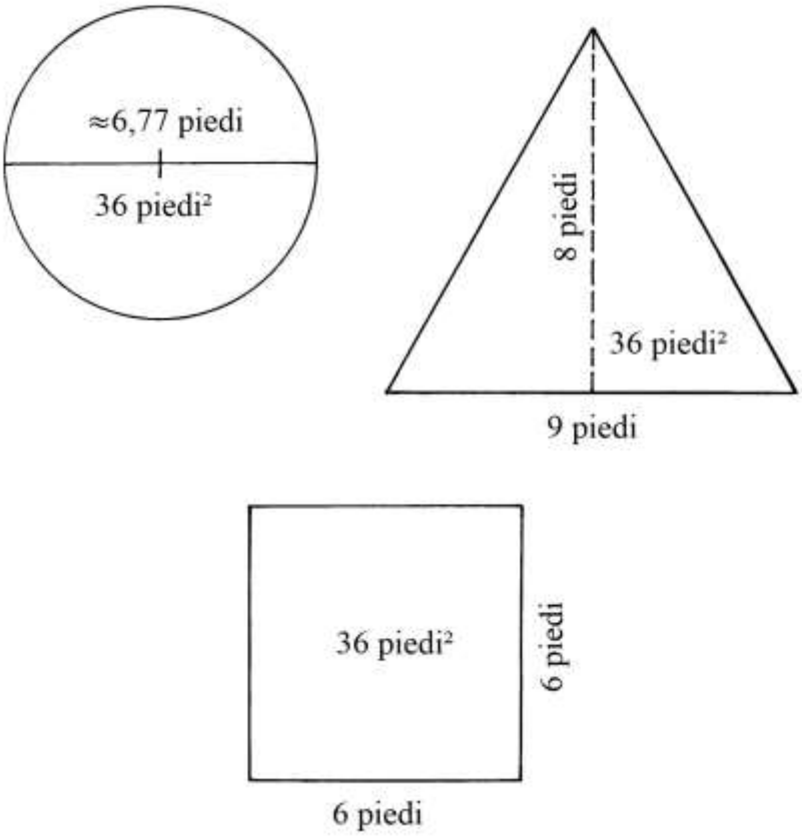
Il rettangolo ha basi lunghe 5,5 piedi e larghezza di 7 piedi: la sua area è di 38,5 piedi^2.

Conversione di una figura in un quadrato

Una figura piana di forma circolare, triangolare o di altro tipo ha area uguale a 36 piedi^2. Essa deve essere trasformata in un quadrato di uguale superficie: il suo lato è dato da:

$\sqrt{36} = 6$ piedi.

Nel grafico che segue sono presentati un cerchio e un triangolo isoscele, entrambi con area uguale a 36 piedi^2:



Il cerchio ha area:

$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2$, con *d* diametro lungo

$d = \sqrt{(14/11 * S_{\text{CERCHIO}})} = \sqrt{(14/11 * 36)} \approx 6{,}77$ piedi.

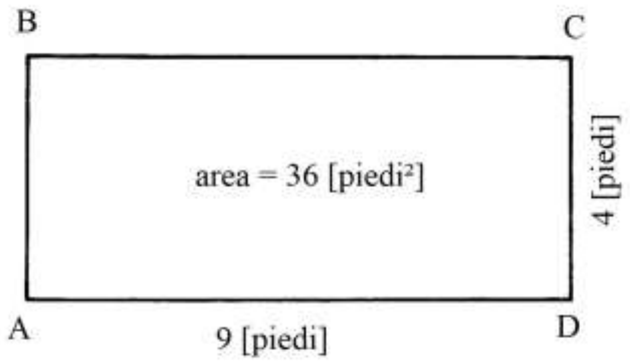
Il triangolo isoscele ha area:

$S_{\text{TRIANGOLO}} = (8 * 9)/2 = 36$ piedi^2.

Rettangolo di area data

Un quadrilatero ha area di 36 [piedi^2] e lunghezza uguale a 9 [piedi].

Il problema chiede la larghezza del rettangolo:



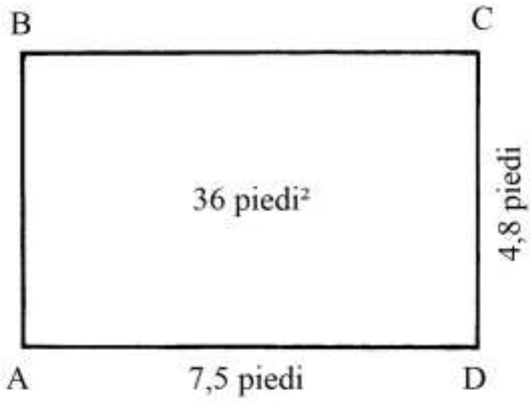
$AB = S_{ABCD}/AD = 36/9 = 4$ [piedi].

Il testo non indica le unità di misura: si presume che siano piedi e piedi^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo caso è relativo a un rettangolo che ha la solita area di 36 piedi^2 ed è lungo 7,5 piedi: la sua larghezza è:

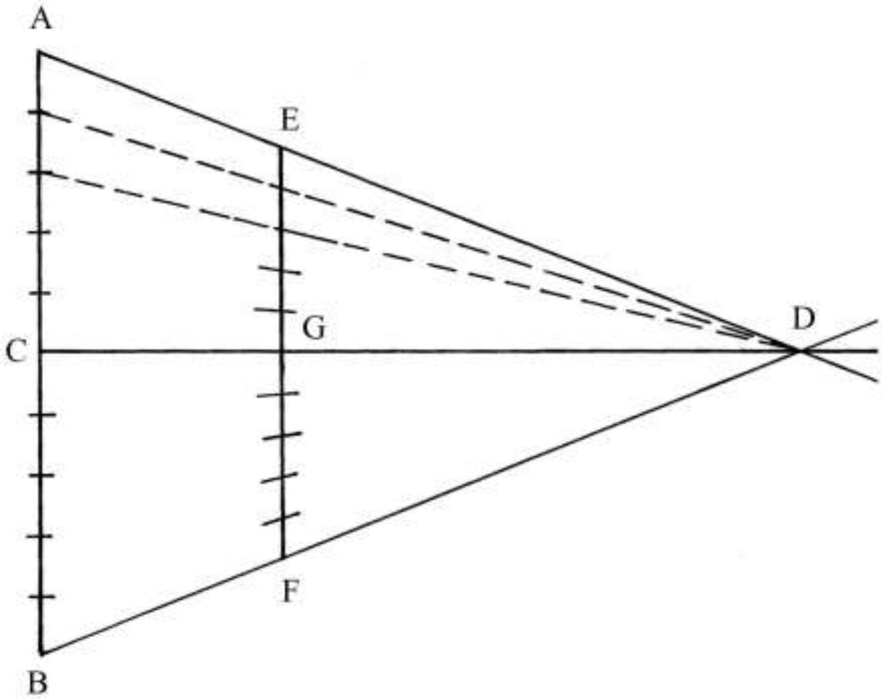
$AB = S_{ABCD}/AD = 36/7,5 = 4,8$ piedi.



Divisione di un segmento in parti uguali

La costruzione proposta da Chuquet è un caso particolare: AB e EF sono due segmenti paralleli che hanno in comune l'asse di simmetria che li divide entrambi in parti uguali: CGD.

Il punto D è l'intersezione della coppia di semirette AED e BFD.

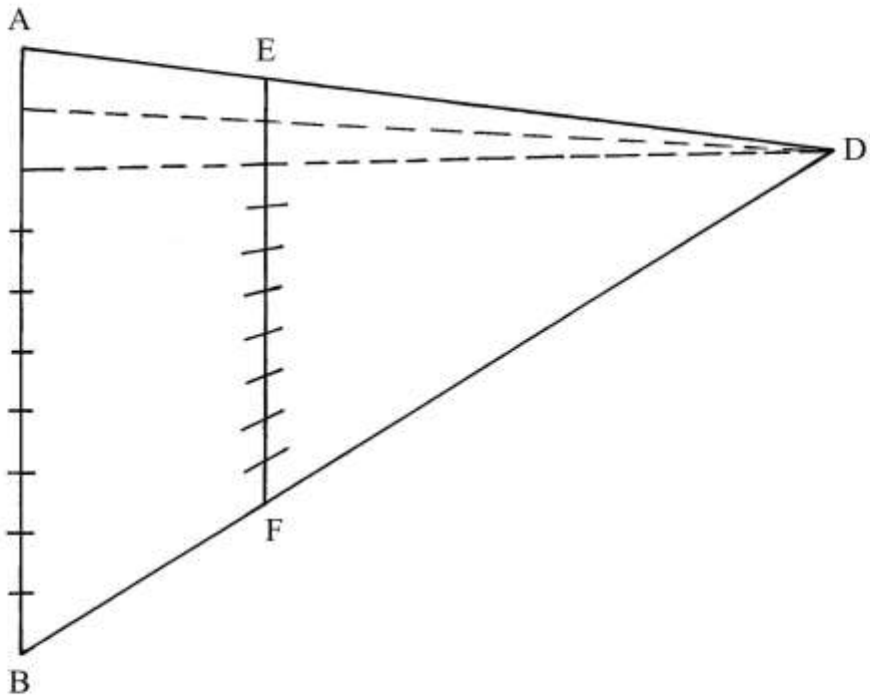


EF deve essere diviso in parti uguali, ad esempio *dieci*.

Dividere AB in dieci parti uguali. Dai punti che ripartono AD tracciare delle linee fino al punto D: esse dividono EF in dieci parti uguali.

\- APPROFONDIMENTO -

Il metodo può essere applicato a coppie di segmenti sempre paralleli, ma privi di un comune asse di simmetria.



AB è diviso in dieci parti uguali perché così deve essere ripartito il segmento EF.

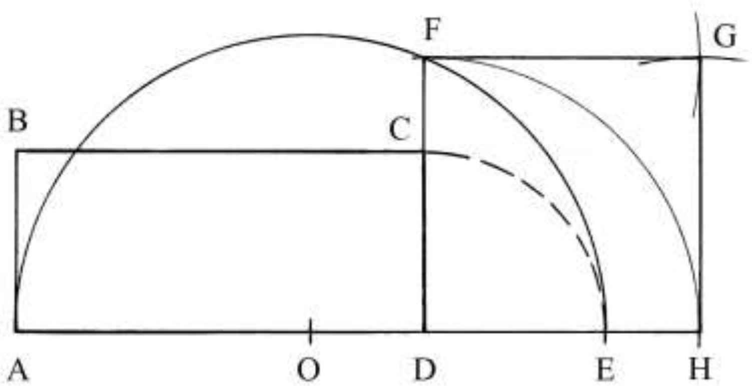
Le coppie di segmenti passanti per A-E e B-F si incontrano in D.

Da D tracciare una serie di linee fino a raggiungere i punti che dividono AB in dieci parti: nel loro percorso queste linee ripartono EF in dieci parti.

- -

<u>Quadratura di un rettangolo</u>

ABCD è un rettangolo che deve essere trasformato in un quadrato di area uguale.



Prolungare verso l'alto il lato DC e verso destra il lato AD.

Fare centro in D e con raggio DC tracciare un arco da C fino a fissare il punto E.

O è il punto medio di AE.

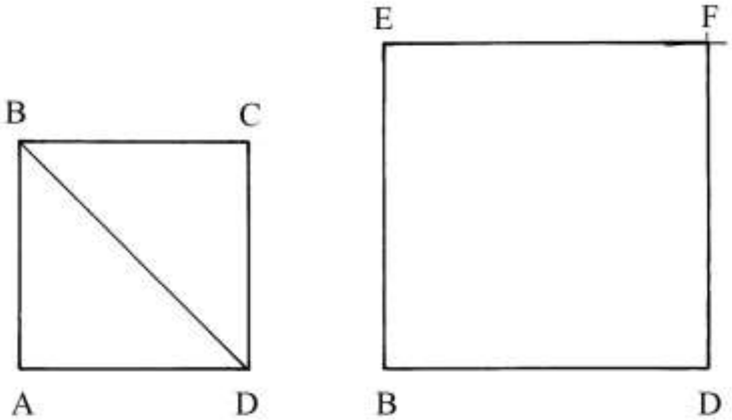
Fare centro in O e con raggio OA = OE disegnare una semicirconferenza da A fino a E: essa taglia in F il prolungamento di DC.

DF è il lato del quadrato DFGH che ha area uguale a quella di ABCD.

Chuquet non fa alcun cenno alla regola impiegata: il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio.

<u>Quadrato doppio di un altro</u>

ABCD è un quadrato: deve esserne disegnato un altro di area doppia.



L'area di ABCD è:

$S_{ABCD} = AD^2$.

BD è una delle due diagonali e la sua lunghezza è:

$BD = \sqrt{2} * AD$.

Con il compasso, misurare la lunghezza di BD e riportarla a destra: sul nuovo lato lungo BD costruire il quadrato BEFD.

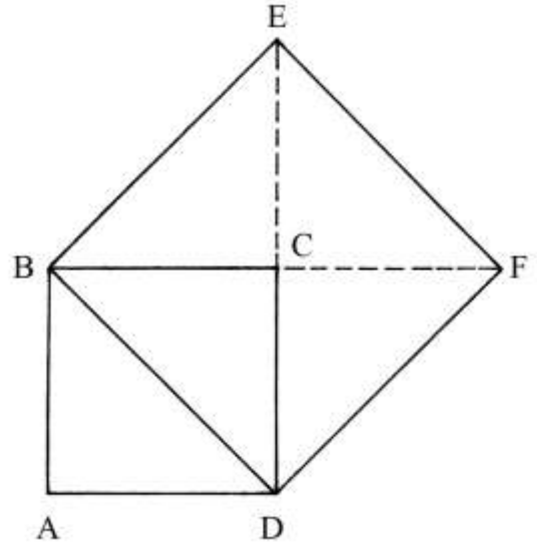
L'area di BEFD è:

$S_{BFED} = BD^2 = (\sqrt{2} * AD)^2 = 2 * AD^2 = 2 * S_{ABCD}$.

Il quadrato BEFD ha area doppia di quella di ABCD.

- APPROFONDIMENTO -

Una soluzione geometrica più semplice del problema del raddoppio di un quadrato è descritta di seguito.



ABCD è il solito quadrato originario e BD è una delle sue due diagonali.

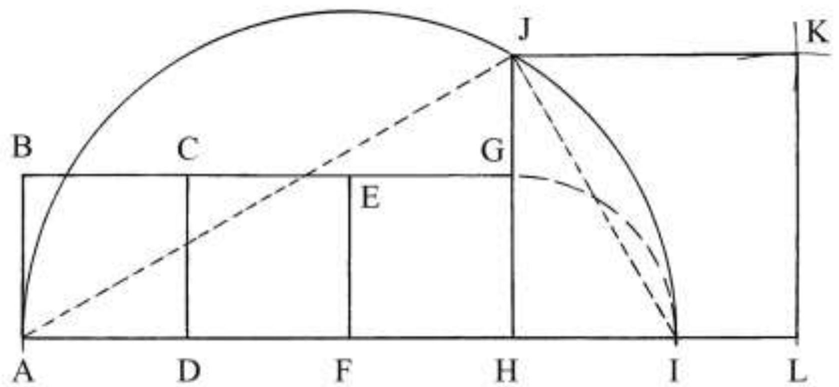
Su BD è direttamente costruito il quadrato BEFD.

L'area di BEFD è *doppia* di quella del quadrato ABCD.

- -

Quadrato di area tripla

Un quadrato deve avere area uguale al triplo di uno dato.



ABCD è un quadrato e deve esserne ricavato uno che abbia area uguale al triplo della sua.

Prolungare verso destra il lato AD. Costruire i quadrati DCEF e FEGH, con lati lunghi quanto AD.

Prolungare verso l'alto il lato HG.

Fare centro in H e con raggio HG [=AD] tracciare un arco da G a I: anche HI è lungo quanto AD.

Determinare il punto medio di AI: è F.

Fare centro in F e con raggio FA = FI [= 2 * AD] disegnare una semicirconferenza da A a I: essa incontra in J il prolungamento di HG.

HJ è un lato del quadrato HJKL che ha area uguale a *tre volte* quella di ABCD.

Chuquet non fornisce alcuna spiegazione sulla soluzione.

Vediamo di descrivere il metodo impiegato.

AJI è un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio. Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, l'altezza JH ha lunghezza che è media proporzionale fra quelle di AH e di HI:

$AH : JH = JH : HI$

$JH^2 = AH * HI.$

Ma AH = 3 * AD e HI = AD, per cui si ha:

$JH^2 = (3 * A) * (AD) = 3 * AD^2$ e

$JH = \sqrt{3} * AD.$

Il quadrato HJKL ha area tripla di quella di ABCD:

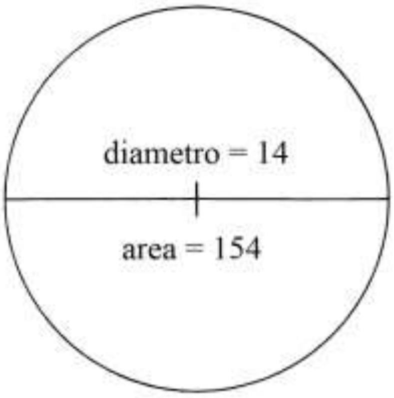
$S_{HJKL} = JH^2 = (\sqrt{3} * AD)^2 = 3 * AD^2 = 3 * S_{ABCD}.$

Quadratura di un cerchio

Chuquet propone una procedura per trasformare un cerchio in un rettangolo e poi questo ultimo in un quadrato, tutti di area uguale.

Ovviamente tutti i metodi impiegati per la conversione di un cerchio in un poligono di area uguale sono approssimati.

Chuquet fa l'esempio di cerchio che ha area uguale a 154, che ha diametro *approssimato*, ma di pochissimo, lungo 14:



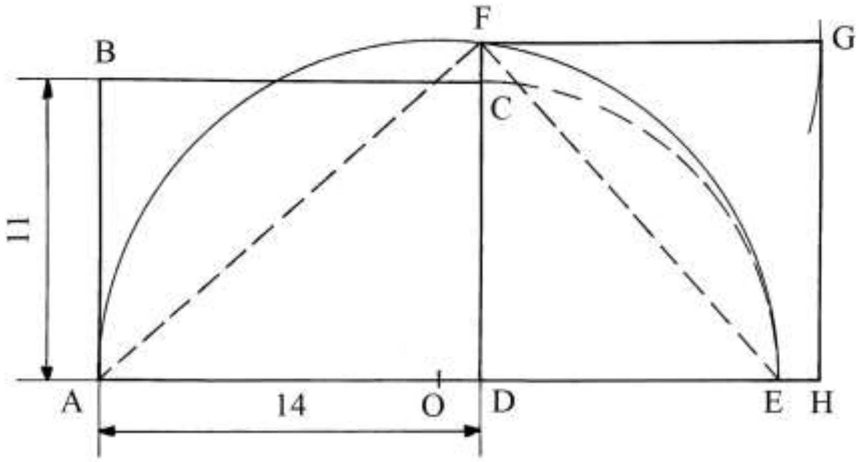
Questo particolare cerchio è un classico fra i problemi di geometria contenuti nei testi medievali e rinascimentali: il raggio *r*, il diametro *d*, la lunghezza della circonferenza *c* e l'area *S* sono tutti espressi da numeri interi:

* $r = 7$;
* $d = 14$;
* $c = 2 * \pi * r \approx 2 * 22/7 * 7 = 44$;
* $S_{CERCHIO} = 22/7 * r^2 = 22/7 * 7^2 = 154.$

L'area di questo cerchio, 154, + anche l'area di un rettangolo lungo 14 e largo 11:

$S_{\text{RETTANGOLO}} = 14 * 11 = 154$.

Il rettangolo è facilmente costruibile perché le lunghezze dei suoi lati sono espresse con numeri interi. Esso è facilmente quadrabile per via geometrica, come spiega lo schema che segue, assente nel trattato di Chuquet:



ABCD è il rettangolo da trasformare in un quadrato. Prolungare verso l'alto il lato DC e verso destra quello AD.

Fare centro in D e con raggio DC tracciare l'arco CE.

Il segmento AE è lungo:

AE = AD + DE = AD + DC = 14 + 11 = 25, che è il semiperimetro del rettangolo ABCD.

O è il punto medio di AE. Fare centro in O e con raggio OA = OE disegnare la semicirconferenza da A a E che taglia in F il prolungamento di DC.

DF è un'altezza del triangolo rettangolo AFE inscritto nel semicerchio di centro O.

Per il già citato 2° teorema di Euclide si ha:

AD : FD = FD : DE

14 : FD = FD : 11

$FD^2 = 14 * 11$

$FD^2 = 154$ e

$FD = \sqrt{154}$.

FD è un lato del quadrato DFGH che ha area uguale a 154.

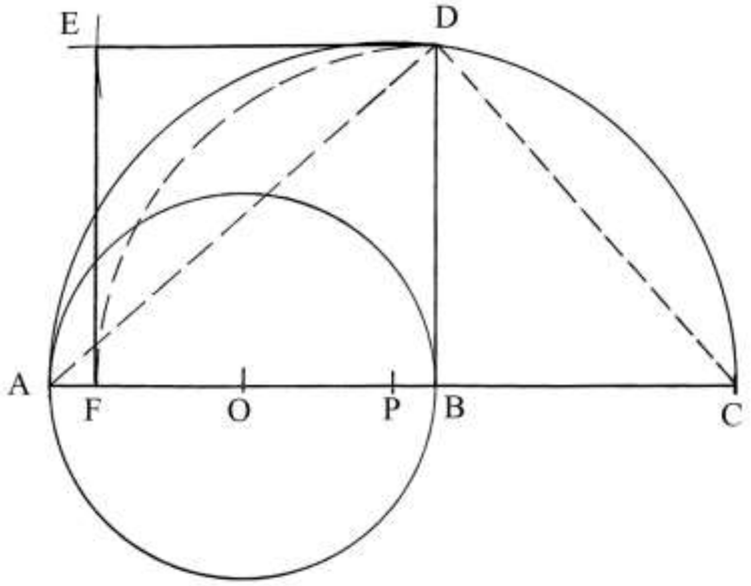
Questo quadrato ha *approssimativamente* area uguale a quella del cerchio di diametro 14 e area 154.

La radice di 154 è un numero irrazionale:

$\sqrt{154} = \sqrt{(2 * 77)} = \sqrt{(2 * 7 * 11)}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda soluzione è spiegata da Chuquet con l'ausilio di un grafico che qui è stato rielaborato.



AB è il diametro del cerchio di centro O ed è lungo 14. L'area del cerchio è 154.

Prolungare il diametro verso destra e da B riportare in C la lunghezza di 11: AC è lungo:

AC = AB + BC = 14 + 11 = 25.

Fissare il punto medio di AC: è P.

Fare centro in P e con raggio PA = PC disegnare una semicirconferenza da A a C: essa incontra la perpendicolare innalzata da B nel punto D.

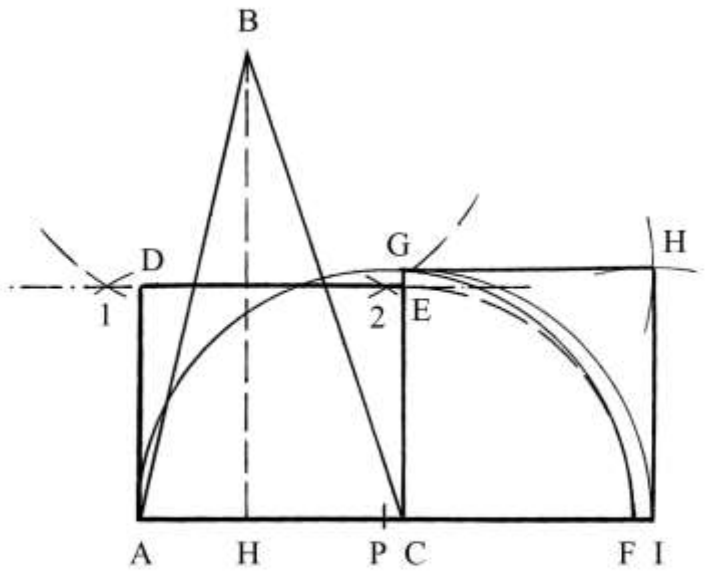
BD è il primo lato del quadrato DBFE che ha area uguale a 154, approssimativamente uguale a quella del cerchio di centro O.

ADC è un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio.

Anche questa soluzione applica implicitamente il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli.

Quadratura di un triangolo

ABC è un generico triangolo che deve essere trasformato in un quadrato di area uguale.



BH è un’altezza del triangolo.

Facendo centro in B e in H sono tracciati quattro archi che si intersecano nei punti 1 e 2: per questi punti passa l’asse di BH che lo divide a metà.

Da A e da C innalzare le perpendicolari a AC (e a 1-2), fino a determinare i punti D e E: il rettangolo ADEC ha area uguale a quella di ABC.

Prolungare verso l’alto il lato CE e verso destra il lato AC.

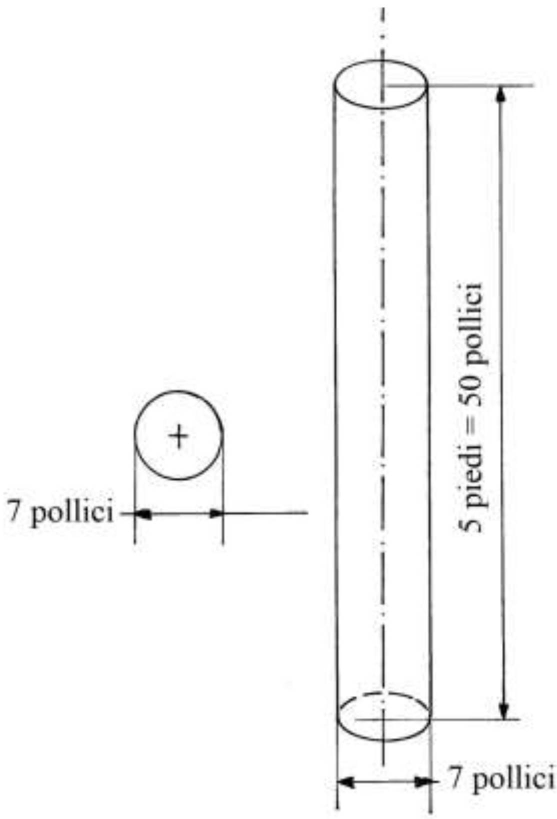
Fare centro in C e con raggio CE disegnare un arco da E fino a fissare il punto F.

Determinare il punto medio di AF: è P. Fare centro in P e con raggio PA = PF tracciare una semicirconferenza che taglia in G il prolungamento di CE: CG è il primo lato del quadrato CGHI che ha area uguale a quella di ADEC e di ABC.

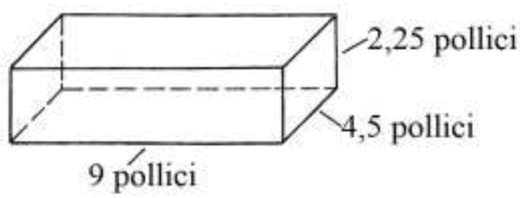
Palla di cannone

Una palla di cannone di diametro *d* uguale a 7 pollici ha praticato un foro in un muro di spessore uguale a 5 piedi.

La palla dovrebbe avere forma sferica.



Il problema chiede quante pietre lunghe 9 pollici, larghe 4,5 e spesse 2,25 pollici occorrono per riempire il foro (che ha forma cilindrica).



La pietra ha dimensioni in proporzione:

9 : 4,5 : 2,25 = 4 : 2 : 1.

Date queste dimensioni, non si trattava forse di un *laterizio* prodotto in serie da una fornace?

La base del foro ha area:

$S_{BASE} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 49 = 38{,}5$ pollici^2.

A questo punto del testo Chuquet un'equivalenza fra le unità di misura lineari:

1 piede = 10 pollici.

Il volume del foro è:

$V_{FORO} = S_{BASE} * 5$ [piedi] $= 38{,}5 * 50$ [pollici] $= 1925$ pollici^3.

Una singola pietra ha volume:

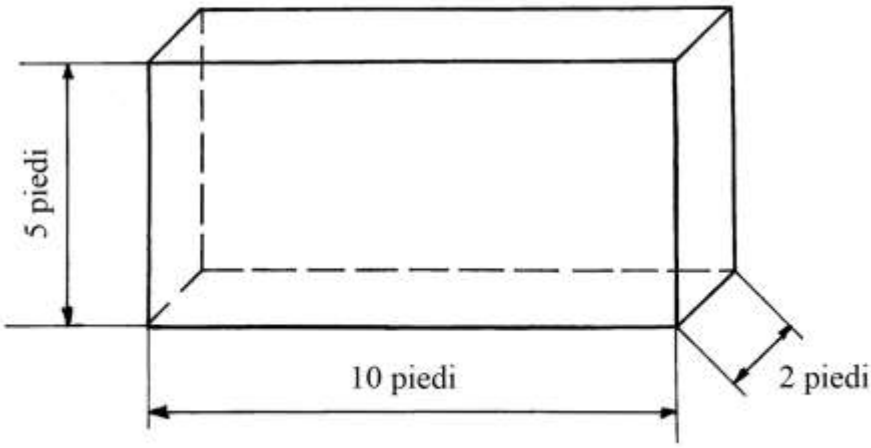
$V_{PIETRA} = 9 * 4{,}5 * 2{,}25 = 91{,}125$ [91 + 1/8] pollici^3.

Il numero N di pietre occorrenti è:

$N = V_{FORO}/V_{PIETRA} = 1925/91{,}125 = 21 + 91/729$.

Costruzione di un muro

Un muratore deve costruire un muro lungo 10 piedi, alto 5 e spesso 2.



Esso deve essere realizzato con le *pietre* che hanno le dimensioni di quelle citate nell'ultimo problema: 9 * 4,5 * 2,25 pollici.

Questo nuovo problema chiede il numero delle pietre occorrenti per costruire il muro.

Il volume del muro è:

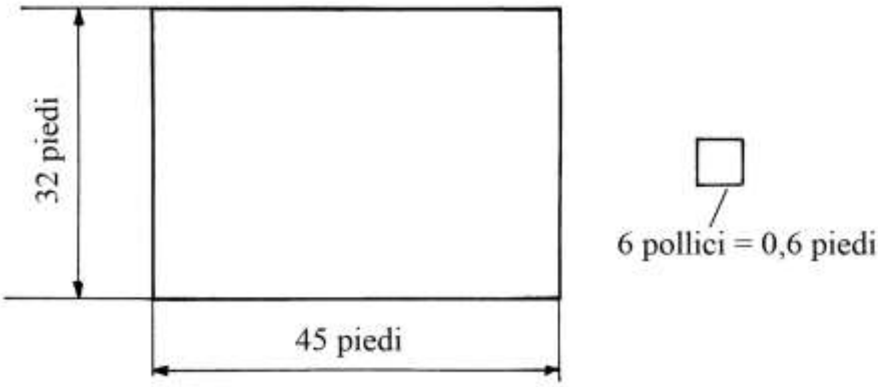
$V_{MURO} = 10 * 5 * 2$ [piedi] $= 100 * 50 * 20$ [pollici] $= 100\,000$ pollici^3.

Il numero N delle pietre occorrenti è:

$N = V_{MURO}/V_{PIETRA} = 100\,000/91{,}125 = (1097 + 287/729)$.

Pavimentazione di una sala

Una sala è lunga 45 piedi e lunga 32: deve essere ricoperta con mattonelle quadrate con lati lunghi 6 pollici (o 0,6 piedi).



È chiesto il numero delle mattonelle occorrenti.

L'area del pavimento è:

$S_{\text{PAVIMENTO}} = 45 * 32 = 1440$ piedi^2 = 144 000 pollici^2.

Una singola mattonella ha area:

$S_{\text{MATTONELLA}} = 6 * 6 = 36$ pollici^2.

Il numero N delle mattonelle occorrenti è:

$N = S_{\text{PAVIMENTO}}/S_{\text{MATTONELLA}} = 144\,000/36 = 4000$ mattonelle.

Costruzione di una torre

Deve essere costruita una torre lunga 4 braccia, larga 4 e alta 12 braccia.

Lo spessore dei muri è di 2 braccia.

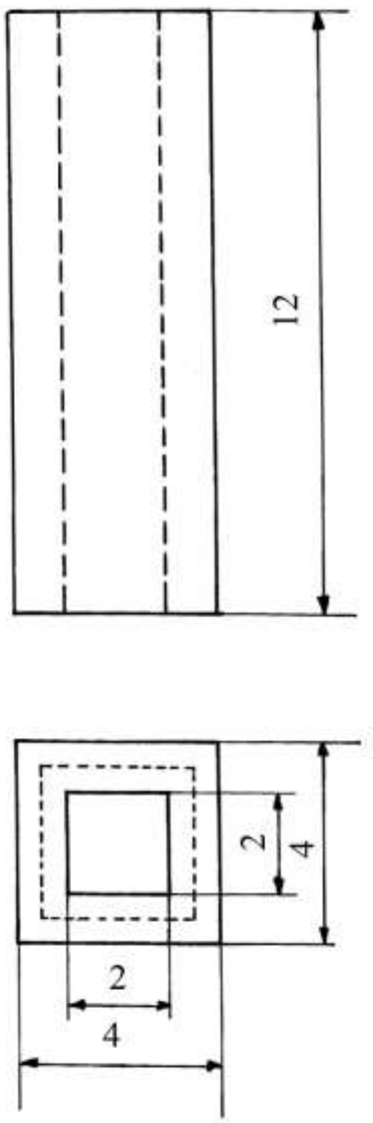
Secondo Chuquet, il braccio valeva 8 piedi:

1 braccio = 8 piedi.

Questa braccio francese non aveva nulla a che a fare con le diverse varianti del *braccio* da panno o da terra usate in Italia, assai più corte dell'unità francese.

Il problema chiede il numero di pietre occorrenti per costruire la torre: le pietre hanno forma cubica con spigoli lunghi *1 piede* e con volume di *1 piede*^{3}.

dimensioni espresse in *braccia*



La soluzione chiede il volume del muro e procede con il calcolo della lunghezza della cosiddetta *circonferenza* della base: essa è il perimetro del quadrato intermedio fra quello esterno e quello interno alla base della costruzione (nello schema è disegnato tratteggiato).

Il perimetro esterno è lungo:

$P_{ESTERNO} = 4 * 4 = 16$ braccia e quello interno è:

$P_{INTERNO} = 4 * 2 = 8$ braccia.

Il perimetro intermedio è lungo:

$P_{INTERMEDIO} = (P_{ESTERNO} + P_{INTERNO})/2 = (16 + 8)/2 = 24/2 = 12$ braccia.

Chuquet introduce un'informazione: egli chiama *tesa* il *braccio*.

Lo spessore del muro è:

spessore = (4 – 2)/2 = 1 braccio.

L'area della muratura alla base della torre è:

$S_{BASE} = P_{INTERMEDIO} *$ spessore $= 12 * 1 = 12$ braccia^2.

Occorre calcolare il volume della muratura:

$V_{MURATURA} = S_{BASE} *$ altezza $= 12 * 12 = 144$ braccia^3.

Dobbiamo convertire le braccia^3 in piedi^3:

144 braccia$^3 = 144 * 8^3 = 144 * 512 = 73728$ piedi^3.

Il numero N delle pietre occorrenti è:

$N = V_{MURATURA}/V_{PIETRA} = 73728/1 = 73728$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Chuquet offre una seconda soluzione del problema: calcola il volume dello spazio vuoto interno alla torre e lo sottrae da quello lordo:

$V_{INTERNO} = S_{VUOTO} * altezza = 2^2 * 12 = 4 * 12 = 48$ braccia^3.

$V_{LORDO} = 4^2 * altezza = 16 * 12 = 192$ braccia^3.

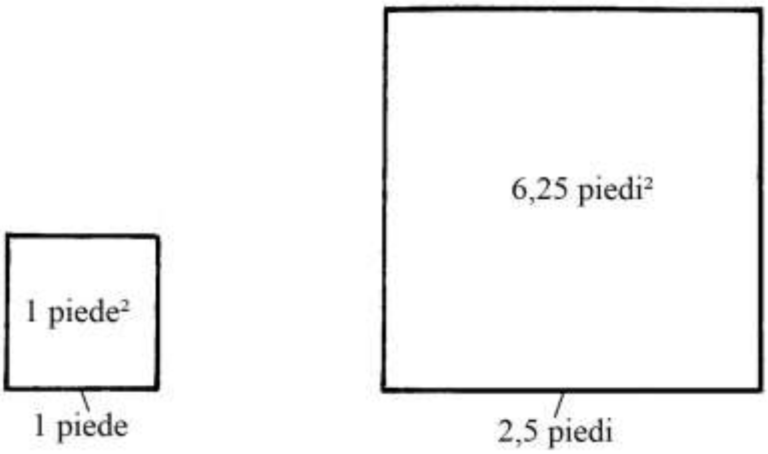
$V_{MURATURA} = V_{LORDO} – V_{INTERNO} = 192 – 48 = 144$ braccia^3.

Il risultato è uguale a quello già calcolato.

Due blocchi di legno

Un pezzo di legno con sezione di area uguale a 1 piede^2 e di una certa lunghezza *h* costa 7 soldi.

Un secondo blocco di legno di uguale lunghezza *h* è quadrato e ha lati lungi 2,5 piedi.



Il problema chiede il prezzo del secondo blocco.

Dato che hanno lunghezza uguale è sufficiente calcolare le aree delle due sezioni trasversali:

* $S_{PRIMO} = 1$ piede^2;
* $S_{SECONDO} = 2,5^2 = 6,25$ piedi^2.

Il costo del secondo blocco è dato dalla soluzione di una semplice proporzione:

$S_{PRIMO} : Costo_{PRIMO} = S_{SECONDO} : Costo_{SECONDO}$ da cui:

$Costo_{SECONDO} = (Costo_{PRIMO}) * (S_{SECONDO})/(S_{PRIMO}) = 7 * 6,25/1 = 43,75$ soldi [43 + ¾].

Altri due blocchi di legno

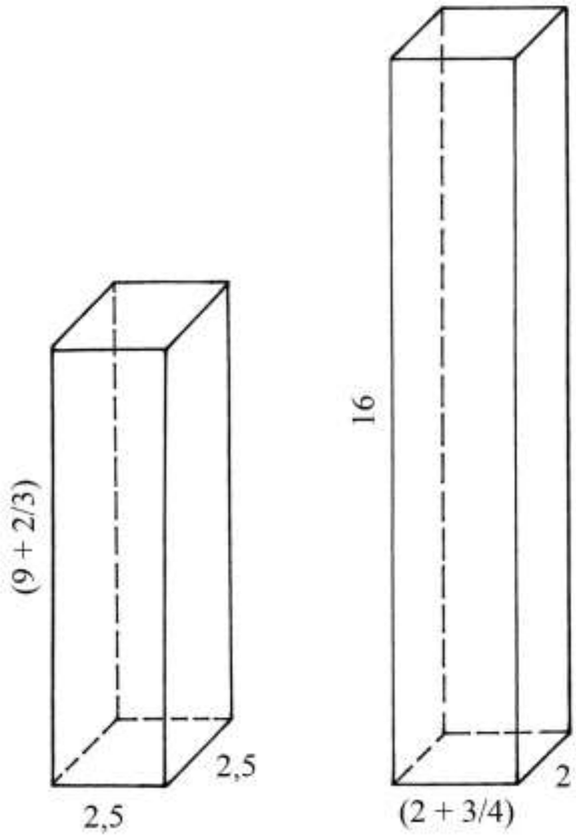
Un pezzo di legno ha forma di prisma quadrato: la base ha lati lunghi 2,5 piedi ed è alto (9 + 2/3) piedi. Il suo costo è di 8 soldi.

Un secondo blocco di legno ha base rettangolare con lati lunghi 2 e (2 + ¾) piedi ed è alto 16 piedi.

È chiesto il costo di questo secondo blocco.

Dato che le altezze sono differenti è necessario calcolare i volumi: i due costi sono proporzionali ai volumi dei due blocchi di legno.

dimensioni espresse in PIEDI



Il primo blocco ha base con area che è:

$S_{\text{PRIMO}} = 2{,}5^2 = 6{,}25$ piedi^2.

Il volume del primo blocco è:

$V_{\text{PRIMO}} = S_{\text{PRIMO}} * (9 + 2/3) = 6{,}25 * (9 + 2/3) = (60 + 5/12)$ piedi^3.

Il secondo blocco ha area di base che è:

$S_{\text{SECONDO}} = 2 * (2 + ¾) = 5{,}5$ piedi^2.

Il volume del secondo blocco è:

$V_{\text{SECONDO}} = S_{\text{SECONDO}} * 16 = 88$ piedi^3.

Il costo del secondo blocco è la soluzione di una proporzione:

$\text{Costo}_{\text{PRIMO}} : V_{\text{PRIMO}} = \text{Costo}_{\text{SECONDO}} : V_{\text{SECONDO}}$ da cui:

$\text{Costo}_{\text{SECONDO}} = (V_{\text{PRIMO}}) * (V_{\text{SECONDO}})/V_{\text{PRIMO}} = 8 * 88/(60 + 5/12) =$
$= 11$ soldi $+ 7$ denari $+ 601/725$ denari.

Chuquet converte i soldi in denari:

1 soldo = 12 denari.

LE UNITÀ DI MISURA

Le unità di misura usate da Chuquet sono in prevalenza lineari, superficiali e volumetriche. Diamo di seguito un riassunto di quelle impiegate nel Trattato.

Lineari

* 1 piede = 10 pollici;
* 1 passo = 6 piedi;
* 1 tesa (o braccio) = 8 piedi;
* 1 lega = 1000 passi.

Superficiali

* 1 piede^2 = 100 pollici^2;
* 1 tesa^2 = 64 piedi^2.

Volumetriche

* 1 piede^3 = 1000 pollici^3.

RAPPORTI ARITMETICI

Nella descrizione delle lunghezze coinvolte in alcuni problemi Chuquet usa alcuni termini relativi ai rapporti che erano di uso comune e risalivano in buona parte a Boezio (Severino Boezio, circa 475 – 524).

Chuquet utilizza i seguenti rapporti:

* doppia sesquialtera:	5 : 2;
* doppia superbiparziente terza:	8 : 3;
* sesquialtera:	3 : 2;
* sesquiterza:	4 : 3;
* subsesquialtera:	2 : 3;
* subsesquiterza:	3 : 4;
* tripla sesquiquarta:	4 : 13.

I rapporti sono fra due numeri interi, *m* e *n*: la loro divisione dà un quoziente *q* e un resto *r*:

$$m = q * n + r.$$

Il testo che segue è riprodotto dalle pagine 29-30 del volume di Catastini e Ghione, citato in bibliografia. I due Autori offrono una precisa natura dei rapporti aritmetici:

In Boezio questa stessa materia sarà banalizzata da una certosina suddivisione delle possibili relazioni tra i due numeri m e n. Partendo dalla dicotomia uguale-diverso ($m = n, m \neq n$) e dopo aver discusso "filosoficamente" il caso in cui $m = n$, Boezio comincia a dividere la "diversità" in due ulteriori grandi classi: quella *maioris* per la quale $m > n$, e quella *minoris* per la quale $m < n$. La maggiore si divide in cinque ulteriori specie alle quali ne corrispondono altre cinque minori, ottenute scambiando il ruolo di m con quello di n. Ogni specie ha un proprio nome e questo crea una completa tassonomia delle possibili coppie di numeri naturali. Prendiamo brevemente in esame tale classificazione per rendere esplicita la diversità concettuale tra questo approccio e quello euclideo, in cui tutto ciò è completamente assente. Nel caso maggiore Boezio comincia col dividere m con n trovando un quoziente q e un resto r:

$$m = qn + r \quad (0 \leq r < n)$$

– Se $r = 0$ la relazione tra m e n è detta molteplice (*multiplice*). Se $m = 2n$, $m = 3n$ ecc., si dice che m è il *doppio* di n, il *triplo* di n ecc. Questa è l'unica definizione rimasta ai nostri giorni.
– Se $r = 1$

a) se $q = 1$ allora la relazione tra m e n è detta superparticolare (*superparticulari*). Se $n = 2$ m è sesquialtero (*sesqualter*) di n, se $n = 3$, m è sesquiterzo (*sesquitertius*) di n ecc.
b) se $q > 1$ la relazione tra m e n è detta multipla superparticolare come in 21 che è quadrupla sesquiquinta di 5 perché $21 = 4 \times 5 + 1$.
– Se $r > 1$
a) se $q = 1$ la relazione tra m e n è detta superparziente (*superpartiens*). In questo caso m contiene una volta il numero più piccolo n e più parti di questo numero: se queste parti sono due, m è detto super*bi*parziente di n[3]; se sono tre m è detto super*tri*parziente.
b) Se $q > 1$ la relazione tra m e n è detta multipla superparziente.

Il termine sesquialtero, che caratterizza il rapporto di 3 a 2, è il solo sopravvissuto, soprattutto in relazione alla musica. Altre 5 specie si ottengono nel caso in cui m è minore di n e i loro nomi si ottengono dai precedenti aggiungendo il prefisso "sotto": sottomultiplo, sottosuperparticolare ecc. Così ad esempio 5 è sottomultiplosesquiquinto di 16 dal momento che $5 < 16$, quindi il rapporto è minore. Inoltre il corrispondente maggiore 16 a 5 è multiplo perché 16 contiene 3 volte 5 e sesquiquinto perché contiene anche una parte di 5.

Bibliografia

1. Ambrosetti Nadia, “L’eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell’Europa medievale”, LED, Milano, 2008, pp. 407.
2. Anonimo Fiorentino, “Trattato di geometria pratica. Dal Codice L.IV.18 (sec. XV) della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di Annalisa Simi, Università degli Studi di Siena, “Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale”, n. 21, 1993, pp. 195.
3. Calzolani Sergio, “Radicecubica.pdf”, 2019, pp. 66, www.geometriapratica.it .
4. Calzolani Sergio, “Trattato geometria pratica – Anonimo fiorentino.pdf”, 2023, pp. 290, www.geometriapratica.it .
5. Catastini Laura – Ghione Franco, “La matematica che trasformò il mondo”. Il *Liber abbaci* di Leonardo Pisano detto Fibonacci, Roma, Carocci editore, 2023, pp. 259.
6. Chuquet Nicolas, “Le Triparty en la science des nombres”, a cura di Aristide Marre, Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche [estratto dal *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, tomo XIII, settembre, ottobre, novembre, dicembre 1880, pubblicato dal principe Baldassare Boncompagni Ludovisi, 1821-1894], 1881, pp. 227.
7. Croci Giovanni, “Dizionario universale dei pesi e delle misure in uso presso gli Antichi e i Moderni”, Milano, 1860, pp. 126.
8. “Elementi di Euclide” (Gli), a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, UTET, 1970, pp. 1046.
9. Ferraro Alfredo, “Dizionario di metrologia generale”, Bologna, Zanichelli, 1959, pp. XVI-270.
10. Fontana Bollini Vittoria e Lepori Giovanna, “Un percorso di storia della matematica nella scuola media: la quadratura di figure piane”, in “Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula”, Bellinzona, Canton Ticino, 2019 (6), pp. 131-150.
11. L’Huillier Hervé, “Eléments nouveaux pour la biographie de Nicolas Chuquet”, in “Revue d’histoire des sciences”, tome 29, n° 4, 1976, pp. 347-350.
12. Chuquet Nicolas, “La Géométrie”, introduzione, testo e note (in francese) a cura di Hervé L’Huillier, Parigi, Vrin, 1979, pp. 491.
13. Ferraro Alfredo, “Dizionario di metrologia generale”, Bologna, Zanichelli, 1959, pp. XVI+270.
14. Martini Angelo, “Manuale di Metrologia: ossia Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente e Anticamente Presso Tutti i Popoli”, Torino, Loescher, 1883, pp. VIII+904.
15. Piccato Alfredo, “Dizionario dei termini matematici”, Milano, Rizzoli, 1987, pp. XI+536.

INDICE